บทที่ 6
ระบบจำนวนจริง

6.1.1 จำนวนจริง

เซตของจำนวนที่มนุษย์คิดขึ้นมาเพื่อใช้นับสิ่งของ เรียกว่า เซตของจำนวนนับ คือ $N = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , \ldots \}$ ถ้า a และ b เป็นจำนวนนับใด ๆ จะมีความสัมพันธ์ระหว่าง a และ b อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียวคือ $a = b$, $a < b$ หรือ $a > b$ เรียกความสัมพันธ์นี้ว่า สมบัติไตรวิภาค (trichotomy property) นอกจากนั้น $a + b$ จะเป็นจำนวนนับเสมอ เรากล่าวว่า เซตของจำนวนนับกับการบวก มีสมบัติปิดของการบวก หรือเขียนได้เป็น

ถ้า $a \in N$ และ $b \in N$ แล้ว $a + b \in N$

เมื่อมีจำนวนนับขึ้นใช้แล้ว มีสถานการณ์การใช้จำนวนนับ เช่น การเพิ่มขึ้น การลดลง การแบ่ง ทำให้เกิดความคิดในเรื่องการบวก การลบ การคูณ และการหาร จำนวนนับ และเกิดปัญหาว่าจำนวนนับที่มีอยู่ไม่เพียงพอที่จะอธิบายสถานการณ์บางอย่าง จึงต้องคิดจำนวนอื่นขึ้น เช่น ศูนย์ จำนวนเต็มลบ จำนวนเต็ม (Integer) จำนวนตรรกยะ (Rational Number) จำนวนอตรรกยะ (Irrational Number) และจำนวนจริง (Real Numbers)

เซตของจำนวนเต็มลบได้แก่

$\{ -1 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , \ldots \}$

ใช้สัญลักษณ์ I^- แทนเซตของจำนวนเต็มลบ นั่นคือ

$I^- = \{ -1 , -2 , -3 , -4 , -5 , -6 , \ldots \}$

สำหรับเซตของจำนวนนับ อาจเรียก อีกชื่อหนึ่งว่า เซตของจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

เซตของจำนวนเต็มบวกได้แก่

$\{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , \ldots \}$

ใช้สัญลักษณ์ I^+ แทนเซตของจำนวนเต็มบวก นั่นคือ

$I^+ = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , \ldots \}$

เรียกยูเนียนของเซตของจำนวนเต็มลบ I^- เซตของจำนวนศูนย์ $\{ 0 \}$ และเซตของจำนวนเต็มบวก I^+ ว่า เซตของจำนวนเต็ม ใช้สัญลักษณ์ I แทนเซตของจำนวนเต็ม นั่นคือ

I = { … , -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 , … } หรือ

I = { 0 , 1 , -1 , 2 , -2 , 3 , -3 , … }

สังเกตว่า จำนวนเต็มกับการบวก จำนวนเต็มกับการลบ และจำนวนเต็มกับการคูณมีสมบัติปิด แต่จำนวนเต็มกับการหารไม่มีสมบัติปิด กล่าวคือ

ถ้า $a \in I$ และ $b \in I$ แล้ว $a + b \in I$

ถ้า $a \in I$ และ $b \in I$ แล้ว $a - b \in I$

ถ้า $a \in I$ และ $b \in I$ แล้ว $a \times b \in I$

ที่กล่าวว่า จำนวนเต็มกับการหารไม่มีสมบัติปิด เนื่องจากมีจำนวนเต็ม a และ b บางจำนวนที่ $a \div b \notin I$ เช่น $2 \div 3 \notin I$

เนื่องจากเซตของจำนวนเต็มยังไม่เพียงพอที่จะอธิบายหรือหาคำตอบของปัญหาบางอย่างจึงต้องสร้างจำนวนตรรกยะขึ้น

จำนวนตรรกยะ คือ จำนวนที่สามารถเขียนได้ในรูปของ $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$

ตัวอย่างของจำนวนตรรกยะ เช่น $\frac{2}{3}$, $-\frac{3}{5}$, $\frac{9}{4}$, 7 , 0 , -5 , 0.78 , 0.6

จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ เช่น 8 เป็นจำนวนตรรกยะ เนื่องจาก 8 สามารถเขียนได้ในรูป $\frac{8}{1}$, $\frac{16}{2}$, $\frac{-24}{-3}$, … ซึ่งมีตัวเศษและตัวส่วนเป็นจำนวนเต็ม และตัวส่วนไม่เท่ากับศูนย์

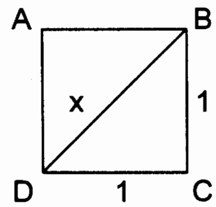
ทศนิยมรู้จบ (terminate decimal) เป็นจำนวนตรรกยะเนื่องจากสามารถเขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เช่น $0.6 = \frac{6}{10}$, $0.98 = \frac{98}{100}$, $0.453 = \frac{453}{1000}$

ทศนิยมซ้ำ (repeating decimal) เป็นจำนวนตรรกยะเนื่องจากสามารถเขียนได้ในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็ม และ $b \neq 0$ เช่น $0.7 = \frac{7}{9}$, $0.53 = \frac{53}{99}$, $0.483 = \frac{479}{990}$

เมื่อเราให้ Q แทน เซตของจำนวนตรรกยะ เราอาจเขียนแทนเซตของจำนวนตรรกยะได้ดังนี้

$$Q = \{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ เมื่อ } a , b \in I \text{ และ } b \neq 0 \}$$

สร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ABCD ให้ด้านแต่ละด้านยาว 1 หน่วย ลากเส้นทแยงมุม BD



ถ้าให้ BD = x หน่วย นักคณิตศาสตร์พบว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใด ๆ จะได้ว่ากำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉากซึ่งในกรณีนี้จะได้ว่า

$x^2 = 1^2 + 1^2$

หรือ $x^2 = 2$

และนักคณิตศาสตร์พบว่า ไม่สามารถหาจำนวนตรรกยะใด ๆ ที่ยกกำลังสองแล้วได้สอง นั่นคือ x ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ เราเขียนแทน x ซึ่ง $x^2 = 2$ ด้วย $\sqrt{2}$ และเรียกจำนวนเช่น $\sqrt{2}$ ว่าจำนวนอตรรกยะ จำนวนอตรรกยะไม่สามารถเขียนในรูป $\frac{a}{b}$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนเต็มและ $b \neq 0$

ตัวอย่างของจำนวนอตรรกยะ เช่น 0.101001000100001... , 1.4142135... , $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... ซึ่งจำนวนทศนิยมสองจำนวนแรก แสดงทศนิยมไม่ซ้ำ ส่วน $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,... เป็นจำนวนอตรรกยะที่สามารถแทนได้ด้วยจุดบนเส้นจำนวน หรือเราสามารถหาจุดที่แทน π บนเส้นจำนวนได้ โดยการหมุนวงกลมเส้นผ่านศูนย์กลาง 1 หน่วยให้หมุนจากจุดที่แทนศูนย์ไปทางขวา 1 รอบ และจุดปลายของการหมุนแทนด้วย π เนื่องจากความยาวของเส้นรอบวง เท่ากับ $2\pi r$ หรือเท่ากับ πD เมื่อ D เท่ากับ 1 หน่วย จึงได้ว่าความยาวของเส้นรอบวงเท่ากับ π หน่วย โดยที่ π มีค่าประมาณ 3.1416

เราสามารถบอกค่าจำนวนอตรรกยะ โดยใช้ทศนิยมไม่ซ้ำ และบอกค่าประมาณของจำนวนอตรรกยะเหล่านั้น เช่น

$\sqrt{2}$ = 1.4142135... มีค่าประมาณ 1.4142

$\sqrt{3}$ = 1.7320508... มีค่าประมาณ 1.7321

$\sqrt{5}$ = 2.2360679... มีค่าประมาณ 2.2361

.

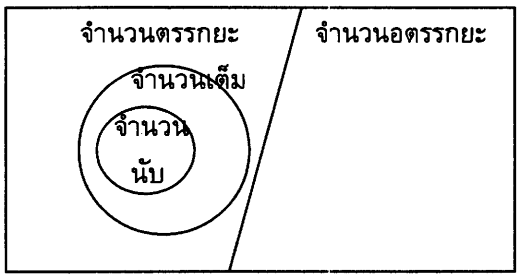
.

.

เซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะ ไม่มีสมาชิกร่วมกัน นั่นคือ อินเตอร์เซกชันของเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะเป็นเซตว่าง

เซตของจำนวนจริง คือ ยูเนียนของเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะ

เขียนแผนภาพแสดงเซตของจำนวนจริงได้ดังนี้



จำนวนจริง ซึ่งประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ยังไม่เพียงพอที่จะใช้แก้ปัญหาบางปัญหาได้

พิจารณาสมการต่อไปนี้

$x^2 + 1 = 0$ หรือ $x^2 = -1$

เราไม่สามารถหาจำนวนจริงใด ที่ยกกำลังสอง แล้วรวมกับ 1 แล้วได้ 0 หรือไม่สามารถหาจำนวนจริงที่ยกกำลังสองได้ -1 เราเรียกจำนวนชนิดใหม่นี้ว่า **จำนวนเชิงซ้อน** (complex number) และกำหนดจำนวนเชิงซ้อน z ในรูป $z = a + bi$ เมื่อ a , b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ หรือ $i^2 = -1$

เช่น เมื่อ a = 2 , b = 3 จะได้ z = 2 + 3i กรณีนี้ x เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง

เมื่อ a = 5 , b = 0 จะได้ z = 5 + 0i = 5 กรณีนี้ x เป็นจำนวนจริง

เมื่อ a = 0 , b = 4 จะได้ $z = 0 + 4i = 4i$ กรณีนี้ x เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง

แผนผังแสดงความสัมพันธ์ของจำนวนชนิดต่าง ๆ

- จำนวนเชิงซ้อน
  - จำนวนจริง
    - จำนวนอตรรกยะ
    - จำนวนตรรกยะ
      - จำนวนเต็ม
        - จำนวนเต็มลบ
        - ศูนย์
        - จำนวนเต็มบวก
      - จำนวนตรรกยะที่ไม่จำนวนเต็ม
  - จำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่จำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1 จงพิจารณาว่า จำนวนต่อไปนี้ จำนวนใดบ้างเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

$0 , 0.451451145111451111 45\ldots , -\frac{4}{7} , -4356 , 0.456 , 98 , \sqrt{3} , \sqrt{4} , \sqrt{8}$

ตอบ 98 และ $\sqrt{4}$ เป็นจำนวนนับ สำหรับ $\sqrt{4}$ เป็นจำนวนนับ เนื่องจาก $\sqrt{4} = 2$

$0 , -4356 , 98$ และ $\sqrt{4}$ เป็นจำนวนเต็ม

$0 , -\frac{4}{7} , -4356 , 0.456 , 98 , \sqrt{4}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

$0.45145114511145111145\ldots , \sqrt{3} , \sqrt{8}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

แบบฝึกหัด 6.1.1

1. จงพิจารณาจำนวนที่กำหนดให้ จำนวนใดบ้างเป็นจำนวนนับ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ หรือจำนวนอตรรกยะ

8 , -12 , 0.56 , 0.10110111011110... , $\sqrt{2}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{\frac{16}{9}}$, $\sqrt{2-(-7)}$, $\frac{3}{4}$, $\sqrt{(-2)^2}$,

$\frac{\sqrt{3}}{4}$, $(\sqrt{3})^2$, $\frac{\sqrt{81}}{\sqrt[3]{-27}}$, -4.8888888... , 0 , $\frac{38}{3}$

2. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

   1) 2.230230023000230000... เป็นจำนวนตรรกยะ

   2) -4.45454545... เป็นจำนวนอตรรกยะ

   3) 65.7777... เป็นจำนวนตรรกยะ

   4) $\sqrt{5}$ - 3 ไม่เป็นจำนวนจริง

   5) $\frac{54}{\sqrt{4}}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   6) มีจำนวนจริง x ที่ $\sqrt{x+2} = -2$

   7) $\sqrt{(a-b)^2} = a - b$ เมื่อ $a > b$

   8) มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่า -8

   9) มีจำนวนตรรกยะที่น้อยที่สุดที่มากกว่า -6

   10) $\sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{a}{b}$ สำหรับทุกค่าของ a และ b ซึ่ง $b \neq 0$

6.1.2 สมบัติของจำนวนจริงเกี่ยวกับการบวกและการคูณ

ระบบจำนวนจริงมีสมบัติพื้นฐานของการบวกและการคูณดังนี้

สมบัติปิด (Closure)

1. สมบัติปิดของการบวก

   ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   ผลบวกของ a และ b เขียนแทนด้วย a + b เป็นจำนวนจริง

2. สมบัติปิดของการคูณ

   ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   ผลคูณของ a และ b เขียนแทนด้วย $a \times b$ หรือ $a \cdot b$ หรือ ab เป็นจำนวนจริง

   เรากล่าวว่า เซตของจำนวนจริงมีสมบัติปิดของการบวกและการคูณ เนื่องจากว่า ผลบวกและผลคูณของจำนวนจริงยังคงเป็นจำนวนจริง

สมบัติการสลับที่ (Commutative Property)

3. สมบัติการสลับที่ของการบวก

   ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a + b = b + a$

4. สมบัติการสลับที่ของการคูณ

   ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ $a \cdot b = b \cdot a$

   นั่นคือเราสามารถบวกหรือคูณจำนวนจริงโดยสลับลำดับของจำนวนได้

สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (Associative Property)

5. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

   ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   $(a + b) + c = a + (b + c)$

6. สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการคูณ

   ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

   นั่นคือ การบวก และการคูณจำนวนเต็มตั้งแต่ 3 จำนวนขึ้นไป เราอาจหาผลลัพธ์จากกลุ่มใดก่อนก็ได้

เอกลักษณ์ (Identity)

7. เอกลักษณ์การบวก มีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว (unique) เขียนแทนด้วย 0

   ซึ่ง $a + 0 = 0 + a = a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a

   จำนวนจริง 0 นี้เรียกว่า (additive identity)

8. เอกลักษณ์การคูณ มีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียว เขียนแทนด้วย 1 ซึ่ง

   $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a

   จำนวนจริง 1 นี้เรียกว่า เอกลักษณ์การคูณ (multiplicative identity)

ตัวผกผัน (Inverse)

9. ตัวผกผันการบวก

สำหรับทุกจำนวนจริง a มีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย -a ซึ่ง

$a + (-a) = (-a) + a = 0$

จำนวน -a นี้ เรียกว่า ตัวผกผันการบวก (additive inverse) ของ a

10. ตัวผกผันการคูณ

สำหรับทุกจำนวนจริง a มีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น เขียนแทนด้วย $\frac{1}{a}$ ซึ่ง

$a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

จำนวน $\frac{1}{a}$ นี้ เรียกว่า ส่วนกลับ (reciprocal) หรือตัวผกผันการคูณของ a

สมบัติการแจกแจง (Distributive Property)

11. ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a(b + c) = ab + ac$

จากสมบัติข้อ 4) และข้อ 11) และ 3) สามารถแสดงได้ว่า

$(a + b)c = ac + bc$

ตัวอย่าง จงบอกสมบัติที่ใช้แสดงประโยคคณิตศาสตร์

1) $4 \times 11 = 11 \times 4$

2) $(14 + 17) + 43 = 14 + (17 + 43)$

3) $46 + (-46) = 0$

4) $8(12 + 30) = 8(12) + 8(30)$

ตอบ 1) สมบัติการสลับที่ของการคูณ

2) สมบัติการเปลี่ยนหมู่ของการบวก

3) ตัวผกผันการบวก

4) สมบัติการแจกแจง

แบบฝึกหัด 6.1.2

1. จงบอกสมบัติที่ใช้แสดงประโยคคณิตศาสตร์

   1) $(7 \times 4) \times 9 = 7 \times (4 \times 9)$

   2) $(12 + 5) \times 9 = 9 \times (12 + 5)$

   3) $(3x + 5y) + 7z = 3x + (5y + 7z)$

   4) $(x + y)(m + n) = (x + y)m + (x + y)n$

   5) $1 \cdot a = a$

   6) $6(-5)$ เป็นจำนวนจริง

   7) $(-6) \times \left(\frac{1}{-6}\right)$

   8) $(-8) + 0 = -8$

   9) $-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$

   10) $3x + 9x = (3 + 9)x$

2. จงหาผกผันการบวก และผกผันการคูณของจำนวนต่อไปนี้

จำนวน	ผกผันการบวก	ผกผันการคูณ
-8		
$\sqrt{6}$		
$\frac{3}{5}$		
$-\frac{2}{\sqrt{3}}$		
$1+\sqrt{2}$		
$\sqrt[3]{-8}$		
$\frac{6}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$		
$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$		

3. เซตที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้าง เติมตารางให้สมบูรณ์

เซต	สมบัติปิด ของการบวก	สมบัติปิด ของการลบ	สมบัติปิด ของการคูณ	สมบัติปิด ของการหาร
เซตของจำนวนนับ				
เซตของจำนวนเต็ม				
เซตของจำนวนคู่				
เซตของจำนวนคี่				
เซตของจำนวนเต็มที่หาร ด้วย 5 ลงตัว				
เซตของจำนวนตรรกยะ				
เซตของจำนวนอตรรกยะ				
เซตของจำนวนเต็มลบ				
{ -2 , 0 , 2 }				

4. ให้ a , b เป็นจำนวนจริง และ $a \oplus b = a + b - 1$
จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ
1) $a \oplus b = b \oplus a$
2) $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
3) ระบบจำนวนจริงมีสมบัติปิดของ $\oplus$
4) ระบบจำนวนจริงกับ $\oplus$ มี 1 เป็นเอกลักษณ์การบวก
5) ระบบจำนวนจริงกับ $\oplus$ มี 5 เป็นผกผันการบวกของ -4

6.1.3 การเท่ากัน (Equality)

เมื่อเขียน a = b อ่านว่า a เท่ากับ b หมายถึง a และ b แทนจำนวนเดียวกัน ยกตัวอย่าง 8 + 4 = 6 + 6 เป็นวิธีเขียน 12 ในแบบที่แตกต่างกัน

สมบัติการเท่ากัน

การเท่ากันสอดคล้องกับสมบัติพื้นฐาน 4 ข้อ

ให้ a , b และ c แทนจำนวนจริงใด ๆ

1. สมบัติสะท้อน (Reflexive Property)

   $a = a$

2. สมบัติสมมาตร (Symmetry Property)

   ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$

3. สมบัติถ่ายทอด (Transitive Property)

   ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

4. สมบัติการแทนที่ (Substitution Property)

   ถ้า $a = b$ แล้ว สามารถแทน a ด้วย b ในข้อความใด ๆที่เกี่ยวข้องกับ a และ b

ตัวอย่างที่ 1 จงบอกสมบัติที่ใช้แสดงความเกี่ยวข้องต่อไปนี้

1) ถ้า $3x + 7 = y$ แล้ว $y = 3x + 7$

2) ถ้า $x = y$ และ $y = 10 + a$ แล้ว $x = 10 + a$

3) ถ้า $a = b$ แล้ว $3(a - 8) = 3(b - 8)$

ตอบ 1) สมบัติสมมาตร

2) สมบัติถ่ายทอด

3) สมบัติการแทนที่

ทฤษฎีบทของการเท่ากัน

โดยใช้สมบัติของจำนวนจริงข้อ 1 ถึงข้อ 12 สมบัติของการเท่ากันข้อ 1 ถึงข้อ 4 จะสามารถพิสูจน์สมบัติอื่น ๆ ของจำนวนจริง ดังทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a = b$ แล้ว

1) $a + c = b + c$

2) $ac = bc$

ในที่นี้จะพิสูจน์ทฤษฎีบท 1 ข้อ 2) ส่วนข้อ 1) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 1 ข้อ 2)

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $a = b$

จะได้ ac เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิดของการคูณ)

และ ac = ac (สมบัติสะท้อน)

แต่ a = b (กำหนดให้)

ดังนั้น ac = bc (สมบัติการแทนที่ คือ แทน a ด้านขวาด้วย b)

ทฤษฎีบท 1 นี้ใช้บ่อยในการแก้สมการ โดยนำจำนวนใดจำนวนหนึ่งบวกหรือคูณทั้งสองข้างของสมการ

ทฤษฎีบท 2 ให้ a , b และ c เป็นจำนวนใด ๆ

1) ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

2) ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

ทฤษฎีบท 2 นี้เรียกกฎการตัดออก (cancellation laws)

ในที่นี้จะพิสูจน์ทฤษฎีบท 2 ข้อ 1) ส่วนข้อ 2) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 2 ข้อ 1)

ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ $a + c$ และ $b + c$ เป็นจำนวนจริง (สมบัติปิดของการบวก)

และ $-c$ เป็นจำนวนจริง (ตัวผกผันการบวกของ c)

เนื่องจาก $a + c = b + c$ (โจทย์กำหนด)

ดังนั้น $(a + c) + (-c) = (b + c)+(-c)$ (ทฤษฎีบท 1 ข้อ 1)

$a + [c + (-c)] = b +[c+ (-c)]$ (สมบัติการเปลี่ยนหมู่ ของการบวก)

$a + 0 = b + 0$ (ตัวผกผันการบวก)

$a = b$ (เอกลักษณ์การบวก)

นั่นคือ ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$

สำหรับทฤษฎีบท 1 และทฤษฎีบท 2 สามารถเขียนรวมกันได้เป็น

1) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b + c$

2) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$a = b$ ก็ต่อเมื่อ $ac = bc$

ทฤษฎีบท 3 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

2) ถ้า $a \cdot b = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ตัวอย่าง เช่น 1) $16 \times 0 = 0 \times 16 = 0$

2) $(x - 4)(x + 6) = 0$ ดังนั้น $(x - 4) = 0$ หรือ $(x + 6) = 0$

$x = 4$ หรือ $x = -6$

ทฤษฎีบท 4 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1) $-(-a) = a$

2) $(-a)b = -(ab) = a(-b)$

3) $(-1)a = -a$

4) $(-a)(-b) = ab$

5) $-(a + b) = (-a) + (-b)$

ข้อสังเกต -a ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนจริงลบ

เช่น ถ้า $a = -8$ แล้ว $-a = -(-8) = 8$ เป็นจำนวนจริงบวก

ขั้นต่อไปจะนิยามการดำเนินการของการลบในรูปการบวกและการหารในรูปการคูณ

การลบ

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ a ลบด้วย b เขียนแทนด้วย a - b ซึ่งกำหนดโดย $a - b = a + (-b)$

ตัวอย่าง เช่น $9 - 12 = 9 + (-12) = -3$

$5 - (-9) = 5 + 9 = 14$

$-8 - (-14) = -8 + 14$

$= 6$

การหาร

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ b $\neq$ 0 แล้ว ผลหารของ a และ b เขียนแทนด้วย a ÷ b ซึ่งกำหนดโดย a ÷ b = a × $\frac{1}{b}$ เราอาจเขียน $\frac{a}{b}$ แทน a ÷ b

สำหรับ $\frac{a}{b}$ จำนวน a เรียกตัวเศษ (numerator) จำนวน b เรียกว่าตัวส่วน (denumerator)

ทฤษฎีบท 5 ให้ a , b , c และ d เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่ง b $\neq$ 0 และ d $\neq$ 0

(1) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ก็ต่อเมื่อ ad = bc

(2) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

(3) $\frac{a}{b} = \dfrac{\frac{a}{d}}{\frac{b}{d}}$

(4) $\frac{a}{b}+\frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$

(5) $\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$

(6) $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

(7) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$ (กรณีนี้ b , d และ c $\neq$ 0)

แบบฝึกหัด 6.1.3

1. จงพิจารณาว่าในแต่ละข้อใช้สมบัติหรือบทนิยามใดในการแสดงประโยคคณิตศาสตร์

1) $\frac{6}{7} = 6\left(\frac{1}{7}\right)$

2) $(-6) \times 7 = -(6 \times 7)$

3) $(-1) \times 9 = -9$

4) $\frac{-3}{5} = -\frac{3}{5}$

5) ถ้า $(x + 3) = 0$ แล้ว $(x + 5)(x + 3) = 0$

6) ถ้า $5x = 12$ แล้ว $12 = 5x$

7) $m + n = 12$ และ $n = 7$ แล้ว $m + 7 = 12$

8) $5a = b$ และ $b = c + 8$ แล้ว $5a = c + 8$

9) ถ้า $3x + 4y + 5z = a + b$ และ $a = 4y + 7$ แล้ว $3x + 4y + 5z = 4y + 7 + b$

10) $mn \times 1 = mn$

2. จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าข้อต่อไปนี้ไม่จริง กล่าวคือหาจำนวนจริงแทนในข้อความ เพื่อทำให้ข้อความเป็นเท็จ

1) $x - y = y - x$

2) $\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$

3) $m(n + p) = mn + p$

3. จงใช้สมบัติของจำนวนจริงและสมบัติของการเท่ากันพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้

1) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$

2) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนใด ๆ

ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$

3) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนใด ๆ

ถ้า $a = b$ และ $c \neq 0$ แล้ว $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

4) ให้ a , b และ c เป็นจำนวนใด ๆ

จงแสดงว่า $(a - b)c = ac - bc$

6.2 นิพจน์พีชคณิตและพหุนาม (Algebraic Expressions and Polynomials)

นิพจน์พีชคณิตสร้างขึ้นจากค่าคงตัว และตัวแปร และการดำเนินการทางพีชคณิตของการบวก การลบ การคูณ หรือ การหาร หรือรวมทั้งการใช้กรณฑ์ ตัวอย่างเช่น

$\sqrt[3]{x^3+2x+1}$, $\dfrac{x+4}{x^2+2x+4}$, $(4x^{-5}+2x^{-3})^{\frac{2}{3}}$, $9x^2 + 18x + 9$

ทั้งหมดเป็นนิพจน์พีชคณิต นิพจน์พีชคณิตที่เกี่ยวข้องเฉพาะ การดำเนินการของการบวก การลบ และการคูณของตัวแปร และค่าคงตัวเช่น $9x^2 + 18x + 9$ เรียกว่า พหุนาม

พหุนามใน x พหุนามใน x เป็นนิพจน์พีชคณิตในรูป $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

เมื่อ a_0 , a_1 , ... , a_{n-1} , a_n เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ

เราอาจพิจารณาพหุนามที่มีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว พหุนามที่มีตัวแปรสองตัวแปร x และ y ในพจน์การบวกของรูป $ax^m y^n$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริง และ m ,n เป็นจำนวนเต็มที่ไม่เป็นลบ ตัวอย่างเช่น

$$4x^3 + \sqrt{2}x^2 y - xy + \frac{1}{2}xy^2 + y^3 - 2x + 3$$

เป็นพหุนามในสองตัวแปร พหุนามในสามตัวแปร หรือสี่ตัวแปร ก็นิยามในทำนองเดียวกัน

ดีกรีของพหุนาม

สำหรับพหุนามที่มีเพียงตัวแปรเดียว ดีกรีของพจน์ใดพจน์หนึ่งคือเลขชี้กำลังของตัวแปรของพจน์นั้น ถ้าแต่ละพจน์มีตัวแปรสองหรือสามตัว ดีกรีของพจน์ใดคือผลบวกของเลขชี้กำลังของทุกตัวแปรนั้น ดีกรีของพหุนาม คือดีกรีของพจน์ที่ไม่เป็นศูนย์ที่มีดีกรีสูงสุดในพหุนาม ค่าคงตัวใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์ถูกนิยามเป็นพหุนามของดีกรีศูนย์ จำนวน 0 เป็นพหุนาม แต่ไม่กำหนดดีกรีของ 0

ตัวอย่างของนิพจน์ที่เป็นพหุนามและไม่เป็นพหุนาม และดีกรีของพหุนาม

1) พหุนามในหนึ่งตัวแปร

$x^2 + 2x + 1$, $6x^3 - \sqrt{2}x + \frac{1}{3}$

2) พหุนามในหลายตัวแปร

$3x^2 + 6xy + 3y^2$, $6x^3y^2 - \sqrt{2}xy^2z^5$

3) ไม่ใช่พหุนาม

$\sqrt{2x} - 3x + 5$, $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}$, $\sqrt{x^2 - 4x + 3}$

4) พหุนาม $6x^3 - \sqrt{3}x - \frac{3}{4}$ มีดีกรีของพจน์แรกเป็น 3 ดีกรีของพจน์ที่สองเป็น 1 และดีกรีของพจน์ที่สามเป็น 0 ดังนั้นพหุนามมีดีกรีเป็น 3

การแยกตัวประกอบพหุนาม

ในเรื่องของระบบจำนวน จำนวนนับที่มากกว่า 1 ที่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ จะสามารถเขียนในรูปการคูณของจำนวนเฉพาะที่เรียงจากน้อยไปมากได้เพียงแบบเดียว

ตัวอย่าง เช่น $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

$5040 = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$

เราสามารถเขียนพหุนามในรูปการคูณของพหุนามที่มีดีกรีต่ำกว่า เช่น

$x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$

$3x^3 - 6x = 3x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

$2x^4 - 15x^2 - 27 = (x^2 - 9)(2x^2 + 3)$

$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = (x + \frac{5}{2})^2$

พหุนามเฉพาะ (prime polynomial)

พหุนามใด ๆ จะเรียกว่าพหุนามเฉพาะสัมพัทธ์กับเซตของจำนวนที่กำหนดให้ถ้า

(1) พหุนามนั้นมีสัมประสิทธิ์จากเซตของจำนวนที่กำหนดให้ และ

(2) พหุนามนั้นไม่สามารถเขียนในรูปผลคูณของสองพหุนามที่มีดีกรีบวกที่มีสัมประสิทธิ์จากจำนวนที่กำหนดให้

ยกตัวอย่าง $x^2 - 2$ เป็นพหุนามเฉพาะสัมพัทธ์กับจำนวนจริง แต่ไม่เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์กับจำนวนเต็ม เนื่องจาก $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$

การแยกตัวประกอบพหุนามคือการเขียนพหุนามในรูปผลคูณของพหุนามเฉพาะสัมพัทธ์กับเซตของจำนวนที่กำหนดให้

สำหรับในที่นี้ถ้าไม่กล่าวถึงสัมพัทธ์กับเซตของจำนวนที่กำหนดให้ จะหมายถึงเซตของจำนวนที่กำหนดให้คือเซตของจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $2a^3b - 8a^2b^2 + 6ab^3$

(2) $(6a^2 - 4a) - (21a - 14)$

วิธีทำ (1) $2a^3b - 8a^2b^2 + 6ab^3 = 2ab(a^2 - 4ab + 3b^2)$

$= 2ab\,(a - 3b)(a - 1b)$

(2) $(6a^2 - 4a) - (21a - 14) = 2a(3a - 2) - 7(3a - 2)$

$= (2a - 7)(3a - 2)$

ตัวอย่างที่ 2 จงแยกตัวประกอบ โดยการจัดกลุ่ม

(1) $4x^2 - 8x + 5x - 10$

(2) $3y^2 - 3y - 2y + 2$

(3) $3x^2 + 4xy - 5xy - 10y^2$

(4) $7xy - 7xz - xy + xz$

วิธีทำ (1) $4x^2 - 8x + 5x - 10 = 4x(x - 2) + 5(x - 2)$

$= (4x + 5)(x - 2)$

(2) $3y^2 - 3y - 2y + 2 = 3y(y - 1) - 2(y - 1)$

$= (3y - 2)(y - 1)$

(3) $3x^2 + 6xy - 5xy - 10y^2 = 3x(x + 2y) - 5y(x + 2y)$

$= (3x - 5y)(x + 2y)$

(4) $7xy - 7xz - xy + xz = 7x(y - z) -x(y - z)$

$= (7x - x)(y - z)$

$= 6x(y - z)$

สูตรการแยกตัวประกอบ		
1. $x^2 + (a + b)x + ab$	$= (x + a)(x + b)$	
2. $acx^2 + (ad + bc)x + bd$	$= (ax + b)(cx + d)$	
3. $a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2$	$= (ax + by)^2$	(กำลังสองสมบูรณ์)
4. $x^2 - y^2$	$= (x - y)(x + y)$	(ผลต่างของกำลังสอง)
5. $x^3 - y^3$	$= (x - y)(x^2 + xy + y^2)$	(ผลต่างของกำลังสาม)
6. $x^3 + y^3$	$= (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	(ผลบวกของกำลังสาม)

ตัวอย่างที่ 3 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $x^2 - 6x - 7$ (2) $6x^2 - x - 12$

(3) $x^2 + 8xy + 16$ (4) $25x^2 - 16y^2$

(5) $27m^3 - 1$ (6) $m^3 - n^3p^3$

วิธีทำ (1) $x^2 - 6x - 7 = (x - 7)(x + 1)$

(2) $6x^2 - x - 12 = (3x + 4)(2x - 3)$

(3) $x^2 + 8xy + 16 = (x + 4)(x + 4)$

(4) $25x^2 - 16y^2 = (5x)^2 - (4y)^2$

$= (5x - 4y)(5x + 4y)$

(5) $27m^3 - 1 = (3m)^3 - (1)^3$

$= (3x - 1)(9x^2 + 3m + 1)$

(6) $m^3 - n^3p^3 = (m - np)(m^2 + mnp + n^2p^2)$

ตัวอย่างที่ 4 จงแยกตัวประกอบของ

(1) $36m^3 - 16m$ (2) $x^2 - 6x + 9 - 4y^2$ (3) $4m^3n - 2m^2n^2 - 2mn^3$

(4) $4n^4 - 32n$ (5) $4x^4 - 10x^2 - 24$ (6) $x^5 - 2x^3 + x$

(7) $x^4 + x^2 + 1$

วิธีทำ (1) $36m^3 - 16m = 4m(9m^2 - 4)$

$= 4m(3m - 2)(3m + 2)$

(2) $x^2 - 6x + 9 - 4y^2 = (x^2 - 6x + 9) - 4y^2$

$= (x - 3)^2 - (2y)^2$

$= [(x - 3) - 2y][(x - 3) + 2y]$

$= (x - 3 - 2y)(x - 3 + 2y)$

(3) $4m^3n - 2m^2n^2 - 2mn^3 = 2mn(2m^2 - mn - n^2)$

$= 2mn(2m + n)(m - n)$

(4) $4n^4 - 32n = 4n(n^3 - 2^3)$

$= 4n(n - 2)(n^2 + 2n + 4)$

(5) $4x^4 - 10x^2 - 24 = 2[2x^4 - 5x^2 - 12]$

$= 2(2x + 3)(x - 4)$

(6) $x^5 - 2x^3 + x = x(x^4 - 2x^2 + 1)$

$= x(x^2 - 1)(x^2 - 1)$

$= x(x - 1)^2 (x + 1)^2$

(7) $x^4 + x^2 + 1 = (x^4 + 2x^2 + 1) - x^2$

$= (x^2 + 1)^2 - (x)^2$

$= [(x^2 + 1) - x][(x^2 + 1) + x]$

$= (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1) $4a^3b - 8a^2b^2 + 4ab$	2) $4a^2 + 12a + 10a + 30$
3) $27a^3 - 8$	4) $4a^2 - 25b^2$
5) $3a^3b^3 - 48ab$	6) $27a^3 - 8$
7) $64a^3 + 1$	8) $x^4 + x^2 + 25$

2. จงแยกตัวประกอบพหุนามต่อไปนี้

1) $12x^4 - 16x^3 - 4x^2$	2) $8a^3b - 6a^2b^2 + 4ab^3$
3) $6a^2 + 10a - 3a - 5$	4) $10x^2 - 80x - 2x + 16$
5) $3a^3 - 6a^2 + 15a$	6) $a^3 - b^3$
7) $a^3 + 27$	8) $2ab - 3ac + 2db - 3dc$
9) $a^2 + 2ab + b^2 - a - b$	10) $x^2 - 2xy + y^2 - x + y$

6.3 อสมการเชิงเส้น (Linear Inequalities)

ความสัมพันธ์การไม่เท่ากัน

บทนิยามของ $a < b$ และ $b > a$

สำหรับ a หรือ b เป็นจำนวนจริง เรากล่าวว่า a น้อยกว่า b หรือ b มากกว่า a และเขียน $a < b$ หรือ $b > a$

ถ้ามีจำนวนจริงบวก p ซึ่ง $a + p = b$ (หรือ สมมูลกับ $b - a = p$) เราทราบว่า สำหรับจำนวนจริงบวกใด ๆ เมื่อนำไปบวกกับจำนวนจริงใด ๆ ผลบวกย่อมมากกว่าจำนวนจริงนั้น นั่นคือ

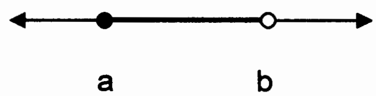
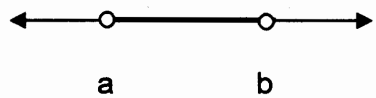
เมื่อเราเขียน $a \le b$ เราหมายถึง a น้อยกว่าหรือเท่ากับ b

เมื่อเราเขียน $a \ge b$ เราหมายถึงว่า a มากกว่าหรือเท่ากับ b

สัญลักษณ์ อสมการ < และ > มีความชัดเจนในการตีความทางเรขาคณิต บนเส้นจำนวน ถ้า $a < b$ แล้ว a จะอยู่ทางซ้ายของ b ถ้า $c > d$ แล้ว c อยู่ทางขวาของ d

สำหรับจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ a และ b , $a < b$, $a > b$ หรือ $a = b$ สมบัตินี้เรียกว่าสมบัติไตรวิภาค trichotomy property

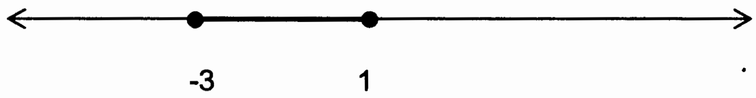
อสมการสองชั้น (double inequality) $a < x \leq b$ หมายถึง $a < x$ และ $x \leq b$ นั่นคือ x อยู่ระหว่าง a และ b รวมทั้ง b แต่ไม่รวม a ต่อไป เป็นช่วง และกราฟ แสดงอสมการแบบต่าง ๆ

อสมการ	ช่วง	กราฟ
[a , b]	$a \leq x \leq b$	
[a , b)	$a \leq x < b$	
(a , b]	$a < x \leq b$	
(a , b)	$a < x < b$	
[a , ∞)	$x \geq a$	
(a , ∞)	$x > a$	
(-∞ , a]	$x \leq a$	
(-∞ , a)	$x < a$	

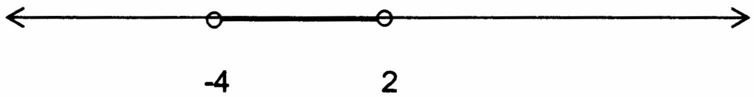
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนแต่ละข้อ ในรูปอสมการ และเขียนกราฟ

(1) [-3 , 1] (2) (-4 , 2) (3) [-1 , ∞) (4) (-∞ ,2)

ตอบ (1) $-3 \leq x \leq 1$



(2) $-4 < x < 2$



(3) $x \geq -1$

(4) $x < -2$

เซตคำตอบของอสมการ

เซตคำตอบของอสมการ คือ เซตของสมาชิกทุกตัวที่แทนค่า ในอสมการแล้วทำให้อสมการเป็นจริง

การแก้อสมการคือการหาเซตคำตอบของอสมการ

อสมการสองอสมการ สมมูลกัน ก็ต่อเมื่ออสมการทั้งสองนั้น มีคำตอบเหมือนกัน

สมบัติของอสมการต่อไปนี้ จะทำให้ได้อสมการที่สมมูลกัน

สมบัติของอสมการ

สำหรับ a , b และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

1. ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$ (สมบัติการบวก)
2. ถ้า $a < b$ แล้ว $a - c < b - c$ (สมบัติการลบ)
3. ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนบวก แล้ว $a \times c < b \times c$ (สมบัติการคูณด้วยจำนวนบวก)
4. ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนลบ แล้ว $a \times c > b \times c$ (สมบัติการคูณด้วยจำนวนลบ)

5. ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนบวก แล้ว $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

(สมบัติการหารด้วยจำนวนบวก)

6. ถ้า $a < b$ และ c เป็นจำนวนลบ แล้ว $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

(สมบัติการหารด้วยจำนวนลบ)

ทำนองเดียวกัน สมบัติของอสมการยังคงเป็นจริง ถ้าแต่ละเครื่องหมายอสมการเปลี่ยนไป เช่นแทนเครื่องหมาย $<$ ด้วย $\leq$ และ แทน $>$ ด้วย $\geq$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้อสมการ และเขียนกราฟ $3(2x + 4) - 12 < 5(x - 3)$

วิธีทำ $3(2x + 4) - 12 < 5(x - 3)$

$6x + 12 - 12$	$< 5x - 15$	(สมบัติการแจกแจง)
$6x$	$< 5x - 15$	(สมบัติการลบ)
$6x - 5x$	< -15	(สมบัติการลบ)
x	< -15	(สมบัติการลบ)

คำตอบของอสมการคือ $(-\infty, -15)$

กราฟแสดงคำตอบคือ

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้อสมการ และเขียนกราฟ

$$\frac{2x-3}{5} + 6 \geq 4 + \frac{3x}{4}$$

วิธีทำ $\frac{2x-3}{5} + 6 \geq 4 + \frac{3x}{4}$

$4(2x - 3) + 120$	$\geq 80 + 15x$	(นำ 20 คูณแต่ละพจน์)
$8x - 12 + 120$	$\geq 80 + 15x$	
$8x + 108$	$\geq 80 + 15x$	
$8x - 15x$	$\geq 80 - 108$	
$-7x$	≥ -28	

$$x \qquad \leq 4$$ (หารด้วย -7 เปลี่ยนเครื่องหมายจาก $\geq$ เป็น $\leq$)

คำตอบของอสมการคือ $(-\infty\ , 4)$

กราฟแสดงคำตอบคือ

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้อสมการ และเขียนกราฟ

$$-4 \leq 5 - 8x < 21$$

วิธีทำ

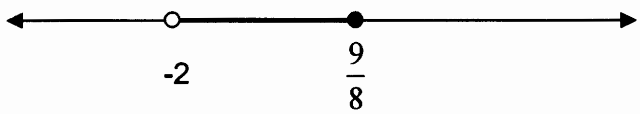
$$\begin{array}{lll}
-4 & \leq 5 - 8x & < 21 \\
-4 - 5 & \leq -8x & < 21 - 5 \\
-9 & \leq -8x & < 16 \\
\frac{9}{8} & \geq x & > -2
\end{array}$$

(นำ -8 หารเปลี่ยนเครื่องหมาย $\leq$ เป็น $\geq$ และ $<$ เป็น $>$)

หรือ $-2 < x \leq \frac{9}{8}$

คำตอบของอสมการคือ $(-2\ , \frac{9}{8}]$

กราฟแสดงคำตอบคือ



แบบฝึกหัด 6.3

จงแก้อสมการและเขียนกราฟ

1. $4(x - 1) \geq 5(x + 3) - 2$
2. $\frac{5x-3}{4} + 3 \geq 1 + \frac{4x}{5}$
3. $-4 < 8 - 5x \leq 6$
4. $-12 < \frac{3}{4}(2 - x) \leq 36$

5. $24 \leq \frac{2}{3}(x - 6) < 48$

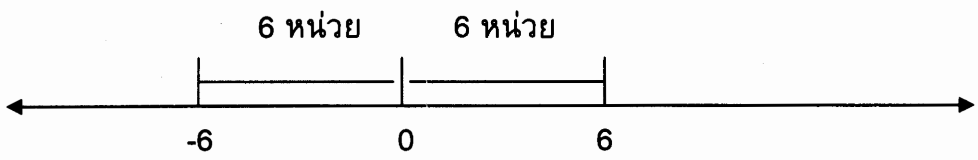
6. $\frac{2}{3}(x + 6) - \frac{x}{4} > \frac{1}{2}(4 - x) + \frac{x}{6}$

7. $15 \leq 8 - \frac{2}{3}x \leq 24$

6.4 ค่าสัมบูรณ์ในสมการ และอสมการ

ถ้าเราสนใจระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้นคือจุดที่แทน 0 และจุดที่แทน 6 บนเส้นจำนวน หรือระยะทางระหว่างจุดเริ่มต้น และจุดที่แทน -6 บนเส้นจำนวน ระยะทางต่างก็เท่ากับ 6 หน่วย นั่นคือระยะทางไม่ขึ้นกับทิศทาง และมีค่าไม่เป็นลบ

เมื่อเราสนใจระยะทางระหว่างจุดที่แทน 0 และจุดที่แทน a และไม่สนใจทิศทาง และเครื่องหมาย เราเรียกจำนวนดังกล่าวว่า ค่าสัมบูรณ์ของ a จากที่กล่าวนี้ เป็นความหมายทางเรขาคณิต



ต่อไปนี้จะให้ความหมายค่าสัมบูรณ์ของ a ในระบบจำนวนจริง

บทนิยามของค่าสัมบูรณ์

ค่าสัมบูรณ์ของ a เขียนแทนด้วย | a | โดยที่

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geq 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

ตัวอย่างที่ 1 (1) | 6 | = 6

(2) $|\pi - 2| = \pi - 2$ เนื่องจาก $\pi - 2$ ไม่เป็นลบ

(3) $|-8| = -(-8) = 8$

(4) $|2 - \pi| = -(2 - \pi) = \pi - 2$ เนื่องจาก $2 - \pi$ เป็นจำนวนลบ

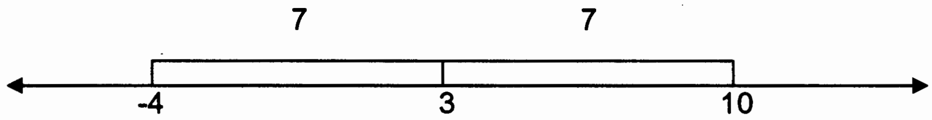
ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ความหมายทางเรขาคณิต แก้อสมการ และเขียนกราฟ

(1) $|x - 3| = 7$ (2) $|x - 3| < 7$

(3) $0 < |x - 3| < 7$ (4) $|x - 3| > 7$

วิธีทำ (1) ในทางเรขาคณิต $|x - 3|$ แทนระยะทางระหว่าง x และ 3 ดังนั้น

$|x - 3| = 7$



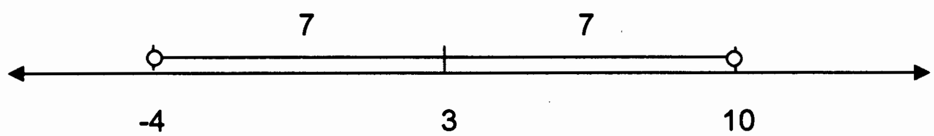
ดังนั้น สำหรับ $|x - 3| = 7$, x เป็นจำนวนซึ่งอยู่ห่างจาก 3 เป็นระยะ 7 หน่วย

นั่นคือ $x - 3 = 7$ หรือ $x - 3 = -7$

$x = 7 + 3$ หรือ $x = -7 + 3$

$x = 10$ หรือ $x = -4$

(2) ในทางเรขาคณิต $|x - 3| < 7$, x เป็นจำนวนซึ่งมีระยะห่างจาก 3 น้อยกว่า 7

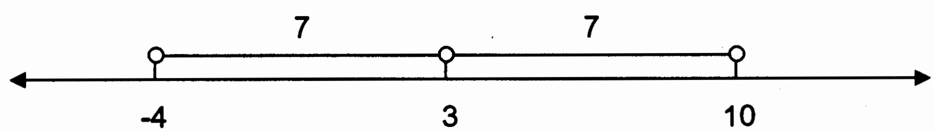


นั่นคือ $-7 < x - 3 < 7$

$-7 + 3 < x < 7 + 3$

$-4 < x < 10$

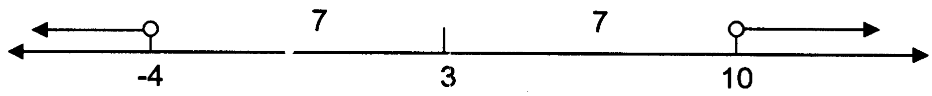
(3) ในทางเรขาคณิต $0 < |x - 3| < 7$, x เป็นจำนวนซึ่งมีระยะห่างจาก 3 น้อยกว่า 7 แต่ $x \neq 3$



นั่นคือ $-7 < x - 3 < 7$ และ $x \neq 3$

$-4 < x < 10$ และ $x \neq 3$

(4) ในทางเรขาคณิต $|x - 3| > 7$, x เป็นจำนวนซึ่งมีระยะห่างจาก 3 มากกว่า 7 นั่นคือ



นั่นคือ $x - 3 < -7$ หรือ $x - 3 > 7$

$x < -7 + 3$ หรือ $x > 7 + 3$

$x < -4$ หรือ $x > 10$

สรุปผล ความหมายทางเรขาคณิตของสมการและอสมการ ของค่าสัมบูรณ์แบบต่าง ๆ

รูปแบบ ($d > 0$)	การตีความทางเรขาคณิต	กราฟ
$\lvert x - c \rvert = d$	ระยะทางระหว่าง x และ c เท่ากับ d	 c - d c + d
$\lvert x - c \rvert < d$	ระยะทางระหว่าง x และ c น้อยกว่า d	 c - d c + d
$0 < \lvert x - c \rvert < d$	ระยะทางระหว่าง x และ c น้อยกว่า d และ $x \neq c$	 c - d 0 c + d
$\lvert x - c \rvert > d$	ระยะทางระหว่าง x และ c มากกว่า d	

ทฤษฎีบท 6 สำหรับ $p > 0$

1. $\lvert x \rvert = p$ สมมูลกับ $x = p$ หรือ $x = -p$
2. $\lvert x \rvert < p$ สมมูลกับ $-p < x < p$
3. $\lvert x \rvert > p$ สมมูลกับ $x < -p$ หรือ $x > p$

ถ้าเราแทน x ในทฤษฎีบท 6 ด้วย $ax + b$ เราจะได้ทฤษฎีบท 7

ทฤษฎีบท 7 สำหรับ $p > 0$

1. $\lvert ax + b \rvert = p$ สมมูลกับ $ax + b = p$ หรือ $ax + b = -p$
2. $\lvert ax + b \rvert < p$ สมมูลกับ $-p < ax + b < p$
3. $\lvert ax + b \rvert > p$ สมมูลกับ $ax + b < -p$ หรือ $ax + b > p$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $|4x + 5| = 13$

(2) $|3x - 4| < 11$

(3) $|9 - 4x| \leq 3$

วิธีทำ (1) $|4x + 5| = 13$

จะได้ว่า $4x + 5 = 13$ หรือ $4x + 5 = -13$

$4x = 13 - 5$ หรือ $4x = -13 - 5$

$x = 2$ หรือ $x = -\frac{9}{2}$

(2) $|3x - 4| < 11$

จะได้ว่า $-11 < 3x - 4 < 11$

$-11 + 4 < 3x < 11 + 4$

$-\frac{7}{3} < x < 5$

(3) $|9 - 4x| \leq 3$

จะได้ว่า $-3 \leq 9 - 4x \leq 3$

$-3 - 9 \leq -4x \leq 3 - 9$

$-12 \leq -4x \leq -6$

$3 \geq x \geq \frac{3}{2}$

หรือ $\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

ตัวอย่างที่ 4 จงแก้อสมการ

(1) $|2x - 3| \geq 5$ (2) $|7 - 4x| > 3$

วิธีทำ (1) $|2x - 3| \geq 5$

จะได้ว่า $2x - 3 \geq 5$ หรือ $2x - 3 \leq -5$

$x \geq 4$ หรือ $x \leq -1$

(2) $|7 - 4x| > 3$

จะได้ว่า $7 - 4x > 3$ หรือ $7 - 4x < -3$

$-4x > -4$ หรือ $-4x \le -10$

$x < 1$ หรือ $x \ge \frac{5}{2}$

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงแก้สมการและและอสมการต่อไปนี้
   1) $|x + 3| = 6$
   2) $|x + 3| < 6$
   3) $|x + 3| > 6$
   4) $0 < |x + 3| < 6$
2. จงแก้อสมการต่อไปนี้
   1) $|2x - 3| = 6$
   2) $|3x + 3| \le 6$
   3) $|6 - 3x| < 9$
   4) $|4x - 3| > 7$
   5) $|3x + 7| = -(3x + 7)$

6.5 อสมการตัวแปรเดียวที่ไม่อยู่ในรูปเชิงเส้น (Non-linear Inequalities)

อสมการพหุนาม (Polynomial Inequalities)

เราได้เรียนรู้การแก้อสมการระดับขั้นที่หนึ่ง (first degree) หรือเรียกว่าอสมการเชิงเส้นแล้ว สำหรับอสมการระดับขั้นที่สอง หรือเรียกว่า อสมการควอดราติก เช่น $x^2 - 2x - 3 < 0$ เราสามารถแก้โดยเริ่มจากแยกตัวประกอบได้เป็น

$(x - 3)(x + 1) < 0$

แล้วพิจารณาค่าของ x ที่ทำให้ด้านซ้ายของสัญลักษณ์อสมการมีค่าน้อยกว่าศูนย์หรือเป็นจำนวนจริงลบ นั่นคือ $(x - 3)$ และ $(x + 1)$ ต้องมีเครื่องหมายต่างกัน

ในขั้นแรกจะใช้การวิเคราะห์เครื่องหมายของแต่ละตัวประกอบ จากนั้นจะได้เสนอแนะวิธีพิจารณาเครื่องหมายของทุกพจน์ร่วมกัน ซึ่งอาจจะช่วยให้สามารถหาคำตอบได้รวดเร็วขึ้น

การวิเคราะห์เครื่องหมายของแต่ละพจน์

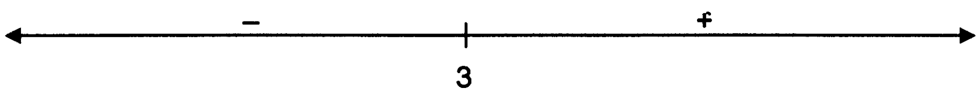
ในการตรวจสอบแต่ละตัวประกอบว่าเมื่อใดจะมีค่าเป็นจำนวนจริงบวก เมื่อใดมีค่าเป็นจำนวนจริงลบ และเมื่อใดเป็นศูนย์ เราจะเรียกจุดบนเส้นจำนวนที่แต่ละตัวประกอบเป็นศูนย์ว่า จุดวิกฤต (critical point)

พิจารณาเครื่องหมายของ (x - 3)

จุดวิกฤต	(x - 3)เป็นบวกเมื่อ	(x - 3)เป็นลบเมื่อ
$x - 3 = 0$	$x - 3 > 0$	$x - 3 < 0$
$x = 3$	$x > 3$	$x < 3$

แสดงเครื่องหมายของ (x - 3) ทางด้านซ้ายและด้านขวาของจุดวิกฤต 3 บนเส้นจำนวน

เครื่องหมายของ (x - 3)



จุดวิกฤต

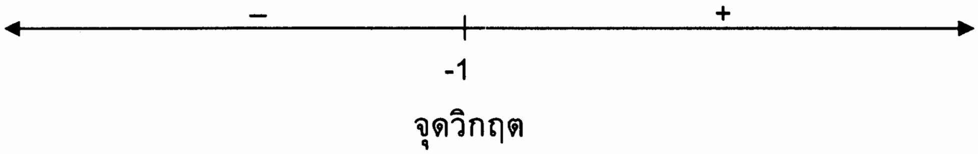
นั่นคือ (x - 3) เป็นจำนวนจริงลบสำหรับค่าของ x ที่น้อยกว่า 3 และเป็นจำนวนจำนวนจริงบวกสำหรับค่าของ x ที่มากกว่า 3

พิจารณาเครื่องหมายของ (x +1)

จุดวิกฤต	(x + 1)เป็นบวกเมื่อ	(x + 1)เป็นลบเมื่อ
$x + 1 = 0$	$x + 1 > 0$	$x + 1 < 0$
$x = -1$	$x > -1$	$x < -1$

แสดงเครื่องหมายของ (x + 1) ทางด้านซ้ายและด้านขวาของจุดวิกฤต -1 บนเส้นจำนวน

เครื่องหมายของ (x + 1)



นั่นคือ (x + 1) เป็นจำนวนจริงลบสำหรับค่าของ x ที่น้อยกว่า -1 และเป็นจำนวนจำนวนจริงบวกสำหรับค่าของ x ที่มากกว่า -1

นำผลการพิจารณาของทั้งสองพจน์มาเขียนรวมกันบนเส้นจำนวน จะได้ค่าของ (x - 3) และ (x + 1) ในช่วงต่าง ๆ ดังนี้

เครื่องหมายของ (x - 3)	–	+	+
เครื่องหมายของ (x + 1)	–	–	+
เครื่องหมายของ (x - 3)(x + 1)	+	–	+
	-1 จุดวิกฤต	3 จุดวิกฤต	

จะเห็นได้ว่าค่าของ x ที่อยู่ระหว่าง -1 และ 3 จะทำให้ (x + 1) มีค่าเป็นจำนวนจริงบวก และทำให้ (x - 3) มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ และทำให้ ผลคูณของ (x - 3)(x + 1) มีค่าเป็นจำนวนจริงลบ

นั่นคือ เซตคำตอบของอสมการ (x - 3)(x + 1) < 0 คือ {x | -1 < x < 3} เขียนในรูปช่วงได้เป็น (-1 , 3)

มีกราฟแสดงคำตอบเป็น

ค่าของ x ที่ทำให้ ax + b = 0 เรียกว่า จุดวิกฤต สำหรับค่าของ ax + b ที่อยู่ทางด้านซ้ายของจุดวิกฤตบนเส้นจำนวนจะมีค่าน้อยกว่า 0 เขียนแทนด้วยเครื่องหมายลบ และค่า ax + b ที่อยู่ทางด้านขวาของจุดวิกฤตบนเส้นจำนวนมีค่ามากกว่า 0 เขียนแทนด้วยเครื่องหมายบวก

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้อสมการและเขียนกราฟแสดงเซตคำตอบของ $6x^2 + x \geq 15$

วิธีทำ $6x^2 + x \geq 15$

จะได้ $6x^2 + x - 15 \geq 0$

$(2x - 3)(3x + 5) \geq 0$

จุดวิกฤตคือ $\frac{3}{2}$ และ $-\frac{5}{3}$

เขียนจุดวิกฤตบนเส้นจำนวน และพิจารณาเครื่องหมายของ (2x - 3) และ (3x + 5) ทางด้านซ้ายและด้านขวาของจุดวิกฤต แล้วพิจารณาเครื่องหมายของ (2x - 3)(3x +5)

เครื่องหมายของ (2x - 3)	–	–	+
เครื่องหมายของ (2x + 5)	–	+	+
เครื่องหมายของ (2x - 3)(3x + 5)	+	–	+

$$-\frac{5}{3} \qquad\qquad \frac{3}{2}$$

จุดวิกฤต จุดวิกฤต

ในกรณีของ (2x - 3)(3x + 5) = 0

จะได้ว่า 2x - 3 = 0 หรือ 3x + 5 = 0

$x = \frac{3}{2}$ หรือ $x = -\frac{5}{3}$

จะได้เซตคำตอบของสมการคือ $\{\frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\}$ ....(1)

ในกรณี (2x - 3)(3x + 5) > 0

แสดงว่าค่าของ (2x - 3) และ (3x + 5) ต้องเป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่ หรือเป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่

กรณีที่ 1 (2x - 3) และ (3x + 5) เป็นจำนวนจริงลบทั้งคู่

นั่นคือ 2x - 3 < 0 และ 3x + 5 < 0

$x < \frac{3}{2}$ และ $x < -\frac{5}{3}$

ดังนั้น $x < -\frac{5}{3}$ ....(2)

กรณีที่ 2 (2x - 3) และ (3x + 5) เป็นจำนวนจริงบวกทั้งคู่

นั่นคือ $2x - 3 > 0$ และ $3x + 5 > 0$

$x > \frac{3}{2}$ และ $x > -\frac{5}{3}$

ดังนั้น $x > \frac{3}{2}$ ....(3)

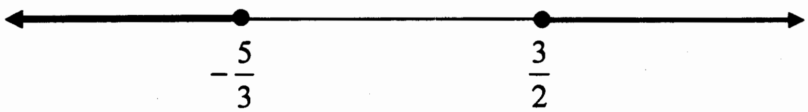
จาก กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้เซตคำตอบ คือ $\{x \mid x < -\frac{5}{3}$ หรือ $x > \frac{3}{2}\}$

หรือเขียนในรูป $(-\infty, -\frac{5}{3}) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ ....(4)

เนื่องจากเซตคำตอบของอสมการ $(2x - 3)(3x + 5) \geq 0$ คือยูเนียนของเซตใน (1) และ (4)

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการที่กำหนดให้คือ $(-\infty, -\frac{5}{3}] \cup [-\frac{3}{2}, \infty)$

มีกราฟแสดงคำตอบเป็น



ตัวอย่างที่ 2 จงแก้อสมการและเขียนกราฟแสดงเซตคำตอบของ

$x^3 - 4x \leq 5x^2 - 20$

วิธีทำ $x^3 - 4x \leq 5x^2 - 20$

$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 \leq 0$

$x^2(x - 5) - 4(x - 5) \leq 0$

$(x^2 - 4)(x - 5) \leq 0$

จะได้ $(x - 2)(x + 2)(x - 5) \leq 0$

จุดวิกฤตคือ 2 , -2 และ 5

เขียนจุดวิกฤตบนเส้นจำนวน และพิจารณาเครื่องหมายของ (x - 2) , (x + 2) และ (x - 5) ทางด้านซ้ายและด้านขวาของจุดวิกฤต แล้วพิจารณาเครื่องหมายของ (x - 2)(x + 2)(x - 5)

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
เครื่องหมายของ $(x - 5)$	$-$	$-$	$-$	$+$
เครื่องหมายของ $(x - 2)$	$-$	$-$	$+$	$+$
เครื่องหมายของ $(x + 2)$	$-$	$+$	$+$	$+$
เครื่องหมายของ $(x - 5)(x - 2)(x + 2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

-2 จุดวิกฤต 2 จุดวิกฤต 5 จุดวิกฤต

ในกรณีของ $(x - 5)(x - 2)(x + 2) = 0$

จะได้ว่า $x - 5 = 0$ หรือ $x - 2 = 0$ หรือ $(x + 2) = 0$

$x = 5$ หรือ $x = 2$ หรือ $x = -2$

จะได้เซตคำตอบของสมการคือ $\{5, 2, -2\}$....................................(1)

ในกรณี $(x - 5)(x - 2)(x + 2) < 0$

แสดงว่ากรณีที่ 1 ค่าของ $(x - 5)$, $(x - 2)$ และ $(x + 2)$ ต้องเป็นจำนวนจริงลบ จำนวนจริงบวก จำนวนจริงบวกตามลำดับ หรือกรณีที่ 2 เป็นจำนวนจริงลบ ทั้งสามพจน์

กรณีที่ 1 $(x - 5)$, $(x - 2)$ และ $(x + 2)$ ต้องเป็นจำนวนจริงลบ จำนวนจริงบวก จำนวนจริงบวกตามลำดับ

นั่นคือ $x - 5 < 0$ และ $x - 2 > 0$ และ $x + 2 > 0$

$x < 5$ และ $x > 2$ และ $x > -2$

ดังนั้น $2 < x < 5$ ....(2)

กรณีที่ 2 $(x - 5)$, $(x - 2)$ และ $(x + 2)$ เป็นจำนวนจริงลบทั้งสามพจน์

นั่นคือ $x - 5 < 0$ และ $x - 2 < 0$ และ $x + 2 < 0$

$x < 5$ และ $x < 2$ และ $x < -2$

ดังนั้น $x < -2$ ....(3)

จาก กรณีที่ 1 และกรณีที่ 2 จะได้เซตคำตอบ คือ $\{ x \mid x < -2$ หรือ $2 < x < 5 \}$

หรือเขียนในรูป $(-\infty , -2) \cup (2 , 5)$ ....(4)

เนื่องจากเซตคำตอบของอสมการ$(x - 4)(x - 2)(x + 2) \leq 0$ คือยูเนียนของเซตใน (1) และ (4)

ดังนั้นเซตคำตอบของอสมการที่กำหนดให้คือ $(-\infty, -2] \cup [2 , 5]$

มีกราฟแสดงคำตอบเป็น

อสมการอตรรกยะ (Irrational Inequalities)

เทคนิคการพิจารณาเครื่องหมายดังที่กล่าวแล้ว สามารถใช้แก้อสมการที่อยู่ในรูปเศษส่วนได้เช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้อสมการและเขียนกราฟแสดงคำตอบของ $\dfrac{x^2+x-12}{x+5} \le 0$

วิธีทำ $\dfrac{x^2+x-12}{x+5} \le 0$

$$\frac{(x+4)(x-3)}{(x+5)} \le 0$$

จุดวิกฤตคือ -5 , -4 , 3

เครื่องหมายของ (x - 3)	–	–	–	+
เครื่องหมายของ (x + 4)	–	–	+	+
เครื่องหมายของ (x + 5)	–	+	+	+
เครื่องหมายของ $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+5)}$	–	+	–	+

-5 จุดวิกฤต, -4 จุดวิกฤต, 3 จุดวิกฤต

ในกรณีของ $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+5)} = 0$

จะได้ว่า (x + 4)(x - 3) = 0 และ x + 5 $\neq$ 0

x = -4 หรือ x = 3 แต่ x $\neq$ -5 ....(1)

ในกรณี $\dfrac{(x+4)(x-3)}{(x+5)} < 0$ เป็นได้สองกรณี คือ กรณีที่ 1 เป็นจำนวนจริงลบทั้งสามพจน์ หรือ กรณีที่ 2 เป็นจำนวนจริงลบ เพียงพจน์เดียว

กรณีที่ 1 (x + 4) , (x - 3) และ (x + 5) ต้องเป็นจำนวนจริงลบ ทั้งสามพจน์

นั่นคือ x + 4 < 0 และ x - 3 < 0 และ x + 5 < 0

x < -4 และ x < 3 และ x < -5

ดังนั้น x < -5 ....(2)

กรณีที่ 2 (x - 3) < 0 และ (x + 4) > 0 และ (x + 5) > 0 (เนื่องจาก x - 3 มีค่าน้อยกว่าอีกสองพจน์)

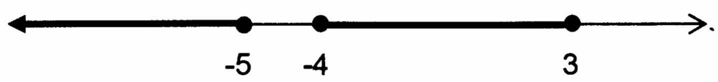
นั่นคือ x < 3 และ x > -4 และ x > -5

ดังนั้น -4 < x < 3 ....(3)

จาก (1) , (2) และ (3) จะได้เซตคำตอบของอสมการ $\frac{x^2+x-12}{x+5} \leq 0$

คือ $(-\infty , -5) \cup [-4 , 3]$ ....(4)

มีกราฟแสดงคำตอบเป็น



แบบฝึกหัด 6.5

1. จงแก้อสมการและเขียนกราฟแสดงคำตอบ

1) $x^2 \geq x + 12$	2) $x^2 \leq 2x + 8$
3) $x^2 < 6x - 9$	4) $2x^2 \geq 3x + 12$
5) $x^3 - x + 5 \geq 5x^2$	6) $x^3 + 16 > 4x^2 + 4x$
7) $x^3 - 3x^2 < 25x - 75$	8) $\frac{x-2}{x+4} \geq 0$
9) $\frac{5x-8}{x-5} \geq 2$	10) $\frac{3}{2-x} \leq \frac{1}{x+4}$

6.6 ฟังก์ชันพหุนาม และทฤษฎีบทของสมการ (Polynomial Functions and Theorem of Equations)

เรารู้จักการแก้สมการ พหุนามระดับขั้นที่หนึ่ง และระดับขั้นที่สอง แล้ว เช่น

สมการเชิงเส้น

$$Ax + B = 0 , A \neq 0$$

$$x = -\frac{B}{A}$$

สมการกำลังสอง (quadratic equation)

$$ax^2 + bx + c = 0 , a \neq 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้นที่ n

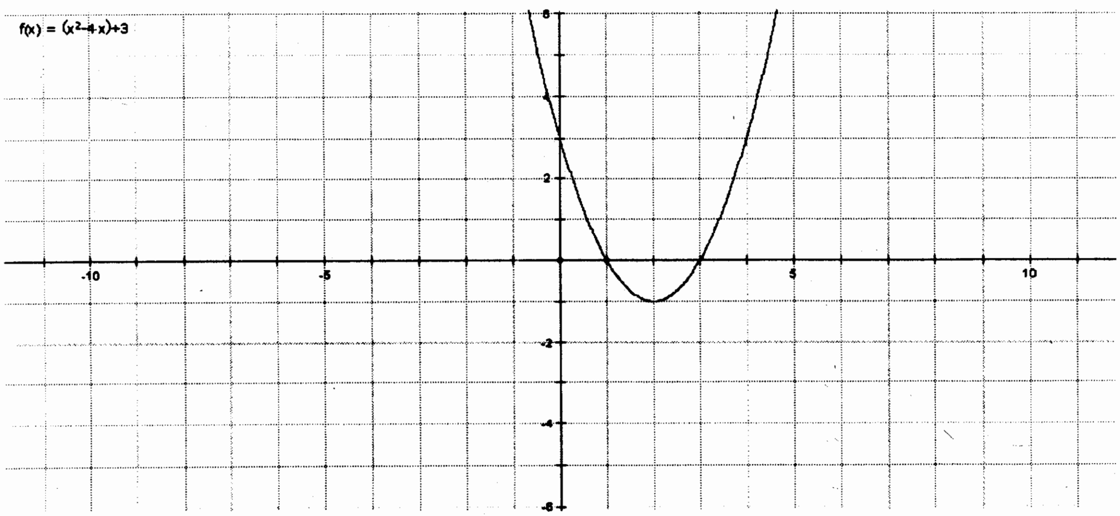
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \; ; a_n \neq 0$$

สัมประสิทธิ์ เป็นจำนวนจริง r เรียกว่าเป็น ศูนย์ (zero) ของฟังก์ชัน P หรือศูนย์ของพหุนาม P(x) หรือผลเฉลย (คำตอบ) หรือรากของสมการ P(x) = 0 ถ้า P(r) = 0

ศูนย์ของพหุนามอาจเป็น 0 หรือไม่เป็นศูนย์ก็ได้ **ศูนย์ของพหุนามเป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่ทำให้พหุนามเป็นศูนย์** ถ้าเราพิจารณากราฟของ y = P(x) จะพบว่า ศูนย์ของ P(x) คือระยะตัดแกน X พิจารณาพหุนาม

$$P(x) = x^2 - 4x + 3$$

กราฟของ P แสดงดังภาพประกอบ 1



ระยะตัดแกน X คือ 1 และ 3 เป็นศูนย์ของ $P(x) = x^2 - 4x + 3$ เนื่องจาก $P(1) = 0$ และ $P(3) = 0$ ระยะตัดแกน X คือ 1 และ 3 เป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ด้วย

รูปทั่วไป

ศูนย์และราก
ระยะตัดแกน X ของกราฟของ $Y = P(x)$ คือศูนย์ของ P และ $P(x)$ และคำตอบที่เป็นจำนวนจริง หรือรากสำหรับสมการ $P(x) = 0$

การหารยาวทางพีชคณิต (Algebraic Long Division)

เราสามารถหาผลหารของพหุนามโดยกระบวนการหารยาวคล้ายกับการหารยาวในเลขคณิต

ตัวอย่าง จงหาร $4x^3 - 3x + 8$ ด้วย $2x - 3$

$$
\begin{array}{r}
2x^2 + 3x + 3 \\
2x - 3 \,\big)\overline{\,4x^3 + 0x^2 - 3x + 8} \\
\underline{4x^3 - 6x^2} \\
6x^2 - 3x \\
\underline{6x^2 - 9x} \\
6x + 8 \\
\underline{6x - 9} \\
\underline{17}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\dfrac{4x^3 - 3x + 8}{2x - 3} = 2x^2 + 3x + 3 + \dfrac{17}{2x - 3}$

ตรวจสอบ $(2x - 3)[2x^2 + 3x + 3 + \dfrac{17}{2x - 3}] = (2x - 3)[2x^2 + 3x + 3] + 17$

$= 4x^3 - 3x + 8$

การหารแบบสังเคราะห์ (Synthetic Division)

การหาร $P(x)$ ด้วย $x - a$ อาจทำได้อย่างรวดเร็วและมีประสิทธิภาพ โดยวิธีที่เรียกว่า การหารแบบสังเคราะห์ (synthetic division) แต่ก่อนอื่นให้เราพิจารณาการหาร

$P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ ด้วย $x + 2$ โดยใช้การหารยาวตามปกติ และจะใช้การเทียบเคียงไปสู่การหารแบบสังเคราะห์

$2x^3 - x^2 + 2x - 5$ ผลหาร

ตัวหาร $x + 2 \overline{)\,2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 5}$ ตัวตั้ง

$\underline{2x^4 + 4x^3}$

$-x^3 + 0x^2$

$\underline{-x^3 - 2x^2}$

$2x^2 - x$

$\underline{2x^2 + 4x}$

$-5x - 5$

$\underline{-5x - 10}$

5 เศษเหลือ

กระบวนการหารจัดให้สะดวกขึ้นดังนี้

สัมประสิทธิ์ของตัวตั้ง

	2	3	0	-1	-5
		4	-2	4	-10
2	2	-1	2	-5	5

สัมประสิทธิ์ของผลหาร เศษเหลือ

คำอธิบาย : แถวที่สองและแถวที่สามหาได้ดังนี้ สัมประสิทธิ์ตัวแรกของตัวตั้ง คือ 2 ดึงลงมาไว้ในแถวที่สาม และคูณด้วย 2 จากตัวหาร ได้ผลคูณ 4 วางในแถวที่สอง ใต้สัมประสิทธิ์ 3 และลบ ได้ -1 วางในบรรทัดที่สาม นำ 2 จากตัวหาร คูณ -1 ได้ -2 วางผลหารในแถวที่สองใต้สัมประสิทธิ์ 0 แล้วลบ ได้ผลลบ 2 วางในแถวที่สาม แล้วคูณด้วย 2 จากตัวหาร ได้ 4 วางในแถวที่สองใต้สัมประสิทธิ์ -1 หาผลลบ ได้ -5 วางในแถวที่สาม แล้วคูณด้วย 2 จากตัวหาร ได้ -10 วางในแถวที่สองใต้สัมประสิทธิ์ -5 หาผลลบ ได้ 5 วางในแถวที่สาม จะเห็นได้ว่าเป็นกระบวนการที่ซ้ำ ๆ จนกระทั่งได้ตัวเศษ กระบวนการนี้อาจทำได้รวดเร็วขึ้นโดยเปลี่ยน 2 จากตัวหารเป็น -2 และใช้การบวกแทนการลบ ดังนี้

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & \multicolumn{5}{c}{\text{สัมประสิทธิ์ของตัวตั้ง}} \\
 & 2 & 3 & 0 & -1 & -5 \\
 & & -4 & 2 & -4 & 10 \\
\hline
2 & 2 & -1 & 2 & -5 & 5 \\
 & \multicolumn{4}{c}{\text{สัมประสิทธิ์ของผลหาร}} & \text{เศษเหลือ}
\end{array}
$$

สรุปขั้นตอนในการหารสังเคราะห์

สรุปขั้นตอนในการหารสังเคราะห์
1. จัดสัมประสิทธิ์ของ P(x) ตามลำดับกำลังของ x จากมากไปน้อย เติม 0 ในกรณีเลขยกกำลังใดไม่ปรากฏ 2. หลังจากเขียนตัวหารในรูป x - r ใช้ r ในการสร้างจำนวนในแถวที่สอง และแถวที่สาม โดยเริ่มจากดึงสัมประสิทธิ์ ตัวแรกของตัวตั้งลงมาในบรรทัดที่สาม แล้วคูณด้วย r และบวกผลคูณกับตัวที่สองของแถวแรก แล้วนำผลลัพธ์คูณกับ r และบวกผลคูณกับตัวที่สามของแถวแรก ทำกระบวนการซ้ำ ๆ จนกระทั่งผลคูณบวกกับพจน์ที่เป็นค่าคงตัวของ P(x) 3. จำนวนตัวสุดท้ายในแถวที่สามของจำนวนเป็นเศษเหลือ จำนวนอื่น ๆ ในแถวที่สามเป็นสัมประสิทธิ์ของผลหารซึ่งมีระดับขั้น (degree) น้อยกว่า P(x) อยู่ 1

ตัวอย่างที่ 1 ใช้การหารสังเคราะห์ หาผลหารและเศษเหลือ ของ

$(x^5 + 10x^2 + 5x + 3) \div (x + 2)$ และเขียนคำตอบในรูป Q(x) + R/(x - r)

วิธีทำ x + 2 = x - (-2) ดังนั้น r = -2

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 10 & 5 & 3 \\
 & & -2 & 4 & -8 & -4 & -2 \\
\hline
-2 & 1 & -2 & 4 & 2 & 1 & 1
\end{array}
$$

ผลหารคือ $x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ มีเศษเหลือ 1 ดังนั้น

$$\frac{P(x)}{x+2} = x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1 + \frac{1}{x+2}$$

เศษเหลือและทฤษฎีบทตัวประกอบ (Remainder and Factor Theorems)

ขั้นตอนวิธีการหาร (Division Algorithm)

ถ้าเราหาร $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12$ ด้วย $x - 3$ เราจะได้

$$\frac{2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12}{x-3} = 2x^3 + x^2 - x - 3 + \frac{3}{x-3}, \; x \neq 3$$

ถ้าเราคูณทั้งสองข้างด้วย $(x - 3)$ จะได้

$$2x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12 = (x - 3)(2x^3 + x^2 - x - 3) + 3$$

สมการสุดท้ายแสดงการเท่ากันระหว่างด้านซ้ายและด้านขวา สำหรับทุกค่าของจำนวนจริง x ยกเว้น $x = 3$

ทฤษฎีบท 1

ขั้นตอนวิธีการหาร
สำหรับแต่ละพหุนาม $P(x)$ ของระดับขั้นที่หนึ่งหรือมากกว่า และแต่ละจำนวน r จะมีพหุนาม $Q(x)$ เพียงตัวเดียว (unique) ที่มีระดับขั้นน้อยกว่าระดับขั้นของ $P(x)$ อยู่ 1 และมีจำนวน R ตัวเดียว ซึ่ง $P(x) = (x - r)\,Q(x) + R$ พหุนาม $Q(x)$ เรียกว่า ผลหาร (quotient) , $x - r$ เรียกว่าตัวหาร และ R เรียกว่าเศษเหลือ (remainder)

ทฤษฎีบทเศษเหลือ (Remainder Theorem)

เราใช้ขั้นตอนวิธีการหารในทฤษฎีบท 1 เพื่อพิสูจน์ความสำคัญ และ ประโยชน์ของทฤษฎีบทเศษเหลือ

สมการในทฤษฎีบท คือ $P(x) = (x - r)\,Q(x) + R$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง x ถ้าให้ $x = r$ แล้ว เราจะได้ความสัมพันธ์

$$P(r) = (r - r)\,Q(r) + R$$
$$= 0 \cdot Q(r) + R$$
$$= 0 + R$$
$$= R$$

ค่าของ $P(x)$ ที่ $x = r$ เท่ากับเศษเหลือ R ที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วย $x - r$ ซึ่งเป็นการพิสูจน์ทฤษฎีบทเศษเหลือ

ทฤษฎีบท 2

ทฤษฎีบทเศษเหลือ
ถ้า R เป็นเศษเหลือหลังจากหารพหุนาม $P(x)$ ด้วย $(x - r)$ แล้ว $P(r) = R$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 7$ จงหา $P(-3)$ โดย

1) การหารแบบสังเคราะห์

2) หา $P(-3)$ โดยตรง

วิธีทำ 1) สัมประสิทธิ์ 4 10 0 19 7

หารสังเคราะห์

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 4 & 10 & 0 & 19 & 7 \\ & & -12 & 6 & -18 & -3 \\ \hline -3 & 4 & -2 & 6 & 1 & 4 \end{array}$$

ดังนั้น R = 4

2) $P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 7$

$= 324 - 270 - 57 + 7$

$= 4$

ดังนั้นเศษเหลือคือ 4

แบบฝึกหัด 6.6

1. จงหารยาว และหารแบบสังเคราะห์ และเขียนผลหารของ $P(x) \div (x - r)$ ในรูป $P(x)/(x-r) = Q(x) + R/(x - r)$ เมื่อ R เป็นค่าคงตัว

   1) $(x^2 + 3x - 5) \div (x - 1)$
   2) $(x^3 + 12x^2 - 18x + 8) \div (x - 4)$
   3) $(9x^3 + 6x^2 - 30) \div (x + 1)$
   4) $(x^3 + 2x^2 - 3x - 4) \div (x + 2)$

2. จงหารแบบสังเคราะห์ และเขียนผลหาร และบอกเศษเหลือ

   1) $(3x^4 - x - 2) \div (x + 1)$
   2) $(5x^4 - 2x^2 - 4) \div (x - 1)$
   3) $(x^5 + 1) \div (x - 1)$
   4) $(x^4 - 81) \div (x - 3)$
   5) $(4x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 3) \div (x - 5)$
   6) $(4x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 5x + 1) \div (x + \frac{1}{2})$
   7) $(3x^3 - x^2 + x + 2) \div (x + \frac{2}{3})$

6.7 ทฤษฎีบทตัวประกอบ (Factor Theorem)

สมการ $P(x) = (x - r)\,Q(x) + R$ ในทฤษฎีบท 1 อาจเขียนแทน R ด้วย $P(r)$ ซึ่งจะได้

$P(x) = (x - r)\,Q(x) + P(r)$

ซึ่งจะเห็นได้โดยง่ายว่า $(x - r)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ก็ต่อเมื่อ $P(r) = 0$ นั่นคือ ก็ต่อเมื่อ r เป็นศูนย์ ของพหุนาม $P(x)$ (หรือรากหรือผลเฉลยของสมการพหุนาม $P(x) = 0$) ซึ่งผลอันนี้รู้จักในนามของทฤษฎีบทตัวประกอบ

ทฤษฎีบท 3

ทฤษฎีบทตัวประกอบ
ถ้า r เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ แล้ว $x - r$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ ในทางกลับกัน ถ้า $x - r$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$ แล้ว r เป็นศูนย์ของ $P(x)$

ถ้าเราสามารถหาศูนย์ของพหุนามแล้ว เราสามารถหาตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$ และถ้าเราสามารถหาตัวประกอบเชิงเส้นของพหุนาม เราจะสามารถหาศูนย์ของพหุนาม

ตัวอย่างที่ 3 จงใช้ทฤษฎีบทตัวประกอบ แสดงว่า x + 1 เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ

$P(x) = x^{15} + 1$

วิธีทำ เนื่องจาก $x + 1 = x - (-1)$ ดังนั้น $r = -1$

$P(r) = P(-1) = (-1)^{15} + 1 = -1 + 1 = 0$

จะได้ว่า -1 เป็นศูนย์ของ $P(x) = x^{15} + 1$ ดังนั้น $x - (-1) = x + 1$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $x^{15} + 1$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาศูนย์ของ $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

เนื่องจาก $P(2) = 8 - 4 - 28 + 24 = 0$

$P(3) = 27 - 9 - 42 + 24 = 0$

และ $P(-4) = -64 - 16 + 56 + 24 = 0$

ดังนั้น 2 , 3 , -4 เป็นศูนย์ของพหุนาม P(x) และจะได้ว่า (x - 2) , (x - 3) และ (x - (-4)) = (x + 4) เป็นตัวประกอบของ $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต (Fundamental Theorem of Algebra)

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้ อาจขยายความรู้ความเข้าใจไปถึงจำนวนเชิงซ้อน แต่จะยังไม่กล่าวในส่วนของจำนวนเชิงซ้อนในบทนี้

ทฤษฎีบท 4

ทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต
ทุก ๆ พหุนาม P(x) ของระดับขั้น $n \geq 1$, ซึ่งสัมประสิทธิ์ที่เป็นจำนวนจริง หรือจำนวนเชิงซ้อนจะมี ศูนย์ของพหุนามที่เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนอย่างน้อยหนึ่งค่า

ทฤษฎีบท n ศูนย์ (n Zeroes Theorem)

ถ้า $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ เป็นพหุนามของระดับขั้นที่ n เมื่อ $n \geq 1$ แล้ว ตามทฤษฎีบท 4 จะมีศูนย์ของ P(x) อย่างน้อยหนึ่งค่า เรียก r_1 ตามทฤษฎีบทตัวประกอบ $x - r_1$ เป็นตัวประกอบของ P(x) ดังนั้น

$P(x) = (x - r_1)\,Q_1(x)$

เมื่อ $Q_1(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n - 1$

ถ้า $n - 1 = 0$ แล้ว $Q_1(x) = a_n$ ถ้า $n - 1 \geq 1$ แล้ว โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต จะมีศูนย์ของ $Q_1(x)$ อย่างน้อยหนึ่งค่า เรียก r_2 และ

$Q_1(x) = (x - r_2)Q_2(x)$

เมื่อ $Q_2(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n - 2$ ดังนั้น $P(x) = (x - r_1)(x - r_2)Q_2(x)$

ถ้า $n - 2 = 0$ แล้ว $Q_2(x) = a_n$ ถ้า $n - 2 \geq 1$ แล้ว โดยทฤษฎีบทมูลฐานของพีชคณิต จะมีศูนย์ของ $Q_2(x)$ อย่างน้อยหนึ่งค่า เรียก r_3 และ

$Q_2(x) = (x - r_3)Q_3(x)$

เมื่อ $Q_3(x)$ เป็นพหุนามระดับขั้น $n - 3$ เราก็ดำเนินการ เช่นเดียวกับขั้นที่กล่าวมาแล้ว จนกระทั่ง $Q_k(x)$ เป็นระดับขั้นที่ศูนย์ นั่นคือ จนกระทั่ง $k = n$ ซึ่งจะได้ $Q_n(x) = a_n$ และเรามี

$P(x) = (x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n)a_n$

เมื่อ r_1 , r_2 ,..., r_n เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ ซึ่งไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน สมมุติว่า r เป็นจำนวนที่แตกต่างจาก ศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ ข้างต้น แล้ว

$P(r) = a_n(x - r_1)(x - r_2) \ldots (x - r_n) \neq 0$ เนื่องจาก r ไม่เท่ากับจำนวนใด ๆ ที่เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ และเราสรุปว่า r_1 , r_2 ,..., r_n เท่านั้นที่เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$

ทฤษฎีบท 5

ทฤษฎีบท n ศูนย์
ทุก ๆ พหุนาม $P(x)$ ของระดับขั้น $n \geq 1$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อน สามารถแสดงในรูปผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น n ตัวประกอบ (มีศูนย์ของพหุนาม n ค่า ไม่จำเป็นต้องแตกต่างกัน)

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ (Rational Zero Theorem)

ทฤษฎีบท 6

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ
ถ้าจำนวนตรรกยะ $\frac{b}{c}$ ซึ่งเป็นเศษส่วนอย่างต่ำ เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ซึ่งมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริง แล้ว b ต้องเป็นตัวประกอบของ a_0 และ [พจน์คงตัวของพหุนาม P(x)] และ c ต้องเป็นตัวประกอบของ a_n [สัมประสิทธิ์ของพจน์ระดับขั้นสูงสุดของพหุนาม P(x)]

การพิสูจน์ทฤษฎีบท 6 อาจไม่ยุ่งยากนัก

เนื่องจาก $\frac{b}{c}$ เป็นศูนย์ของพหุนาม P(x) ดังนั้นจะได้

$$a_n\left(\frac{b}{c}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{b}{c}\right)^{n-1} + \dots + a_1\left(\frac{b}{c}\right) + a_0 = 0 \qquad \text{.......................(1)}$$

ถ้าเราคูณสมการที่ (1) ด้วย c^n จะได้

$$a_n b^n + a_{n-1}b^{n-1}c + \dots + a_1 bc^{n-1} + a_0 c^n = 0 \qquad \text{.......................(2)}$$

ซึ่งสามารถเขียนได้ในรูป

$$a_n b^n = c(-a_{n-1}b^{n-1} - \dots - a_1 bc^{n-2} - a_0 c^{n-1}) \qquad \text{......................(3)}$$

ดังนั้น c เป็นตัวประกอบหนึ่งของ P(x) เนื่องจาก b และ c เป็น จำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ (relative prime) (นั่นคือไม่มีตัวประกอบร่วมนอกจาก ± 1) b^n และ c ต้องเป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์ ดังนั้น c ต้องเป็น ตัวประกอบหนึ่งของ a_n [หารทั้งสองด้านของสมการ (3) ด้วย c]

ถ้าเราแก้สมการ (2) หา $a_0 c^n$ และดึงตัวประกอบร่วม b ออก เราจะได้

$$a_0 c^n = b(-a_n b^{n-1} - a_{n-1}b^{n-2}c - \dots - a_1 c^{n-1})$$

เราจะเห็นว่า b เป็นตัวประกอบของ $a_0 c^n$ และดังนั้นจะเป็นตัวประกอบของ a_0 เนื่องจาก b และ c เป็นจำนวนเฉพาะสัมพัทธ์

จากทฤษฎีบท 6 ไม่ได้ยืนยันว่า พหุนามที่มีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนจริงต้องมีจำนวนตรรกยะที่เป็นศูนย์ของพหุนาม แต่ถ้ามีจะต้องเป็นไปตามเงื่อนไขที่กำหนดไว้ในทฤษฎีบท 6

ตัวอย่างที่ 6 จงหาจำนวนตรรกยะที่เป็นศูนย์ของพหุนาม $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แจงจำนวนตรรกยะที่อาจเป็นศูนย์ของพหุนาม เท่าที่เป็นไปได้

$$\pm 1 , \pm 2 , \pm 4 , \pm \frac{1}{2}$$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบ

จาก $P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

จะได้ $P(2) = 2(2)^3 - (2)^2 - 8(2) + 4$

$= 16 - 4 - 16 + 4$

$= 0$

ดังนั้น $(x - 2)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

หารแบบสังเคราะห์

	2	-1	-8	4
		4	6	-4
2	2	3	-2	0

$P(x) = 2x^3 - x^2 - 8x + 4$

$= (x - 2)(2x^2 + 3x - 2)$

เนื่องจาก $2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2)$

จะได้ว่า $P(x) = (x - 2)(2x - 1)(x + 2)$

ศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ หาได้จาก $(x - 2)(2x - 1)(x + 2) = 0$

นั่นคือ $x = 2 , x = \frac{1}{2} , x = -2$

ดังนั้นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ คือ $2 , \frac{1}{2}$ และ -2

ตัวอย่างที่ 7 จงหาจำนวนตรรกยะทั้งหมดที่เป็นศูนย์ของพหุนาม

$P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

วิธีทำ ขั้นที่ 1 แจงจำนวนตรรกยะที่อาจเป็นศูนย์ของพหุนาม เท่าที่เป็นไปได้

$$\pm 1 , \pm 2 , \pm 3 , \pm 6$$

ขั้นที่ 2 ตรวจสอบ

จาก $P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

จะได้ $P(1) = (1)^4 - 7(1)^3 + 17(1)^2 - 17(1) + 6$

$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$

$= 0$

ดังนั้น $(x - 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $P(x)$

นำ $(x - 1)$ หาร $P(x)$ แบบสังเคราะห์

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -7 & 17 & -17 & 6 \\ & & 1 & -6 & 11 & -6 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 11 & -6 & 0 \end{array}$$

$P(x) = x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$

$= (x - 1)(x^3 - 6x^2 + 11x - 6)$

ให้ $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

จะได้ $Q(1) = 1 - 6 + 11 - 6$

$= 0$

จะได้ว่า $(x - 1)$ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ $Q(x)$

นำ$(x - 1)$ หาร $Q(x)$ แบบสังเคราะห์

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -6 & 11 & -6 \\ & & 1 & -5 & 6 \\ \hline 1 & 1 & -5 & 6 & 0 \end{array}$$

ดังนั้น $Q(x) = (x - 1)(x^2 - 5x + 6)$

นั่นคือ $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x^2 - 5x + 6)$

เนื่องจาก $(x^2 - 5x + 6) = (x - 2)(x - 3)$

ดังนั้น $P(x) = (x - 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

ศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ หาได้จาก $(x - 1)(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0$

นั่นคือ $x = 1$, $x = 2$ และ $x = 3$

ดังนั้นศูนย์ของพหุนาม $P(x)$ คือ 1 , 2 และ 3

ตัวอย่างที่ 8 จงแก้สมการ $(4x^4 4x^2 + 1) - 9 = 0$

วิธีทำ $(4x^4 4x^2 + 1) - 9 = 0$

$(2x^2 + 1)^2 - 3^2 = 0$

$[(2x^2 + 1) - 3][(2x^2 + 1) + 3] = 0$

$(2x^2 - 2)(2x^2 + 4) = 0$

$(x^2 - 1)(2x^2 + 4) = 0$

$(x - 1)(x + 1)(2x^2 + 4) = 0$

เนื่องจากในกรณีที่ x เป็นจำนวนจริง จะมีเฉพาะ

$(x - 1) = 0$ หรือ $(x + 1) = 0$

$x = 1$ หรือ $x = -1$

เซตคำตอบคือ $\{1 , -1\}$

ทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ อาจใช้พิสูจน์การเป็นจำนวนอตรรกยะของจำนวนบางจำนวนได้ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 9 จงแสดงว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิธีทำ $\sqrt{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $x = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\sqrt{3}$ เป็นคำตอบของสมการ $x^2 = 3$ หรือ $x^2 - 3 = 0$ …………………(1)

จากทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ คำตอบของสมการ (1) ที่เป็นจำนวนตรรกยะจะอยู่ในเซต $\{1 , -1 , 3 , -3\}$ ดังนั้น $\sqrt{3}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เนื่องจาก $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนจริง $\sqrt{3}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างที่ 10 จงแสดงว่า $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิธีทำ $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ เป็นคำตอบของสมการ $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$

ดังนั้น $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ เป็นคำตอบของสมการ $x - \sqrt{3} = \sqrt{5}$

ดังนั้นจึงเป็นคำตอบของสมการ $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 = 5$

$x^2 - 2 = 2\sqrt{3}x$

$x^4 - 4x + 4 = 12x^2$

$x^4 - 12x^2 - 4x + 4 = 0$ …………………(1)

จากทฤษฎีบทตัวประกอบตรรกยะ คำตอบของสมการ (1) ที่เป็นจำนวนตรรกยะจะอยู่ในเซต {1 , -1 , 2 , -2 , 4 , -4} ดังนั้น $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เนื่องจาก $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

แบบฝึกหัด 6.7

1. จงใช้การหารแบบสังเคราะห์ และทฤษฎีบทเศษเหลือ ในแต่ละข้อต่อไปนี้
   1) หา P(-2) กำหนด $P(x) = 3x^2 - x - 10$
   2) หา P(-3) กำหนด $P(x) = 4x^2 + 10x - 10$
   3) หา P(2) กำหนด $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 5$
   4) หา P(5) กำหนด $P(x) = 2x^3 - 12x^2 - x + 30$
   5) หา P(-7) กำหนด $P(x) = x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 32$
2. จงเขียนแต่ละพหุนามในรูปผลคูณของตัวประกอบเชิงเส้น
   1) $P(x) = 6x^3 + 13x^2 - 4$
   2) $P(x) = 6x^3 - 17x^2 - 4x + 3$
   3) $P(x) = 2x^3 - 5x^2 - 2x + 15$
   4) $P(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 4$
3. จงหารากทุกรากที่เป็นจำนวนจริง ของแต่ละสมการพหุนามต่อไปนี้
   1) $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
   2) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$
   3) $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 4x = 0$
   4) $x^4 - 4x^3 + x^2 - 4x = 0$
   5) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6 = 0$
4. จงแสดงว่าจำนวนต่อไปนี้ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ
   1) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ 2) $3\sqrt{2}$
   3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 4) $\frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}+2}$