บทที่ 5
ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

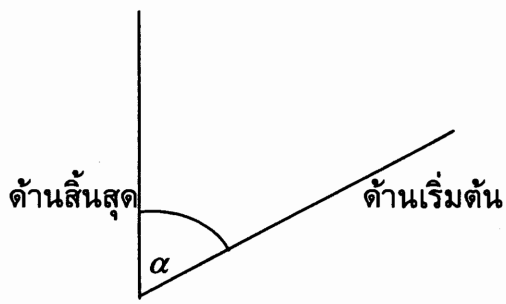
คำว่า ตรีโกณมิติ (trigonometry) เป็นคำที่รับมาจากภาษากรีก (Greek) หมายถึง "การวัดของรูปสามเหลี่ยม" แนววิธีดั้งเดิมของเนื้อหาตรีโกณมิติ เกี่ยวข้องกับด้านและมุมของรูปสามเหลี่ยม ในสาขาวิชา เช่น การเดินเรือ (navigation) และการสำรวจ (surveying)

วิธีการสมัยใหม่ของตรีโกณมิติ จะเริ่มต้นด้วยการนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติจากวงกลมหนึ่งหน่วย โดยมีโดเมนเป็นจำนวนจริง (real number domain) และจะเชื่อมโยงไปสู่การศึกษาตรีโกณมิติจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และรูปสามเหลี่ยมใดๆ

5.1 มุมและขนาดของมุม (angles and measurement)

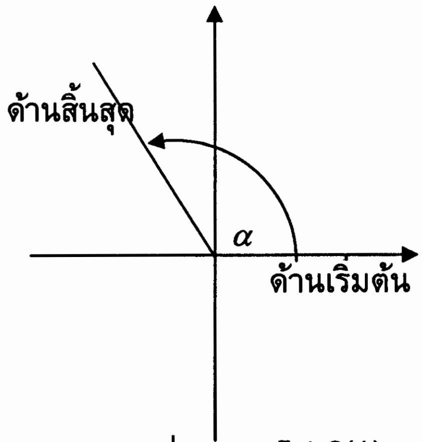
ในเรขาคณิต เกี่ยวข้องกับมุม ที่สร้างจากด้านของรูปสามเหลี่ยม ในรูปสามเหลี่ยมเราจำเป็นต้องมีมโนทัศน์ต่าง ๆ เกี่ยวกับมุม มุมที่เราใช้จะมีข้อจำกัดน้อยมาก นอกจากไม่มีข้อจำกัดเรื่องขนาด แล้วยังสามารถเป็นได้ทั้งบวกและลบ

มุมเป็นรูป (shape) เรขาคณิต ที่สร้างจากรังสี (ray) สองรังสีหรือ กึ่งเส้น (half-lines) ที่มีจุดปลายร่วมกัน นอกจากนั้นเราอาจคิดถึงมุมว่าเป็นผลของการหมุน (rotation) ของรังสีรอบจุดปลายดัง ภาพประกอบ 5.1-1

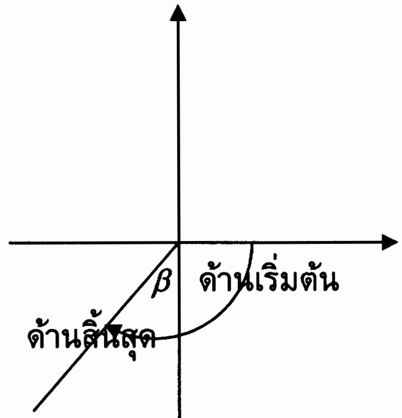


ภาพประกอบ 5.1-1

เรามักจะวางมุมบนระบบจุดพิกัดฉากในตำแหน่งมาตรฐาน (standard position) เพื่อให้ด้านเริ่มต้นวางอยู่บนแกน X และหมุนแขนที่จุดปลายอยู่ที่จุดกำเนิด ในรูป 5.1-2(1) มุม α เป็นผลจากการหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เรากล่าวว่า α เป็นมุมบวก ในภาพประกอบ 5.1-2(2) มุม β เกิดจากการหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา เรากล่าวว่า β เป็นมุมลบ



ภาพประกอบ 5.1-2(1)

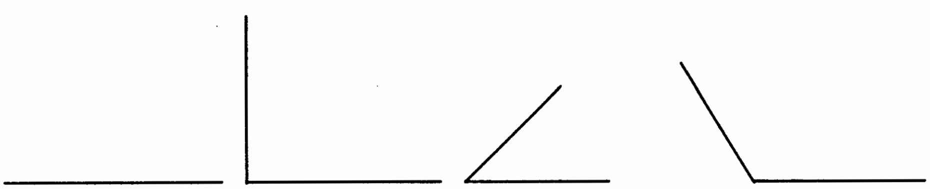


ภาพประกอบ 5.1-2(2)

5.1.1 การวัดมุมเป็นองศา (Degree Measure)

มุมที่เกิดจากการหมุนแขนของมุมรอบจุดจุดหนึ่งได้หนึ่งรอบพอดี เรียกมุมที่ได้ว่ามีขนาด 360 องศา (360°) มุมที่เกิดจากการแบ่งมุมรอบจุดศูนย์กลางเป็น 360 ส่วนเท่า ๆ กัน นั่นคือ แบ่งมุมรอบจุดศูนย์กลางเป็น $\frac{1}{360}$ ของขนาดของมุมรอบจุด เรียกมุมที่ได้ว่ามีขนาด 1 องศา (1°) สัญลักษณ์ $^{\circ}$ ใช้แสดงองศา

มุมมีชื่อเฉพาะเช่น ภาพประกอบ 5.1.1-1 แสดงมุมตรง (straight angle) มุมฉาก (right triangle) มุมแหลม (acute angle) และมุมป้าน (obtuse angle) ในขณะที่เรากล่าวถึงในตอนต้นว่า ด้านของมุมสามารถเป็นรังสีหรือส่วนของเส้นตรง



ภาพประกอบ 5.1.1 -1

(1) มุมตรง	(2) มุมฉาก	(3) มุมแหลม	(4) มุมป้าน
หมุนไป $\frac{1}{2}$ รอบ	หมุนไป $\frac{1}{4}$ รอบ	$0 < \theta < 90$	$90 < \theta < 180$

มุมบวกสองมุมเป็น มุมประกอบหนึ่งมุมฉาก (complementary angle) ถ้าผลบวกเป็น 90^0 และเป็นมุมประกอบสองมุมฉาก (supplementary angle) ถ้าผลบวกเป็น 180^0 องศา

ขนาดของมุมสามารถแบ่งให้ละเอียดลงไปโดยใช้จุดทศนิยม หรือ ลิปดาและวิลิปดา (minutes and seconds) คือ แต่ละองศาแบ่งออกเป็นหกสิบส่วนเท่า ๆ กัน เรียกว่าลิปดา และแต่ละลิปดาแบ่งออกเป็นหกสิบส่วนเท่า ๆ กันเรียกว่าวิลิปดา สัญลักษณ์ที่ใช้แทนลิปดาคือ ´ สัญลักษณ์ที่ใช้แทนวิลิปดาคือ ´´ ดังนั้นเมื่อเขียน $14^0 24' 36''$ จะหมายถึง 14 องศา 24 ลิปดา 36 วิลิปดา

เครื่องคำนวณส่วนใหญ่จะคำนวณองศาด้วยรูปทศนิยม ซึ่งเราอาจเปลี่ยนรูปจากองศา-ลิปดา-วิลิปดาไปเป็นรูปทศนิยม ตัวอย่างเช่น เปลี่ยน $34^0 47' 12''$ เป็นรูปทศนิยมได้ดังนี้

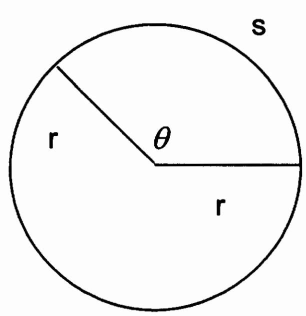
$$34^0 47' 12'' = (34 + \frac{47}{60} + \frac{12}{3600})^0 = 34.787^0 \text{ (ทศนิยมสามตำแหน่ง)}$$

การวัดมุมเป็นองศาใช้กันอย่างกว้างขวางในสาขาวิศวกรรม การสำรวจ และการเดินเรือ หน่วยอีกหน่วยหนึ่งของการวัดมุม เรียกว่า เรเดียน (radian) ซึ่งเหมาะสมกว่าสำหรับงานด้านวิทยาศาสตร์ และการประยุกต์ทางวิศวกรรม

5.1.2 การวัดมุมเป็นเรเดียน (Radian Measure)

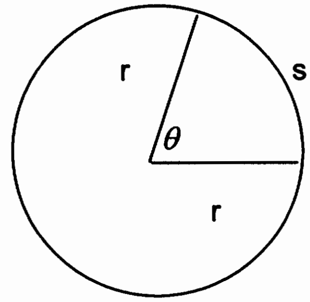
ถ้าจุดยอดของมุม θ วางที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมี $r > 0$ และความยาวของส่วนโค้งบนเส้นรอบวงเป็น s แล้ว การวัดมุมเป็นเรเดียนของ θ กำหนดโดย

$\theta = \frac{s}{r}$ เรเดียน



ถ้า s = r แล้ว

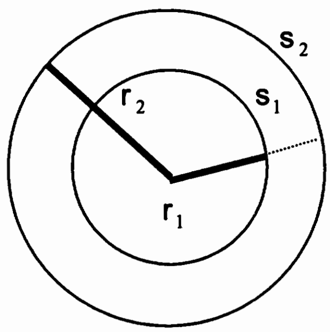
$\theta = \frac{r}{r} = 1$ เรเดียน



1 เรเดียน

สังเกตว่า s และ r ต้องวัดในหน่วยเดียวกัน

สำหรับเรขาคณิตในระนาบ ถ้า r_1 และ r_2 เป็นรัศมีของวงกลมร่วมจุดศูนย์กลางเดียวกัน และมุมที่จุดศูนย์กลาง θ เดียวกัน



และ s_1 และ s_2 เป็นความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุม θ ของแต่ละวงกลม

แล้ว $\frac{s_1}{r_1} = \frac{s_2}{r_2}$

ดังนั้น เราสรุปว่าการวัดมุมเป็นเรเดียน ไม่ขึ้นกับขนาดของวงกลม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาขนาดของมุมเป็นเรเดียน ของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมที่ความยาวส่วนโค้งที่รองรับมุมยาว 29 เซนติเมตร วงกลมมีรัศมี 5 เซนติเมตร

วิธีทำ $\theta = \frac{s}{r} = \frac{29}{5} = 5.8$ เรเดียน

หมายเหตุ หน่วยความยาวของส่วนโค้ง และรัศมีตัดกันไป ดังนั้นเราอาจเขียนจำนวนโดยละหน่วยได้ ยกเว้นต้องการย้ำโดยเฉพาะเจาะจง เพื่อให้ทราบว่าเป็นการวัดมุมเป็นเรเดียน

5.1.3 การแปลงขนาดของมุมจากเรเดียนเป็นองศา และจากองศาเป็นเรเดียน

การวัดมุมเป็นเรเดียน ความยาวส่วนโค้งบนเส้นรอบวง ยาว s หน่วย ของมุมที่เกิดจากการหมุนแขนรอบจุดหนึ่งรอบ (360^0) ของวงกลมรัศมี r หน่วย นั่นคือ $s = 2\pi r$

ดังนั้น $\theta = \frac{s}{r} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน

และเราสรุปว่า การวัดมุมสองแบบนี้สัมพันธ์กันโดย $360^0 = 2\pi$ เรเดียน

หรือมุมของการหมุนแขนของมุมไปครึ่งรอบวงกลม (180^0) เป็น $180^0 = \pi$ เรเดียน

ความสัมพันธ์อื่น ๆ เช่นนี้

$$90^0 = \frac{180^0}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

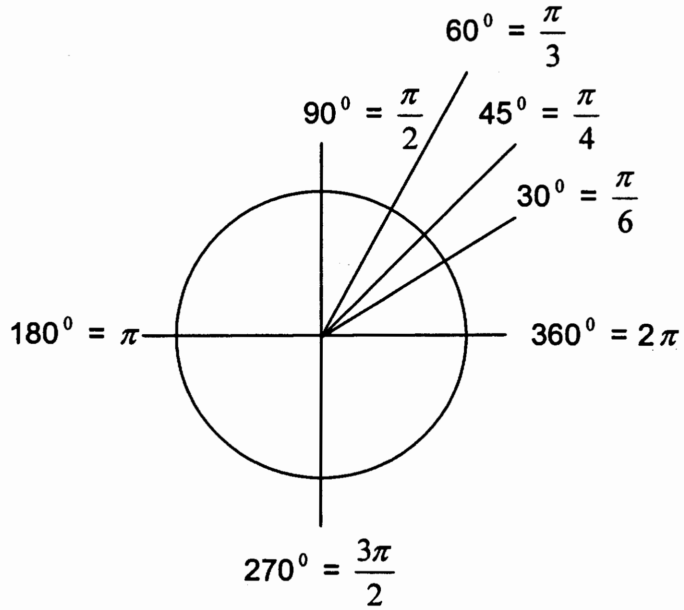
$$45^0 = \frac{180^0}{4} = \frac{\pi}{4} \text{ เรเดียน}$$

$$30^0 = \frac{180^0}{6} = \frac{\pi}{6} \text{ เรเดียน}$$

$$60^0 = \frac{180^0}{3} = \frac{\pi}{3} \text{ เรเดียน}$$

$$270^0 = \frac{3}{2}(180^0) = \frac{3\pi}{2} \text{ เรเดียน}$$

เราอาจแสดงผลจากที่กล่าวข้างต้นดังรูป เพื่อให้ง่ายต่อการอ้างอิง



5.1.4 การเปลี่ยน มุมจากเรเดียนเป็นองศา

ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลาง θ เรเดียน เปลี่ยนเป็นองศาได้ดังนี้

> π เรเดียน เท่ากับมุม 180 องศา
>
> θ เรเดียน เท่ากับมุม $\frac{180\theta}{\pi}$ องศา

5.1.5 การเปลี่ยนมุมจากองศาเป็นเรเดียน

ถ้ามุมที่จุดศูนย์กลาง θ องศา เปลี่ยนเป็นเรเดียนได้ดังนี้

> 180 องศา เท่ากับ π เรเดียน
>
> θ องศา เท่ากับ $\frac{\pi\theta}{180}$ เรเดียน

ตัวอย่างที่ 3 จงหา

1) ขนาดของมุมเป็นเรเดียนของมุม 300^0

2) หาขนาดของมุมเป็นองศาของมุม $\frac{7\pi}{3}$ เรเดียน

วิธีทำ 1) มุมขนาด θ องศา = $\frac{\pi\theta}{180}$ เรเดียน

ดังนั้นมุมขนาด 300 องศา = $\frac{\pi}{180}(300)$ เรเดียน

= $\frac{5}{3}\pi$ เรเดียน

นั่นคือ ขนาดของมุม 300^0 เท่ากับ $\frac{5}{3}\pi$ เรเดียน

2) มุม π เรเดียน เท่ากับมุม 180 องศา

มุม $\frac{7\pi}{3}$ เรเดียน = $\frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{3}$ องศา

= 420 องศา

นั่นคือ ขนาดของมุม $\frac{7\pi}{3}$ เรเดียน เท่ากับ 420^0

ตัวอย่างที่ 4 จงหาขนาดของมุมให้ได้ทศนิยมสามตำแหน่ง

1) ขนาดของมุมเป็นเรเดียนของมุม $45^0\ 12'$

2) หาขนาดของมุมเป็นองศาของมุม 4 เรเดียน

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $45^0\ 12' = 45.2^0$

180 องศา $= \pi$ เรเดียน

45.2องศา $= \dfrac{\pi \times 45.2}{180}$ เรเดียน

$= 0.251\pi$

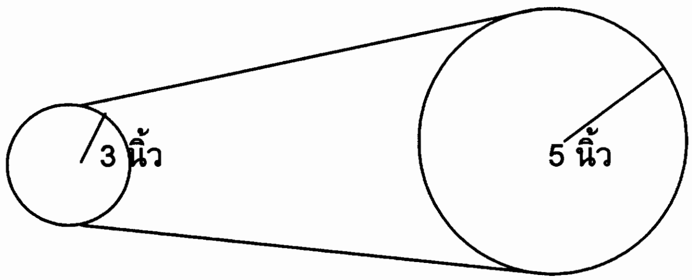
2) เนื่องจาก π เรเดียน = 180 องศา

4 เรเดียน $= \dfrac{4 \times 180}{\pi}$ องศา

= 229.182 องศา (แทน π ด้วย 3.1416)

ตัวอย่างที่ 5 สายพานเชื่อมต่อวงล้อที่มีรัศมี 3 นิ้ว และวงล้อรัศมี 5 นิ้ว ถ้าวงล้อใหญ่หมุนไปได้ 10 เรเดียน วงล้อเล็กจะหมุนไปได้กี่เรเดียน

วิธีทำ



วงล้อใหญ่มีเส้นรอบวงยาว $2\pi R = 2\pi(5) = 10\pi$ นิ้ว

วงล้อเล็กมีเส้นรอบวงยาว $2\pi r = 2\pi(3) = 6\pi$ นิ้ว

เนื่องจากวงล้อใหญ่หมุนไปเป็นมุม 10 เรเดียน

มุม 2π เรเดียน รองรับความยาวเส้นรอบวง 10π หน่วย

มุม 10 เรเดียน จะรองรับความยาวเส้นรอบวง $\dfrac{10\pi \times 10}{2\pi} = 50$ หน่วย

ดังนั้นสายพานเคลื่อนที่ไป 50 หน่วย

วงล้อเล็กมีเส้นรอบวงยาว 6π หน่วย รองรับมุม 2π เรเดียน

เส้นรอบวงยาว 50 หน่วย รองรับมุม $\frac{50\times 2\pi}{6\pi}$ เรเดียน

$\frac{50}{3}$ เรเดียน

นั่นคือวงล้อเล็กหมุนไปได้เป็นมุม $\frac{50}{3}$ เรเดียน

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงเปลี่ยนการวัดขนาดของมุมจากองศา เป็นเรเดียน

1) 30^0	2) 75^0	3) 135^0
4) 200	5) -150	6) -450^0
7) 405^0	8) 120	9) 90
10) -270^0		

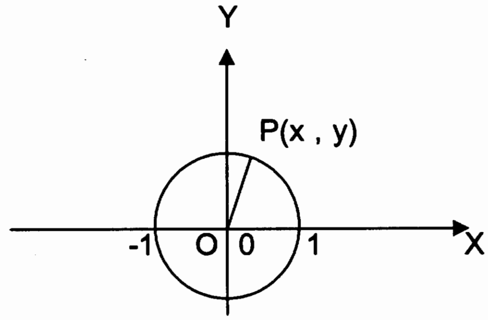
2. จงเปลี่ยนการวัดขนาดของมุมจากเรเดียน เป็นองศา

1) $\frac{\pi}{4}$	2) $\frac{\pi}{3}$	3) $-\frac{\pi}{2}$
4) $\frac{-7\pi}{3}$	5) -5π	6) 1.72
7) 24.95	8) -16.42	

3. จงหารัศมีของวงกลมถ้ามุมที่จุดศูนย์กลางมีขนาด $\frac{2\pi}{3}$ เรเดียน รองรับส่วนโค้งยาว 6 เมตร
4. วงกลมรัศมี 150 เซนติเมตร จงหาว่าส่วนโค้งที่รองรับมุมที่จุดศูนย์กลางขนาด 45^0 มีความยาวเท่าไร

5.2 ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ (The sine , cosine and tangent functions)

วงกลมหนึ่งหน่วย (The unit circle)



เมื่อ P(x , y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ O(0 , 0) ระยะ OP หาได้จาก $\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = 1$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง จะได้ $x^2 + y^2 = 1$

สมการของวงกลมหนึ่งหน่วยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ จุดกำเนิด คือ $x^2 + y^2 = 1$

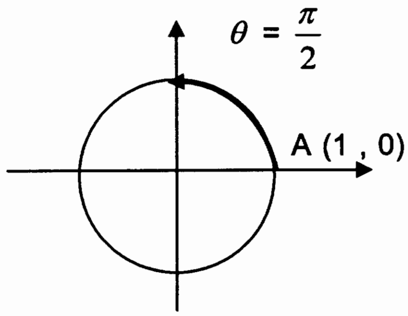
เนื่องจากความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมเท่ากับ $2\pi r$ หน่วย ดังนั้นวงกลม 1 หน่วยจึงมีความยาวรอบรูป เท่ากับ $2\pi(1) = 2\pi$ หน่วย

เนื่องจาก วงกลมใด ๆ มีมุมรอบจุดศูนย์กลาง 2π เรเดียน ดังนั้นวงกลมหนึ่งหน่วยจะมีมุมรอบจุดศูนย์กลาง 2π เรเดียน และมีความยาวรอบรูป 2π หน่วย

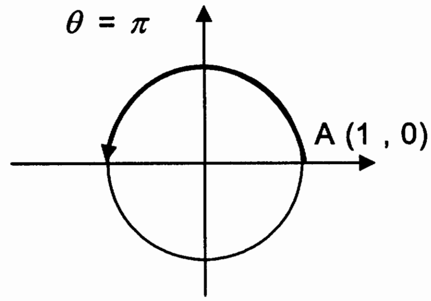
วงกลมหนึ่งหน่วย ที่มีขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลาง s เรเดียน จะรองรับส่วนโค้งยาว s หน่วย ในทางกลับกัน วงกลมหนึ่งหน่วยที่มี ความยาวของส่วนโค้ง s หน่วย จะรองรับมุม s เรเดียน

กำหนดจำนวนจริง θ (ทีตา) แสดงระยะจาก (1 , 0) ทวนเข็มนาฬิกาหรือตามเข็มนาฬิกา ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วยไปถึงจุด (x , y) ถ้า θ แสดงระยะทวนเข็มนาฬิกาจาก จุด (1 , 0) ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยถึงจุด (x , y) จะกำหนด θ เป็นจำนวนบวก ถ้า θ แสดงระยะตามเข็มนาฬิกาจาก จุด (1 , 0) ไปตามส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยถึงจุด (x , y) จะกำหนด θ เป็นจำนวนลบ

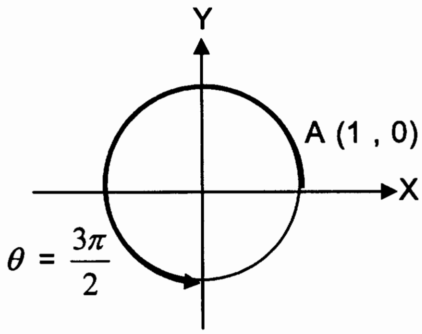
พิจารณาความยาวของส่วนโค้ง θ ที่วัดจากจุด A(1 , 0) ทวนเข็มนาฬิกาไปตามส่วนโค้งของวงกลมไปยังจุด P ในแต่ละรูป



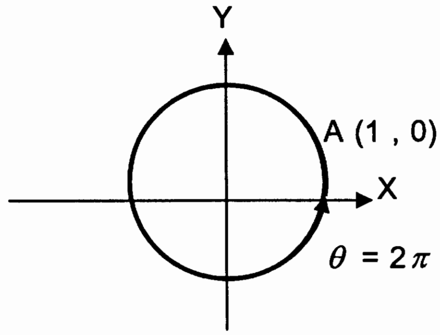
ส่วนโค้ง θ ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย



ส่วนโค้ง θ ยาว π หน่วย



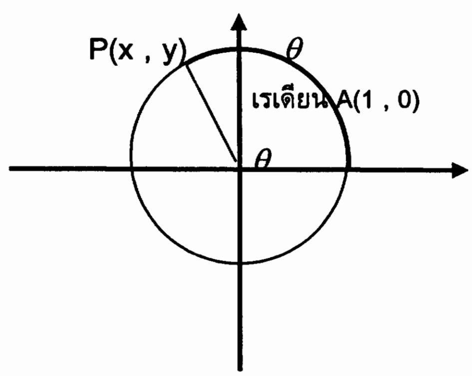
ส่วนโค้ง θ ยาว $\frac{3\pi}{2}$ หน่วย



ส่วนโค้ง θ ยาว 2π หน่วย

5.2.1 ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

รูปต่อไปนี้แสดงมุมเป็นเรเดียนได้ θ เรเดียน สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยมุม 2π เรเดียนรองรับความยาวบนเส้นรอบวง 2π หน่วย ดังนั้นเมื่อวัดมุมได้ θ เรเดียน จะรองรับความยาวของส่วนโค้ง θ หน่วย



ในการวัดขนาดของมุมและการวัดความยาวบนส่วนโค้งของวงกลมหนึ่งหน่วยจากจุด A(1 , 0) ไปยัง P(x , y) ใด ๆ บนเส้นรอบวง ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกาจะกำหนด θ เป็นบวก ถ้าวัดทวนเข็มนาฬิกา จะกำหนด θ เป็นลบ เช่น วัดระยะจาก (1 , 0) ไปสิ้นสุดที่ (0 , 1) ได้ระยะทาง $\frac{1}{4}$ ของรอบ จะได้ $\theta = \frac{\pi}{2}$ วัดระยะจาก (1 , 0) ไปสิ้นสุดที่ (0 , -1) ได้ระยะทาง $\frac{1}{4}$ ของรอบ จะได้ $\theta = -\frac{\pi}{2}$

มีฟังก์ชันตรีโกณมิติหกฟังก์ชันที่นิยามจากพิกัดของจุด P(x , y) แต่ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติสาม ฟังก์ชัน คือ ฟังก์ชันไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) และแทนเจนต์ (tangent) ซึ่งจะเขียนแทนด้วย sin , cos และ tan ตามลำดับ ส่วนสามฟังก์ชันที่เหลือเป็นส่วนกลับของสามฟังก์ชันแรก ซึ่งจะกล่าวในหัวข้อต่อ ๆ ไป เราจะนิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติสามฟังก์ชันแรกดังนี้

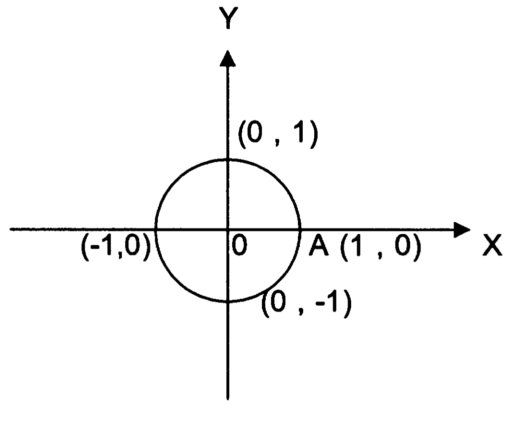
5.2.2 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้า P(x , y) เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมีระยะจาก A(1 , 0) ถึง P(x , y) เป็น θ แล้ว

$$\boxed{\sin\theta = y\ ,\ \cos\theta = x \text{ และ } \tan\theta = \frac{y}{x}\ ,\ x \neq 0}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา sine และ cosine ของจำนวนจริง 0 , $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ และ 2π

วิธีทำ



ถ้า P ยังอยู่ที่จุด A แล้ว $\theta = 0$ จะได้ $\sin 0 = y = 0$, $\cos 0 = x = 1$

ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด P(0 , 1) แล้ว $\theta = \frac{\pi}{2}$ จะได้ $\sin \frac{\pi}{2} = y = 1$, $\cos \frac{\pi}{2} = x = 0$

ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด P(-1 , 0) แล้ว $\theta = \pi$ จะได้ $\sin \pi = y = 0$, $\cos \pi = x = -1$

ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด P(0 , -1) แล้ว $\theta = \frac{3\pi}{2}$ จะได้ $\sin \frac{3\pi}{2} = y = -1$, $\cos \frac{3\pi}{2} = x = 0$

ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด P(1 , 0) แล้ว $\theta = 2\pi$ จะได้ $\sin 2\pi = y = 0$, $\cos 2\pi = x = 1$

ตัวอย่างที่ 2 ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด $P\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ จงหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

วิธีทำ ถ้า θ แทนความยาวของส่วนโค้งทวนเข็มนาฬิกาจาก A ถึงจุด $P\left(-\frac{3}{4},-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$ แล้ว จะได้ $\sin\theta = y = -\frac{\sqrt{7}}{4}$, $\cos\theta = x = -\frac{3}{4}$

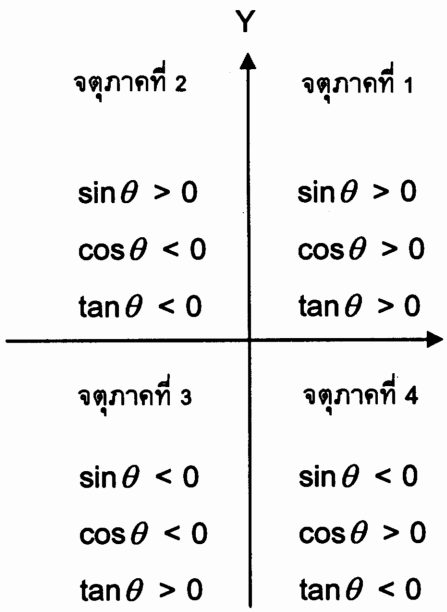
5.2.3 โดเมน และเรนจ์ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากบทนิยาม จะเห็นได้ว่าโดเมนของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ เป็นเซตของทุกจำนวนจริง แต่โดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์ไม่นิยามเมื่อ x = 0 สำหรับวงกลมหนึ่งหน่วยสอดคล้องกับความยาวของ $\theta = \pm(2k\pi + \frac{\pi}{2})$ หรือ $\theta = \pm(2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก หรือเมื่อ $\theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

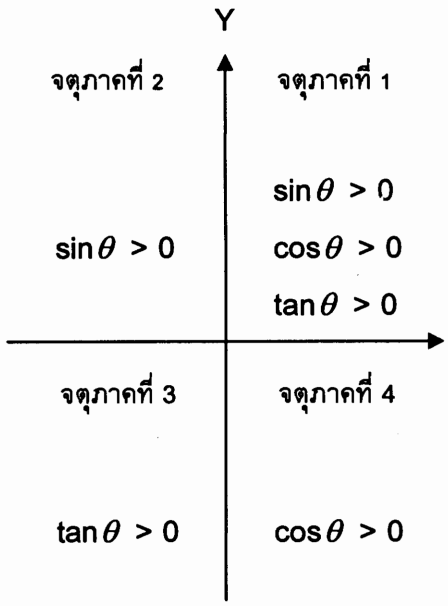
เมื่อพิจารณาจากบทนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราจะเห็นว่าค่าของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สอดคล้องกับพิกัดของจุด บนวงกลมหนึ่งหน่วย เนื่องจากค่า x และ y ของพิกัดของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยจะมีค่าไม่น้อยกว่า -1 และมีค่าไม่เกิน 1 นั่นคือ $|\sin\theta| \leq 1$ และ $|\cos\theta| \leq 1$

5.2.4 เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric functions signs)

เครื่องหมายของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ในแต่ละจตุภาค (quadrants) แสดงดังรูป 5.2.4-1 ซึ่งได้จากบทนิยาม ยกตัวอย่าง เนื่องจากทั้ง พิกัด x(x – coordinate) และพิกัด y(y – coordinate) ของจุดใด ๆ ในจตุภาคที่ 3 เป็นลบ เครื่องหมายของฟังก์ชัน ไซน์ และโคไซน์ เป็นลบทั้งคู่ เนื่องจากฟังก์ชันแทนเจนต์เป็นอัตราส่วนของ $\frac{y}{x}$ ดังนั้นเครื่องหมายของฟังก์ชันแทนเจนต์ในจตุภาคที่ 3 เป็นบวก



รูป 5.2.4-1(1)



รูป 5.2.4-1(2)

ตัวอย่างที่ 1 เมื่อ θ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ A(1 , 0) จงตรวจสอบว่า ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่กำหนดให้ในแต่ละข้อ มีจุดปลาย θ ตกอยู่ในจตุภาคใด

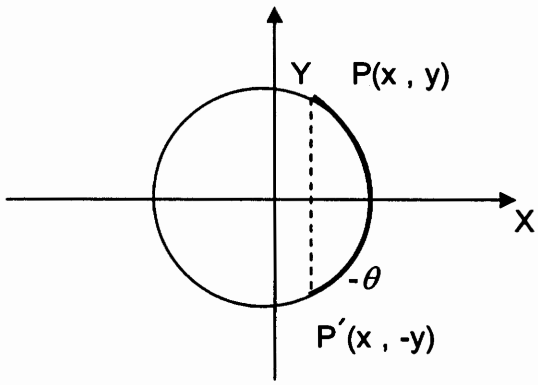
1) $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ 2) $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta > 0$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$ นั่นคือ $\cos\theta < 0$ แสดงว่า ค่า $y > 0$ และค่า $x < 0$ ดังนั้น จุดปลาย θ ตกอยู่ในจตุภาคที่ 2

2) เนื่องจาก $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta > 0$ แสดงว่า ค่า $y < 0$ และค่า $x > 0$ ดังนั้น จุดปลาย θ ตกอยู่ในจตุภาคที่ 4

5.2.5 ฟังชันตรีโกณมิติของจำนวนจริง (-θ)

เราสามารถใช้การสมมาตรของวงกลมหนึ่งหน่วยเพื่อหา sin (-θ) และ cos(-θ)



ภาพประกอบ 5.2.5-1

จากภาพประกอบ 5.2.5-1 เราจะเห็นว่าส่วนโค้ง θ และส่วนโค้ง (-θ) ซึ่งยาวเท่ากัน สอดคล้องกับจุด P และ P´ ซึ่งมีพิกัด x เดียวกัน แต่พิกัด y เป็นจำนวนตรงข้ามกัน ดังนั้น

	$\sin\theta = y$ และ $\sin(-\theta) = -y = -(\sin\theta)$
หรือ	$\sin(-\theta) = -(\sin\theta)$ เช่นเดียวกัน
	$\cos\theta = x = \cos(-\theta)$ และ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$
เมื่อ θ เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในโดเมนของฟังก์ชัน	

ตัวอย่างที่ 2 1) กำหนด $\sin(\pi/6) = 1/2$ จงหา $\sin(-\pi/6)$

2) กำหนด $\cos 45^0 = \sqrt{2}/2$ จงหา $\cos(-45^0)$

วิธีทำ 1) $\sin(-\pi/6) = -\sin(\pi/6)\ -1/2$

2) $\cos(-45^0) = \cos 45^0 = \sqrt{2}/2$

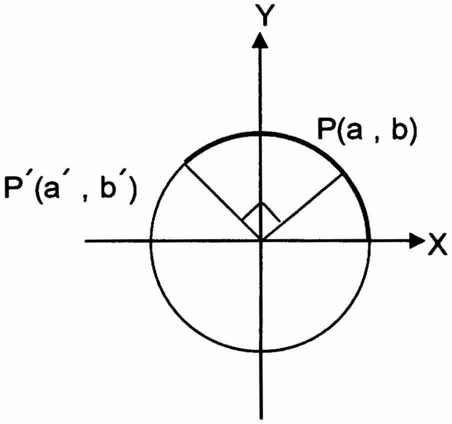
5.2.6 สมมาตรของวงกลม

ทฤษฎีบทต่อไปนี้สามารถเชื่อมโยงกับผลการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

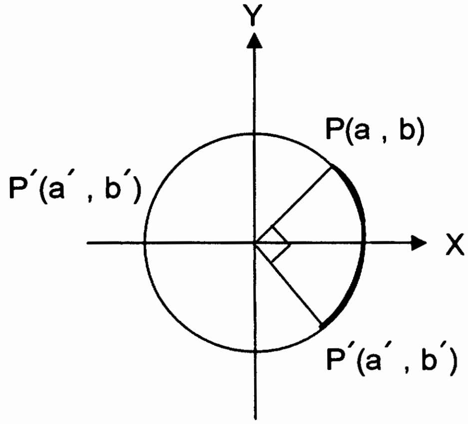
ถ้า P(a , b) และ P´(a´ , b´) อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยที่สมนัยกับจำนวนจริง θ และ $\theta \pm \pi/2$ ตามลำดับ ดังนั้น Y

1) (a´ , b´) = (-b , a) หรือ

2) (a´ , b´) = (b , - a)



P´(a´ , b´) อยู่ที่จุดปลาย $\theta + \dfrac{\pi}{2}$



P´(a´ , b´) อยู่ที่จุดปลาย $\theta - \dfrac{\pi}{2}$

การพิสูจน์ให้ทำในแบบฝึกหัด เราจะใช้ผลนี้ในตัวอย่างต่อไป

ตัวอย่างที่ 3 $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่สมนัยกับจำนวนจริง θ

จงหา 1) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2})$ 2) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$ 3) $(-\theta + \frac{\pi}{2})$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $P(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 นั่นคือจุดปลาย θ อยู่ใน จตุภาคที่ 1 ดังนั้น จุดปลาย $\theta + \frac{\pi}{2}$ จะอยู่ในจตุภาคที่ 2 ให้จุดปลายอยู่ที่ P´(a´ , b´) ซึ่งค่าของฟังก์ชันไซน์เป็นบวก ค่าของฟังก์ชันโคไซน์เป็นลบ

ดังนั้น $P'(a', b') = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

จะได้ (1) $\sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = y = \frac{1}{2}$

(2) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(3) เนื่องจาก $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 นั่นคือจุดปลาย θ อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น จุดปลาย $-\theta$ จะอยู่ในจตุภาคที่ 4 มีพิกัดของจุดปลายเป็น P $(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ จะได้ว่า $(-\theta + \frac{\pi}{2})$ จะอยู่ในจตุภาคที่ 1 มีจุดปลาย อยู่ที่ $P'(a', b')$ และค่าของ $P'(a', b')$ $= (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ จะได้ $\cos(-\theta + \frac{\pi}{2}) = x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

5.2.7 เอกลักษณ์ (Identities)

ตรีโกณมิติมักเกี่ยวข้องกับการใช้เอกลักษณ์ (identities) นั่นคือสมการที่เป็นจริงสำหรับทุกค่าของตัวแปรในโดเมน เอกลักษณ์มีประโยชน์ในการทำให้สมการอยู่ในรูปอย่างง่าย หรือแปลงให้อยู่ในรูปอื่น ๆ สำหรับการคิดคำนวณ เราจะเริ่มจากเอกลักษณ์มูลฐานทางตรีโกณมิติสองเอกลักษณ์

เนื่องจากพิกัดของ (x , y) ของทุก ๆ จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยสอดคล้องกับสมการ $x^2 + y^2 = 1$ เมื่อแทน $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ จะได้ $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ นิพจน์ที่อยู่ในรูป $(\sin\theta)^n$ หรือ $(\cos\theta)^n$ นี้ปกติจะเขียนแทนด้วย $\sin^n\theta$ หรือ $\cos^n\theta$ ตามลำดับ

เอกลักษณ์ข้างต้นจึงเขียนเป็น

$$\boxed{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$$

เราสามารถเขียนเอกลักษณ์ข้างต้นในรูป

$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

หรือ $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

เนื่องจาก $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $x \neq 0$ เมื่อแทน $\sin\theta$ ด้วย y และแทน $\cos\theta$ ด้วย x จะได้

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ;\ \cos\theta \neq 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ } \theta \text{ ในโดเมนของฟังก์ชันแทนเจนต์}}$$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ และจุดปลาย θ อยู่ในจตุภาคที่ 3 จงหา $\sin\theta$ และ $\tan\theta$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ จะได้

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{16}{25} + \sin^2\theta = 1$$

ดังนั้น $$\sin^2\theta = 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

$$\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$$

เนื่องจากจุดปลาย θ อยู่ในจตุภาคที่ 3 ดังนั้น ค่าของ $\sin\theta$ เป็นลบ นั่นคือ

$$\sin\theta = -\frac{3}{5}$$

ดังนั้น $$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\left(-\frac{3}{5}\right)}{\left(-\frac{4}{5}\right)} = \frac{3}{5}$$

ตัวอย่างที่ 5 จงแสดงว่า $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

วิธีทำ เนื่องจาก $$1 + \tan^2\theta = 1 + \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\cos^2\theta + \sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

เนื่องจาก $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

ดังนั้น $$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

$$= \sec^2\theta$$

สำหรับในแบบฝึกหัดที่จะกล่าวต่อไป จุด P บนวงกลมหนึ่งหน่วย หมายถึงจุดปลายของส่วนโค้งที่ยาว $|\theta|$ หน่วย ที่วัดจากจุด (1 , 0) ไปยังจุด P ซึ่งต่อไปจะกล่าวสั้น ๆ ว่า จุด P สมนัยกับจำนวนจริง θ

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงตรวจสอบว่าจุดปลายของส่วนโค้งหรือด้านสิ้นสุดของมุมอยู่ในจตุภาคใด

1) $\theta = \frac{4\pi}{3}$ 2) $\theta = -\frac{\pi}{3}$

3) $\theta = 210^{0}$ 4) $\theta = -185^{0}$

5) $\theta = 280^{0}$ 6) $\theta = \frac{3\pi}{4}$

7) $\theta = \frac{11\pi}{4}$ 8) $\theta = \frac{10\pi}{6}$

2. ในข้อย่อย 2.1-2.4 ในวงกลมหนึ่งหน่วย จุด P สมนัยกับ จำนวนจริง θ จงหา $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ เมื่อกำหนด

1) $P(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$ 2) $P(\frac{5}{13},-\frac{12}{13})$

3) $P(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ 4) $P(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$

3. ในข้อย่อย 3.1-3.6 จงหาจตุภาคซึ่งจุดปลาย θ ตกอยู่ และเป็นไปตามเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $\sin\theta > 0$ และ $\cos\theta < 0$ 2) $\sin\theta > 0$ และ $\tan\theta < 0$

3) $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta < 0$ 4) $\sin\theta < 0$ และ $\tan\theta < 0$

5) $\sin\theta < 0$ และ $\cos\theta > 0$ 6) $\tan\theta < 0$ และ $\mathrm{con}\,\theta < 0$

4. ในข้อย่อย 4.1-4.6 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติเมื่อแทน θ ด้วย $-\theta$ [ยกตัวอย่าง $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ หา $\sin-\theta$]

1) $\tan\theta = \frac{3}{2}$ 2) $\tan\theta = \sqrt{3}$

3) $\sin\theta = 1$ 4) $\tan\theta = 1$

5) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 6) $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

5. ในวงกลมหนึ่งหน่วย จุด $P(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ สมนัยกับ จำนวนจริง θ จงใช้สมมาตรของวงกลม หาพิกัดของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่สมนัยกับจำนวนจริง

1) $\theta + \pi$ 2) $\theta + \frac{\pi}{2}$

3) $-\theta$ 4) $-\theta + \pi$

6. วงกลมหนึ่งหน่วย มี $P\left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ สมนัยกับจำนวนจริง θ จงใช้สมมาตรของวงกลมหาพิกัดของจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่สมนัยกับจำนวนจริง

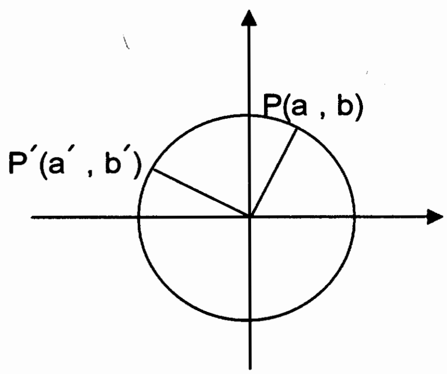
1) $\theta - \pi$ 2) $\theta + \frac{\pi}{2}$

3) $-\theta$ 4) $-\theta - \pi$

7. $P(x , y)$บนวงกลมหนึ่งหน่วย สมนัยกับจำนวนจริง θ ซึ่งจุดปลายตกในจตุภาคที่ 2 จงหา

1) $\sin(\theta - \pi)$ 2) $\cos(\theta + \frac{\pi}{2})$

ในแบบฝึกหัด ข้อ 8-10 จุด $P(a , b)$ และ $P'(a' , b')$ อยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วย ดังรูป



8. จงแสดงว่า $b'/a' = a/b$ (แนะนำ : แสดงว่าเส้น OP และ OP´ ตั้งฉากกัน และตรวจสอบความชันของเส้นทั้งสอง)

9. จงแสดงว่า $b' = \pm a$ และ $a' = \pm b$ (แนะนำ : รัศมี OP และ OP´ มีความยาวเท่ากัน ใช้สูตรระยะทางรวมกับผลในข้อ 8 ข้างต้นนี้แทน สำหรับ b´ และสำหรับ a´)

10. จงแสดงว่า $(a' , b') = (-b , a)$ หรือ $(a' , b') = (b , -a)$ อย่างใดอย่างหนึ่ง (แนะนำ : เริ่มต้นด้วยผลของแบบฝึกหัดข้อ 9. และประยุกต์ผลของแบบฝึกหัดข้อ 8)

ข้อ 11- 16 ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติหาค่าที่บ่งชี้ภายใต้เงื่อนไขที่กำหนดให้

11. $\sin\theta = \frac{4}{5}$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา $\tan\theta$

12. $\cos\theta = -\frac{4}{5}$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา $\tan\theta$

13. $\tan\theta = -\frac{4}{5}$ และ $\cos\theta > 0$

14. $\sin\theta = -\frac{12}{13}$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา $\tan\theta$

15. $\tan\theta = \frac{12}{5}$ และ $\cos\theta < 0$ จงหา $\sin\theta$

16. $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ และ $\sin\theta > 0$ จงหา $\cos\theta$

ข้อ 17-22 ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเปลี่ยนนิพจน์แรกให้เป็นนิพจน์ที่สอง

17. $(\tan\theta)(\cos\theta)$, $\sin\theta$

18. $\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}$, $\cos\theta\cot\theta$

19. $\frac{\sin\theta}{1-\cos^2\theta}$, $\csc\theta$

20. $\frac{\cos^2\theta}{1-\sin\theta}$, $1 + \sin\theta$

21 $\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$, $\cot^2\theta$

22. $\frac{1}{1+\sin\theta} + \frac{1}{1-\sin\theta}$, $2\csc^2\theta$

5.3 ค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

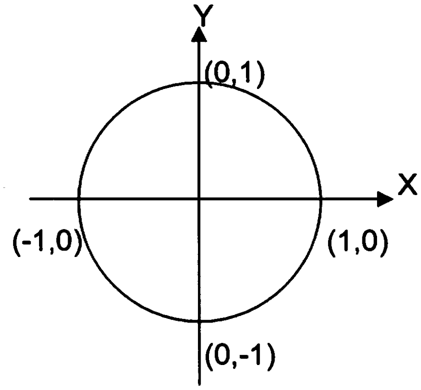
บทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ บ่งชี้ว่าค่าของมันขึ้นอยู่กับพิกัดของจุด P บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งสมนัยกับจำนวนจริง θ ในรูปทั่วไป มันไม่ง่ายที่จะหาพิกัดเหล่านี้ กรณีที่ง่ายที่สุดปรากฏเมื่อจุด P อยู่บนแกนพิกัด

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$ สำหรับ

(1) $\theta = 0$ (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ (3) $\theta = \pi$

(4) $\theta = \frac{3\pi}{2}$ (5) $\theta = 2\pi$ (6) $\theta = -\frac{\pi}{2}$

วิธีทำ หาพิกัดของ P(x , y) ของวงกลมหนึ่งหน่วย เมื่อ $\theta = 0$, $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$ และ 2π ได้ดังนี้



(1) θ = 0 จุดปลายของ θ อยู่ที่ (1 , 0)

ดังนั้น sin 0 = 0 , cos 0 = 1 และ tan 0 = $\frac{\sin 0}{\cos 0}$ = $\frac{0}{1}$ = 0

(2) θ = $\frac{\pi}{2}$ จุดปลายของ θ อยู่ที่ (0 , 1)

ดังนั้น sin $\frac{\pi}{2}$ = 1 , cos$\frac{\pi}{2}$ = 0 และ tan$\frac{\pi}{2}$ = $\frac{1}{0}$ ไม่นิยาม [เนื่องจาก tanθ = $\frac{y}{x}$ ไม่นิยามเมื่อ x = 0]

(3) θ = π มีจุดปลายของ θ อยู่ที่ (-1 , 0)

ดังนั้น sin π = 0 , cosπ = -1 และ tanπ = 0

(4) θ = $\frac{3\pi}{2}$ มีจุดปลายของ θ อยู่ที่ (0 , -1)

ดังนั้น sin$\frac{3\pi}{2}$ = -1 , cos$\frac{3\pi}{2}$ = 0 และ tan$\frac{3\pi}{2}$ = $\frac{-1}{0}$ ไม่นิยาม (เหตุผลเช่นเดียวกับข้อ (2))

(5) θ = 2π มีจุดปลายของ θ อยู่ที่ (1 , 0)

ดังนั้น sin 2π = 0 , cos 2π = 1 และ tan 2π = $\frac{0}{1}$ = 0

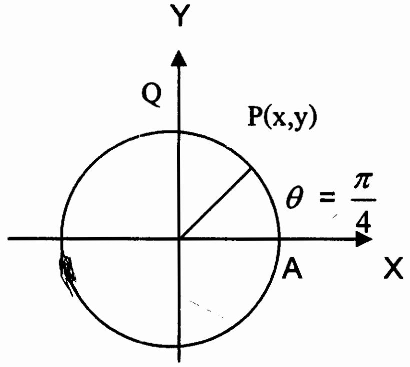
(6) θ = -$\frac{\pi}{2}$ มีจุดปลายของ θ อยู่ที่ (0 , -1)

ดังนั้น sin (-$\frac{\pi}{2}$) = -1 , cos (-$\frac{\pi}{2}$) = 0 และ tan (-$\frac{\pi}{2}$) = $\frac{-1}{0}$ ไม่นิยาม (เหตุผลเช่นเดียวกับข้อ (2))

ปกติในการเขียนฟังก์ชันตรีโกณมิติ เราอาจแทนขนาดของจำนวนจริง θ ด้วยขนาดของมุมที่จุดศูนย์กลางของวงกลมหนึ่งหน่วยที่รองรับ θ ได้ เช่น เมื่อ $\theta = -\frac{\pi}{2}$ มุมที่จุดศูนย์กลางที่รองรับส่วนโค้งคือ $\alpha = -90^0$ จะเขียนแทน $\sin(-\frac{\pi}{2})$ ได้ด้วย $\sin(-90^0)$ นั่นคือ $\sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin(-90^0) = -1$

5.3.1 ฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของจำนวนจริง $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ และ $\frac{\pi}{3}$

5.3.1.1 การหา $\sin\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{\pi}{4}$ และ $\tan\frac{\pi}{4}$ ทำได้ดังนี้



จากรูป P(x , y) เป็นจุดปลายของ $\theta = \frac{\pi}{4}$ โดยที่ส่วนโค้ง AQ ยาว $\frac{\pi}{2}$ หน่วย ดังนั้น P ต้องแบ่ง ส่วนโค้ง AQ เป็นสองส่วนเท่า ๆ กัน นั่นคือ P(x , y) ต้องอยู่บนเส้นตรง y = x เราจึงสามารถกำหนดพิกัดของ P เป็น (a , a)

เนื่องจากทุก ๆ จุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยสอดคล้องกับสมการ

$$x^2 + y^2 = 1$$

เรามี

$$a^2 + a^2 = 1$$

$$2a^2 = 1$$

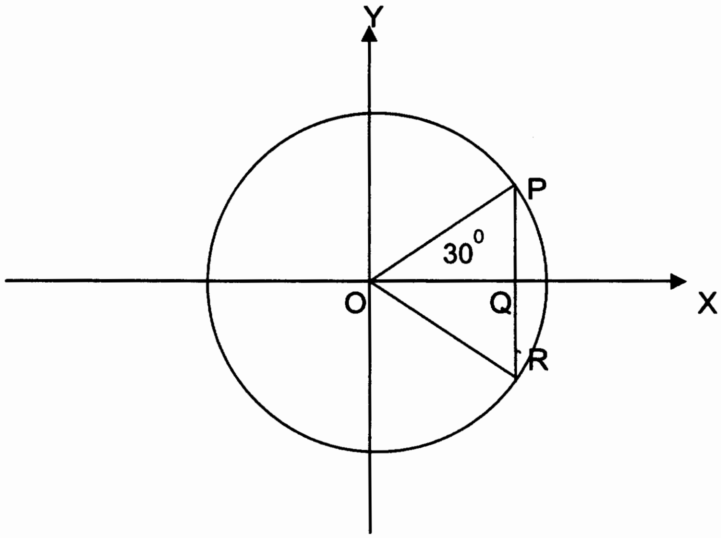
$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

เนื่องจาก P อยู่ในจตุภาคที่ 1 เราสรุปว่า พิกัดของ P คือ $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ดังนั้น

$\sin\frac{\pi}{4} = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\frac{\pi}{4} = x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ และ $\tan\frac{\pi}{4} = 1$

5.3.1.2 การหา $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ และ $\tan\frac{\pi}{6}$

การหา $\sin\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{\pi}{6}$ และ $\tan\frac{\pi}{6}$ ทำได้ดังนี้



รูปสามเหลี่ยม OPR เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวด้านละ 1 หน่วย ดังนั้น PQ ยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย หาระยะ OQ ได้ดังนี้

$$OQ^2 = OP^2 - PQ^2$$

$$= 1^2 - (1/2)^2$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$OQ = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

เนื่องจากจุด P อยู่ในจตุภาคที่ 1 ดังนั้น OQ ต้องมากกว่าศูนย์

นั่นคือ $OQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

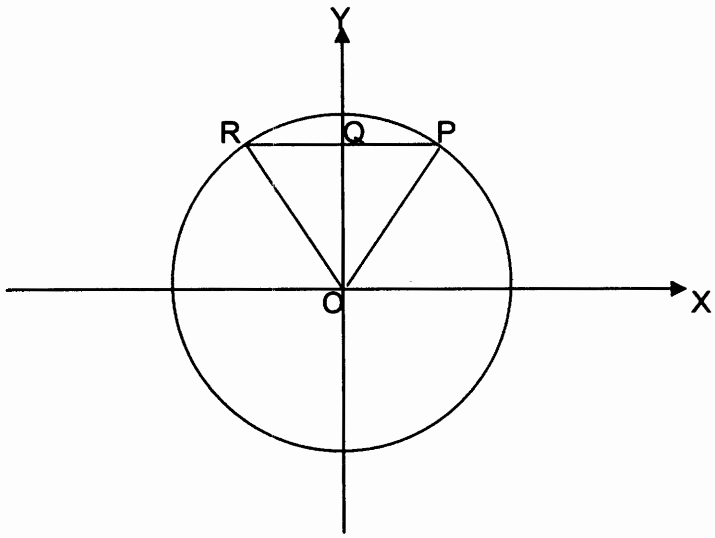
ดังนั้นพิกัดของ P คือ $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

และ $$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

5.3.1.3 การหา $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ และ $\tan\frac{\pi}{3}$

การหา $\sin\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3}$ และ $\tan\frac{\pi}{3}$ ทำได้ดังนี้



รูปสามเหลี่ยม OPR เป็นรูปสามเหลี่ยมด้านเท่า มีด้านยาวด้านละ 1 หน่วย ดังนั้น PQ ยาว $\frac{1}{2}$ หน่วย หาระยะ OQ ได้ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ หน่วย ดังนั้นพิกัดของ P คือ $(\frac{1}{2} , \frac{\sqrt{3}}{2})$

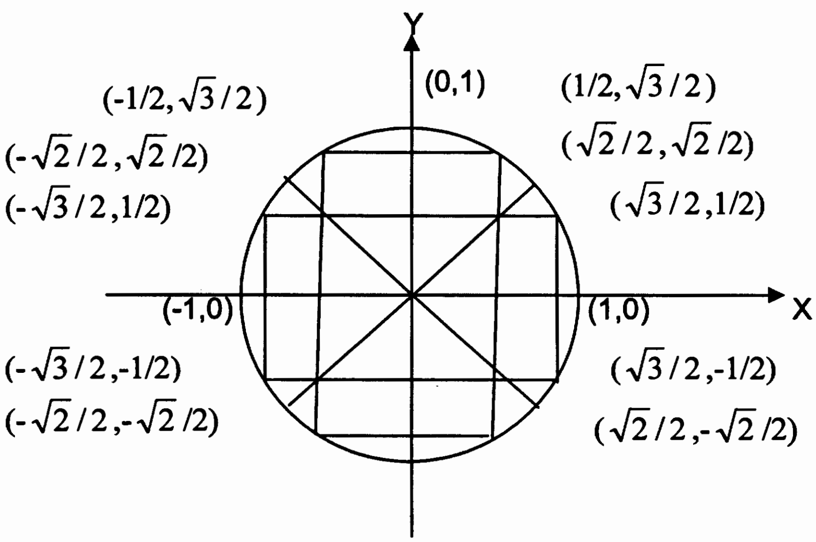
$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} , \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

และ $$\tan\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

ตารางแสดงค่าของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของจำนวนจริง θ ที่ใช้บ่อย ๆ ในช่วง $[0, 2\pi]$

θ	จุด P บนวงกลมหนึ่งหน่วย	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	(1 , 0)	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	(0 , 1)	1	0	-
π	(-1 , 0)	0	-1	0
$\frac{3\pi}{2}$	(0 , -1)	-1	0	-

นอกจากนั้น อาจหาค่าไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ได้จากพิกัดของจุดอื่น ๆ บางจุด ได้จากวงกลมหนึ่งหน่วย ดังนี้



$(-1/2, -\sqrt{3}/2)$ $(0, -1)$ $(1/2, -\sqrt{3}/2)$

5.3.2 ฟังก์ชันที่เป็นคาบ (periodic function)

วงกลมหนึ่งหน่วยมีความยาวเส้นรอบวงเป็น 2π หน่วย เราจึงได้ผลว่า สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ และจุดปลายของจำนวนจริง $\theta + 2\pi n$ บนวงกลมหนึ่งหน่วยเดียวกันเป็นจุดเดียวกันกับจุดปลาย θ สำหรับทุกจำนวนเต็ม n

เนื่องจากค่าของ ฟังก์ชันตรีโกณมิติขึ้นกับจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ตรวจสอบโดย θ เราสามารถสรุปได้ว่า

> สำหรับจำนวนจริง θ ใด ๆ
>
> $\sin(\theta + 2\pi n) = \sin\theta$ และ $\cos(\theta + 2\pi n) = \cos\theta$ สำหรับทุกค่าของจำนวนเต็ม n

ลักษณะของกราฟของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ เป็นลักษณะกราฟของฟังก์ชัน ที่เป็นคาบ และไม่ใช่เรื่องยากที่จะแสดงว่าคาบของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ คือ 2π นั่นคือ 2π เป็นค่าของจำนวนจริงบวก p ที่น้อยที่สุด ซึ่ง $\sin(\theta + p) = \sin\theta$ และ $\cos(\theta + p) = \sin\theta$

5.3.3 ค่าทั่วไปของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

เราหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับค่าเฉพาะบางค่าของ θ ถ้าเราต้องการหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ สำหรับค่าทั่วไปของ θ เราอาจใช้เครื่องคำนวณ หรือใช้ตารางท้ายเล่ม สำหรับการใช้เครื่องคำนวณจะไม่กล่าวในที่นี้ แต่จะกล่าวถึงตารางค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ถ้าเราดูตาราง V ในภาคผนวก เราจะหาค่าของฟังก์ชัน $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับ $0 \leq \theta \leq 1.57$ ในแต่ละช่วง 0.01 ซึ่งสอดคล้อง (ค่าประมาณ) กับ $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ในตอนนี้เราจะเตรียมแสดงว่า ตารางนี้สามารถใช้หา $\sin\theta$ หรือ $\cos\theta$ สำหรับจำนวนจริงใด ๆ ของ θ

ขั้นแรก เราสังเกตว่าถ้า θ เป็นลบ เราสามารถใช้เอกลักษณ์

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ และ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

ทำให้เราสามารถใช้ค่าบวกจากตารางได้

ขั้นต่อไป เราสังเกตว่า ธรรมชาติของคาบของฟังก์ชันตรีโกณมิติช่วยให้เราสามารถหาค่าเมื่อ $\theta > 2\pi$ เราจำเป็นต้องลบ ผลคูณของ 2π จนกระทั่งเหลือค่าอยู่ระหว่าง 0 และ 2π

ขั้นสุดท้าย เราจำเป็นต้องหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ $\pi/2 < \theta < 2\pi$ เราจะแสดงกรณีซึ่ง จุด P(x , y) ของวงกลมหนึ่งหน่วย ตรวจสอบโดย θ ซึ่งอยู่ในจตุภาคที่ 1 จตุภาคที่ 2 จตุภาคที่ 3 และ จตุภาคที่ 4 เรานิยามจำนวนอ้างอิง θ' เกี่ยวข้องกับ θ' เป็นส่วนโค้งที่สั้นที่สุดของวงกลมหนึ่งหน่วยระหว่าง P และแกน X ชัดเจน ถ้า P ไม่ใช่พิกัดบนแกนแล้วจำนวนอ้างอิงน้อยกว่า $\pi/2$ นั่นคือ

$$0 < \theta < \pi/2$$

จำนวนจริง θ ตรวจสอบวงกลมกลมหนึ่งหน่วย $P'(x' , y')$ ในจตุภาคแรก โดยสมมาตรของวงกลมหนึ่งหน่วย ในทั้งสามกรณี เรามี

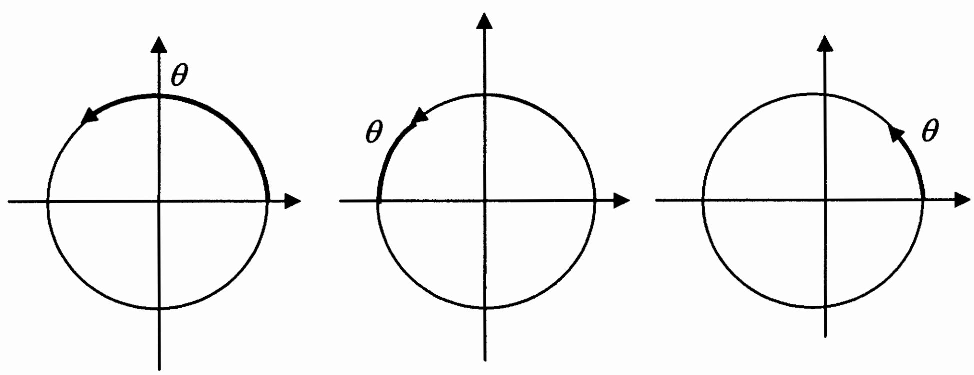
$$x' = |x| \text{ และ } y' = |y|$$

แล้ว $\sin\theta = y$ และ $\sin\theta' = y' = |y|$

$\cos\theta = x$ และ $\cos\theta' = x' = |x|$

ดังนั้น $\sin\theta$ และ $\sin\theta'$ ถ้าต่างกันก็ต่างกันเฉพาะเครื่องหมาย และ $\cos\theta$ และ $\cos\theta'$ ถ้าต่างกันก็ต่างกันเฉพาะเครื่องหมาย ถ้าเราสามารถหา $\sin\theta'$ และ $\cos\theta'$ จากตารางของค่าของ θ' ในช่วง $[0 , \pi/2]$ เราจำเป็นต้องรู้เครื่องหมายในการหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ตามจตุภาคซึ่ง θ ตกอยู่ กระบวนการนี้รู้กันในชื่อ กฎจำนวนอ้างอิง (Reference Number Rule)

ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\cos 2\pi/3$



ขั้นที่ 1 $\theta = 2\pi/3$ ตกอยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังนั้น

$$\theta' = \pi - \theta$$
$$= \pi - 2\pi/3$$
$$= \pi/3$$

ขั้นที่ 2 เนื่องจาก $\pi/3$ เป็นค่าเฉพาะ เรารู้ว่า

$\cos \pi/3 = 1/2$

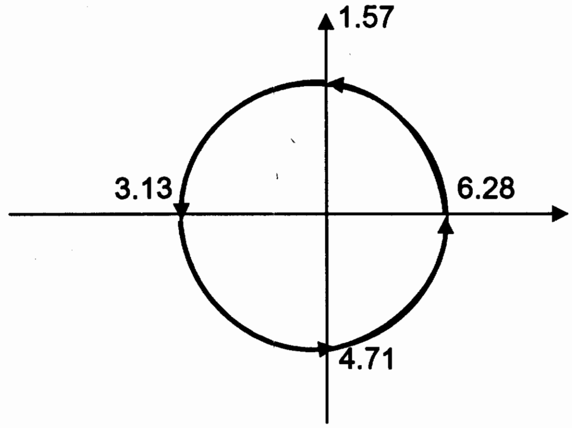
ขั้นที่ 3 $\cos\theta$ เป็นลบเนื่องจากอยู่ในจตุภาคที่ 2 เรามี

$\cos 2\pi/3 = -\cos \pi/3 = -1/2$

ในตัวอย่างที่ 4 ค่า θ กำหนดในพจน์ของ π และให้ค่าพิเศษของ θ เพื่อความสะดวกสบายในการพิจารณาค่า θ เราอาจใช้รูปในการตรวจสอบจตุภาคที่ θ ตกอยู่

ตัวอย่างที่ 5 จงหา sin 3.62 โดยใช้ กฎจำนวนอ้างอิง และตาราง V ในตารางท้ายเล่ม

วิธีทำ



ขั้นที่ 1 เนื่องจาก $\pi < 3.62 < 3\pi/2$

ค่า θ อยู่ในจตุภาคที่ 3 และ ใช้ $\pi \approx 3.14$

$\theta' = \theta - \pi \approx 3.62 - 3.14 = 0.48$

ขั้นที่ 2 จากตาราง V

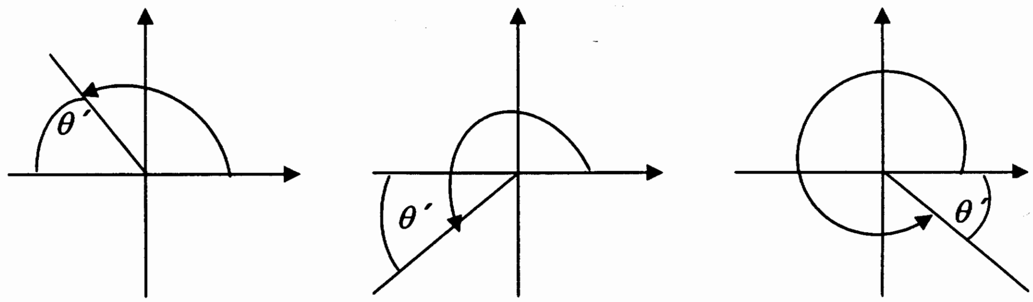
$\sin 0.48 = 0.4618$

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก sine เป็นลบ ในจตุภาคที่ 3 เรามี

$\sin 3.62 = -\sin 0.48 = -0.4618$

สำหรับตัวอย่างที่ 5 ได้แสดงกฎจำนวนอ้างอิง เมื่อ θ ไม่ได้แสดงในรูปของ π เราต้องสำรวจจตุภาคซึ่ง θ ตกอยู่ และใช้ตาราง แต่การใช้ค่าประมาณทศนิยมสองตำแหน่งของ π จะได้ผลไม่ถูกต้องนัก วิธีที่ดีสำหรับค่าของ θ เราอาจหาโดยใช้เครื่องคำนวณ สำหรับค่าใด ๆ ในการหามุมอ้างอิง θ' ที่สัมพันธ์กับ θ เป็นรูปแบบมุมที่ถูกต้องโดยด้านสิ้นสุด (terminal side) ของ θ และแกน X ถ้า θ อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้ว θ เป็นมุมของมันเอง และ $\theta' = \theta$

กรณีอื่น ๆ แสดงในรูป



กระบวนการของการหา $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ เมื่อ θ อยู่ในช่วง $[90^0, 360^0]$ เรียกกฎมุมอ้างอิงและเอกลักษณ์กับกฎจำนวนอ้างอิง พร้อมด้วยข้อยกเว้นเหล่านี้ แทน π ด้วย 180^0 ใช้ตาราง VI แทนตาราง V ในภาคผนวก ตรวจสอบค่าในตาราง VI ที่แสดงลิปดา (minutes) และวิลิปดา (second) และใช้ความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1 องศา = 60 ลิปดา (เขียน 60´)

1 ลิปดา = 60 วิลิปดา (เขียน 60´´)

ตัวอย่างที่ 6 จงหา $\sin 200^0$

วิธีทำ

ขั้นที่ 1 เนื่องจากด้านสิ้นสุดของมุม 200^0 ตกอยู่ในจตุภาคที่ 3 เราได้

$$\begin{aligned}\theta' &= \theta - 180^0 \\ &= 200^0 - 180^0 \\ &= 20^0\end{aligned}$$

ขั้นที่ 2 sin 20^0 = 0.3420

ขั้นที่ 3 เนื่องจาก sine เป็นลบในจตุภาคที่ 3 เรามี

sin 200^0 = -sin 20^0 = -0.3420

แบบฝึกหัด 5.3

1. ในข้อย่อย 1) - 10) จงแทนที่แต่ละจำนวนจริง θ ด้วย จำนวนจริง α , $0 \le \alpha < 2\pi$ เพื่อให้ θ และ α แทนจุดเดียวกันบนวงกลมหนึ่งหน่วย

    1) 5π 2) 7π 3) -5π
    4) -7π 5) $\frac{13}{2}\pi$ 6) $\frac{41}{6}\pi$
    7) $-\frac{27}{5}\pi$ 8) $\frac{22}{3}\pi$ 9) $\frac{11}{2}\pi$
    10) $-\frac{22}{3}\pi$

2. ในข้อย่อย 1) - 10) จงหาจำนวนบวกและจำนวนลบของ θ , $|\theta| < 2\pi$ ที่ตรวจสอบวงกลมหนึ่งหน่วย คือ θ มีจุดเริ่มต้นอยู่ที่ (1 , 0) มีจุดปลายอยู่ที่ P บนวงกลมหนึ่งหน่วย ซึ่งมีพิกัดของจุด ตามที่กำหนดให้

    1) (-1 , 0) 2) (0 , 1) 3) (0 , -1)
    4) $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 5) $\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
    7) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$ 8) $\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 9) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\right)$
    10) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

3. ในข้อย่อย 1) - 10) สำหรับจำนวนจริง θ ที่กำหนดให้ (a) จงหาพิกัดของจุด P บนวงกลมหนึ่งหน่วยที่ตรวจสอบด้วยจำนวนจริง θ และ (b) จงหาค่าของ $\sin\theta$, $\cos\theta$ และ $\tan\theta$

1) 5π	2) 7π	3) -5π
4) -7π	5) $\frac{13}{2}\pi$	6) $\frac{41}{6}\pi$
7) $-\frac{27}{5}\pi$	8) $\frac{22}{3}\pi$	9) $\frac{11}{2}\pi$
10) $-\frac{22}{3}\pi$		

4. ในข้อย่อยที่ 1) - 10) จงใช้ตาราง V ในตาราง ภาคผนวก หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อ (ใช้ $\pi \approx 3.14$)

1) cos 1.23	2) sin 0.46	3) tan 3.55
4) cos(-4.76)	5) tan(-1.42)	6) sin 4.23
7) cos -2.96	8) sin 4. 34	9) tan(-3.26)
10) sin(-5.689)		

5. ในข้อย่อยที่ 1) - 8) จงใช้ตาราง VI ในตารางภาคผนวก หาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติในแต่ละข้อ (ใช้ $\pi \approx 3.14$)

1) $\tan 155^0$	2) $\cos 150^0$	3) $\sin 243^0$
4) $\sin(-146)^0$	5) $\cos 256^0$	6) $\sin 345^0$
7) $\tan 24^0 10'$	8) $\cos(-186^0)20'$	

5.4 กราฟของฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงสมบัติเป็นคาบของฟังก์ชันตรีโกณมิติเพื่อลดจำนวนของสมาชิกในตาราง V และ VI ในตารางภาคผนวกท้ายเล่ม เพื่อให้มีความยาวที่เหมาะสม เราจะใช้ประโยชน์ของสมบัติเป็นคาบในการเขียนกราฟของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

5.4.1 ไซน์และโคไซน์

ถ้าเราสามารถเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในช่วง $[0\ ,\ 2\pi]$ เราสามารถเขียนกราฟซ้ำสำหรับทุกช่วงของความยาว 2π ปกติ เราสร้างตารางค่า ลงจุดที่

สมนัยกับระบบพิกัด θY และเขียนกราฟให้ปรับเรียบ เราสามารถใช้ผลของหัวข้อที่แล้วเพื่อให้เราใช้ค่าสำหรับเขียนกราฟดังตาราง

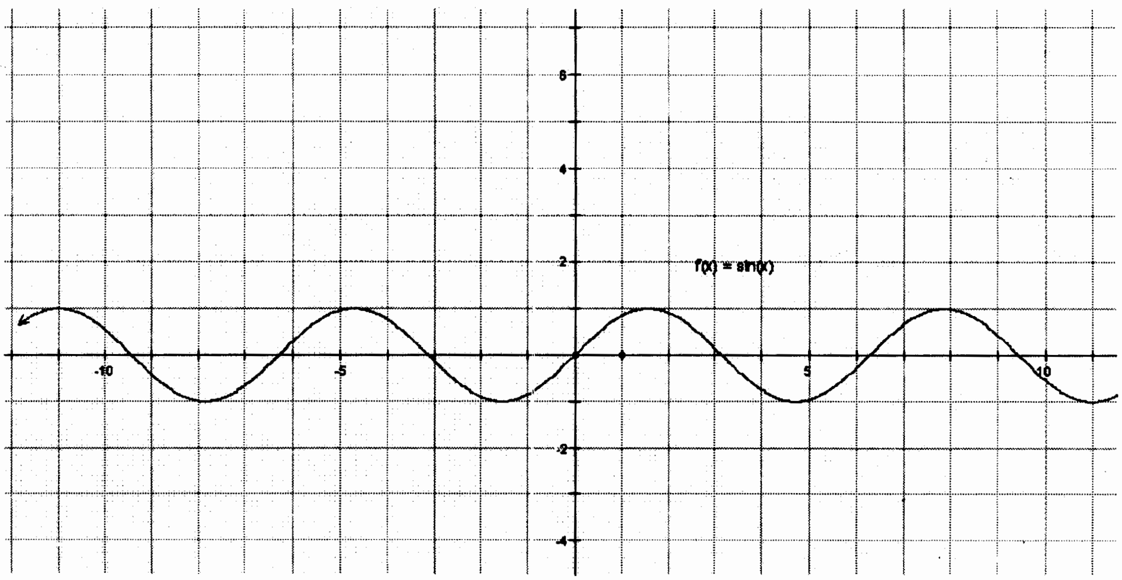
ตาราง 5.4.1.1

θ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
$\sin\theta$	0	0.50	0.71	0.87	1	0.71	0	-0.71	-1	-0.71	0
$\cos\theta$	1	0.87	0.71	0.50	0	-0.71	-1	-0.71	0	0.71	1

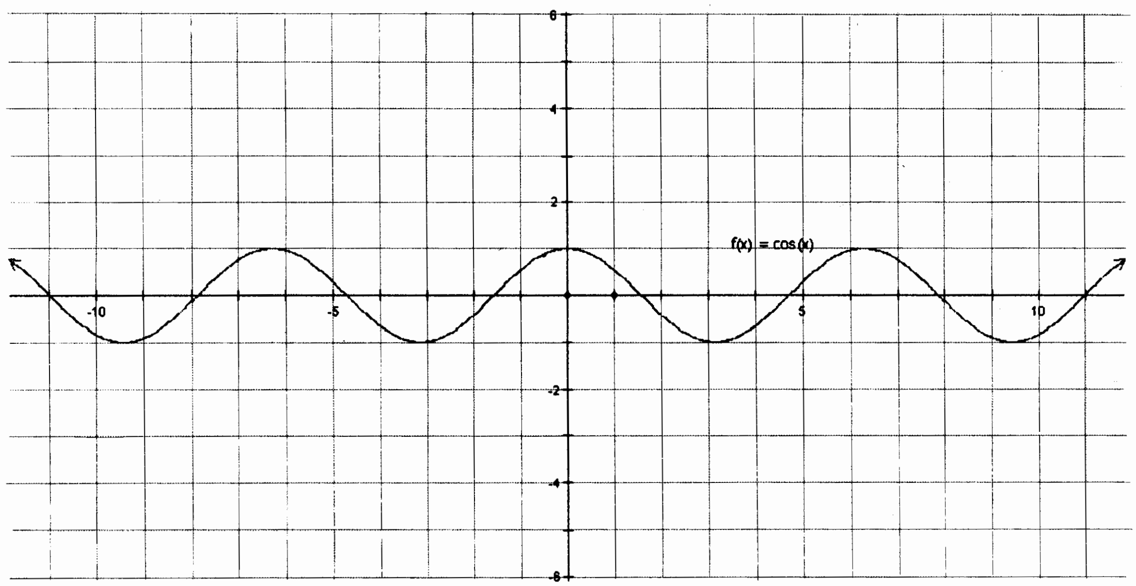
เราจะใช้ค่าประมาณ $\sqrt{2} \approx 1.414$ และ $\sqrt{3} \approx 1.732$

ซึ่งค่าในตารางเราสามารถวาดกราฟ

$y = \sin\theta$

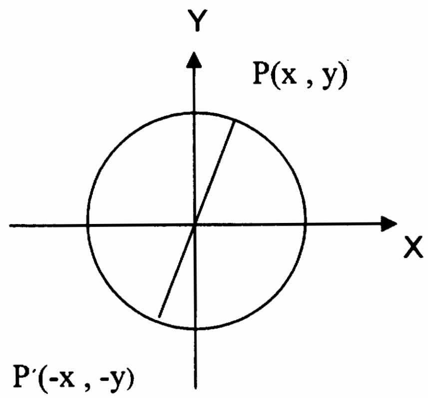


เมื่อพิจารณาฟังก์ชันโคไซน์ เราสามารถใช้ค่าที่กำหนดให้ในตาราง 5.4.1.1 วาดกราฟของ $y = \cos\theta$ ดังภาพประกอบ



5.4.2 แทนเจนต์

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ ขั้นต้นเราจะตั้งต้นที่ $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ สำหรับทุกจำนวนจริง θ ถ้า P(x , y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลมหนึ่งหน่วย แล้ว P′(-x , -y) จะอยู่บนวงกลมหนึ่งหน่วยด้วย ดังรูป



และ ส่วนโค้ง PP′ มีความยาว π ถ้าจุด P(x , y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยสมนัยกับ จำนวนจริง θ แล้ว

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

และ $\tan(\theta + \pi) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$

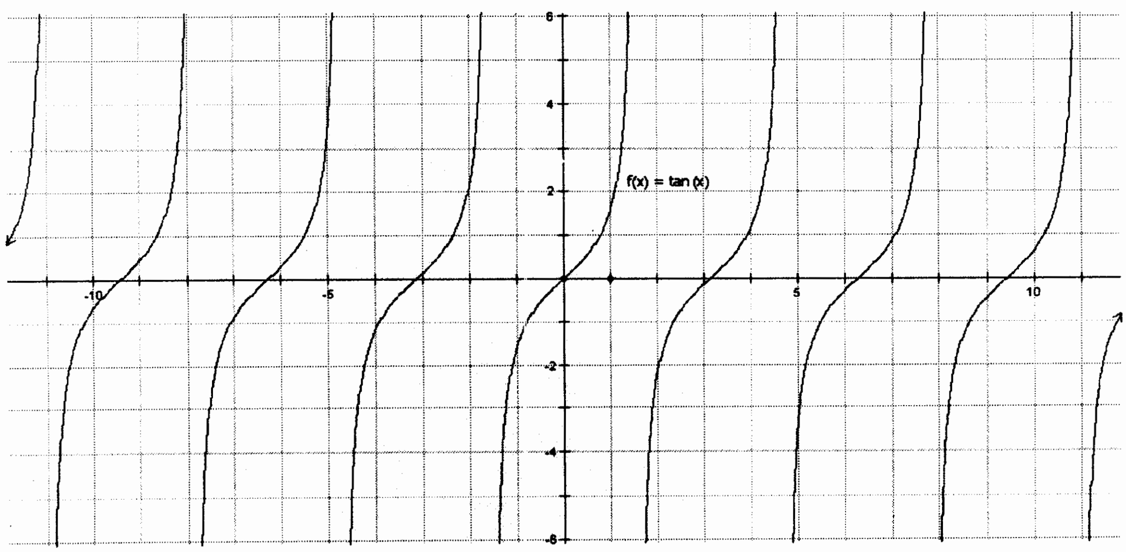
ดังนั้น $\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$ มันเป็นเรื่องง่ายที่จะแสดงว่าไม่มีจำนวนจริง c , $0 < c < \pi$ ซึ่ง $\tan(\theta + c) = \tan c$ สำหรับทุกจำนวนจริง c ดังนั้น ฟังก์ชันแทนเจนต์มีคาบเป็น π

เราสามารถใช้เอกลักษณ์

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ และ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ เพื่อหาค่าของแทนเจนต์ของจำนวนจริงต่าง ๆ ดังตาราง

θ	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\tan\theta$	-	-1.73	-1	-0.58	0	0.58	1	1.73	-

เนื่องจาก $\tan\theta$ ไม่นิยามที่ $\pi/2$ และ $-\pi/2$ เราจำเป็นต้องพิจารณาอย่างระมัดระวังลักษณะของกราฟใกล้ค่าเหล่านี้ของ θ ในขณะที่ θ เพิ่มขึ้นจาก 0 ถึง $\pi/2$ พิกัดของ x ของวงกลมหนึ่งหน่วยที่จุด P(x , y) จะสมนัยกับ θ ที่เข้าใกล้ศูนย์ไปทุกที เนื่องจาก $\tan\theta$ = y/x ค่าที่เล็กลง ๆ ของ x จะส่งผลให้ y/x มีค่ามากขึ้น ๆ เรากล่าวว่า $\tan\theta$ มีค่าเพิ่มขึ้นโดยปราศจากขอบเขตเข้าสู่ $-\alpha$ ในขณะที่ θ เข้าใกล้ $\pi/2$ เช่นเดียวกัน ในขณะที่ θ ลดลงจาก 0 ถึง $-\pi/2$ ค่า $\tan\theta$ จะมีค่าน้อยลง ๆ เรากล่า ว่า $\tan\theta$ ลดลงโดยปราศจากขอบเขตในขณะ t เข้าใกล้ $-\pi/2$ กราฟของ $\tan\theta$ แสดงดังภาพประกอบ



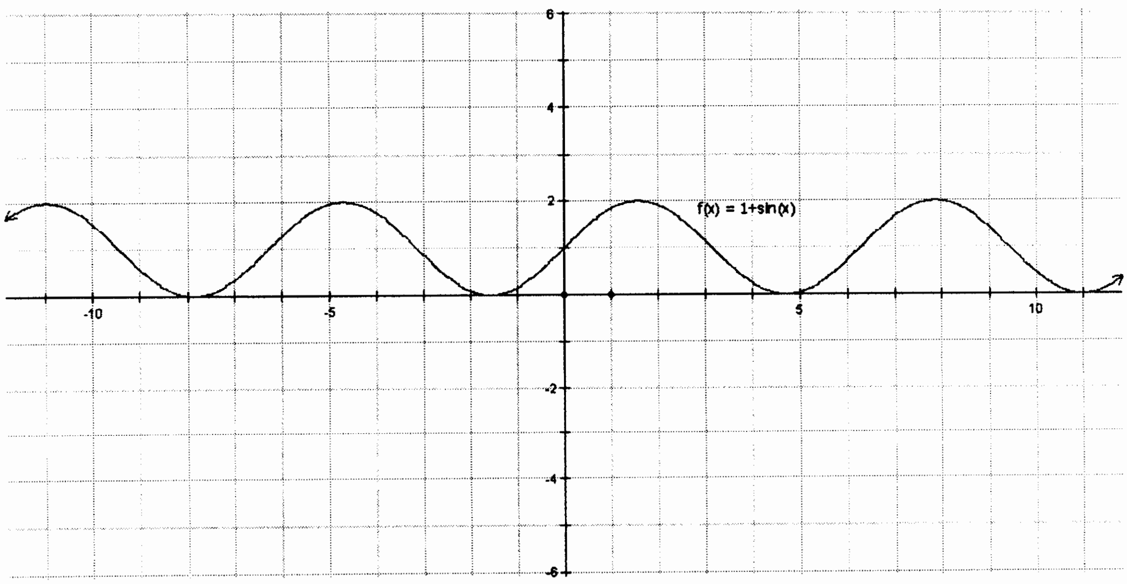
5.4.3 เรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (range of the trigonometric function)

จากกราฟของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ ชัดเจนว่าทั้งสองฟังก์ชันมีค่าอยู่ระหว่าง -1 และ 1 ตรวจสอบกราฟของฟังก์ชันแทนเจนต์ อีกครั้งเพื่อแสดงว่าฟังก์ชันไม่จำกัดขอบเขต ข้อสรุปนี้เกี่ยวข้องกับเรนจ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ ที่แจงดังตาราง ตามค่าของโดเมน และช่วงของแต่ละฟังก์ชัน

	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
โดเมน	ทุก θ	ทุก θ	$\theta \neq \pi/2 + n\pi$ n เป็นจำนวนเต็ม
เรนจ์	$-1 \leq y \leq 1$	$-1 \leq y \leq 1$	ทุกจำนวนจริง
คาบ	2π	2π	π

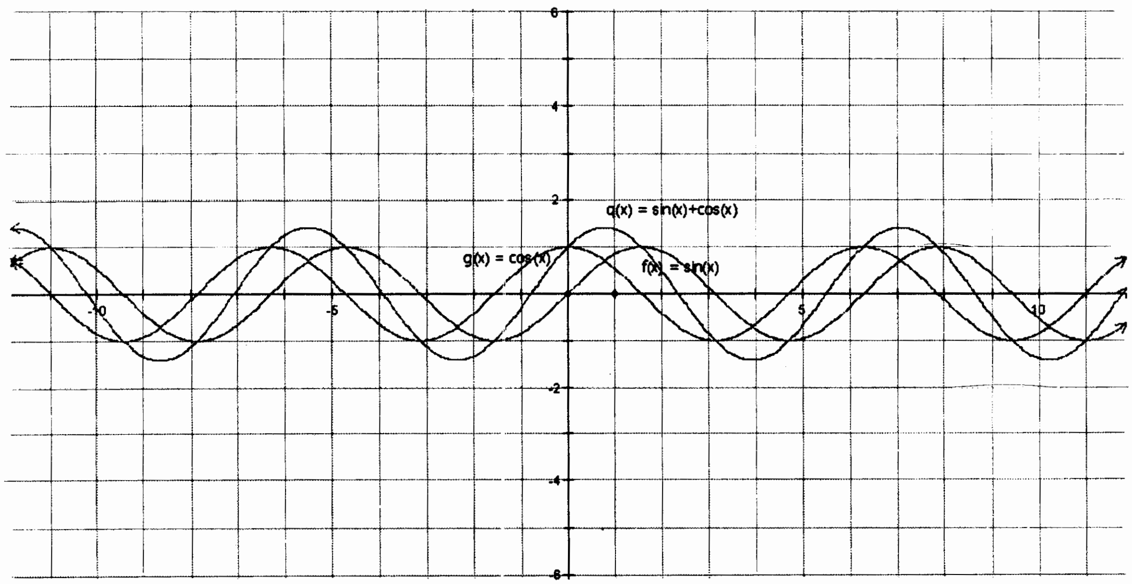
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $f(\theta) = 1 + \sin\theta$

วิธีทำ นอกจากรูปตารางของค่าและลงจุด เราจะสังเกตง่าย ๆ ว่า พิกัด y ของ $f(\theta) = 1 + \sin\theta$ มากกว่า $\sin\theta$ อยู่หนึ่งหน่วย สำหรับแต่ละค่าของ θ ในรูป X เราวาดกราฟของ sin X $f(\theta) = 1 + \sin\theta$ ดังภาพประกอบ



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$

วิธีทำ ลงจุด เราสังเกตว่า พิกัด y ของ $f(\theta) = \sin\theta + \cos\theta$ เป็นผลบวกง่าย ๆ ของ พิกัด y ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ สำหรับแต่ละค่าของ θ ในภาพประกอบ เราวาดกราฟของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$ ด้วยเส้นประ และสร้างผลบวกของพิกัด y ทางเรขาคณิต และวาดรูปปรับเรียบโค้ง



5.4.4 กราฟ แอมพลิจูด และคาบ (graphs , amplitude and period)

ขั้นต่อไปเราจะเขียนกราฟของ $f(x) = A \sin (Bx + C)$ เมื่อ A , B และ C เป็นจำนวนจริงและ $B > 0$ สังเกตว่า ในตอนนี้เราใช้สัญลักษณ์ที่คุ้นเคย x เพื่อบ่งชี้ ตัวแปรอิสระ นอกจากนั้นสัญลักษณ์ θ ยังคงใช้อยู่ในตอนนี้ อย่างไรก็ตาม x ที่ใช้นี้ต้องไม่สับสนกับพิกัด x ของจุด P(x , y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยซึ่งสมนัยกับส่วนโค้งยาว θ

5.4.4.1 แอมพลิจูด (Amplitude)

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์มีค่าสูงสุดเป็น 1 และค่าต่ำสุดมีค่าเป็น -1 และสำหรับฟังก์ชัน $f(x) = A \sin x$ จะมีค่าสูงสุดเป็น $| A |$ และค่าต่ำสุดเป็น $-| A |$

เมื่อนิยามแอมพลิจูด ของฟังก์ชันคาบเป็นครึ่งหนึ่งของผลต่างของค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด จะได้ว่าแอมพลิจูดของ

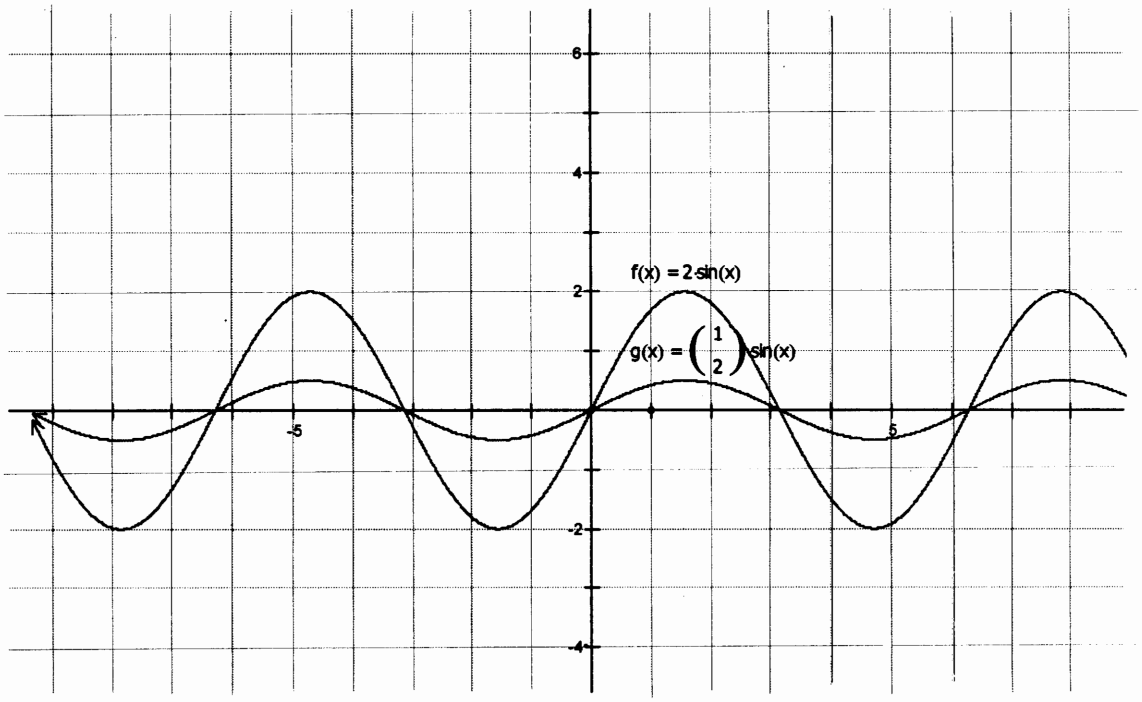
$f(x) = A \sin x$ เป็น $[| A | -(-| A |)]/2 = | A |$

แอมพลิจูดของ f(x) = A sin x คือ | A |

ตัวคูณ A ทำหน้าที่เป็นตัวประกอบขยายความสูง (vertical stretch) เมื่อ | A | > 1 และทำหน้าที่ลดความสูง (vertical shinkage) เมื่อ | A | < 1 ข้อสังเกตนี้เป็นจริงสำหรับทั้ง y = A sin x และ y = A cos x ซึ่งจะแสดงตัวอย่างบางตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนกราฟของ y = 2 sin x และ $y = \frac{1}{2}$ sin x บนแกนพิกัดเดียวกัน

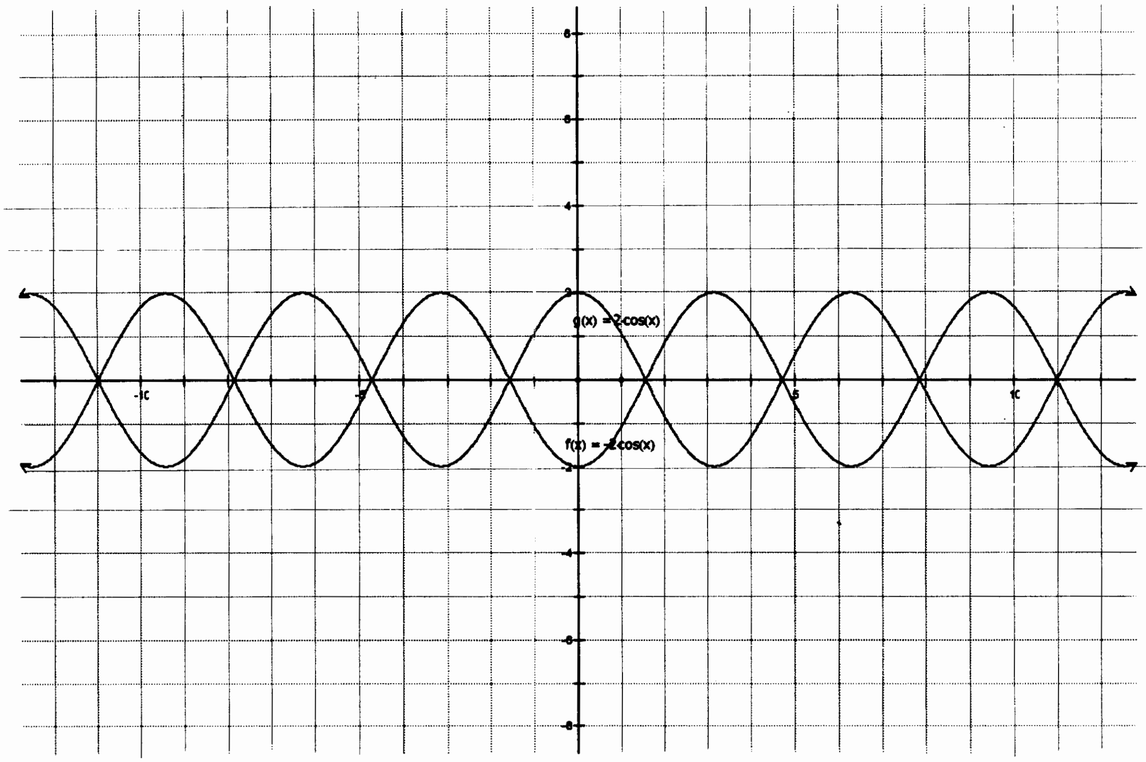
วิธีทำ กราฟของ y = 2 sin x มีแอมพลิจูด เป็น 2 ค่าสูงสุดของ y เป็น +2 และค่าต่ำสุดเป็น -2 ทำนองเดียวกัน กราฟของ $y = \frac{1}{2}$ sin x มีแอมพลิจูด เป็น $\frac{1}{2}$ ค่าสูงสุดของ y เป็น $+\frac{1}{2}$ และค่าต่ำสุดเป็น $-\frac{1}{2}$



ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ f(x) = -2 cos x

วิธีทำ กราฟของ y = -2 cos x มีแอมพลิจูด เป็น 2 ค่าสูงสุดของ y เป็น +2 และค่าต่ำสุดเป็น -2 ตามลำดับ เนื่องจาก A = -2 แต่ละพิกัด y เป็นค่าของ cos x คูณกับ -2

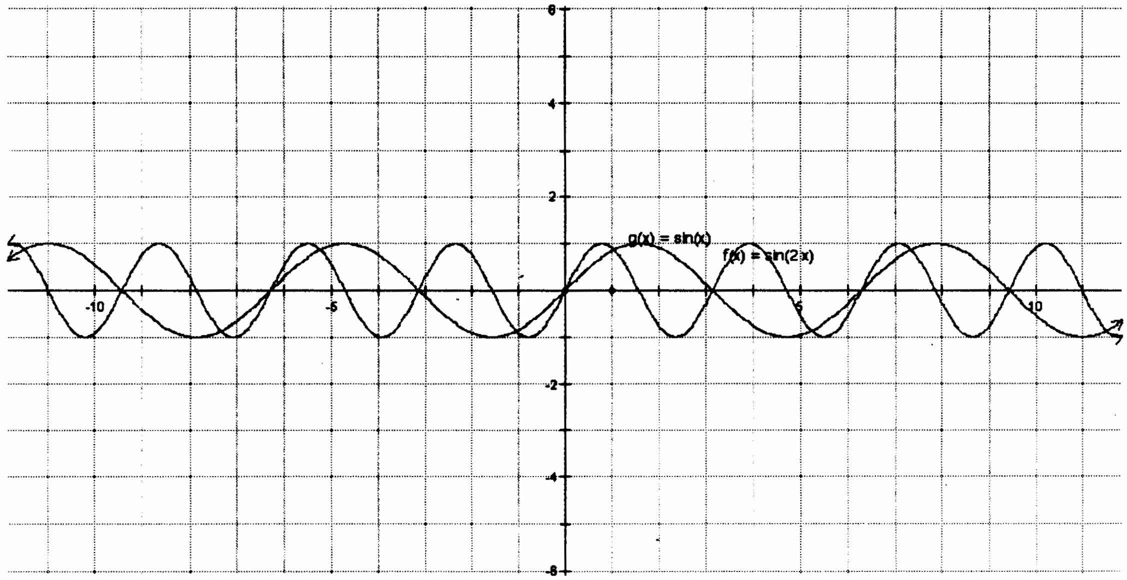
กราฟของ y = -2 cos x แสดงดังภาพประกอบ กล่าวว่าเป็นการสะท้อน (reflection) กับแกน x ของกราฟของ y = 2 cos x



การเขียนกราฟของ f(x) = sin Bx , B > 0

พิจารณาการเขียนกราฟของฟังก์ชัน sin x และ sin 2x ในช่วง $[0\ ,\ 2\pi]$ เนื่องจาก y = sin x มีคาบ 2π กราฟแสดงว่าฟังก์ชันไซน์ เสร็จสิ้นหนึ่งรอบ (cycle) หรือคลื่น (wave) เช่น x แปรค่าจาก 0 ถึง 2π อย่างไรก็ตาม กราฟของ y = sin 2x จะสมบูรณ์สองรอบในขณะที่ x แปรค่า จาก 0 ถึง 2π

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	π	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$	2π
sinx	0	$\sqrt{2}/2$	1	$\sqrt{2}/2$	0	$-\sqrt{2}/2$	-1	$-\sqrt{2}/2$	0
sin2x	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0



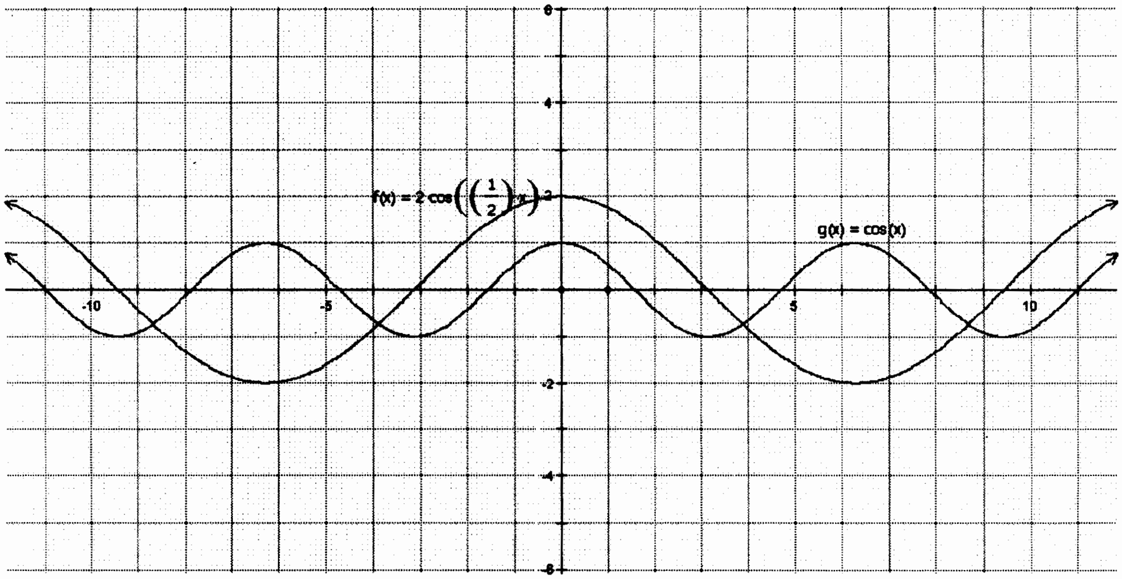
ในรูปทั่วไปฟังก์ชัน sin Bx จะครบรอบ B รอบ บนช่วง $[0\ ,\ 2\pi]$ ดังนั้น รอบจะสมบูรณ์เมื่อ x เปลี่ยนค่าจาก 0 ถึง $2\pi/B$ เราสรุปได้ว่า

คาบของ f(x) = sin Bx , B > 0 , เป็น $2\pi/B$

ตัวคูณ B ทำให้ ความยาวในแนวนอนหรือความยาวคลื่นเพิ่มขึ้น (horizontal stretch) ถ้า 0 < B < 1 และทำให้ ความยาวในแนวนอนหรือความยาวคลื่นลดลง (horizontal shinkage) ถ้า B > 1

ตัวอย่าง 5 จงเขียนกราฟของ $f(x) = 2\cos\frac{1}{2}x$

วิธีทำ เนื่องจาก $B = \frac{1}{2}$ คาบคือ $2\pi/\frac{1}{2} = 4\pi$ หน่วย สังเกตว่า แอมพลิจูดเป็น 2 และ -2 ตามลำดับ ซึ่งกราฟแสดงดังภาพประกอบ



เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f(x) = A sin(Bx + C) , B > 0 จะพบว่า เนื่องจาก y = sin x ครบวัฏจักร เมื่อ x แปรเปลี่ยนจาก 0 ถึง 2π ฟังก์ชัน f จะครบรอบสมบูรณ์ เมื่อ Bx + C แปรเปลี่ยนจาก 0 ถึง 2π แก้สมการเมื่อ

Bx + C = 0 และ Bx + C = 2π

จะได้ x = $-\dfrac{C}{B}$ | จะได้ x = $\dfrac{2\pi - C}{B} = \dfrac{2\pi}{B} - \dfrac{C}{B}$

ตัวอย่างที่ 6 จงเขียนกราฟของ f(x) = 3 sin (2x - π)

วิธีทำ ขั้นที่ 1 ตรวจสอบ A , B และ C

เนื่องจาก f(x) = 3 sin (2x - π) = A sin (Bx + C)

A = 3 , B = 2 และ C = $-\pi$

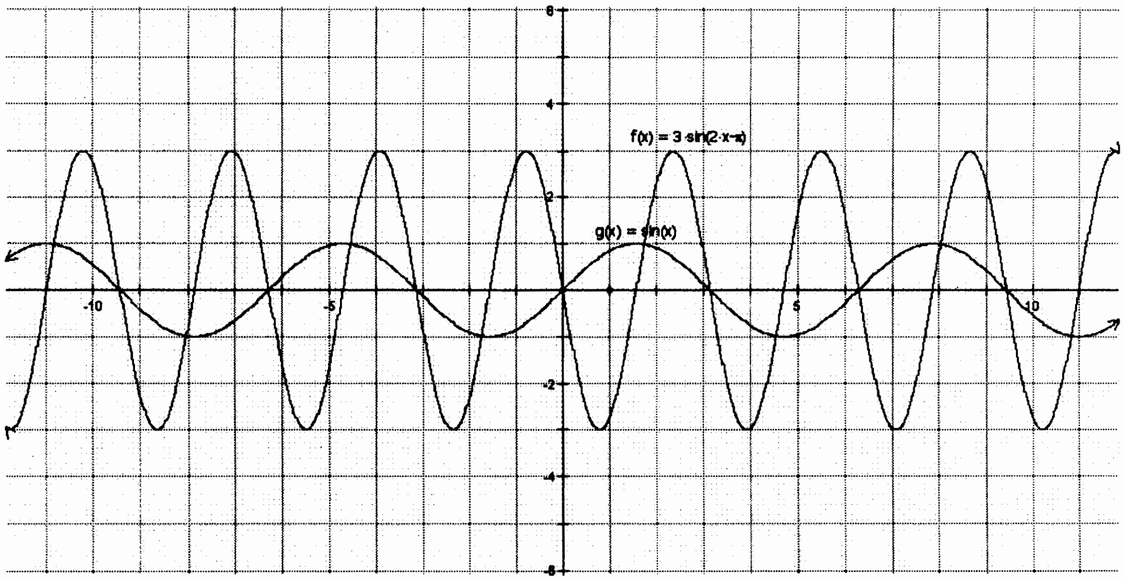
ขั้นที่ 2 ตรวจสอบ แอมพลิจูด คาบ

แอมพลิจูด = | A | = 3

คาบ = 2π/B = 2π/2 = π

ขั้นที่ 3 ใช้แอมพลิจูดเขียนกราฟ

ระลึกว่า แอมพลิจูดคือ 3 ดูกราฟดังภาพประกอบ



ตัวอย่างที่ 7 จงเขียนสมการใหม่

(1) $y = \frac{1}{2}\sin(-x + \pi)$ (2) $y = -2\cos(-2x - \pi)$ เป็นสมการที่สมมูลกับ $B > 0$

วิธีทำ (1) จากสมการดั้งเดิมจะได้

$$y = \frac{1}{2}\sin(-x + \pi) = \frac{1}{2}\sin[-(x - \pi)]$$

เนื่องจาก $\sin(-t) = -\sin t$ เรามี

$y = -\frac{1}{2}\sin(x - \pi)$ เมื่อ $B > 0$

(2) จากสมการดั้งเดิมจะได้

$$y = -2\cos(-2x - \pi) = -2\cos[-(2x + \pi)]$$

เนื่องจาก $\cos(-t) = \cos t$ เรามี

$$y = -2\cos(2x + \pi)$$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้
   1) f(x) = 1 + cos x
   2) f(x) = -1 + sin x
   3) f(x) = sin x - cos x
   4) f(x) = sin(-x) + cos x
   5) f(x) = x - sin x
   6) f(x) = -x + cos x
2. จงตรวจสอบว่า sin(-x) = -sin x โดยการใช้กราฟของฟังก์ชันไซน์
3. จงตรวจสอบว่า cos(-x) = cos x โดยการใช้กราฟของ ฟังก์ชันโคไซน์
4. จงหาแอมพลิจูด (amplitude) และคาบ (period) และเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้
   1) f(x) = sin 4 x
   2) f(x) = $\sin\frac{x}{3}$
   3) f(x) = $\frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$
   4) f(x) = cos 3 x
   5) f(x) = $\cos\frac{x}{4}$
   6) f(x) = $3\cos\frac{x}{3}$
   7) f(x) = -2 sin 4 x

5.5 ซีแคนต์ (secant) , โคซีแคนต์ (cosecant) และโคแทนเจนต์ (cotangent)

เราได้กล่าวไปแล้วในตอนต้นถึงฟังชันตรีโกณมิติสามฟังก์ชัน คือฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ยังมีฟังก์ชันอีกสามฟังก์ชันคือ ซีแคนต์ (secant) , โคซีแคนต์ (cosecant) และโคแทนเจนต์ (cotangent) และเขียน sec csc และ cot ตามลำดับ ในตอนนี้จะนิยามฟังก์ชันเหล่านี้

บทนิยามของ cscθ , secθ และ cotθ

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} , \sin\theta \neq 0$$

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} , \cos\theta \neq 0$$

$$\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} , \tan\theta \neq 0$$

นั่นคือ เราจะมีความสัมพันธ์ของส่วนกลับ

$$\sin\theta\csc\theta = \frac{b}{R}\times\frac{R}{b} = 1 \text{ , b} \neq 0$$

$$\cos\theta\sec\theta = \frac{a}{R}\times\frac{R}{a} = 1 \text{ , a} \neq 0$$

$$\tan\theta\cot\theta = \frac{b}{a}\times\frac{a}{b} = 1 \text{ , a , b} \neq 0$$

โดยการใช้บทนิยามเหล่านี้ เราสามารถประยุกต์ผลที่เราสังเกตสำหรับ ไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์กับฟังก์ชันใหม่

ตัวอย่างที่ 1 จงหา sec $\pi/6$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\pi/6 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ดังนั้น

$$\sec \pi/6 = \frac{1}{\cos\pi/6}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจำนวนจริง θ , $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ซึ่ง $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ หาจำนวนจริง $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ซึ่ง $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

เนื่องจาก $\tan\theta\times\cot\theta = 1$

จะได้ $\tan\theta\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 1$

$\tan\theta = \sqrt{3}$

ดังนั้น $\theta = \pi/3$

เราทราบว่าจำนวนจริงและส่วนกลับมีเครื่องหมายเหมือนกัน นั่นคือ ถ้า x > 0 แล้ว 1/x มากกว่าศูนย์ และถ้า x < 0 แล้ว 1/x น้อยกว่าศูนย์ จากนี้เราสามารถขยายข้อสรุปของ แต่ละฟังก์ชันเกี่ยวข้องกับส่วนกลับของมัน

จตุภาคที่ 2 $\sin\theta > 0$ $\csc\theta > 0$	จตุภาคที่ 1 ทุกฟังก์ชันเป็นบวก
จตุภาคที่ 3 $\tan\theta > 0$ $\cot\theta > 0$	จตุภาคที่ 4 $\cos\theta > 0$ $\sec\theta > 0$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาว่า θ ตกในจตุภาคใด ถ้า $\sin\theta > 0$ และ $\sec\theta < 0$

วิธีทำ ถ้า $\sec\theta < 0$ ดังนั้น $\cos\theta < 0$ สำหรับพิกัด P(x , y) บนวงกลมหนึ่งหน่วยที่เป็นจุดปลาย θ มี x เป็นลบ และ y เป็นบวก ดังนั้นจุดปลาย θ ตกอยู่ในจตุภาคที่ 2

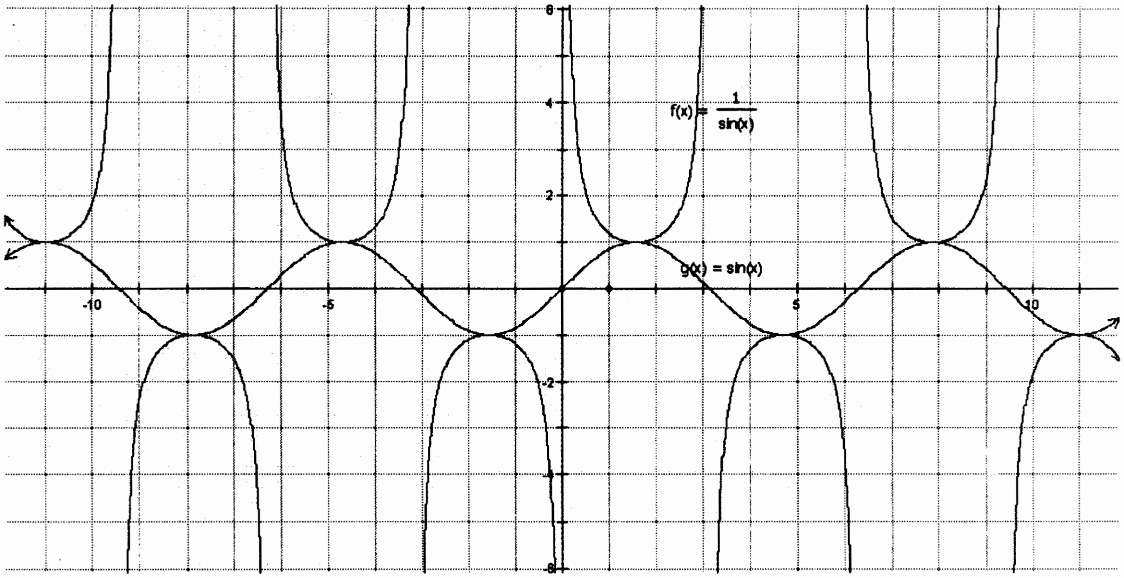
ตัวอย่างที่ 4 จงหา θ ถ้า $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ และ $\sec\theta < 0$

วิธีทำ เนื่องจาก $\sec\theta < 0$ นั่นคือ $\cos\theta < 0$ ดังนั้น $\sin\theta > 0$ และ $\cos\theta < 0$ จะได้ว่าจุดปลาย θ ตกในจตุภาคที่ 2 และ $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

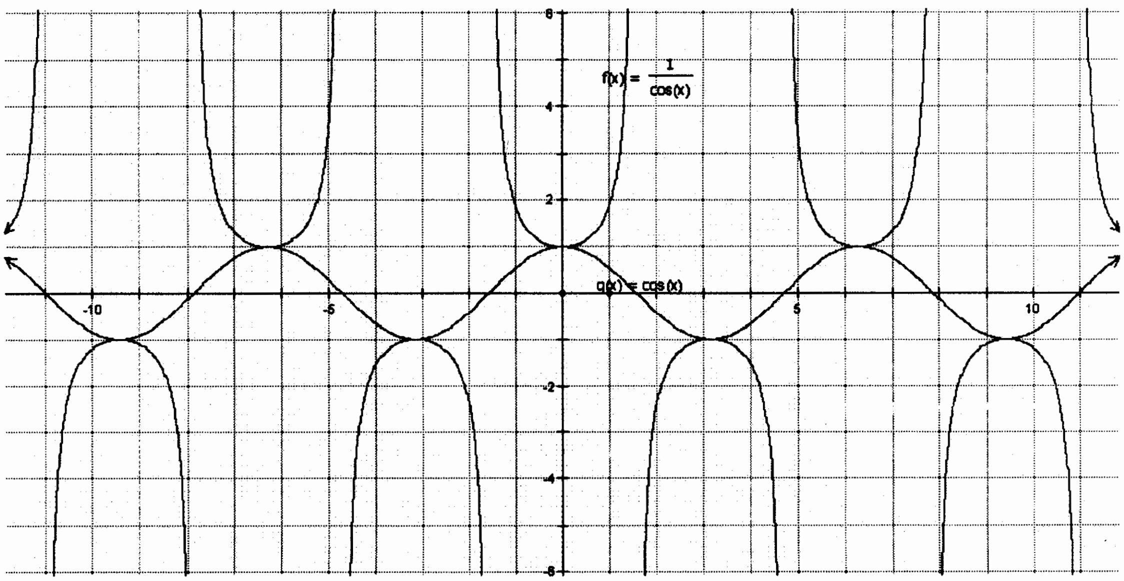
5.5.2 กราฟของซีแคนต์ โคซีแคนต์ และ โคแทนเจนต์

เราสามารถใช้บทนิยามของโคซีแคนต์วาดกราฟของฟังก์ชัน เนื่องจาก $\csc\theta = 1/\sin\theta$ เราไม่สามารถหา ส่วนกลับเมื่อ $\sin\theta = 0$ นั่นคือ เมื่อ $\theta = n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง เราสรุปว่า กราฟของ $\csc\theta$ มีเส้นกำกับในแนวตั้ง (vertical asytotes) เมื่อ $\theta = n\pi$ สำหรับทุกค่าจำนวนเต็ม n เราอาจเขียนกราฟของฟังก์ชันไซน์ ด้วยเส้นประเพื่อช่วยในการเขียนรูปจากค่าส่วนกลับของพิกัด y สำหรับฟังก์ชันโคซีแคนต์



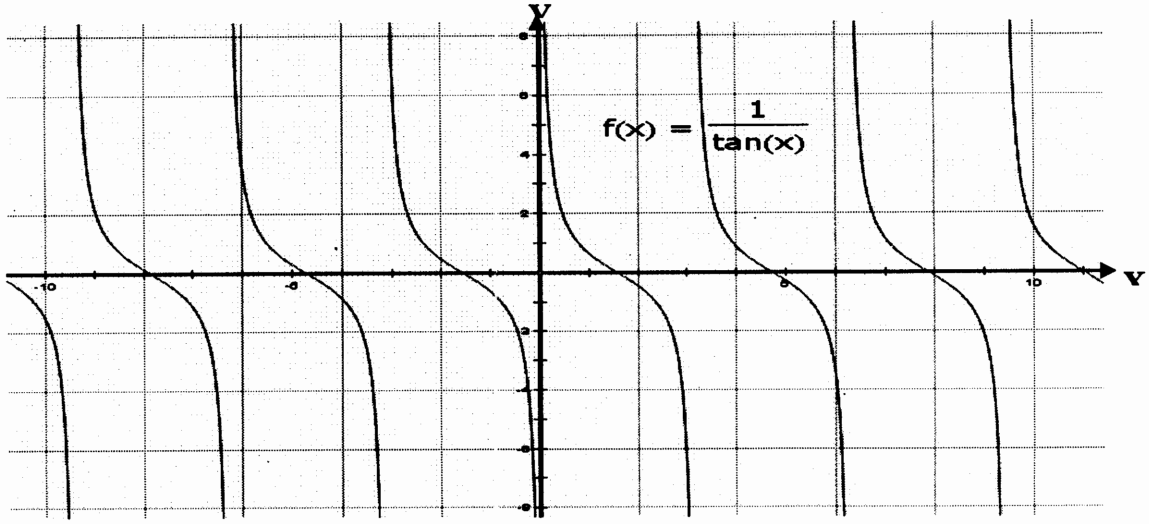
ภาพประกอบ 5.2.2.1 กราฟของ y = sinx และกราฟของ y = scsx

ทำนองเดียวกัน สามารถเขียนกราฟของ f(x) = secθ ได้ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 5.2.2.2 กราฟของ y = cosx และกราฟของ y = secx

และเขียนกราฟของ f(x) = cotθ ได้ดังภาพประกอบ



ภาพประกอบ 5.2.2.3 กราฟของ y = cotx

ตาราง 5.5.2.1 สรุปสมบัติสำคัญของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

	เป็นบวกในจตุภาค	$-\theta$	คาบ	โดเมน	เรนจ์
sin	1,2	$-\sin\theta$	2π	ทุกจำนวนจริง	[-1,1]
cos	1,4	$\cos\theta$	2π	ทุกจำนวนจริง	[-1,1]
tan	1,3	$-\tan\theta$	π	$\theta \neq \pi/2 + n\pi$	$(-\infty,\infty)$
csc	1,2	$-\cot\theta$	2π	$\theta \neq n\pi$	$(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$
sec	1,4	$\sec\theta$	2π	$\theta \neq \pi/2 + n\pi$	$(-\infty,-1]$, $[1,\infty)$
cot	1,3	$-\cot\theta$	π	$\theta \neq n\pi$	$(-\infty,\infty)$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหา $\sec\theta$, $\csc\theta$ และ $\cot\theta$ สำหรับแต่ละค่าของ θ

1) $\frac{\pi}{3}$ 2) $\frac{\pi}{4}$ 3) $\frac{\pi}{6}$

4) $\frac{4\pi}{3}$ 5) $\frac{7\pi}{4}$ 6) $\frac{11\pi}{6}$

2. จงหาค่าของ θ , $0 \le \theta \le 2\pi$ ที่สอดคล้องกับแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sec\theta = 2$ 2) $\sec\theta = \sqrt{2}$ 3) $\cot\theta = 1$

4) $\cot\theta = \sqrt{3}$ 5) $\csc\theta = -\sqrt{2}$ 6) $\csc\theta = -\sqrt{3}$

7) $\cot\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 8) $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

3. จงหาว่าจำนวนจริง θ ตกในจตุภาคใด ถ้ากำหนดเงื่อนไขต่อไปนี้

1) $\sec\theta < 0$, $\sin\theta < 0$ 2) $\sec\theta < 0$, $\cot\theta > 0$

3) $\cot\theta < 0$, $\sin\theta > 0$ 4) $\sec\theta < 0$, $\csc\theta < 0$

5) $\sin\theta < 0$, $\cot\theta > 0$ 6) $\csc\theta > 0$, $\sec\theta < 0$

4. จงหา θ , $0 \le \theta < 2\pi$ ที่สอดคล้องกับแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sec\theta < 0$ 2) $\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\csc\theta < 0$

3) $\sec\theta = -2$, $\csc\theta > 0$ 4) $\csc\theta = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\cot\theta > 0$

5) $\cot\theta = -1$, $\sec\theta < 0$ 6) $\cot\theta = \sqrt{3}$, $\csc\theta < 0$

5. ใช้ตารางท้ายเล่มในภาคผนวก หาค่าแต่ละข้อต่อไปนี้ (ใช้ $\pi \approx 3.14$ เพื่อหาจำนวนอ้างอิง)

1) cot 3.34 2) sec 1.28

3) cot(-1.82) 4) csc(-4.68)

5.6 ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (The inverse trigonometric function)

จากฟังก์ชันผกผันที่ได้เคยเรียนไปแล้ว จะเห็นได้ว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งโดเมนเป็นเซต X และเรนจ์เป็นเซต Y ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ซึ่ง $f^{-1}(y) = x$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = y$ สำหรับ ทุก $x \in X$

โดยใช้บทนิยาม เราจะเห็นว่าเอกลักษณ์ต่อไปนี้แสดงลักษณะฟังก์ชันผกผัน

$f^{-1}[f(x)] = x$ สำหรับทุก x ใน X

$f[f^{-1}(y)] = y$ สำหรับทุก y ใน Y

ถ้าเราพยายามหาผกผันของฟังก์ชันไซน์ เรามีปัญหาโดยทันที เนื่องจากไซน์เป็นฟังก์ชันคาบ ซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ผกผันของฟังก์ชันไซน์ จึงไม่เป็นฟังก์ชัน อย่างไรก็ตาม เราสามารถแก้ปัญหานี้โดยกำหนดฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับฟังก์ชันไซน์ แต่อยู่บนข้อจำกัดของโดเมน นั่นคือ เราควรจะหาช่วงซึ่ง $y = \sin x$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ y มีค่าทุกค่าตั้งแต่ -1 ถึง 1 ถ้าเรานิยามฟังก์ชัน f โดย

$$f(x) = \sin x , -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น f มีค่าเหมือนกับ ฟังก์ชันไซน์ บนช่วง $[-\pi/2 , \pi/2]$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงในช่วง [-1 , 1] กราฟของ sin x บนช่วง $[-\pi/2 , \pi/2]$ แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นหนึ่งต่อหนึ่ง ในทางกลับกัน f มีผกผัน และเราให้บทนิยามต่อไปนี้

5.6.1 ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ (Inverse sine function)

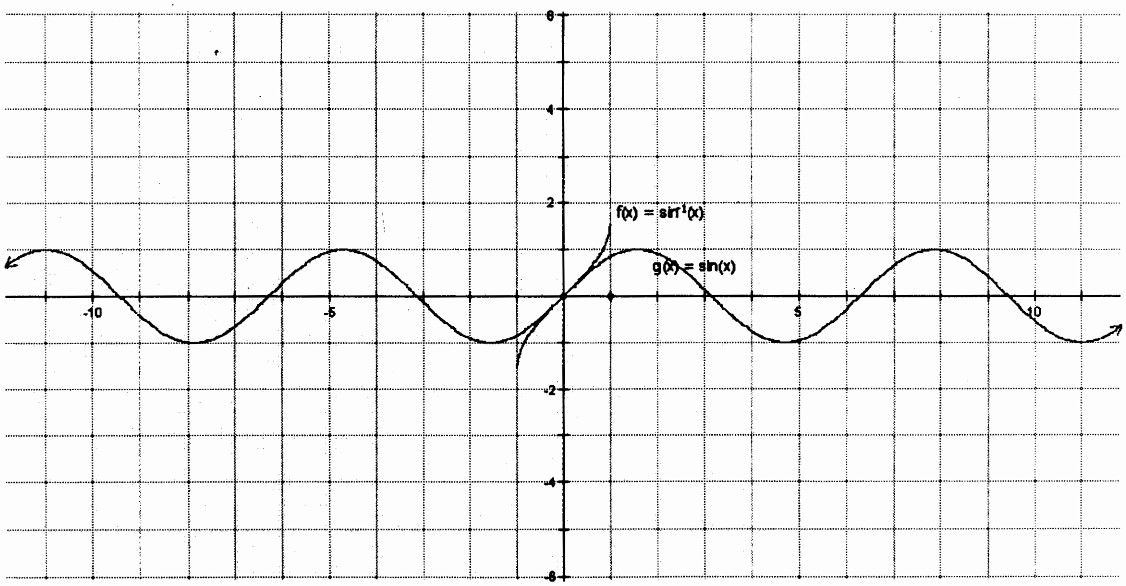
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ นิยามโดย arcsin หรือ $\sin^{-1}$ ซึ่งนิยามโดย

$$\sin^{-1} y = x \text{ ก็ต่อเมื่อ } \sin x = y \text{ เมื่อ } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

สังเกตว่า $-1 \leq y \leq 1$ ดังนั้น โดเมนของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันไซน์ เป็นเซตของทุกจำนวนจริงในช่วง [-1,1]

ข้อควรระวัง เมื่อเรานิยาม $\sin^n t = (\sin t)^n$ เราจะกล่าวว่าบทนิยามนี้ไม่รวมถึงเมื่อ n = -1 เพราะฉะนั้น $\sin^{-1} y$ จึงไม่เท่ากับ $\frac{1}{\sin y}$

รูปต่อไปนี้แสดง $y = \arcsin x = \sin^{-1} x$



ตัวอย่างที่ 1 จงหา (1) arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) arc sin (-1)

วิธีทำ (1) ถ้า y = arc sin $\frac{\sqrt{3}}{2}$ แล้ว sin y = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น y = $\pi/3$ เป็นเพียงค่าเดียวที่ถูกต้อง

(2) ถ้า y = arc sin -1 แล้ว sin y = -1 เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น y = $-\frac{\pi}{2}$ เป็นเพียงค่าเดียวที่ถูกต้อง

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\sin^{-1}(\cos\frac{\pi}{3})$

วิธีทำ เนื่องจาก $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ เรามี $\sin^{-1}(\cos\frac{\pi}{3}) = \sin^{-1}(\frac{1}{2})$

ให้ y = $\sin^{-1}(\frac{1}{2})$

จะได้ว่า sin y = $\frac{1}{2}$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น y = $\frac{\pi}{6}$ เป็นเพียงค่าเดียวที่ถูกต้อง

เราอาจใช้วิธีคล้ายกันในการนิยามฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ (inverse cosine function) ถ้าเรานิยามฟังก์ชัน f โดย

$f(x) = \cos x,\ 0 \leq x \leq \pi$

ดังนั้น f สอดคล้องกับฟังก์ชันโคไซน์ ในช่วง [0 , π] สำหรับทุกค่าจำนวนจริง ในช่วง [-1 , 1] และเป็นฟังก์ชันลด ในทางกลับกัน f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และมีฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์

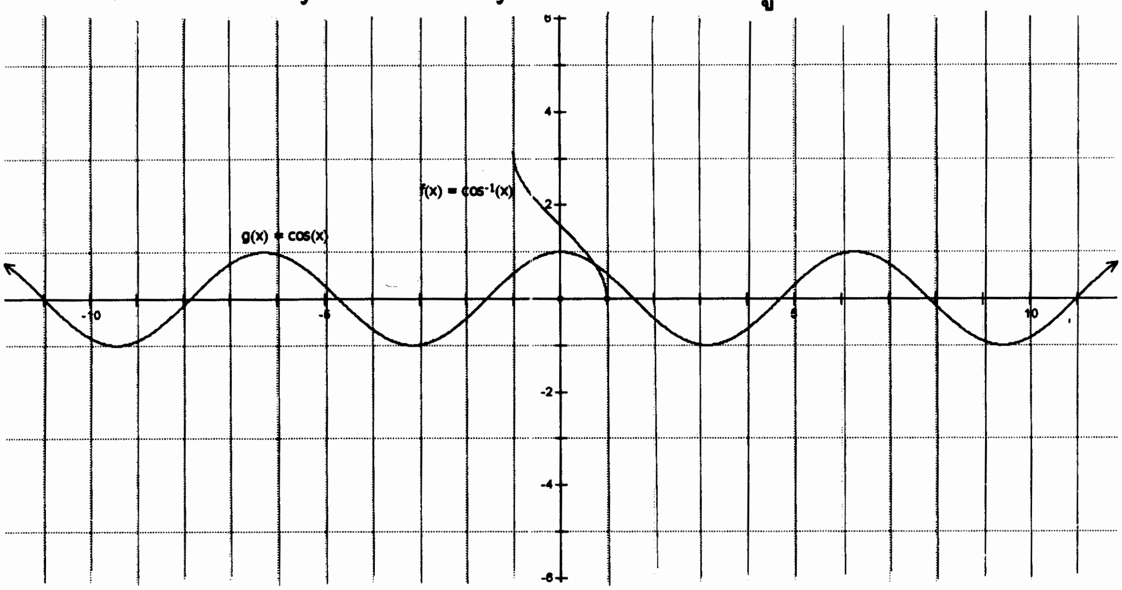
ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ นิยามโดย arccos หรือ $\cos^{-1}$ ซึ่งนิยามโดย

$\cos^{-1} y = x$ ก็ต่อเมื่อ $\cos x = y$ เมื่อ $0 \le x \le \pi$

เนื่องจาก $-1 \le y \le 1$ โดเมนของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันโคไซน์ เป็นเซตของทุกจำนวนจริง ในช่วง [-1 , 1]

ในการเขียนกราฟของ $y = \cos^{-1} x$ เราอาจเขียนกราฟเปรียบเทียบกับกราฟของ $y = \cos x$ สังเกตว่า $\cos^{-1} x$ เป็นบวกเสมอ

เขียนกราฟของ $y = \cos x$ และ $y = \cos^{-1} x$ บนแกนคู่เดียวกัน



ตัวอย่างที่ 3 จงหา (1) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (2) arc cos(sin $\frac{\pi}{4}$)

วิธีทำ (1) ให้ $y = \cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

ดังนั้น $\cos y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ เมื่อค่า y จำกัดในช่วง [0 , π]

$$y = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$= \dfrac{5\pi}{6}$

(2) เนื่องจาก $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ดังนั้น $\arccos(\sin\dfrac{\pi}{4}) = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

ให้ $y = \arccos \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ เมื่อค่า y จำกัดในช่วง $[0 , \pi]$

ดังนั้น $\cos y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \dfrac{\pi}{4}$

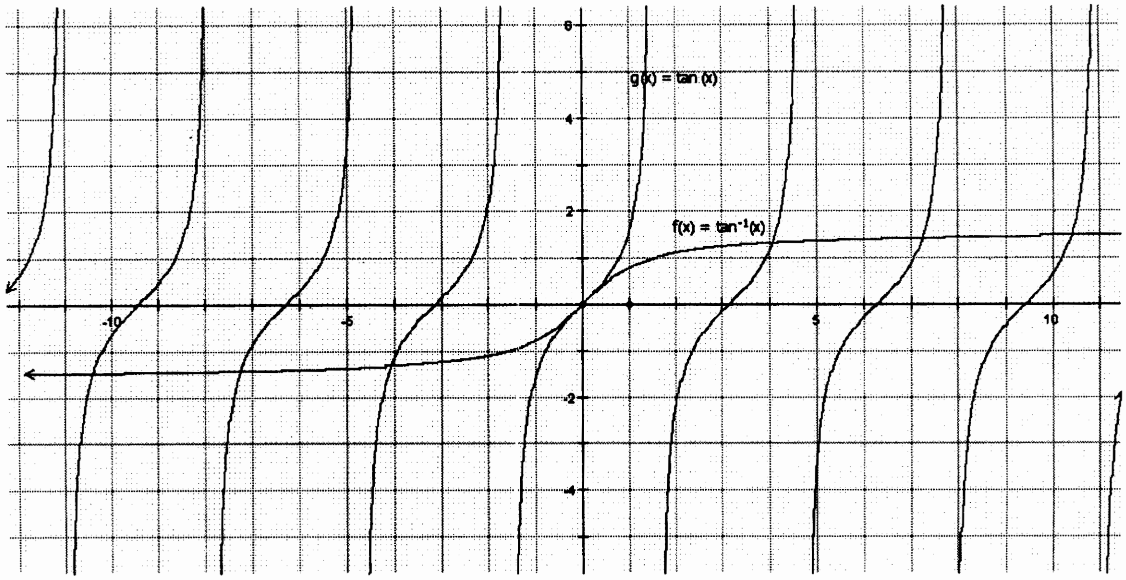
ถ้าเราจำกัด ฟังก์ชันแทนเจนต์ในช่วง $[-\pi/2 , \pi/2]$ เราสามารถกำหนด ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ ดังนี้

5.6.2 ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ (inverse tangent function)

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย arctan หรือ $\tan^{-1}$ กำหนดโดย

$\tan^{-1} y = x$ ก็ต่อเมื่อ $\tan x = y$ เมื่อ $-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$

สังเกตว่า โดเมนของฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันแทนเจนต์ เป็นเซตของจำนวนจริงใด ๆ กระบวนการดังที่กล่าวมาแล้ว เราวาดกราฟของ $y = \tan^{-1} x$ ดังภาพประกอบ



ตัวอย่างที่ 4 จงหา $\tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$

วิธีทำ ให้ $y = \tan^{-1} \frac{1}{\sqrt{3}}$

ดังนั้น $\tan y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ เนื่องจาก $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ เราต้องมี $y = \frac{\pi}{6}$

ตัวอย่างที่ 5 จงหา cos(arctan 4/3) โดยไม่ใช้ตารางและ ไม่ใช้เครื่องคำนวณ

วิธีทำ ให้ $x = \arctan 4/3 \; ; \; 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $\tan x = \frac{4}{3}$

นั่นคือ $\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{4}{3}$

$3\sin x = 4 \cos x$

$9 \sin^2 x = 16 \cos^2 x$

$9 (1 - \cos^2 x) = 16 \cos^2 x$

$25 \cos^2 x = 9$

$$\cos^2 x = \frac{9}{25}$$

$$\cos x = \pm\frac{3}{5}$$

เนื่องจาก $x \in [0\ ,\ \frac{\pi}{2}]$ เราสรุปว่า $\cos x = \frac{3}{5}$

นั่นคือ $\cos(\arctan\frac{4}{3}) = \frac{3}{5}$

5.6.4 คำตอบของสมการ (Exact solutions)

ฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Inverse trigonometric function) สามารถใช้แสดงการหาคำตอบของสมการ ดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 7 จงหาคำตอบทุกคำตอบของสมการ $3 \sin x = 1$ ที่อยู่บนช่วง $[0\ ,\ \pi/2]$

วิธีทำ แก้สมการหาค่า x เรามี $\sin x = \frac{1}{3}$

ซึ่งเราสามารถเขียน $x = \arcsin\frac{1}{3}$

เมื่อใช้เครื่องคำนวณ จะได้ 0.3398 เป็นค่าประมาณของ x ที่สอดคล้องกับสมการข้างต้น

ตัวอย่างที่ 8 จงหาคำตอบของสมการ $5\cos^2 x - 3 = 0$ ซึ่งอยู่ในช่วง $[0\ ,\ \pi]$

วิธีทำ $5\cos^2 x - 3 = 0$

$$\cos^2 x = \frac{3}{5}$$

$$\cos x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}} = \pm\frac{\sqrt{15}}{5}$$

เราอาจเขียน $x = \arccos\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$ หรือ $x = \arccos\left(-\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$

จะได้ $x \approx 0.6847$ และ $x \approx 2.4568$ เป็นคำตอบโดยประมาณของสมการข้างต้น

แบบฝึกหัด 5.6

1. ในข้อย่อยที่ 1) - 10) จงคำนวณนิพจน์ที่กำหนดให้

1) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ 2) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ 3) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4) $\tan^{-1} 0$ 5) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 6) arctan 1

7) arctan(-1) 8) arcsin 0 9) $\cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

10) $\tan^{-1}\sqrt{3}$

2. ในข้อย่อยที่ 1) - 6) จงใช้ตาราง V ในตารางภาคผนวกประมาณนิพจน์ที่กำหนดให้

1) $\sin^{-1}(0.3648)$ 2) arctan(1.369) 3) $\cos^{-1}(-0.7648)$

4) $\tan^{-1}(-3.010)$ 5) arcos(0.912) 6) $\sin^{-1}(0.9464)$

3. ในข้อย่อย 1) – 10) จงคำนวณนิพจน์ที่กำหนดให้

1) sin(arctan 1) 2) $\cos(\arcsin -\frac{1}{2})$ 3) $\cos^{-1}(\sin \frac{9\pi}{4})$

4) $\tan(\sin^{-1} 0)$ 5) $\cos^{-1}(\cos\frac{2\pi}{3})$ 6) $\sin^{-1}(\cos\frac{\pi}{3})$

4. ในข้อย่อย 1) - 5) จงใช้ฟังก์ชันผกผันตรีโกณมิติ แสดงคำตอบของสมการที่กำหนดให้

1) $5\sin^2 x - 1 = 0$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

2) $4\cos^2 x - 3 = 0$, $x \in [0, \pi]$

3) $12\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$, $x \in [0, \pi]$

4) $9\sin^2 x - 12\sin x + 4 = 0$, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

5) $2\tan^2 x + 4\tan x - 3 = 0$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

5. ในข้อย่อย 1) และ 2) จงหาค่า x ที่แสดงว่า สมการไม่เป็นเอกลักษณ์

1) $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$

2) $(\sin^{-1} x)^2 + (\cos^{-1} x)^2 = 1$

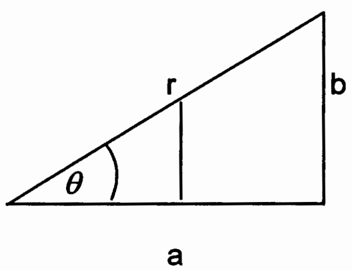
5.7 ตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (right triangle trigonometry)

ในตอนนี้เราจะแสดงว่าฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมแหลม (acute angle) สัมพันธ์กับอัตราส่วนของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในรูป 5.7-1(1) เราแสดงรูปสามเหลี่ยมมุมฉากพร้อมด้วยด้าน a และ b ด้านตรงข้ามมุมฉาก r และมุมแหลม θ เราสามารถวางมุมนี้บนระบบพิกัดฉาก โดย θ อยู่ในตำแหน่งมาตรฐาน ในรูป 5.7-1(2) เราสามารถสร้างวงกลมหนึ่งหน่วย และให้ N(x , y) แสดงจุด บนวงกลม และด้านตรงข้ามมุมฉาก OP ถ้าเราลากเส้นตั้งฉาก NM ดังแสดง เราจะเห็นว่ารูปสามเหลี่ยม OMN และรูปสามเหลี่ยม OQP คล้ายกัน ด้านที่สมนัยกันต้องเป็นสัดส่วนกัน นั่นคือ

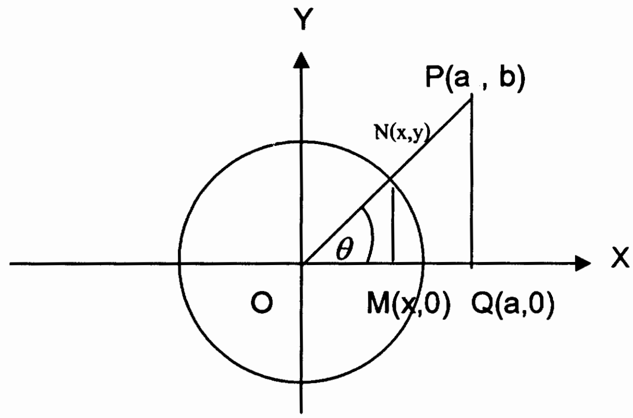
$$\frac{MN}{ON} = \frac{QP}{OP} \text{ และ } \frac{OM}{1} = \frac{OQ}{OP}$$

เนื่องจาก OP = r จะได้

$$\frac{y}{1} = \frac{b}{r} \text{ และ } \frac{x}{1} = \frac{a}{r} \qquad \text{..........(1)}$$



ภาพประกอบ 5.7-1(1)



ภาพประกอบ 5.7-1(2)

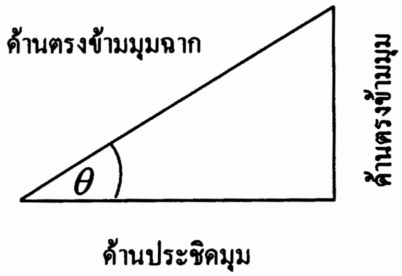
โดยบทนิยาม sin θ = y และ cosθ = x โดยการแทนที่ใน (1) เรามี

$$\sin\theta = y = \frac{b}{r}$$

และ

$$\cos\theta = x = \frac{a}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$$



ถ้าเรากำหนดด้าน a และ b ของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ใน 5.7-1(1) เป็นด้านตรงข้ามมุม และด้านประชิดมุม θ (ดูรูป) ดังนั้นผลสุดท้ายแสดงฟังก์ชันตรีโกณมิติ ดังอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีดังนี้

$\sin\theta$ คือความยาวของด้านตรงข้ามมุม θ หารด้วยความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ

$$\sin\theta = \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{hypotenuse}}$$

$\cos\theta$ คือความยาวของด้านประชิดมุม θ หารด้วยความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก หรือ

$$\cos\theta = \frac{\text{side adjacent to } \theta}{\text{hypotenuse}}$$

$\tan\theta$ คือความยาวของ ด้านตรงข้ามมุม θ หารด้วยความยาวของด้านประชิดมุม θ หรือ

$$\tan\theta = \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{side adjacent to } \theta}$$

$\csc\theta$ คือความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก หารด้วยความยาวด้านตรงข้ามมุม หรือ

$$\csc\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{side opposite } \theta}$$

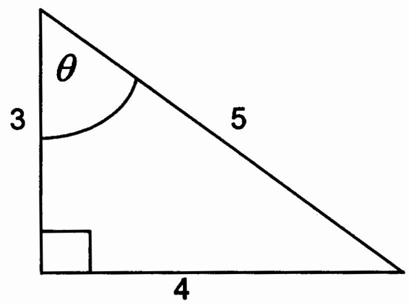
$\sec\theta$ คือความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากหารด้วยความยาวของด้านประชิดมุม หรือ

$$\sec\theta = \frac{\text{hypotenuse}}{\text{side opposite } \theta}$$

$\cot\theta$ คือความยาวของด้านประชิดมุม θ หารด้วยความยาวของด้านตรงข้ามมุม θ หรือ

$$\cot\theta = \frac{\text{side opposite } \theta}{\text{side adjacent to } \theta}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม θ



วิธีทำ

$\sin\theta = \frac{4}{5}$ $\qquad$ $\csc\theta = \frac{5}{4}$

$\cos\theta = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\sec\theta = \frac{5}{3}$

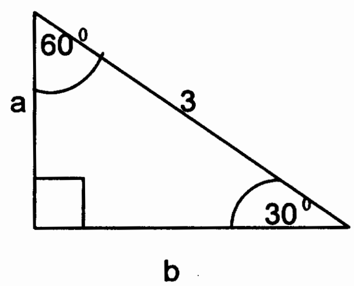
$\tan\theta = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\cot\theta = \frac{3}{4}$

ตัวอย่างที่ 2 ใช้ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติ หาค่าต่อไปนี้

(1) หาด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีมุมภายในเป็น 30^0 , 60^0 และ 90^0 เมื่อด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 3 หน่วย

(2) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากหน้าจั่วมีด้านประกอบมุมฉากยาวด้านละ 2 หน่วย

วิธีทำ (1) ให้ด้านตรงข้ามมุม 30^0 ยาว a และด้านตรงข้ามมุม 60^0 ยาว b หน่วย



ดังนั้น $\sin 30^0 = \frac{a}{3}$

$\frac{1}{2} = \frac{a}{3}$

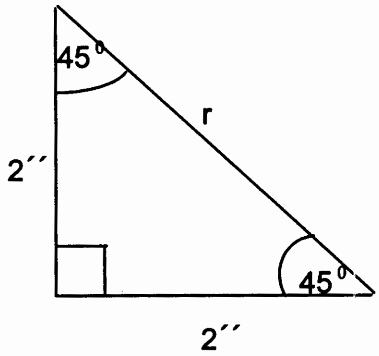
$a = \frac{3}{2}$

$\sin 60^0 = \frac{b}{3}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{3}$

$b = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

(2)



ให้ด้านตรงข้ามมุมฉากยาว r หน่วย

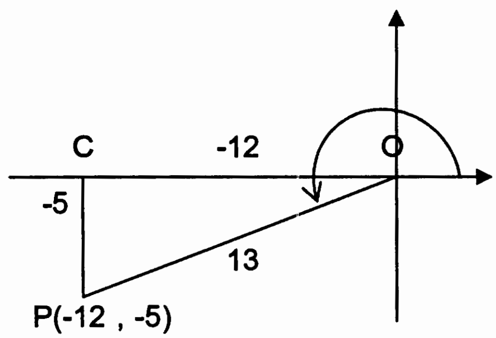
$$\sin 45^{0} = \frac{2}{r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{r}$$

$$r = 2\sqrt{2}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหา $\sec\theta$ ถ้าจุด P(-12 , -5) ดังรูป

วิธีทำ



เนื่องจากพิกัดของ P เป็น (-12 , -5) นั่นคือ รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มีด้านประกอบมุมฉากยาว 12 และ 5 หน่วย และหาด้านตรงข้ามมุมฉากได้ 13 หน่วย

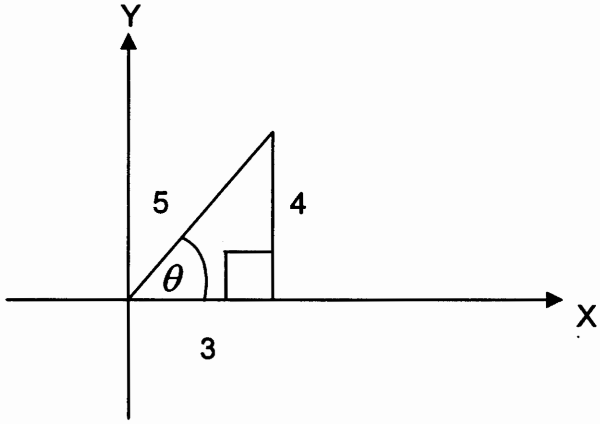
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\frac{-12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

ในบทที่แล้วเราได้ศึกษาปัญหาเกี่ยวกับ ฟังก์ชันผกผันขอฟังก์ชันตรีโกณมิติ (inverse trigonometry function) รูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะช่วยให้เราแก้ปัญหาเหล่านั้นได้ง่ายและรวดเร็วขึ้น ซึ่งจะได้แสดงตัวอย่างที่5 ในหัวข้อที่แล้วอีกครั้งดังตัวอย่างที่ 4

ตัวอย่างที่ 4 จงหา cos(arctan $\frac{4}{3}$) โดยไม่ใช้ตารางหรือเครื่องคำนวณ

วิธีทำ ให้ θ = arctan $\frac{4}{3}$ ดังนั้น

$\tan\theta = \frac{4}{3}$ และ $0 < \theta < \pi/2$

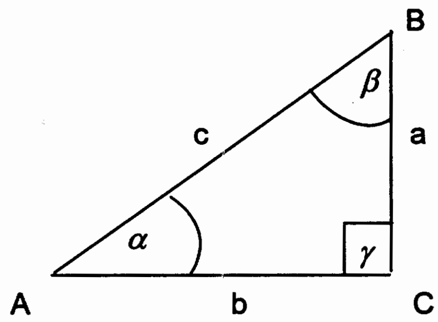


ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\cos(\arctan \frac{4}{3}) = \cos\theta$$
$$= \frac{3}{5}$$

5.7.1 การแก้ปัญหารูปสามเหลี่ยม

คำว่า "การแก้ปัญหารูปสามเหลี่ยม" ใช้สำหรับบ่งชี้ว่าเราหาทุกส่วนของรูปสามเหลี่ยม นั่นคือ กำหนดด้านสองด้าน หรือกำหนดหนึ่งด้านและมุมแหลมหนึ่งมุม ซึ่งจะสามารถแก้รูปสามเหลี่ยม เราอาจกำหนดสัญกรณ์ในรูปทั่วไปดังแสดงในรูป โดยที่ (1) **มุมแหลมกำหนดชื่อมุมเป็น** α **และ** β **มุมฉากกำหนดเป็น** γ และ (2) **ด้านตรงข้ามมุม** α , β **และ** γ **กำหนดความยาวเป็น a , b และ c ตามลำดับ** ในการแก้ปัญหารูปสามเหลี่ยม เราจะจำกัดสำหรับฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ เนื่องจากฟังก์ชันไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ ครอบคลุมที่จะใช้หาคำตอบ



ตัวอย่างที่ 5 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , $\gamma = 90^0$, $\beta = 27^0$ และ b = 17.2 จงหาค่าประมาณ ของส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ เนื่องจาก $\gamma = 90^0$, $\beta = 27^0$ ดังนั้น $\alpha = 180^0 - (90^0 + 27^0) = 63^0$

หา a และ c โดยใช้ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุม $\alpha = 63^0$ จะได้

$$\tan 63^0 = \frac{a}{b}$$

$$0.5095 = \frac{a}{17.2}$$

$$a = 17.2 \times 0.5095$$

$$\cos 63^0 = \frac{b}{c}$$

$$0.4540 = \frac{17.2}{c}$$

$$c = \frac{17.2}{0.454}$$

$$\approx 37.8$$

$$\tan 63^0 = \frac{a}{b}$$

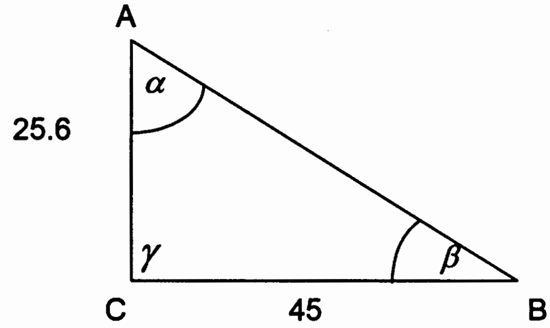
$$1.963 = \frac{a}{17.2}$$

$$a = 17.2 \times 1.963$$

$$\approx 33.8$$

ตัวอย่างที่ 6 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , $\gamma = 90^0$, a = 45 และ b = 25.6 จงประมาณค่าส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ



หา α จากสูตร

$\tan\alpha$ = ด้านตรงข้ามมุม α / ด้านประชิดมุม α

$= \frac{45}{25.6}$

≈ 1.757

เนื่องจาก $\tan 60^0\ 30' = 1.756$

ดังนั้น $\alpha = 60^0\ 30'$

หา β จาก $180^0 - (90^0 + 60^0\ 30')$

ดังนั้น $\beta = 29^0\ 30'$

หาความยาวด้านตรงข้ามมุมฉาก c ดังนี้

$\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\sin 29^0 30' = \frac{25.6}{c}$

$c = \frac{25.6}{0.4924}$

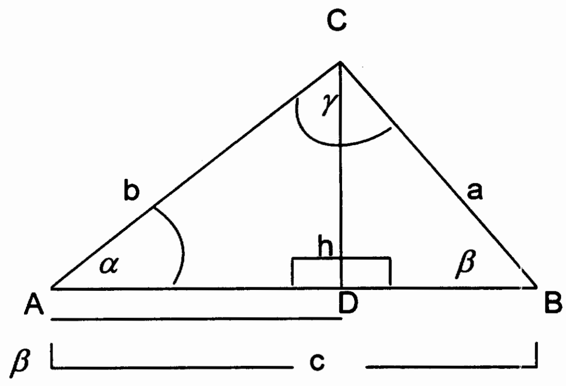
$= 51.99$

ดังนั้น $\alpha = 60^0 30'$ $\beta = 29^0 30'$ และ c = 51.99

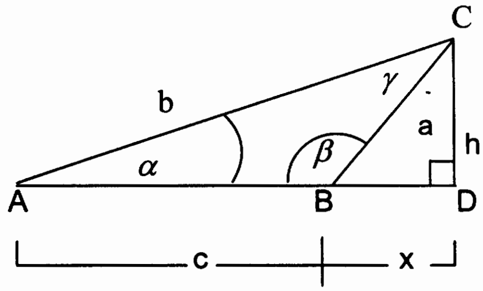
5.7.2 กฎของโคไซน์ (law of cosines)

ในหัวข้อ 5.2 เราได้ศึกษาตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ในหัวข้อนี้และหัวข้อต่อ ๆ ไป จะได้สำรวจรูปสามเหลี่ยมใด ๆ ซึ่งหมายถึงรูปสามเหลี่ยมที่ไม่มีมุมใดเป็นมุมฉาก

เราสามารถแก้รูปสามเหลี่ยมใด ๆ โดยลากเส้นตั้งฉากกับด้านใดด้านหนึ่งดังรูป 5.7-2(1) และ 5.7-2(2) และดำเนินการกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ACD และ BCD อย่างไรก็ตาม สิ่งที่เป็นประโยชน์คือวิเคราะห์ในรูปทั่วไป ซึ่งรู้จักกันในชื่อกฎของไซน์ และกฎของโคไซน์ ซึ่งในตอนนี้จะได้กล่าวถึงกฎของโคไซน์ดังนี้



ภาพประกอบ 5.7.2-1(1)



ภาพประกอบ 5.7.2-1(2)

กฎของโคไซน์

ในรูปสามเหลี่ยม ABC

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

ในการพิสูจน์กฎของโคไซน์ เราจะเกี่ยวข้องกับกรณีที่แสดงใน รูป 5.7.2 - 1(1) และ 5.7.2 - 1(2)

กรณีที่ 1 มุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกมุมเป็นมุมแหลม รูป 5.7.2 - 1(1) เราจะสร้างเส้นตั้งฉาก CD กับ AB ประยุกต์ทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC และ ADC โดยมี

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + (c - x)^2 \\ &= h^2 + c^2 - 2cx + x^2 \\ &= (h^2 + x^2) + c^2 - 2cx \\ &= a^2 + c^2 - 2cx \end{aligned}$$

ผลขั้นสุดท้ายจากการประยุกต์ของทฤษฎีบทพีทาโกรัสกับรูปสามเหลี่ยม ADC จะได้

$\cos\alpha = \frac{x}{b}$ หรือ $x = b \cos\alpha$

ดังนั้น $2cx = 2c\, b \cos\alpha$

จะได้ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$

กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยม ABC มีมุม β เป็นมุมป้าน รูป 5.7.2 - 1(2) เราสร้างเส้นตั้งฉาก CD กับด้าน AB ทฤษฎีบทพีทาโกรัสสามารถประยุกต์กับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก BDC จะได้

$$a^2 = h^2 + x^2$$

ขั้นต่อไป เราใช้ตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ADC จะได้

$$\sin\alpha = \frac{h}{b} \quad \text{หรือ } h = b\sin\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{c+x}{b} \quad \text{หรือ } x = -c + b\cos\alpha$$

แทน h และ x ใน ($a^2 = h^2 + x^2$) จะได้

$$\begin{aligned} a^2 &= (b\sin\alpha)^2 + (-c + b\cos\alpha)^2 \\ &= b^2\sin^2\alpha + c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \end{aligned}$$

เพื่อช่วยให้จดจำง่ายขึ้น เราอาจเปลี่ยน α , β และ γ เป็น A , B และ C ตามลำดับจะได้

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

เราสามารถหาสูตรอีกสองสูตรได้เช่นเดียวกันจะได้กฎของโคไซน์ดังนี้

ในรูปสามเหลี่ยม ABC

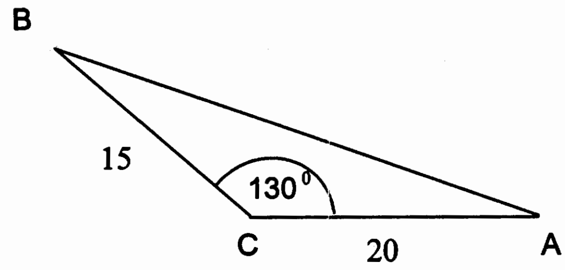
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \text{..................................(1)}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \quad \text{..................................(2)}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \quad \text{..................................(3)}$$

การใช้กฎของโคไซน์อาจใช้เมื่อ กำหนดด้านให้สามด้าน หรือกำหนดด้านให้สองด้านและกำหนดมุมระหว่างด้านทั้งสองด้านนั้นในการคำนวณกฎของโคไซน์อาจทำได้ง่ายขึ้นถ้าใช้เครื่องคำนวณเพื่อช่วยในการคิดคำนวณ

ตัวอย่างที่ 7 จงหาความยาวของด้านที่สามของรูปสามเหลี่ยมที่แสดงดังรูป

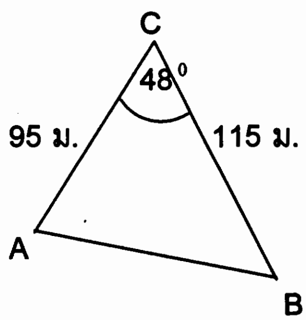


กำหนดด้านสองด้านและมุมหนึ่งมุม (SAS) ดังนั้นสามารถใช้กฎของโคไซน์

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \\
&= 15^2 + 20^2 - 2(15)(20)\cos 130^0 \\
&= 225 + 400 - 600\,(-0.6428) \\
&= 1010.68 \\
c &= 31.8
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 8 วิศวกรต้องการเจาะอุโมงค์ผ่านภูเขา เขาต้องการรู้ว่าจะต้องเจาะเขาเป็นระยะทางเท่าไรจากจุด A ถึงจุด B ได้เลือกจุด C ซึ่งห่างจาก A เป็นระยะทาง 95 เมตร ห่างจาก B เป็นระยะทาง 115 เมตร ถ้ามุม ACB มีขนาด 48^0 จงหาความยาวของอุโมงค์โดยประมาณ

วิธีทำ ใช้ข้อมูลที่รู้ประยุกต์กฎของโคไซน์



$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos 48^0 \\
&= 115^2 + 95^2 - 2(115)(95)(0.6691) \\
&= 13225 + 9025 - 14619.835 \\
&= 7630.165 \\
c &\approx 87.35
\end{aligned}
$$

ดังนั้น อุโมงค์ยาวประมาณ 87.5 เมตร

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าประมาณของขนาดของมุม A , B และ C ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อ a = 75 ฟุต b = 50 ฟุต และ c = 37.5 ฟุต

วิธีทำ แทนค่า a , b และ c ในสมการ

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

จะได้ $75^2 = 50^2 + 37.5^2 - 2(50)(37.5) \cos A$

$5625 = 2500 + 1406.25 - 3750 \cos A$

$3750 \cos A = 3906.25 - 5625$

$\cos A = -0.4583$

เนื่องจาก cos A เป็นจำนวนลบมุม A ต้องอยู่ในจตุภาคที่ 2 และเป็นมุมป้าน

$\cos 62^0 40' = .4592$

$\cos M = 0.4583$

$\cos 62^0 50' = .4566$

$M = 62^0 43'$

ดังนั้น $A = 180^0 - 62^0 43'$

$= 117^0 17'$

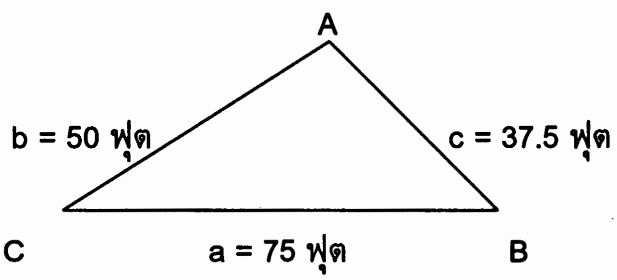
ทำนองเดียวกันจะได้

$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B$

$50^2 = 75^2 + 37.5^2 - 2(75)(37.5) \cos B$

$2500 = 5625 + 1406.25 - 5625 \cos B$

จะได้



$\cos B \approx 0.8056$

$B \approx 36^0 20'$

ดังนั้น $C \approx 180^0 - 117^0 17' - 36^0\ 20' = 26^0 23'$

นักเรียนอาจทดลองหาค่า C โดยแทนค่าในสูตร $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

เราสามารถใช้ประโยชน์จากเรขาคณิตในระนาบที่ว่าในรูปสามเหลี่ยม ABC ถ้า $a < b$ แล้ว $A < B$ นั่นคือ มุมที่เล็กกว่าอยู่ตรงข้ามกับด้านที่สั้นกว่า ทฤษฎีบทนี้ช่วยให้เราสามารถตรวจสอบได้อย่างรวดเร็วว่า ผลการคิดคำนวณสมเหตุสมผลหรือไม่ คุณสามารถตรวจสอบได้เสมอว่ามุมและด้านสมนัยกันหรือไม่ดังที่กล่าวแล้ว

แบบฝึกหัด 5.7

1. ในแบบฝึกหัด 1) - 5) จงใช้กฎของโคไซน์ประมาณส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ABC เมื่อกำหนด

   1) $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ จงหา B

   2) $a = 25$, $c = 30$, $B = 29^{0}\ 40'$ จงหา b

   3) $a = 12$, $b = 16$, $C = 110^{0}$ จงหา c

   4) $b = 12$, $a = 14$, $C = 68^{0}$ จงหา A

   5) $a = 18$, $b = 24$, $c = 30$ จงหา C

2. ด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ยาว 12.5 เซนติเมตร และ 20 เซนติเมตร และเส้นทแยงมุมเส้นที่ยาวกว่ายาว 25 เซนติเมตร จงหาขนาดของมุมที่เล็กกว่าของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

3. ด้านของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ยาว 20 เซนติเมตร และ 35 เซนติเมตร และมุมมุมหนึ่งมีขนาด 110^{0} จงหาขนาดของความยาวของเส้นทแยงมุมแต่ละเส้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

4. เรือออกจากท่าเรือ A ตั้งใจจะเดินทางตรงไปยังเมือง B ซึ่งอยู่ห่างจาก A เป็นระยะ 50 กิโลเมตร หลังจากเดินทางได้ 24 กิโลเมตร กัปตันพบว่าเส้นทางในการเดินทางคลาดเคลื่อนไป 10^{0} จงหาว่าเรืออยู่ห่างจาก B เป็นระยะเท่าไร

5. เรือออกจากท่าเรือ A เวลา 9.00 นาฬิกา และเดินทางไปทิศตะวันตกด้วยอัตราเร็ว 15 ไมล์ต่อชั่วโมง ในเวลา 11.00 นาฬิกาเรือเปลี่ยนทิศทางในทิศ 210 องศา จงหาระยะทางที่ห่างจากท่าเรือในเวลา 13.00 นาฬิกา

6. รถไฟสองขบวนออกจากสถานีเพนซิลวาเนียในเมืองนิวยอร์กในเวลา 14.00 นาฬิกา และถ้าทิศทางการแล่นทำมุมกัน 55^{0} ถ้ารถแล่นคงตัวด้วยอัตรา 50 ไมล์ต่อชั่วโมง และ 75 ไมล์ต่อชั่วโมง ตามลำดับ จงหาว่าเมื่อเวลา 14.30 นาฬิกา รถทั้งสองขบวนอยู่ห่างกันเท่าไร

7. สำหรับรูปสามเหลี่ยม ABC จงพิสูจน์ว่า

   1) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(bc \cos A + ac \cos B + ab \cos C)$

   2) $\dfrac{\cos A}{a} = \dfrac{\cos B}{b} = \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

5.8 กฎของไซน์ (Law of sines)

ในหัวข้อนี้เราจะประยุกต์กฎของไซน์กับรูปสามเหลี่ยมปกติ ซึ่งชื่อของกฎนี้ได้จากรูปที่ปรากฏของฟังก์ชันไซน์ ในประโยคสัญลักษณ์

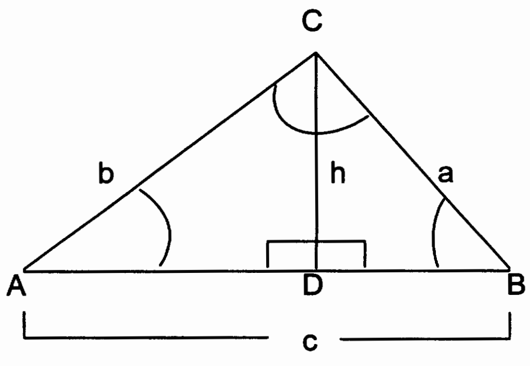
เราจะกำหนดและพิสูจน์กฎของไซน์ซึ่งจะประยุกต์สู่รูปสามเหลี่ยมปกติ และในที่นี้เราจะกำหนดมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้าน a , b และ c ด้วย A , B และ C ตามลำดับ

กฎของไซน์

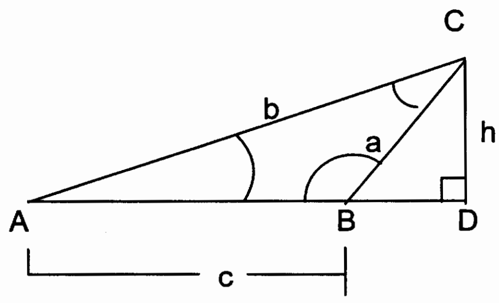
ในรูปสามเหลี่ยม ABC

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

เราจะแสดงการพิสูจน์ในสองกรณี



(a)



(b)

กรณีที่ 1 มุมของรูปสามเหลี่ยม ABC ทุกมุมเป็นมุมแหลม รูป (a) เราจะสร้างเส้นตั้งฉาก CD กับด้าน AB ดังนั้นรูปสามเหลี่ยม ADC และ BDC ต่างก็เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และเราสามารถประยุกต์ตรีโกณมิติกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งจะได้

$\sin A = \frac{h}{b}$ หรือ $h = b \sin A$ ....(1)

$\sin B = \frac{h}{a}$ หรือ $h = a \sin B$ ....(2)

จาก (1) และ (2) ต่างก็เป็นความยาว h ดังนั้น

$$b \sin A = a \sin B$$

ซึ่งเราสามารถเขียนในรูป

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

กรณีที่ 2 รูปสามเหลี่ยม ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน โดยมี B เป็นมุมป้าน รูป (b) เราสร้างเส้นตั้งฉากกับด้าน AB ที่ D ประยุกต์ตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากกับรูปสามเหลี่ยม ADC และ BDC และสังเกตว่า $C\hat{B}D = 180^{0} - A\hat{B}C$ เราจะได้

$\sin A = \frac{h}{b}$ หรือ $h = b \sin A$ ....(3)

$\sin (180^{0} - B) = \frac{h}{a}$ หรือ $h = a \sin (180^{0} - B)$ ....(4)

จาก (3) และ (4) ต่างก็เป็นความยาว h ดังนั้น

$$b \sin A = a \sin (180^{0} - B)$$

เนื่องจาก sine เป็นบวกทั้งในจตุภาคที่ 1 และจตุภาคที่ 2 ซึ่งเราจะได้

$\sin (180^{0} - B) = \sin B$ เมื่อแทนค่าจะได้

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

เช่นเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

นั่นคือ

$$\boxed{\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}}$$

เมื่อ sin A $\neq$ 0 , sin B $\neq$ 0 และ sin C $\neq$ 0

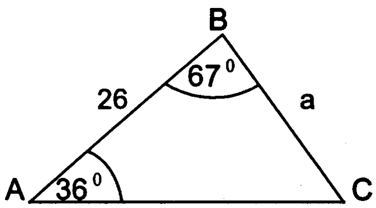
กฎของไซน์อาจใช้เมื่อทราบส่วนของรูปสามเหลี่ยมคือ

(1) ด้านหนึ่งด้าน และมุมสองมุม หรือ

(2) ด้านสองด้านและมุมหนึ่งมุมซึ่งอยู่ตรงข้ามกับด้านใดด้านหนึ่ง

ตัวอย่างที่ 1 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , A = 36^0 , B = 67^0 และ c = 26 จงหาค่าของส่วนที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ



เนื่องจากรู้มุม A และมุม B ดังนั้นหามุม C ได้ดังนี้

C = 180^0 - (A + B) = 180^0 - (36^0 + 67^0) = 77^0

ประยุกต์กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 36^0} = \frac{b}{\sin 67^0} = \frac{26}{\sin 77^0}$$

หา a จากสมการ

$$\frac{a}{\sin 36^0} = \frac{26}{\sin 77^0}$$

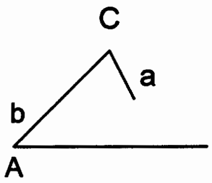
จะได้

$$\begin{aligned} a &= \frac{26 \times \sin 36^0}{\sin 77^0} \\ &= \frac{26 \times 0.5878}{0.9744} \\ &\approx 15.68 \end{aligned}$$

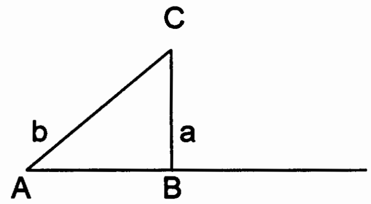
5.8.1 กรณีหาค่าได้ค่าเดียวและกรณีคลุมเครือ (unique and ambiguous cases)

เมื่อส่วนที่กำหนดให้ของรูปสามเหลี่ยมเป็นด้านสองด้านและมุมที่อยู่ตรงข้ามกับด้านหนึ่งของสองด้านนั้น จากรูป เราสร้างมุม A และด้าน b และใช้วงเวียนสร้างด้านที่ยาว a โดยมี C เป็นจุดปลาย ในรูป (a) ไม่เกิดรูปสามเหลี่ยม รูป (b) แสดงว่าเราอาจได้

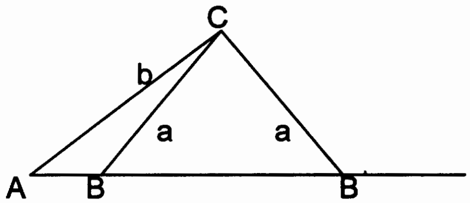
รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูป (c) แสดงความเป็นไปได้ที่จะเกิดรูปสามเหลี่ยมสองรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ รูป (d) แสดงว่าอาจเกิดรูปสามเหลี่ยมมุมป้านหนึ่งรูป



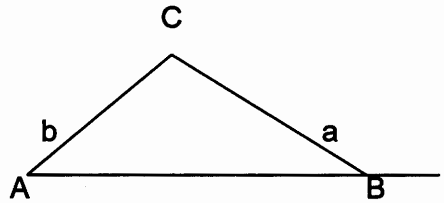
(a)



(b)



(c)



(d)

สมมุติว่าทราบด้าน a และ b และมุม A ของรูปสามเหลี่ยม ABC และเราใช้ไซน์สำรวจมุม B ซึ่งเป็นผลที่สอดคล้องกับความเป็นไปได้ของรูป

(a) $\sin B > 1$ เนื่องจาก $|\sin\theta| \leq 1$ สำหรับทุก θ นั่นคือ ไม่มีมุม B ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งสอดคล้องกับรูป (a)

(b) $\sin B = 1$ ดังนั้น $B = 90^0$ และส่วนที่กำหนดให้ทำให้ได้รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก รูป (b)

(c) $0 < \sin B < 1$ มีกรณีที่เป็นไปได้สองกรณีสำหรับ B ซึ่งทำให้เรียกว่า กรณีคลุมเครือ เนื่องจากฟังก์ชันไซน์เป็นบวกในจตุภาคที่ 1 และ 2 กรณีหนึ่งจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมป้าน และอีกกรณีหนึ่งจะเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลม รูป (c)

(d) $0 < \sin B < 1$ มีกรณีที่เป็นไปได้สองกรณีสำหรับ B แต่มุมแหลมไม่ก่อให้เกิดรูปสามเหลี่ยม รูป (d) กรณีนี้ $\alpha + \beta$ มากกว่า 180^0

ต่อไปนี้จะแสดงการใช้กฎของไซน์ เมื่อกำหนดด้านสองด้านและมุมตรงข้ามด้านหนึ่งของด้านเหล่านี้

ตัวอย่างที่ 2 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , A = 60^0 , a = 10 และ b = 14 จงหามุม B

วิธีทำ ใช้กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{14\sin 60^0}{10} = \frac{7\sqrt{3}}{10} \approx 1.2$$

เนื่องจากฟังก์ชันไซน์มีค่ามากที่สุดเป็น 1 ไม่มีมุม B ซึ่ง sin B = 1.2 ดังนั้นไม่มีรูปสามเหลี่ยมตามส่วนที่กำหนดให้ ตัวอย่างนี้สอดคล้องกับรูป (a)

ตัวอย่างที่ 3 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , a = 7.5 , b = 12 และ A = 24^0 จงหามุมที่เหลือของรูปสามเหลี่ยม

วิธีทำ ใช้กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{12\sin 24^0}{7.5} = \frac{12\times 0.4067}{7.5} \approx 0.6507$$

ใช้ตารางหรือเครื่องคำนวณ เราหาว่า $\hat{B} \approx 40^0 35'$ เนื่องจาก $\hat{A} = 24^0$, $\hat{B} \approx 40^0 35'$ ดังนั้น $\hat{C} = 115^0 25'$

อย่างไรก็ตาม มุม B = $180^0 - 40^0\ 35' = 139^0 25'$ สอดคล้องกับข้อกำหนดที่ sin B = 0.6507 ด้วย ดังนั้นรูปสามเหลี่ยมอื่น ๆ ที่สอดคล้องมี $\hat{A} = 24^0$ $\hat{B} = 139^0 25'$ และ $\hat{C} = 16^0\ 35'$ ซึ่งกรณีนี้เป็นกรณีคลุมเครือ และสอดคล้องกับรูป (c)

ตัวอย่างที่ 4 ในรูปสามเหลี่ยม ABC , a = 18 , b = 12 และ $\hat{A} = 38^0$ จงหา $\hat{B}$ และ $\hat{C}$

วิธีทำ ใช้กฎของไซน์

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

$$\sin B = \frac{b\sin A}{a} = \frac{12\sin 38^0}{18}$$

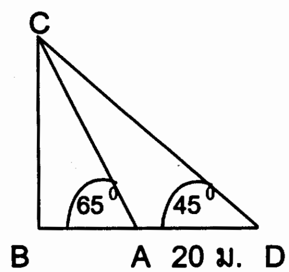
$$= \frac{12\times 0.6157}{18}$$

$$\approx 0.4105$$

ใช้ตารางหรือเครื่องคำนวณ เราหาว่า B ≈ $24^{\circ}13'$ รูปสามเหลี่ยมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขคือ $\hat{A} = 38^{\circ}$ $\hat{B} = 24^{\circ}13'$ มุม C = $180^{\circ} - (38^{\circ} + 24^{\circ}13') = 117^{\circ}47'$ มุม B = $180^{\circ} - 24^{\circ}13' = 155^{\circ}47'$ สอดคล้องกับข้อกำหนดที่ sin B = 0.4105 ด้วย แต่คำตอบนี้ไม่เป็นจริงเนื่องจาก $\hat{A} + \hat{B} > 180$ ซึ่งตัวอย่างนี้สอดคล้องกับรูป (d)

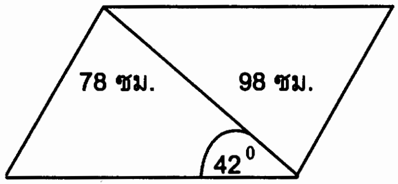
แบบฝึกหัด 5.8

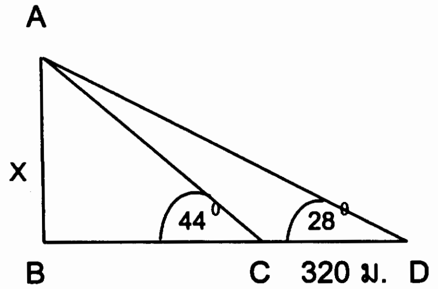
1. ในข้อ 1) - 6) จงใช้กฎของไซน์ประมาณส่วนต่าง ๆ ของรูปสามเหลี่ยม ABC หาคำตอบทั้งสองคำตอบ ถ้าเกิดรูปสามเหลี่ยมมากกว่าหนึ่งรูปที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้
   1) $A = 26^{\circ}$, $B = 80^{\circ}$, a = 24 จงหา b
   2) $B = 22^{\circ}$, $C = 48^{\circ}$, a = 18.4 จงหา c
   3) $A = 42^{\circ}30'$, $C = 76^{\circ}20'$, b = 30 จงหา a
   4) $A = 66^{\circ}$, a = 50 , b = 60 จงหา B
   5) $C = 30^{\circ}$, a = 25.2 , c = 12.6 จงหา b
   6) $C = 45^{\circ}$, b = 14 , c = 12 จงหา a
2. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่จุด A ซึ่งอยู่ห่างจากเสาไฟฟ้า BC ต้นหนึ่ง สังเกตเห็นยอดเสาไฟทำมุมเงย 65° กับพื้น เมื่อเขาเดินออกไปในทิศทางตรงข้ามกับเสาไฟฟ้า เป็นระยะ 20 เมตร ซึ่งอยู่ที่จุด D เห็นยอดเสาไฟฟ้าทำมุม 45° กับพื้น จงหาว่ายอดเสาไฟอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะทางเท่าไร



3. ด้านที่สั้นของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน และด้านที่สั้นของเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานนั้นยาว 78 เซนติเมตร และ 98 เซนติเมตรตามลำดับ ถ้ามุมระหว่าง

ด้านยาวและเส้นทแยงมุมเส้นสั้นเป็น 42 องศา จงหาความยาวของด้านที่ยาวกว่าของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

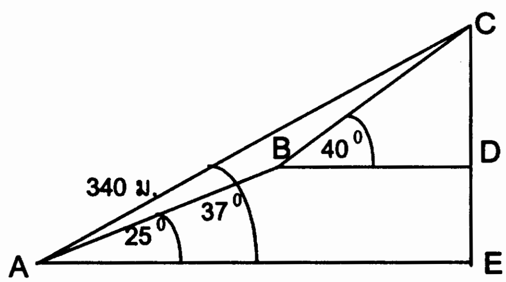


4. 

ชายคนหนึ่งต้องการทราบว่าเนินเขาที่จุด A สูง (AB) เท่าไร เขาอยู่ที่จุด C วัดมุมเงยของยอดเขาที่ทำกับพื้นได้ 44^0 เมื่อเดินในทิศตรงข้ามกับภูเขาไปถึงจุด D วัดมุมเงยของยอดเขาที่ทำกับพื้นได้ 28^0 และระยะ CD เท่ากับ 320 เมตร เนินเขาสูงจากพื้นที่เขาสังเกตเป็นระยะทางเท่าไร

5. ในเวลา 5.00 น. นายท้ายเรือเดินเรือออกจากท่าเรือ A มุ่งไปที่เกาะ B ซึ่งอยู่ทางทิศตะวันออก ด้วยความเร็ว 18 ไมล์ต่อชั่วโมง แต่เรือแล่นไปในทิศ 064^0 เมื่อเวลา 6.00 น. เรือได้เปลี่ยนทิศทางเดินเรือมุ่งไปยังเกาะซึ่งทำมุม 127^0 จงหาระยะทางจากเรือถึงเกาะ ณ เวลา 6.00 น.

6. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ที่พื้นที่จุด A มองเห็นยอดเขาที่จุด C เป็นมุมเงย 37^0 และเมื่อเดินขึ้นไปตามทางลาดเอียงซึ่งทำมุมเงย 25^0 เป็นระยะทาง 340 เมตร มองเห็นยอดเขาที่จุด C เป็นมุมเงย 40^0 จงหาว่า ยอดเขา C อยู่สูงจากพื้นเป็นระยะเท่าไร



5.9 ตรีโกณมิติ เชิงวิเคราะห์ (analytic trigonometry)

นิพจน์ ตรีโกณมิติ เกี่ยวข้องกับสมาชิกเดียวกัน รวมถึงฟังก์ชันตรีโกณมิติของตัวแปร และค่าคงตัว ซึ่งรวมถึงการดำเนินการทางพีชคณิตของฟังก์ชันเหล่านี้ ดังนั้น

$$x + \sin x\ ,\ \sin x + \cos x\ ,\ \frac{1-\cos x}{\sec^2 x}$$

ทั้งหมดเป็นตัวอย่างของนิพจน์ตรีโกณมิติ

ความแตกต่างระหว่างเอกลักษณ์ และสมการ คือ เอกลักษณ์ตรีโกณมิติเป็นจริงสำหรับทุกค่าจำนวนจริงในโดเมนของตัวแปร แต่สมการตรีโกณมิติเป็นจริงเฉพาะค่าที่แน่นอน ซึ่งเรียกว่าผลเฉลย (solution) สังเกตว่าผลเฉลยของสมการตรีโกณมิติอาจเป็นนิพจน์ เช่น จำนวนจริงหรือมุม ตามปกติ เซตของทุกผลเฉลยของสมการตรีโกณมิติเรียก เซตผลเฉลย (the solution set)

5.9.1 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

ในหัวข้อ 5.2 เราเริ่มต้นเอกลักษณ์

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \text{...} \ (1)$$

ถ้า $\cos\theta \neq 0$ เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย $\cos^2\theta$ จะได้

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta} = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

หรือ

$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta \qquad \text{...} \ (2)$$

ทำนองเดียวกัน ถ้า $\sin\theta \neq 0$ เมื่อหารทั้งสองข้างของสมการ (1) ด้วย $\sin^2\theta$ จะได้

$$\frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \frac{1}{\sin^2\theta}$$

หรือ

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta \qquad \text{...} \ (3)$$

สังเกตว่า $\tan\theta$ และ $\cot\theta$ ไม่นิยามสำหรับค่า θ ซึ่ง $\cos\theta$ และ $\sin\theta$ เป็นศูนย์ ตามลำดับ

สำหรับสองเอกลักษณ์ข้างต้นนี้ รวมทั้งเอกลักษณ์ใน 5.2 และ 5.5 เรียกว่า เอกลักษณ์มูลฐาน (fundamental identities) ซึ่งเราจะใช้แปดเอกลักษณ์เหล่านี้ตลอดบทนี้

เอกลักษณ์มูลฐาน	รูปสลับ (alternate form)
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$	
$\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$	
$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$	$\sin\theta = \dfrac{1}{\csc\theta}$
$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$	$\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$
$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$	$\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$	$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$	$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$	$\cot^2\theta = \mathrm{css}^2\theta - 1$

ในหัวข้อ 5.8 เราจะเห็นว่าเอกลักษณ์ตรีโกณมิติสามารถจัดให้อยู่ในรูปนิพจน์อย่างง่าย ในที่นี้เป็นตัวอย่างอื่น ๆ ซึ่งเราใช้พัฒนาเอกลักษณ์ในบทนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงทำนิพจน์ $\sin^2\theta + \dfrac{\sin^2\theta}{\cot^2\theta}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ
$$\begin{aligned}
\sin^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{\cot^2\theta} &= \sin^2\theta + \sin^2\theta\tan^2\theta \\
&= \sin^2\theta\,(1 + \tan^2\theta) \\
&= \sin^2\theta\sec^2\theta \\
&= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \tan^2\theta
\end{aligned}$$

ตัวอย่างต่อไปมีเทคนิคต่าง ๆ ในการพิสูจน์เอกลักษณ์ ถ้าเราทราบว่าเริ่มต้นผิด ให้เริ่มใหม่ และพยายามหาแนววิธีอื่น ๆ จะสามารถปรับปรุงทักษะของตนเองได้

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบว่า $\cos x \dfrac{\csc x}{\cot x} = 1$

วิธีทำ เปลี่ยนทุกฟังก์ชันตรีโกณมิติให้อยู่ในรูปของ sine และ cosine

เนื่องจาก $\cos x \dfrac{\csc x}{\cot x} = \cos x \dfrac{1}{\sin x} \tan x$

$$= \frac{\cos x}{\sin x}\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= 1$$

ตัวอย่างที่ 3 จงตรวจสอบเอกลักษณ์ $\dfrac{1}{1+\sin x} + \dfrac{1}{1-\sin x} = 2\sec^2 x$

วิธีทำ เราจะทำจากข้างซ้ายโดยการรวมพจน์เข้าด้วยกัน และแปลงไปจนกระทั่งได้เท่ากับข้างขวาของสมการในโจทย์

$$\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x} = \frac{(1-\sin x)+(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

$$= \frac{2}{\cos^2 x}$$

$$= 2\sec^2 x$$

ตัวอย่างที่ 4 จงตรวจสอบ $\dfrac{\sin^2 x - 1}{1-\sin x} = -1 - \sin x$

วิธีทำ เราจะทำจากข้างซ้ายโดยการรวมพจน์เข้าด้วยกัน และแปลงไปจนกระทั่งได้เท่ากับข้างขวาของสมการในโจทย์

$$\frac{\sin^2 x - 1}{1-\sin x} = \frac{-(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}$$

$$= \frac{-(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}$$

$$= -(1+\sin x)$$

$$= -1 - \sin x$$

ตัวอย่างที่ 5 จงตรวจสอบเอกลักษณ์

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \sec x + \tan x$$

วิธีทำ ทำจากด้านขวา

$$\begin{aligned}
\sec x + \tan x &= \frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{1+\sin x}{\cos x} \\
&= \frac{1+\sin x}{\cos x}\ \frac{1-\sin x}{1-\sin x} \\
&= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)} \\
&= \frac{\cos^2 x}{\cos x(1-\sin x)} \\
&= \frac{\cos x}{1-\sin x}
\end{aligned}$$

เราอาจกล่าวได้ว่า วิธีทำของการตรวจสอบเอกลักษณ์ เป็นการแปลงด้านหนึ่งของสมการไปเป็นอีกด้านหนึ่ง แต่ในกรณีที่ทั้งสองข้างมีความซับซ้อน วิธีทำจากด้านหนึ่งไปเป็นอีกด้านหนึ่งอาจไม่สะดวก เราสามารถพยายามแปลงแต่ละด้านของสมการไปเป็นนิพจน์เดียวกัน หรืออาจพยายามแปลงไปจนได้อีกด้านหนึ่งก็ได้

ตัวอย่างที่ 6 จงตรวจสอบเอกลักษณ์ $\frac{\sin x+\cos x}{\tan^2 x-1} = \frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}$

วิธีทำ เริ่มจากด้านซ้ายมือ

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x+\cos x}{\tan^2 x-1} &= \frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-1} \\
&= \frac{\sin x+\cos x}{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{\sin x+\cos x}{(\sin x+\cos x)(\sin x-\cos x)}\cos^2 x \\
&= \frac{\cos^2 x}{\sin x-\cos x}
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 5.9

จงตรวจสอบเอกลักษณ์ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. csc A - cos A cot A = sin A
2. sec B + tan B = $\frac{1+\sin B}{\cos B}$
3. sin C sec C = tan C
4. 3 - $\sec^2 x$ = 2 - $\tan^2 x$
5. $\frac{\sec^2 y}{\tan y}$ = tan y + cos y
6. $\frac{\sin A}{\csc A}$ + $\frac{\cos A}{\sec A}$ = 1
7. $\frac{\sec^2 A-1}{\sec^2 a}$ = 1 - $\cos^2$ A
8. cosA(1 + $\tan^2$ A) = $\sec^2$ A
9. $\frac{\sec A\sin A}{\tan A+\cot A}$ = 1 - $\cos^2$ A
10. (cos A + sinA)^2 + (cosA - sinA)^2 = 2
11. $\frac{1-\cos^2 A}{1+\cos A}$ = 1 - cosA
12. $\frac{1-\sin A}{\cos A}$ = $\frac{\cos A}{1+\sin A}$
13. $\csc^2$ B - $\frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$ = 1

14 $\frac{\sin A}{\sec A}$ = $\frac{\cot A}{1+\cot^2 A}$

15. cos(-A)csc(-A) = - $\frac{1}{\tan A}$
16. $\frac{1+\tan A}{\sec A+\csc A}$ = $\frac{1}{\cos A}$
17. $\frac{1+\cot A}{1+\tan A}$ = $\frac{\csc A}{\sec A}$
18. $\frac{1-\sin A}{1+\sin A}$ = (secA - tanA)^2

19. $\dfrac{\sec A + \csc A}{\sec A - \csc A} = \dfrac{\tan A + 1}{\tan A - 1}$

20. $\dfrac{\csc C}{1 + \csc C} - \dfrac{\csc C}{1 - \csc C} = 2\sec^2 C$

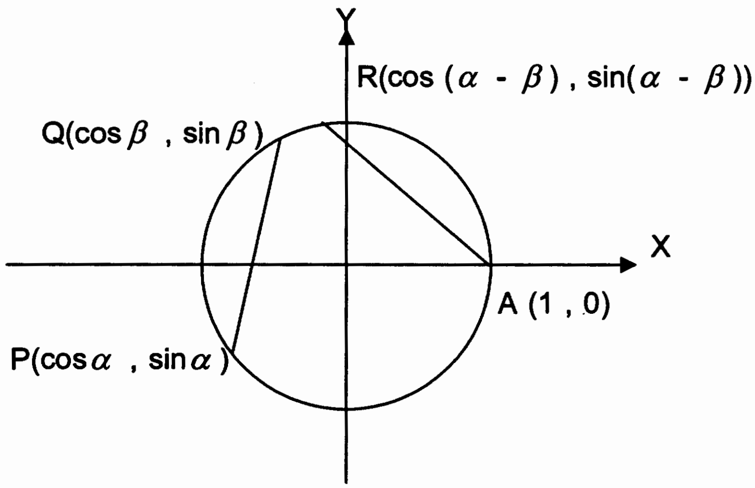
5.10 สูตรการบวก (The addition formulas)

มีเอกลักษณ์ตรีโกณมิติมากมายที่มีความสำคัญ เอกลักษณ์เหล่านี้เรียกว่า สูตรตรีโกณมิติ (trigonometric formulas) ซึ่งเป็นสูตรที่ใช้บ่อย ๆ เราจะพัฒนาสูตรเหล่านี้ตามลำดับ

ขั้นแรกของการพัฒนาสูตรการบวก สำหรับ cos $(\alpha + \beta)$ เมื่อ α และ β เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราจะเริ่มต้นจาก $\cos(\alpha - \beta)$

เพื่อความสะดวก เรากำหนด α, β และ $\alpha - \beta$ ทั้งหมดเป็นบวก และน้อยกว่า 2π เราให้ P , Q และ R เป็นจุดบนวงกลมหนึ่งหน่วยเป็นจุดปลายของส่วนโค้ง α , β และ $\alpha - \beta$ ซึ่งมีจุดปลายอีกข้างหนึ่งอยู่ที่พิกัด (1 , 0) ภาพประกอบ 5.10 โดยที่ ส่วนโค้ง AP = α , ส่วนโค้ง AQ = β , ส่วนโค้ง AR = $\alpha - \beta$ และ โดยบทนิยามของ sine และ cosine พิกัดของจุดสามารถเขียนเป็น

P($\cos\alpha$, $\sin\alpha$) , Q($\cos\beta$, $\sin\beta$) , R ($\cos(\alpha - \beta)$, $\sin(\alpha - \beta)$)



ภาพประกอบ 5.1.1

เนื่องจากส่วนโค้ง QP และส่วนโค้ง AR ต่างก็ยาว α - β คอร์ด AR และ PQ จะยาวเท่ากันด้วย โดยสูตรระยะทาง เรามี

$$AR = QP$$

$$\sqrt{[\cos(\alpha-\beta)-1]^2+[\sin(\alpha-\beta)]^2} = \sqrt{[\cos\alpha-\cos\beta]^2+[\sin\alpha-\sin\beta]^2}$$

ยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$$\cos^2(\alpha - \beta) - 2\cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta)$$

$$= \cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha - 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$

เนื่องจาก $\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta) = 1$, $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ และ $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$ ดังนั้นจะได้

$$-2\cos(\alpha - \beta) + 2 = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta + 2$$

$$-2\cos(\alpha - \beta) = -2\cos\alpha\cos\beta - 2\sin\alpha\sin\beta$$

$$\boxed{\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta} \qquad \text{.......................(1)}$$

ในขั้นต่อไปเป็นเรื่องง่ายที่จะหาสูตรของ $\cos(\alpha+\beta)$ โดยการเขียน $\alpha+\beta = \alpha - (-\beta)$ ดังนั้น

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - (-\beta))$$

$$= \cos\alpha\cos(-\beta) + \sin\alpha\sin(-\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos(\beta) - \sin\alpha\sin(\beta)$$ [เนื่องจาก $\cos(-\beta) = \cos\beta$, $\sin(-\beta) = -\sin\beta$]

$$\boxed{\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos(\beta) - \sin\alpha\sin(\beta)} \qquad \text{.......................(2)}$$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\cos 15^0$

วิธีทำ $\cos 15^0 = \cos(45^0 - 30^0)$

$$= \cos 45^0 \cos 30^0 + \sin 45^0 \sin 30^0$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา cos $\frac{5\pi}{12}$

วิธีทำ เราสังเกตว่า $\frac{5\pi}{12} = \frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12}$

$$\cos \frac{5\pi}{12} = \cos(\frac{9\pi}{12} - \frac{4\pi}{12})$$

$$= \cos \frac{9\pi}{12} \cos \frac{4\pi}{12} + \sin \frac{9\pi}{12} \sin \frac{4\pi}{12}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

ก่อนจะหาสูตรของ sin($\alpha + \beta$) เราจะเริ่มต้นจากความสัมพันธ์ของฟังก์ชันที่สำคัญดังนี้

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$ ....(3)

$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$ ....(4)

$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta$ ....(5)

$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta$ ....(6)

$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$ ....(7)

$\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta$ ....(8)

ฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเอกลักษณ์ (3) และ (4) เรียกว่า co functions ดังนั้นฟังก์ชัน sine และ cosine เป็น co functions ฟังก์ชัน secant และ cosecant เป็น co functions และฟังก์ชัน tangent และ cotangent เป็น co functions

ประยุกต์สูตรสำหรับ cosine ทางด้านซ้ายของสมการ (3) จะได้

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) &= \cos\frac{\pi}{2}\cos\theta - \sin\frac{\pi}{2}\sin\theta \\ &= 0(\cos\theta) - 1(\sin\theta) \\ &= \sin\theta\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้สมการที่ (3) แทน θ ด้วย $\frac{\pi}{2}$ - θ ในเอกลักษณ์ จะได้

$$\begin{aligned}\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \cos\theta &= \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

ซึ่งจะได้สมการ (4) สำหรับสมการ (5) หาได้จาก

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta} = \csc\theta$$

สมการ (6) หาได้ทำนองเดียวกับ (4)

สมการ (7) หาได้ดังนี้

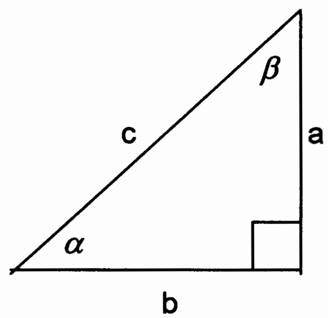
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta$$

สมการ (8) หาได้ทำนองเดียวกับ (4) ดังนี้

$$\begin{aligned}\tan\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right] &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \\ \tan\ \theta &= \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 3 ใช้ตรีโกณมิติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก แสดงว่า sine และ cosine เป็น co function

วิธีทำ



เนื่องจาก α และ β เป็นมุมประกอบหนึ่งมุมฉาก นั่นคือ $\alpha + \beta = 90^0$

ดังนั้น $\alpha = 90^0 - \beta$ และ $\beta = 90^0 - \alpha$

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$

แทน α ด้วย $90^0 - \beta$ จะได้ co function

$$\sin(90^0 - \beta) = \cos\beta$$

แทน β ด้วย $90^0 - \alpha$ จะได้ co function

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

ในตอนนี้เราจะพิสูจน์สูตร

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \quad \text{..............................(9)}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \quad \text{............................(10)}$$

เราพิสูจน์สมการ (9) ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos[\pi - (\alpha + \beta)] \\ &= \cos[(\pi - \alpha) - \beta)] \\ &= \cos(\pi - \alpha)\cos\beta + \sin(\pi - \alpha)\sin\beta \\ &= \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

เราพิสูจน์สมการ (10) โดยใช้สมการ (9) ดังนี้

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin\alpha \cos(-\beta) + \cos\alpha \sin(-\beta) \\ &= \sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta \end{aligned}$$

สูตรต่อไปคือ

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \qquad \text{..(11)}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \qquad \text{..(12)}$$

เราสามารถพิสูจน์สมการ (11) ได้ดังนี้

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

นำ $\cos\alpha\cos\beta$ หารทั้งตัวเศษและตัวส่วน จะได้

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

และสามารถพิสูจน์สมการ 12 โดยใช้ $\tan(\alpha - \beta)$ เท่ากับ $\tan[\alpha + (-\beta)]$ จะได้

$$\tan(\alpha - \beta) = \tan[\alpha + (-\beta)]$$

$$= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1-\tan\alpha\tan(-\beta)}$$

$$= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงแสดงว่า $\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = -\cos x$

วิธีทำ ใช้สูตรการบวกจะได้

$$\sin(x + \frac{3\pi}{2}) = \sin x \cos\frac{3\pi}{2} + \cos x \sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= \sin x\,(0) + \cos x(-1)$$

$$= -\cos x$$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด sin $\alpha = -\frac{4}{5}$ เมื่อ α เป็นมุมในจตุภาคที่ 3 และ $\cos\beta = -\frac{5}{13}$

โดยที่ β เป็นมุมในจตุภาคที่ 2 ใช้สูตรการบวกหา $\sin(\alpha + \beta)$ และจตุภาคซึ่ง $\alpha + \beta$ ตกอยู่

วิธีทำ ใช้สูตรการบวก

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

เนื่องจาก α ตกในจตุภาคที่ 3 และ $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ หา $\cos\alpha$ ซึ่งจะเป็นลบ ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\cos^2\alpha &= 1 - \sin^2\alpha\\ &= 1 - (-\frac{4}{5})^2\\ &= 1 - \frac{16}{25}\\ &= \frac{9}{25}\\ \cos\alpha &= -\frac{3}{5}\end{aligned}$$

เนื่องจาก β ตกในจตุภาคที่ 2 และ $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ หา $\sin\beta$ ซึ่งจะเป็นบวก ได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\sin^2\beta &= 1 - \cos^2\beta\\ &= 1 - (-\frac{5}{13})^2\\ &= 1 - \frac{25}{169}\\ &= \frac{144}{169}\\ \sin\beta &= \frac{12}{13}\end{aligned}$$

จาก $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

จะได้ $\sin(\alpha + \beta) = (-\frac{4}{5})(-\frac{5}{13}) + (-\frac{3}{5})(\frac{12}{13})$

$$= \frac{20}{65} - \frac{36}{65}$$

$$= -\frac{16}{65}$$

เนื่องจาก $\sin(\alpha + \beta)$ เป็นลบ $\alpha + \beta$ จะตกในจตุภาคที่ 3 หรือจตุภาคที่ 4 แต่เนื่องจาก α ตกในจตุภาคที่ 3 และ β ตกในจตุภาคที่ 2 จะได้ว่า $\alpha + \beta$ ต้องตกในจตุภาคที่ 4

แบบฝึกหัด 5.10

1. ในข้อที่ 1) - 8) จงใช้สูตรการบวก หาค่า

   1) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)$ 2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)$

   3) $\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)$ 4) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)$

   5) $\cos(60^0 + 180^0)$ 6) $\sin(270^0 - 45^0)$

   7) $\sin 11\pi/12$ (แนะนำ : $11\pi/12 = \pi/6 + 3\pi/4$)

   8) $\cos 7\pi/12$ (แนะ : $7\pi/12 = 5\pi/6 - \pi/4$)

2. ในแบบฝึกหัด 1) - 4) จงเขียนนิพจน์ในพจน์ของโคฟังก์ชัน (co functions) ของมุมประกอบมุมฉาก (complementary angle)

   1) $\sin 34^0$ 2) $\tan \pi/3$

   3) $\cos \pi/6$ 4) $\sin 47^0 34'$

3. ถ้า $\cos\theta = -3/5$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา $\sin(\pi/2 - \theta)$
4. ถ้า $\sin\theta = 5/13$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา $\cos(\theta - \pi)$
5. ถ้า $\tan\theta = 4/3$ และมุม θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา $\tan(\theta + \pi/4)$
6. ถ้า $\cos\theta = 0.4$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 4 จงหา $\cot(\theta + \pi)$
7. ถ้า $\sin\theta = 4/5$ และ $\cos\alpha = -5/13$ โดย θ ตกในจตุภาคที่ 2 และ α ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา $\sin(\theta + \alpha)$
8. ถ้า $\sin\theta = 12/13$ และ $\tan\alpha = -2$ โดย θ ตกในจตุภาคที่ 1 และ α ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา $\tan(\theta + \alpha)$
9. จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้โดยแปลงจากด้านซ้ายของสมการเป็นนิพจน์ทางด้านขวา

   1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ 2) $\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan 2\alpha}$

   3) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$ 4) $\frac{\sin(A+B)}{\sin(A-B)} = \frac{\tan A + \tan B}{\tan A - \tan B}$

5.11 สูตรมุมขนาดสองเท่าและมุมครึ่งเท่า (double and half angle formula)

ในเบื้องต้นในหัวข้อนี้จะเขียนนิพจน์ของ $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ และ $\tan 2\alpha$ ในพจน์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติของ α เราจะเริ่มต้นศึกษา สูตรมุมขนาดสองเท่า

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ ....(1)

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ ....(2)

หรือ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ ....(3)

หรือ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ....(4)

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$ ....(5)

สูตรเหล่านี้ใช้บ่อย ซึ่งนักศึกษาควรจดจำให้ได้ ในกรณีที่จดจำไม่ได้ก็จะต้องสามารถแสดงที่มาได้ เริ่มต้นสมการ (1) เราจะเขียน 2α เป็น $\alpha + \alpha$ และใช้สูตรการบวก

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\
&= \sin\alpha \cos\alpha + \cos\alpha \sin\alpha \\
&= 2\sin\alpha \cos\alpha
\end{aligned}
$$

การพิสูจน์ (2) , (3) , (4) และ (5) ทำได้ดังนี้

$$
\begin{aligned}
\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\
&= \cos\alpha \cos\alpha - \sin\alpha \sin\alpha \\
&= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
&= (1 - \sin^2\alpha) - \sin^2\alpha \\
&= 1 - 2\sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

หรือ จาก $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$
\begin{aligned}
&= \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) \\
&= 2\cos^2\alpha - 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\
&= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha\tan\alpha} \\
&= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 1 ถ้า $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ และ θ ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา $\sin 2\theta$ และ $\cos 2\theta$ และ

หาว่า 2θ ตกในจตุภาคใด

วิธีทำ เนื่องจาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ และ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

หา $\sin\theta$ โดยที่ θ อยู่ในจตุภาคที่ 2 ดังนั้น $\sin\theta$ เป็นบวก

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$

$$= 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= \frac{16}{25}$$

$$\sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$= 2\left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= -\frac{24}{25}$$

และ $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$$= \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= -\frac{7}{25}$$

เนื่องจาก θ ตกในจตุภาคที่ 2 และ $\sin 2\theta$ เป็นลบ $\cos 2\theta$ เป็นลบ 2θ จึงตกในจตุภาคที่ 3

ตัวอย่างที่ 2 จงแสดง $\sin 3\theta$ ในพจน์ของ $\sin\theta$ และ $\cos\theta$

วิธีทำ $\sin 3\theta = \sin(\theta + 2\theta)$

$$= \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$$

$$= \sin\theta\,[\cos^2\theta - \sin^2\theta] + \cos\theta\,[2\sin\theta\cos\theta]$$

$$= \sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta + 2\sin\theta\cos^2.\theta$$

$$= 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$$

ตัวอย่างที่ 3 จงตรวจสอบว่า $\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos 2\theta} = \cot\theta$

วิธีทำ $$\frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-\cos 2\theta} = \frac{2\sin\theta\cos\theta}{1-(1-2\sin^2\theta)}$$

$$= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$= \cot\theta$$

5.11.1 สูตรมุมครึ่งเท่า (half-angle fomula)

ถ้าเราเริ่มต้นจากรูปสลับที่ของ $\cos 2\theta$ ที่กำหนดในสมการ (3) และ (4) เราจะได้นิพจน์ต่อไปนี้สำหรับ $\sin^2\theta$ และ $\cos^2\theta$ ซึ่งนิพจน์เหล่านี้ใช้บ่อย ๆ ในการคำนวณ

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \qquad \text{......(6)}$$

และ $$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \qquad \text{......(7)}$$

เนื่องจากเอกลักษณ์ในสมการ (6) และ (7) เป็นจริงสำหรับทุกค่าของ θ จึงเป็นจริงเมื่อแทน θ ด้วย $\frac{\theta}{2}$ ซึ่งจะได้คู่ของสมการ

$$\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

เมื่อแก้สมการจะได้

$$\sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} \qquad \text{......(8)}$$

$$\cos\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \qquad \text{......(9)}$$

เครื่องหมายที่เหมาะสมที่ใช้ในสมการ (8) และ (9) ขึ้นอยู่กับจตุภาคที่ $\frac{\theta}{2}$ ตกอยู่ ดังนั้น $\sin\frac{\theta}{2}$ เป็นบวกถ้า $\frac{\theta}{2}$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 หรือ จตุภาคที่ 2 ทำนองเดียวกัน เราเลือกรากที่

เป็นบวกสำหรับ $\cos\frac{\theta}{2}$ ในสมการ (9) ถ้า $\frac{\theta}{2}$ อยู่ในจตุภาคที่ 1 หรือจตุภาคที่ 4 จากเอกลักษณ์

$\tan\frac{\theta}{2} = \dfrac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}$ เราจะได้

$$\tan\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}} \qquad \text{...(10)}$$

สูตร (8) , (9) และ (10) รู้จักในชื่อของ สูตรมุมครึ่งเท่า (half-angle formula)

ตัวอย่างที่ 5 ถ้า $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ และ θ อยู่ในจตุภาคที่ 3 จงคำนวณหา $\cos\frac{\theta}{2}$

วิธีทำ ขั้นแรกคำนวณ $\cos\theta$ โดยใช้เอกลักษณ์

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1 - \sin^2\theta \\ &= 1 - \left(\frac{16}{25}\right) \\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

เนื่องจาก θ ตกในจตุภาคที่ 3 ดังนั้น $\cos\theta$ มีค่าเป็นลบ นั่นคือ

$$\cos\theta = -\frac{3}{5}$$

เราสามารถใช้สูตรมุมครึ่งเท่า

$$\begin{aligned}\cos\frac{\theta}{2} &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}} \\ &= \pm\sqrt{\frac{1}{5}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

เนื่องจาก $180^\circ < \theta < 270^\circ$ เราจะได้ $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$ ดังนั้น $\frac{\theta}{2}$ ตกในจตุภาคที่ 2 และ $\cos\frac{\theta}{2}$ เป็นลบ เราสรุปว่า $\cos\frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

แบบฝึกหัด 5.11

ข้อ 1-5 จงใช้เงื่อนไขที่กำหนดให้ตรวจสอบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติตามที่ระบุ

1. sin θ = 4/5 และ θ ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา cos 2A
2. cos θ = -12/13 และ θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา sin 2A
3. sec θ = -2 และ θ ตกในจตุภาคที่ 2 จงหา cos 2A
4. tan θ = 3/4 และ θ ตกในจตุภาคที่ 1 จงหา cos 2θ
5. csc θ = -17/8 และ θ ตกในจตุภาคที่ 4 จงหา tan 2θ

ข้อ 6-8 จงใช้สูตรมุมครึ่ง (half-angle) หาค่าในแต่ละข้อ

6. sin 15^0
7. tan $\pi/8$
8. sec $5\pi/8$

ข้อ 9-11 ใช้เงื่อนไขที่กำหนดให้ ตรวจสอบค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่ระบุ

9. sin θ = -4/5 และ θ ตกในจตุภาคที่ 4 จงหา sin$\theta/2$
10. cot θ = 3/4 และ θ ตกในจตุภาคที่ 3 จงหา tan$\theta/2$
11. csc α = 13/12 และ α ตกอยู่ในจตุภาคที่ 2 จงหา tan$\alpha/2$

ข้อที่ 12-15 จงตรวจสอบเอกลักษณ์ที่กำหนดให้

12. $\sin\alpha/2 \cos\alpha/2 = \dfrac{\sin\alpha}{2}$
13. $\tan\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1-\cos\beta}{\sin\beta}$
14. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = \cos 2\alpha$
15. $\dfrac{\sin 2t}{\sin t} - \dfrac{\cos 2t}{\cos t} = \sec t$

5.12 สูตร ผลคูณ-ผลบวก (The product-sum formulas)

สูตรผลคูณ-ผลบวก ได้จากหัวข้อนี้พบได้ในแคลคูลัสและในกระบวนวิชาอื่น ๆ ในคณิตศาสตร์ขั้นสูง แต่อาจไม่สำคัญเท่าสูตรที่ปรากฏในสองหัวข้อที่ผ่านมาแล้ว

สูตรต่อไปนี้แสดงผลคูณในรูปผลบวก

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} \quad \text{.....................................(1)}$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{2} \quad \text{.....................................(2)}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2} \quad \text{.....................................(3)}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2} \quad \text{.....................................(4)}$$

เพื่อพิสูจน์ สมการ (1) เราเริ่มต้นจากด้านขวาของสมการ

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2} = \frac{(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)+(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)}{2}$$

$$= \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{2}$$

$$= \sin\alpha\ \cos\beta$$

พิสูจน์สมการ (2) ,(3) และ (4) ได้โดยง่าย

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดง sin 4A cos 3A ในรูปผลบวกหรือผลต่าง

วิธีทำ ประยุกต์สมการที่ 1 เราจะได้

$$\sin 4A \cos 3A = \frac{\sin(4A+3A)+\sin(4A-3A)}{2}$$

$$= \frac{\sin 7A+\sin A}{2}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงคำนวณผลคูณของ $\cos(\frac{5\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8})$ โดยใช้สูตรผลคูณ - ผลบวก

วิธีทำ ใช้สมการ (3) เรามี

$$\cos(\frac{5\pi}{8})\cos(\frac{3\pi}{8}) = \frac{1}{2}[\cos(\frac{5\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}) + \cos(\frac{5\pi}{8}-\frac{3\pi}{8})]$$

$$= \frac{1}{2}[\cos\pi + \cos\frac{\pi}{4}]$$

$$= \frac{1}{2}[-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

สูตรต่อไปนี้แสดงการบวกในรูปการคูณ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{......(5)}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{......(6)}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{......(7)}$$

$$\cos\alpha - \cot\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \text{......(8)}$$

การพิสูจน์เอกลักษณ์ในสมการ (5) เริ่มต้นจากด้านขวาและประยุกต์สมการ (1) ดังนั้น

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{1}{2}[\sin(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}) + \sin(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2})]$$

$$= \sin\alpha + \sin\beta$$

ซึ่งจะได้สมการ (5)

ตัวอย่างที่ 3 จงแสดงนิพจน์ sin 7A - sin 5A ในรูปการคูณ

วิธีทำ ใช้สมการ (6) เราจะได้

$$\sin 7A - \sin 5A = 2\cos\frac{7A+5A}{2}\sin\frac{7A-5A}{2}$$

$$= 2\cos 6A \sin A$$

ตัวอย่างที่ 4 จงคำนวณ $\cos(5\pi/12) - \cos(\pi/12)$ โดยใช้สูตรการบวก - การคูณ

วิธีทำ ใช้สมการ (8) เรามี

$$\cos(5\pi/12) - \cos(\pi/12) = -2\sin\pi/4\sin\pi/6$$

$$= -2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

แบบฝึกหัด 5.12

1. ข้อ 1) - 7) จงแสดงแต่ละผลคูณให้อยู่ในรูปผลบวกหรือผลต่าง

1) $2\sin 7\alpha \cos\alpha$ 2) $-3 \cos 8B \sin 2B$
3) $\sin 5C \sin (-2C)$ 4) $\cos 7A \cos (-3A)$
5) $-2 \cos 2A \cos 5A$ 6) $\sin\frac{7\alpha}{2} \sin\frac{\theta}{2}$
7) $-2 \sin 3\beta \cos 5\beta$

2. ข้อ 1) - 4) จงแสดงผลคูณในแต่ละข้อให้อยู่ในรูปสูตร ผลคูณ-ผลบวก

1) $\cos\frac{7\pi}{8} \sin\frac{5\pi}{8}$ 2) $\cos\frac{\pi}{3} \sin\frac{\pi}{6}$
3) $\cos 60^0 \sin 120^0$ 4) $\sin\frac{11\pi}{12} \sin\frac{13\pi}{12}$

3. จากข้อ 1) - 5) จงแสดงผลบวกหรือผลต่างในแต่ละข้อในรูปผลคูณ

1) $\sin 5x + \sin 3x$ 2) $\cos 4A + \cos 6A$
3) $\sin (A + B) + \sin (A - B)$ 4) $\sin 9A - \sin 5A$
5) $\cos 8A - \cos 2A$ 6) $\cos 5B + \cos 3B$

4. จากข้อ 1) - 5) จงคำนวณแต่ละผลบวกโดยใช้สูตร ผลบวก-ผลคูณ

1) $\sin 75^0 + \sin 30^0$ 2) $\cos\frac{5\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}$
3) $\sin\frac{13\pi}{12} - \sin\frac{5\pi}{12}$ 4) $\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4}$

5. จงตรวจสอบเอกลักษณ์ในข้อ 5 ข้อย่อย 1) - 6)

1) $\sin 40^0 + \sin 20^0 = \sin 10^0$ 2) $\frac{\sin 5A - \sin 3A}{\sin 3A - \cos 5A} = \cos 4A$
3) $\frac{\sin A - \sin B}{\cos A - \cos B} = -\cos\frac{A+B}{2}$ 4) $\frac{\sin 50^0 - \sin 10^0}{\cos 50^0 - \cos 10^0} = -\sqrt{3}$
5) $\frac{\cot x - \tan x}{\cot x + \tan x} = \cos 2x$ 6) $\cos 6A \cos 2A + \sin^2 4A = \cos^2 2A$

5.13 สมการตรีโกณมิติ (Trigonometric Equations)

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาการแก้สมการตรีโกณมิติซึ่งเป็นจริงเฉพาะบางค่า เราจะเห็นว่าสมการพีชคณิตอาจมีคำตอบหนึ่งหรือสองค่า แต่สมการตรีโกณมิติจะมีคำตอบมากมายไม่จำกัดซึ่งเป็นเรื่องค่อนข้างซับซ้อน เช่น θ เป็นคำตอบในช่วง $0 \leq \theta < 2\pi$ ดังนั้น $\theta + 2n\pi$ จะเป็นคำตอบด้วย สำหรับทุกค่าของจำนวนเต็ม n

ตัวอย่างที่ 1 จงหาทุกคำตอบของสมการ $\sin\theta = 0$

วิธีทำ เฉพาะค่าในช่วง $0 \leq \theta < 2\pi$ ที่ทำให้ $\sin\theta = 0$ คือ $\theta = 0$ และ π ดังนั้นในทุก ๆ สถานการณ์ประกอบด้วยค่าของ θ ซึ่ง

$\theta = 0 + 2n\pi = 2n\pi$ หรือ $\theta = \pi + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ตัวอย่างที่ 2 จงหาคำตอบของสมการ $2\cos^2\theta - \cos\theta - 1$ ในช่วง $[0, 2\pi]$

วิธีทำ แยกตัวประกอบ และแก้สมการดังนี้

$2\cos^2\theta - \cos\theta - 1 = (2\cos\theta + 1)(\cos\theta - 1) = 0$

ดังนั้น $2\cos\theta + 1 = 0$ หรือ $\cos\theta - 1 = 0$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ หรือ $\cos\theta = 1$

เมื่อ $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ หรือ $\theta = \frac{4\pi}{3}$	เมื่อ $\cos\theta = 1$ $\theta = 0$

ดังนั้นคำตอบของสมการคือ $\theta = \frac{2\pi}{3}$, $\theta = \frac{4\pi}{3}$ และ $\theta = 0$

ตัวอย่างที่ 2 จงหาทุกคำตอบของสมการ $\sin 2\theta - 3\sin\theta = 0$ ในช่วง $[0, 2\pi]$

วิธีทำ ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ ทำให้สมการอยู่ในรูปอย่างง่ายเพื่อช่วยการแก้สมการ

เนื่องจาก $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ จะได้

และ $\sin 2\theta - 3\sin\theta = 0$

ดังนั้น $2\sin\theta\,\cos\theta - 3\sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta - 3) = 0$

จะได้ $\sin\theta = 0$ หรือ $2\cos\theta - 3 = 0$

จาก $\sin\theta = 0$ จะได้	จาก $2\cos\theta - 3 = 0$ จะได้
$\theta = 0\ ,\ \pi$	$\cos\theta = \frac{3}{2}$
	สมการ $\cos\theta = \frac{3}{2}$ ไม่มีคำตอบ

คำตอบของ $\sin\theta = 0$ คือ $\theta = 0$ และ $\theta = \pi$

คำตอบของสมการเริ่มต้นคือ $\theta = 0$ และ $\theta = \pi$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาคำตอบของ $\sin 3x = 0$ ในช่วง $[0\ ,\ 2\pi]$

วิธีทำ สมการที่เกี่ยวข้องกับมุมพหุคูณ สามารถแก้ได้โดยใช้การแทนค่าตัวแปร เรากำหนด

$\sin 3x = 0\ ,\ 0 \le x < 2\pi$

ให้ $y = 3x$

ดังนั้น $\sin y = 0\ ,\ 0 \le \frac{y}{3} < 2\pi$

$\sin y = 0\ ,\ 0 \le y < 6\pi$

$y = 0\ ,\ \pi\ ,\ 2\pi\ ,\ 3\pi\ ,\ 4\pi\ ,\ 5\pi$

เนื่องจาก $x = \frac{y}{3}$ เราจะได้

$x = 0\ ,\ \frac{\pi}{3}\ ,\ \frac{2\pi}{3}\ ,\ \pi\ ,\ \frac{4\pi}{3}\ ,\ \frac{5\pi}{3}$

แบบฝึกหัด 5.13

1. ในข้อ 1) - 8) จงหาทุกคำตอบของสมการที่กำหนดให้ในช่วง $[0, 2\pi]$ แสดงคำตอบทั้งการวัดเป็นเรเดียนและองศา

1) $2\sin\theta - 1 = 0$	2) $1 + \cos\theta = 0$
3) $4\cos^2\theta - 3 = 0$	4) $3\tan^2\theta - 1 = 0$
5) $2\sin^2\theta - \sin\theta = 0$	6) $2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$
7) $2\cos^2\theta - \sin\theta = 1$	8) $\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

2. ในข้อ 1) - 9) จงหาทุกคำตอบของสมการที่กำหนดให้

1) $3\tan^2\theta = 1$	2) $3\cot^2\theta = 1$
3) $1 - 4\cos^2\theta = 0$	4) $\csc^2 2x - 2 = 0$
5) $4\cos^2 2\theta = 3$	6) $\cos 2\theta + \sin\theta = 0$
7) $2\sin^2\theta + 3\sin\theta = 2$	8) $2\cos 2\theta + 2\sin\theta = 0$
9) $\sec^2\theta - 5\cos\theta - 3 = 0$	