# บทที่ 4
# ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และ ฟังก์ชันลอการิทึม

ฟังก์ชันส่วนใหญ่ที่เราพิจารณา เป็นฟังก์ชันพีชคณิต (algebraic function) กล่าวคือ เป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยวิธีของการดำเนินการทางพีชคณิตบนตัวแปรและค่าคงตัว ในบทนี้ เราจะได้เรียนรู้การให้นิยามและการศึกษาสมบัติของฟังก์ชันที่สำคัญสองฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล (Exponential function) และฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic function) แต่ก่อนอื่น จะได้กล่าวถึงเลขยกกำลัง และรากของเลขยกกำลังก่อน

## 4.1 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม

บทนิยาม ถ้า a เป็นจำนวนจริงและ n เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว

$$a^n = \underbrace{a\,.a\,.a.\,\ldots\,.a}_{n\text{ ตัว}}$$

$$a^0 = 1 \qquad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \text{เมื่อ } a \neq 0$$

เรียก $a^n$ ว่าเลขยกกำลัง เรียก a ว่าฐานของเลขยกกำลัง และเรียก n ว่า เลขชี้กำลังเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนเต็ม มีสมบัติตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

**ทฤษฎีบท 4.1** ถ้า a , b เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็น 0 และ m , n เป็นจำนวนเต็มจะได้

1. $a^m a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{mn}$
3. $(ab)^n = a^n b^n$

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

5. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

ตัวอย่างที่ 1 จงทำ $\left(\frac{3}{4}a^0b^{-4}\right)\left(\frac{2a^2b^{-5}}{a^{-4}b^{-3}}\right)^2$ อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

วิธีทำ $\left(\frac{3}{4}a^0b^{-4}\right)\left(\frac{2a^2b^{-5}}{a^{-4}b^{-3}}\right)^2 = \frac{3}{4b^4}\left(\frac{2a^6}{b^2}\right)^2$

$$= \frac{3}{4b^4}\,\frac{4a^{12}}{b^4}$$

$$= \frac{3a^{12}}{b^8}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงทำ $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

วิธีทำ $\frac{a^{-1}+b^{-1}}{a^{-1}-b^{-1}} = \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$

$$= \frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}$$

$$= \frac{b+a}{ab}\times\frac{ab}{b-a}$$

$$= \frac{b+a}{b-a}$$

ตัวอย่างที่ 3 จงทำ $\frac{9a^{-2}-6a^{-1}+1}{3a^{-2}-a^{-1}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

วิธีทำ $\frac{9a^{-2}-6a^{-1}+1}{3a^{-2}-a^{-1}} = \frac{\frac{9}{a^2}-\frac{6}{a}+1}{\frac{3}{a^2}-\frac{1}{a}}$ , $a \neq 0$

$$= \frac{\frac{9-6a+a^2}{a^2}}{\frac{3-a}{a^2}}$$

$$= \frac{9-6a+a^2}{a^2} \times \frac{a^2}{3-a}$$
$$= \frac{(3-a)(3-a)}{3-a}$$
= 3 - a

## แบบฝึกหัด 4.1

1. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่ายและมีเลขชี้กำลังเป็นบวก

1) $\frac{3^{-4}2^{-5}}{4^{-6}3^{0}}$ 2) $(16x^3y^4)(2^{-3}x^6y^{-2})$

3) $\left(\frac{3}{4}x^{-3}y^4\right)^{-2}$ 4) $(3xy^{-3})(x^{-2}y^4)^{-4}$

5) $\left(\frac{-2}{3x^2y^{-5}}\right)^{-2}$ 6) $\left(\frac{a^{-2}bc^{-1}}{b^{-3}c^{-3}a^{-6}}\right)^{-1}$

2. ถ้า a มากกว่าศูนย์ a ไม่เท่ากับ 1 และ p และ q เป็นจำนวนเต็มบวก จงพิจารณาว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) $\frac{1}{a^{-p}}\frac{1}{a^{-q}} = a^{q-p}$ 2) $\frac{a^{-p}}{a^{-q}} = a^{q-p}$

3) $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$ 4) $a^p - a^q = a^{p-q}$

5) $a^p < 1$ ก็ต่อเมื่อ $a < 1$

## 4.2 รากที่ n ในระบบจำนวนจริง และจำนวนจริงในรูปกรณฑ์

**บทนิยาม** ถ้า a , b เป็นจำนวนจริง แล้ว b เป็นรากที่สองของ a ก็ต่อเมื่อ $b^2 = a$ เนื่องจาก $b^2$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ และ $b^2 = a$ ดังนั้น a จึงมีค่ามากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ ส่วน b จะมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ ยกตัวอย่าง $(-5)^2 = 25$ ดังนั้น -5 เป็นรากที่สองของ 25 เช่นเดียวกัน $(5)^2 = 25$ ดังนั้น 5 เป็นรากที่สองของ 25

เรากล่าวว่า -5 และ 5 ต่างก็เป็นรากที่สองของ 25

-5 เป็นรากที่สองที่เป็นลบของ 25 เขียนแทนรากที่สองที่เป็นลบของ 25 ด้วย $-\sqrt{25}$

นั่นคือ $-\sqrt{25} = -5$

5 เป็นรากที่สองที่เป็นบวกของ 25 เขียนแทนรากที่สองที่เป็นบวกของ 25 ด้วย $\sqrt{25}$

นั่นคือ $\sqrt{25} = 5$

ถ้า a > 0 จะมีรากที่สองของ a สองรากคือ รากที่สองของ a ที่เป็นบวก เขียนแทนด้วย $\sqrt{a}$ และรากที่สองของ a ที่เป็นลบ เขียนแทนด้วย $-\sqrt{a}$

ถ้า a = 0 แล้วจะมีรากที่สองของ a เพียงจำนวนเดียว คือ 0 นั่นคือ $\sqrt{0} = 0$

ถ้า a < 0 จะไม่มีรากที่สองของ a ที่เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 1 6 เป็นรากที่สองของ 36 เพราะว่า $6^2 = 36$

$-\frac{2}{3}$ เป็นรากที่สองของ $\frac{4}{9}$ เพราะว่า $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$

0 เป็นรากที่สองของ 0 เพราะว่า $0^2 = 0$

$\sqrt{3}$ เป็นรากที่สองของ 3 เพราะว่า $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$

ตัวอย่างที่ 2 รากที่สองของ 9 ได้แก่ 3 และ -3 เพราะว่า $3^2 = 9$ และ $(-3)^2 = 9$

รากที่สองของ $\frac{25}{36}$ ได้แก่ $\frac{5}{6}$ และ $-\frac{5}{6}$

เพราะว่า $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$ และ $\left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

ตัวอย่างที่ 3 รากที่สองของ 7 ได้แก่ $\sqrt{7}$ และ $-\sqrt{7}$

รากที่สองของ 8 ได้แก่ $\sqrt{8}$ และ $-\sqrt{8}$

รากที่สองของ 9 ได้แก่ $\sqrt{9} = 3$ และ $-\sqrt{9} = -3$

**สมบัติของรากที่สองที่ไม่เป็นลบ**

ทฤษฎีบท 1 ถ้า $a \ge 0$ และ $b \ge 0$ แล้ว $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $a \ge 0$ และ $b > 0$ แล้ว $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$

ตัวอย่างที่ 4 1) $\sqrt{2}\sqrt{6} = \sqrt{2\times 6} = \sqrt{12} = \sqrt{4\times 3} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

2) $\dfrac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$

**รากที่ n ของจำนวนจริง**

**บทนิยาม** ให้ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a และ b เป็นจำนวนจริง b เป็นรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ $b^n = a$

ตัวอย่างที่ 5 2 เป็นรากที่ 3 ของ 8 เพราะว่า $2^3 = 8$

-2 เป็นรากที่ 3 ของ -8 เพราะว่า $(-2)^3 = -8$

3 เป็นรากที่ 4 ของ 81 เพราะว่า $3^4 = 81$

-3 เป็นรากที่ 4 ของ 81 เพราะว่า $(-3)^4 = 81$

ตัวอย่างที่ 6 ในระบบจำนวนจริง

รากที่ 4 ของ 625 มีสองรากคือ 5 และ -5

รากที่ 5 ของ -32 มีรากเดียวคือ -2

**ค่าหลักของรากที่ n**

**บทนิยาม** ให้ a เป็นจำนวนจริงที่มีรากที่ n เรากล่าวว่า จำนวนจริง b เป็นค่าหลักของรากที่ n ของ a ก็ต่อเมื่อ

1) b เป็นรากที่ n ของ a

2) $ba \ge 0$

แทนค่าหลักของรากที่ n ของ a ด้วย $\sqrt[n]{a}$

**หมายเหตุ** 1) เครื่องหมาย $\sqrt[n]{\ }$ เรียกว่า เครื่องหมายกรณฑ์ เรียก n ว่า อันดับที่หรือ ดัชนีของกรณฑ์

2) $\sqrt[n]{a}$ อ่านว่า กรณฑ์ที่ n ของ a หรือค่าหลักของรากที่ n ของ a

3) ถ้า n = 2 จะเขียน $\sqrt{\ }$ แทน $\sqrt[2]{\ }$

จากบทนิยามของรากที่ n จะเห็นได้ว่า

1) $\sqrt[n]{1} = 1$

2) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ นั่นคือกำลังที่ n ของค่าหลักของรากที่ n ของ a เท่ากับ a

ตัวอย่างที่ 7 ค่าหลักของรากที่ 5 ของ 32 คือ 2
ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -32 คือ -2
ค่าหลักของรากที่ 4 ของ 81 คือ 3
ไม่มีค่าหลักของรากที่ 4 ของ -81 ในระบบจำนวนจริง
ค่าหลักของรากที่ 5 ของ -27 คือ $\sqrt[5]{-27}$

**ข้อสังเกต** ในระบบจำนวนจริงเมื่อ a เป็นจำนวนจริง

1. ถ้า $a \geq 0$ จะมีค่าหลักของรากที่ n
2. ถ้า a < 0 และ n เป็นจำนวนคี่ จะมีค่าหลักของรากที่ n
3. ถ้า a < 0 และ n เป็นจำนวนคู่ จะไม่มีค่าหลักของรากที่ n

**สมบัติของรากที่ n**

ทฤษฎีบท 3 ถ้า a และ b มีรากที่ n แล้ว $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $a \geq 0$ และ b > 0 แล้ว $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

**หมายเหตุ** 1) ถ้า a < 0 และ b < 0 ทฤษฎีบท 3 และทฤษฎีบท 4 เป็นจริงก็ต่อเมื่อ n เป็นจำนวนคี่บวก

2) ถ้า x เป็นจำนวนจริง และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะได้ว่า

(1) $\sqrt[n]{x^n}$ = | x | เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

(2) $\sqrt[n]{x^n}$ = x เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

เช่น $\sqrt[5]{(-3)^5}$ = -3

$\sqrt[6]{(-3)^6}$ = | -3 | = 3

**การหาผลบวกและผลต่างของกรณฑ์**

กรณฑ์ที่มีอันดับเดียวกันและมีจำนวนที่อยู่ในเครื่องหมายกรณฑ์เป็นจำนวนเดียวกัน สามารถนำมาบวกลบกันได้โดยใช้สมบัติการแจกแจงในระบบจำนวนจริง

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่าของ

1) $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3}$

2) $4\sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}}$

3) $(3\sqrt{5} + \sqrt{20}) - (4\sqrt{20} - \sqrt{500}) + (\sqrt{75} - 4\sqrt{45})$

วิธีทำ 1) $3\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 5\sqrt{3} = (3 + 4 - 5)\sqrt{3}$

$= 2\sqrt{3}$

2) $4\sqrt{2} - \frac{6}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \frac{6\sqrt{2}}{2}$

$= 4\sqrt{2} - 3\sqrt{2}$

$= (4 - 3)\sqrt{2}$

$= \sqrt{2}$

3) $(3\sqrt{5} + \sqrt{20}) - (4\sqrt{80} - \sqrt{500}) + (\sqrt{75} - 4\sqrt{45})$

$= (3\sqrt{5} + \sqrt{4\times5}) - (4\sqrt{16\times5} - \sqrt{100\times5}) + (\sqrt{25\times3} - 4\sqrt{9\times5})$

$= (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5}) - (16\sqrt{5} - 10\sqrt{5}) + (5\sqrt{3} - 12\sqrt{5})$

$= 5\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 5\sqrt{3} - 12\sqrt{5})$

$= -13\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$

## การหาผลคูณและผลหารของกรณฑ์

ในการหาผลคูณหรือผลหารของกรณฑ์ ถ้าอันดับไม่เท่ากันต้องเปลี่ยนให้อันดับเท่ากันก่อนจึงจะคูณหรือหารกันได้ โดยใช้สมบัติของรากที่สองที่ไม่เป็นลบ และใช้สมบัติของรากที่ n ตามทฤษฎีบท 1 ถึงทฤษฎีบท 4 เมื่อ a > 0 และ b > 0 ดังนี้

1) $\sqrt{a}\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ และ $\sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

2) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ และ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

ตัวอย่างที่ 9 จงหาค่าของ

1) $\sqrt{6}\,\sqrt{10}$

2) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{9}$

3) $5\sqrt{3}\,4\sqrt[3]{6}$

วิธีทำ 1) $\sqrt{6}\,\sqrt{10} = \sqrt{6\times10}$

$= \sqrt{4\times15} = 2\sqrt{15}$

2) $\sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{9\times15} = \sqrt[3]{3^3\times5} = 3\sqrt[3]{5}$

3) $5\sqrt{3}\,\sqrt[3]{6} = 5\,\sqrt[6]{3^3}\,\sqrt[6]{6^2}$

$= 5\,\sqrt[6]{3^3 6^2}$

$= 5\,\sqrt[6]{972}$

ตัวอย่างที่ 10 จงหาค่าของ

1) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}}$ 2) $\dfrac{\sqrt[3]{576}}{\sqrt[3]{48}}$ 3) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{72}}$

วิธีทำ 1) $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{3^3\times2}}{\sqrt{3^2\times2}} = \dfrac{3\sqrt{3}\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

2) $\dfrac{\sqrt[3]{576}}{\sqrt[3]{48}} = \sqrt[3]{\dfrac{576}{48}} = \sqrt[3]{12}$

3) $\dfrac{\sqrt[3]{32}}{\sqrt{72}} = \dfrac{\sqrt[3]{2^5}}{\sqrt{6^2\times2}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2^2}}{6\sqrt{2}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\sqrt[6]{2^4}}{\sqrt[6]{2^3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[6]{\dfrac{2^4}{2^3}} = \dfrac{1}{3}\sqrt[6]{2}$

ตัวอย่างที่ 11 จงหาคำตอบของ $(4\sqrt{5}-3\sqrt{2})(3\sqrt{5}+8\sqrt{2})$

วิธีทำ $(4\sqrt{5}-3\sqrt{2})(3\sqrt{5}+8\sqrt{2})$

$= (4\sqrt{5}-3\sqrt{2})(3\sqrt{5}) + (4\sqrt{5}-3\sqrt{2})(8\sqrt{2})$

$= (4\sqrt{5})(3\sqrt{5}) - (3\sqrt{2})(3\sqrt{5}) + (4\sqrt{5})(8\sqrt{2}) - (3\sqrt{2})(8\sqrt{2})$

$= 60 - 9\sqrt{10} + 32\sqrt{10} - 48$

$= 12 + 23\sqrt{10}$

## แบบฝึกหัด 4.2

1. จงทำจำนวนต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

   1) $\sqrt{32a^2}$ 2) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{81}}$ 3) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{-64}}$ 4) $\sqrt[4]{\dfrac{1}{256}}$

2. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูปที่ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

   1) $\sqrt{\dfrac{7}{3}}$ 2) $\dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{18}}$ 3) $\sqrt{\dfrac{3}{40}}$ 4) $\dfrac{4\sqrt{24}}{7\sqrt{72}}$

3. จงทำผลคูณต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

   1) $\sqrt{24}\sqrt{150}$ 2) $\sqrt{4}\sqrt{48}$ 3) $\sqrt{9}\sqrt{27}\sqrt{12}$

   4) $\dfrac{\sqrt{108}}{2\sqrt{84}}$ 5) $\sqrt[3]{432}$

4. จงทำให้เป็นผลสำเร็จ

   1) $\sqrt[3]{108}$ 2) $4\sqrt{2}(\sqrt{10} + 5\sqrt{2})$

   3) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}-\sqrt{5})$ 4) $(3 + \sqrt{5})^2$

   5) $(5 - \sqrt{2})(5 + \sqrt{2})$ 6) $(3\sqrt{7} - 3\sqrt{3})^2$

## 4.3 เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ

ในหัวข้อนี้จะให้บทนิยามของเลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็น $\dfrac{p}{q}$ เมื่อ p และ q เป็นจำนวนเต็มที่ (p , q) = 1 , q > 0 โดยบทนิยามจะเริ่มจากกรณีที่ p = 1 และ q เป็นจำนวนเต็มบวก n ที่มากกว่า 1

**บทนิยาม** เมื่อ a เป็นจำนวนจริง n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 และ a มีรากที่ n

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรรกยะมีบทนิยามดังนี้

**บทนิยาม** ให้ a เป็นจำนวนจริง p และ q เป็นจำนวนเต็มที่ (p , q) = 1 , q > 0 และ $a^{\frac{1}{q}} \in R$ โดยที่ p < 0 แล้ว a ต้องไม่เป็นศูนย์ $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{p}$

เลขยกกำลังที่มีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะมีสมบัติตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1 ให้ m และ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ $a^m$ , $a^n$ , $b^n$ เป็นจำนวนจริงจะได้

1) $a^m a^n = a^{m+n}$
2) $(a^m)^n = a^{mn}$
3) $(ab)^m = a^m b^m$
4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ เมื่อ $b \neq 0$
5) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ เมื่อ $a \neq 0$

ตัวอย่างที่ 1 จงทำ $(125a^3b^6)^{\frac{1}{6}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ a > 0 , b < 0

วิธีทำ $(125a^3b^6)^{\frac{1}{6}} = [(5)^3a^3\ b^6]^{\frac{1}{6}}$

$= 5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}|\,b|$

$= 5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}(-\,b)$

ตัวอย่างที่ 2 จงทำ $\dfrac{(27a^2b)^{\frac{1}{3}}}{(54a^2b^2)^{\frac{1}{4}}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย เมื่อ a > 0 , b > 0

วิธีทำ $\dfrac{(27a^2b)^{\frac{1}{3}}}{(81a^2b^2)^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{(3^3)^{\frac{1}{3}}a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}}{(3^4)^{\frac{1}{4}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{3a^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}}{3b^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{6}}} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{6}}$

**การบวก ลบ คูณ และ หาร เลขยกกำลังและการแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์อันดับที่สอง**

การบวกลบ คูณ และหารเลขยกกำลัง และ การแก้สมการที่มีเครื่องหมายกรณฑ์อันดับที่สอง อาจทำได้โดยใช้ทฤษฎีบทเลขยกกำลังดังตัวอย่าง

ตัวอย่างที่ 3 จงทำ $5(3)^{\frac{1}{3}} - 4(24)^{\frac{1}{3}} + (576)^{\frac{1}{6}} - 27\left(\dfrac{8}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$ ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

วิธีทำ $4(24)^{\frac{1}{3}} = 4(2^3 \times 3)^{\frac{1}{3}} = 4(2^{3\times\frac{1}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}}) = 4(2\times 3^{\frac{1}{3}}) = 8(3)^{\frac{1}{3}}$

$(576)^{\frac{1}{6}} = (3^2 \times 2^6)^{\frac{1}{6}} = 2(3^{\frac{1}{3}})$

$27\left(\dfrac{8}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 27\left(\dfrac{2^3}{3^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 27\times\dfrac{2^{3\times\frac{1}{3}}}{3^{2\times\frac{1}{3}}} = 27\times\dfrac{2}{3^{\frac{2}{3}}} = 54\times\dfrac{3^{\frac{1}{3}}}{3} = 18(3^{\frac{1}{3}})$

ดังนั้น $5(3)^{\frac{1}{3}} - 4(24)^{\frac{1}{3}} + (576)^{\frac{1}{6}} + 27\left(\dfrac{8}{9}\right)^{\frac{1}{3}} = 5(3)^{\frac{1}{3}} - 8(3)^{\frac{1}{3}} + 2(3^{\frac{1}{3}}) - 18(3^{\frac{1}{3}})$

$= (5 - 8 + 2 - 18)(3)^{\frac{1}{3}}$

$= -19(3)^{\frac{1}{3}}$

$= -19\sqrt[3]{3}$

ตัวอย่างที่ 4 จงหาค่าของ $6\sqrt[3]{4} \times 11\sqrt{5}$

วิธีทำ $6\sqrt[3]{4} \times 11\sqrt{5} = 6(4^{\frac{1}{3}})\times 11(5^{\frac{1}{2}})$

$= 6(4^{\frac{1}{3}\times\frac{2}{2}})\times 11(5^{\frac{1}{2}\times\frac{3}{3}})$

$= 6(4^2)^{\frac{1}{6}} \times 11(5^3)^{\frac{1}{6}}$

$$= 6(16)^{\frac{1}{6}} \times 11(125)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 66 \times (2000)^{\frac{1}{6}}$$

$$= 66\sqrt[6]{2000}$$

**ตัวอย่างที่ 5** จงทำ $\dfrac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ให้อยู่ในรูปที่ไม่ติดกรณฑ์

วิธีทำ

$$\frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1}{3\sqrt{2}+\sqrt{3}} \times \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{18-3}$$

$$= \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}{15}$$

**ตัวอย่างที่ 6** จงหาร $\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$ ด้วย $\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$

วิธีทำ

$$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \div \frac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2} \times \frac{\sqrt{7}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}$$

$$= \frac{7-3}{3-2\sqrt{3}-2\sqrt{3}+4}$$

$$= \frac{4}{7-4\sqrt{3}}$$

$$= \frac{4}{7-4\sqrt{3}} \times \frac{7+4\sqrt{3}}{7+4\sqrt{3}}$$

$$= 4(\frac{(7+4\sqrt{3})}{49-48}$$

$$= 28 + 16\sqrt{3}$$

ถ้ากำหนด $\sqrt{3} \approx 1.7321$ จะได้ $\dfrac{\sqrt{7}+3}{\sqrt{3}-2} \div \dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{7}-3} = 28 + 16\sqrt{3}$

$$\approx 28 + 16(1.7321)$$

$$= 55.7136$$

ตัวอย่างที่ 7 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{24-2x} = x$

วิธีทำ $\sqrt{24-2x} = x$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$24 - 2x = x^2$

$x^2 + 2x - 24 = 0$

$(x + 6)(x - 4) = 0$

$x = -6$ หรือ $x = 4$

เมื่อตรวจสอบจะพบว่า เฉพาะ $x = 4$ จะทำให้สมการเป็นจริง

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ { 4 }

ตัวอย่างที่ 8 จงหาเซตคำตอบของสมการ $\sqrt{5x+11} - \sqrt{x+2} = 5$

วิธีทำ $\sqrt{5x+11} - \sqrt{x+2} = 5$

$\sqrt{5x+11} = 5 + \sqrt{x+2}$

ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$5x + 11 = 25 + 10\sqrt{x+2} + (x + 2)$

$5x + 11 = x + 27 + 10\sqrt{x+2}$

$4x - 16 = 10\sqrt{x+2}$

นำ 2 หารทั้งสองข้างแล้วยกกำลังสองทั้งสองข้างจะได้

$2x - 8 = 5\sqrt{x+2}$

$4x^2 - 32x + 64 = 25(x + 2)$

$4x^2 - 57x + 14 = 0$

$(4x - 1)(x - 14) = 0$

$x = \frac{1}{4}$ หรือ $x = 14$

เมื่อตรวจสอบจะพบว่า เฉพาะ 14 ที่เป็นคำตอบของสมการ

ดังนั้นเซตคำตอบของสมการคือ { 14 }

## แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาค่าของ

1) $32^{\frac{2}{5}}$ 2) $0.36^{\frac{3}{2}}$ 3) $81^{\frac{3}{4}}$ 4) $0.064^{\frac{2}{3}}$

5) $\left(\frac{1}{241}\right)^{\frac{4}{5}}$ 6) $(-64)^{-\frac{1}{3}}$ 7) $(-125)^{\frac{2}{3}}$ 8) $\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{2}{3}}$

9) $(-\frac{1}{343})^{-\frac{2}{3}}$ 10) $(\frac{1}{343})^{-\frac{2}{3}}$

2. ให้ x , y , m , n , a , b , และ c เป็นจำนวนจริงบวก จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย และมีเลขชี้กำลังเป็นจำนวนบวก

1) $\left(\frac{x^{-6}}{9y^4}\right)^{\frac{1}{2}}$ 2) $\left(\frac{8x^6}{y^3}\right)^{\frac{2}{3}}$ 3) $\left(\frac{y^{-\frac{3}{2}}}{y^{\frac{2}{3}}}\right)^3$

4) $\left(\frac{m^{\frac{1}{4}}}{m^{\frac{1}{2}}n^{\frac{1}{3}}}\right)^2$ 5) $\left(\frac{27x^{-6}y^4}{125x^3y}\right)^{\frac{1}{3}}$ 6) $\left(\frac{49a^2b^{-4}c^{-6}}{81a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}c^8}\right)^{-\frac{3}{4}}$

3. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\sqrt{12} + \sqrt{48} - \sqrt{75}$ 2) $4\sqrt{2} + \sqrt{32} - 3\sqrt[4]{64}$

3) $6\sqrt[3]{32} - 3\sqrt[3]{4} - 2\sqrt[3]{108}$ 4) $\sqrt[3]{648} + \sqrt[3]{375} - 2\sqrt[3]{192}$

4. จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ให้ตัวส่วนไม่ติดกรณฑ์

1) $\frac{1}{2\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ 2) $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

3) $\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{3}}{2\sqrt{6}+2\sqrt{3}}$ 4) $\frac{5\sqrt{7}+2\sqrt{5}}{3\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

5) $\frac{24}{8\sqrt{5}-3\sqrt{7}}$

5. จงทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

1) $\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$ - $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ 2) $\frac{15}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ + $\frac{9}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

3) $\frac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}-2}$ - $\frac{4+\sqrt{3}}{4-\sqrt{3}}$

6. จงหาค่ากำลังสองของจำนวนต่อไปนี้

1) $\sqrt{m-n}$ + $\sqrt{m+n}$ 2) 5$\sqrt{p^2+q^2}$ - 3$\sqrt{p^2-q^2}$

7. $\sqrt{2a+1}$ + 3$\sqrt{a+2}$

8. กำหนดให้ $\sqrt{2}$ ≈ 1.4142 , $\sqrt{3}$ ≈ 1.7321 , $\sqrt{5}$ ≈ 2.2361 และ $\sqrt{6}$ ≈ 2.4495
จงหาค่าประมาณของจำนวนต่อไปนี้ให้ถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่ 3

1) $\frac{4\sqrt{3}-3}{3\sqrt{2}+3}$ 2) $\frac{2\sqrt{6}-3}{3\sqrt{2}-6}$ 3) $\frac{2\sqrt{5}-6}{6+\sqrt{5}}$

9. จงหาเซตคำตอบของสมการต่อไปนี้

1) $\sqrt{m+1}$ = 8 2) $\sqrt{6x+1}$ + 6 = 13

3) $\sqrt{m^2+11}$ = m + 1 4) $\sqrt{x+15}$ = x - 5

5) $\sqrt{x+6}$ = $\sqrt{3x-4}$ 6) $\sqrt{x+11}+\sqrt{x}$ = 11

7) $\sqrt{12x+1}$ + $\sqrt{x+5}$ = $\sqrt{25x}$ 8) $\sqrt{x+5}$ + $\sqrt{3x-3}$ = $\sqrt{6x+12}$

## 4.4 ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล

ก่อนอื่น เราควรสังเกตว่า f(x) = $2^x$ และ g(x) = $x^2$ ไม่ใช่ฟังก์ชันเดียวกัน สำหรับฟังก์ชัน g เป็นฟังก์ชันกำลังสอง ซึ่งได้กล่าวไปแล้ว ส่วนฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันใหม่ที่เรียกว่า ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล [หรือเรียกว่า ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง] ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลเป็นฟังก์ชันที่นิยามโดยสมการในรูป

| ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล |
|---|
| f(x) = $a^x$ , a > 0 , a ≠ 1 |

เมื่อ a เป็นค่าคงตัว เรียก a ว่า ฐาน (base) และเลขชี้กำลัง x เป็นตัวแปร
เซตที่แทนฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียลคือ

$f = \{(x , y) \in R \times R^{+} | \ y = a^{x} \ , a > 0 , a \neq 1 \}$

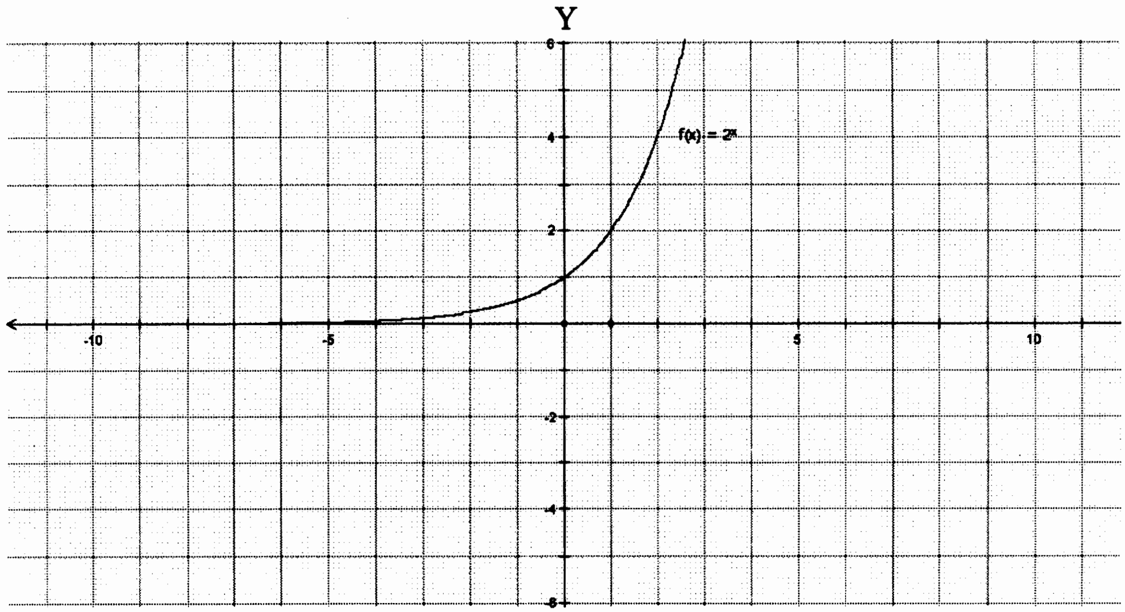
โดเมนของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริง เรนจ์ของฟังก์ชันคือเซตของจำนวนจริงบวก เรากำหนด a มากกว่าศูนย์เพื่อหลีกเลี่ยงจำนวน เช่น $(-2)^{\frac{1}{2}}$ ซึ่งจำนวนชนิดนี้ไม่ใช่จำนวนจริง

**กราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนชียล**

วิธีที่ดีที่จะคุ้นเคยกับฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล คือ การเขียนกราฟ

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $f(x) = 2^{x}$

วิธีทำ เราให้ $y = 2^{x}$ และสร้างตารางของค่า x และ y โดยกำหนดค่า x เป็น -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 แล้วหาค่า y และเขียนกราฟได้ดังนี้



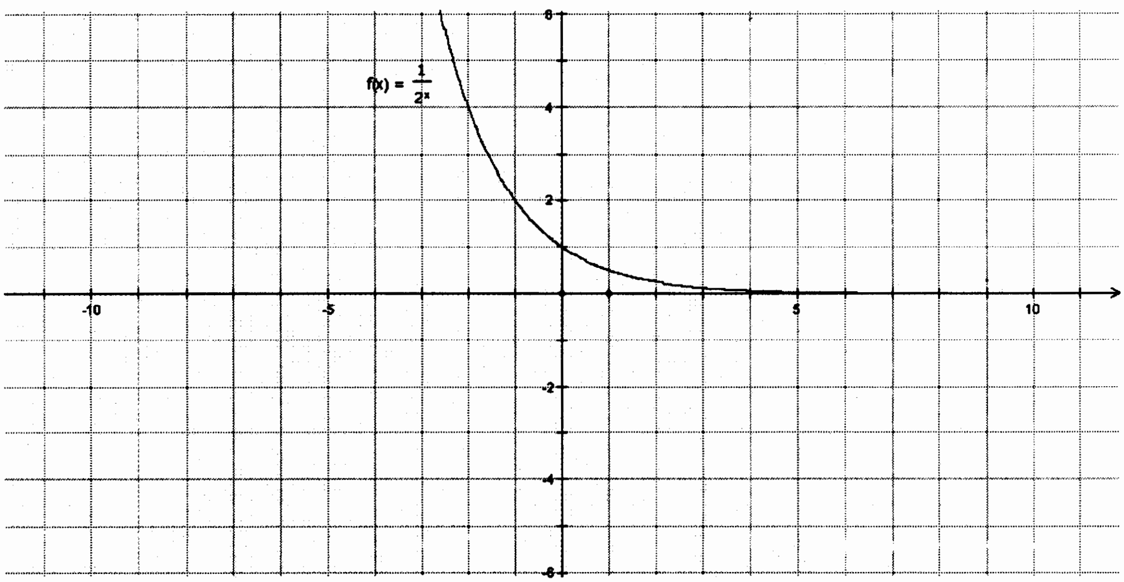

ภาพประกอบ 4.1

สำหรับ $a^{x}$ มี a เป็นจำนวนจริงบวก และ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งกราฟแสดงดังรูปข้างบนนี้

ในการเขียนกราฟดูเหมือนว่าเราจะคิดว่าเราสามารถวาดกราฟได้ดังภาพข้างต้น แต่เนื่องจากเราไม่สามารถอธิบายความหมายของ $a^x$ เมื่อ x เป็นจำนวนอตรรกยะ เราไม่สามารถจะลงจุดได้อย่างถูกต้อง สำหรับค่า เช่น $2^{\sqrt{2}}$ อย่างไรก็ตามเราจะคุ้นเคยที่จะคิดเสมือนว่า $2^{\sqrt{2}}$ เป็นค่าที่เข้าใกล้ค่าประมาณของ $2^{\sqrt{2}}$ เช่น $2^{1.4}$ , $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, ... บทนิยามที่ชัดเจนที่กำหนดในคณิตศาสตร์ชั้นสูง ซึ่งแสดงว่ากฎของเลขชี้กำลัง เป็นจริง สำหรับเลขชี้กำลังที่เป็นจำนวนอตรรกยะ

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ f(x) = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$

วิธีทำ เราให้ y = $\left(\frac{1}{2}\right)^x$ และสร้างตารางของค่า x และ y โดยกำหนดค่า x เป็น -3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 , 3 แล้วหาค่า y และเขียนกราฟได้ดังนี้




ภาพประกอบ 4.2

กราฟใน ภาพประกอบ 4.1 และ ภาพประกอบ 4.2 แสดงสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ต่อไปนี้

**สมบัติของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล**

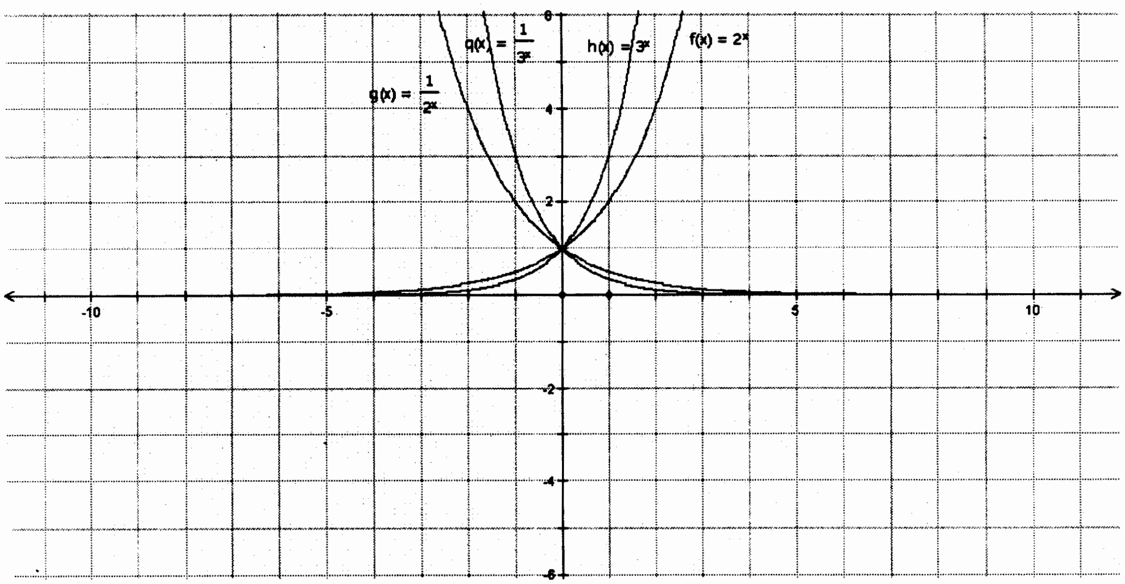
1. กราฟของ $f(x) = a^x$ จะผ่านจุด (0 , 1) เสมอ เนื่องจาก $a^0 = 1$

2. โดเมนของ $f(x) = a^x$ ประกอบด้วยเซตของจำนวนจริง เรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงบวก

3. ถ้า $a > 1$ , $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ถ้า $0 < a < 1$ , $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันลด

4. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a^x < b^x$ สำหรับทุก $x > 0$ และ $a^x > b^x$ สำหรับทุก $x < 0$

พิจารณากราฟต่อไปนี้




ภาพประกอบ 4.3

สังเกตว่า $y = 3^x$ จะอยู่เหนือกราฟ $y = 2^x$ เมื่อ $x > 0$ และอยู่ใต้เมื่อ $x < 0$ เนื่องจาก $y = a^x$ เป็นฟังก์ชันลดหรือฟังก์ชันเพิ่มอย่างใดอย่างหนึ่ง นอกจากนั้น **y แต่ละค่า มาจากค่า x เพียงค่าเดียว** นั่นคือ **f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** ดังนั้น เราจะได้ข้อสรุปดังนี้

| |
|---|
| ถ้า $a^u = a^v$ แล้ว $u = v$ |

กราฟของ $y = a^x$ และกราฟของ $y = b^x$ ตัดกันที่ $x = 0$ ข้อสังเกตนี้ทำให้เราสามารถสรุปได้ว่า

| |
|---|
| ถ้า $a^u = b^u$ สำหรับ $u \neq 0$ แล้ว $a = b$ |

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่า x

1) $3^{15} = 3^{3x}$　　2) $2^9 = (x - 3)^9$　　3) $4^{3x} = 16^{x-1}$

วิธีทำ 1) เนื่องจาก $3^{15} = 3^{3x}$

ดังนั้น $15 = 3x$

$x = 5$

2) เนื่องจาก $2^9 = (x - 3)^9$

ดังนั้น $2 = x - 3$

$x = 5$

3) เนื่องจาก $4^{3x} = 16^{x-1}$

ดังนั้น $4^{3x} = 4^{2(x-1)}$

$3x = 2(x - 1)$

$3x = 2x - 2$

$x = -2$

**หมายเหตุ** ในการหาคำตอบของอสมการ เช่น $2^{2x} > 32$ เราอาจเริ่มจากพิจารณากราฟของ $y = 2^{2x} = 32$ ว่ามีจุดตัดอยู่ที่ใด ดังนี้

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนกราฟของ $2^{2x} = 32$

วิธีทำ $2^{2x} = 32$

นั่นคือ $2^{2x} = 2^5$

จะได้ $2x = 5$

$x = 2.5$

ดังนั้น กราฟผ่านจุด (2.5 , 32)

เนื่องจากฟังก์ชัน $y = 2^{2x}$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้น เมื่อ $2^{2x} > 32$ จะได้ว่า $x > 2.5$ นั่นคือ เซตคำตอบของอสมการ $2^{2x} > 32$ คือ $(2.5 , \infty)$

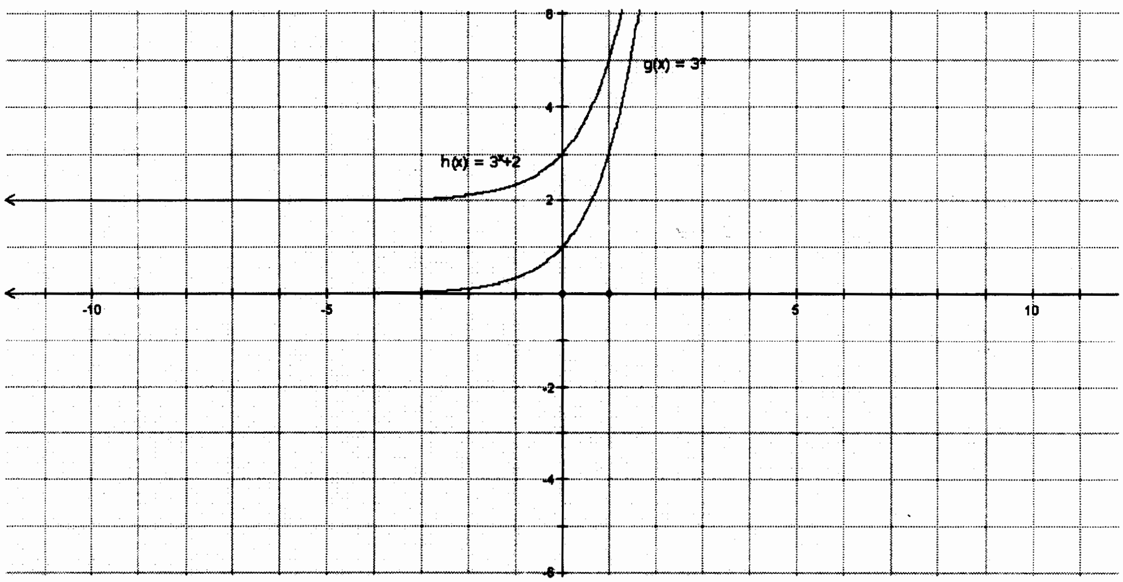
ตัวอย่างต่อไปนี้ ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันอาศัยกราฟของฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล และการเลื่อนกราฟ

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนกราฟของแต่ละฟังก์ชันต่อไปนี้

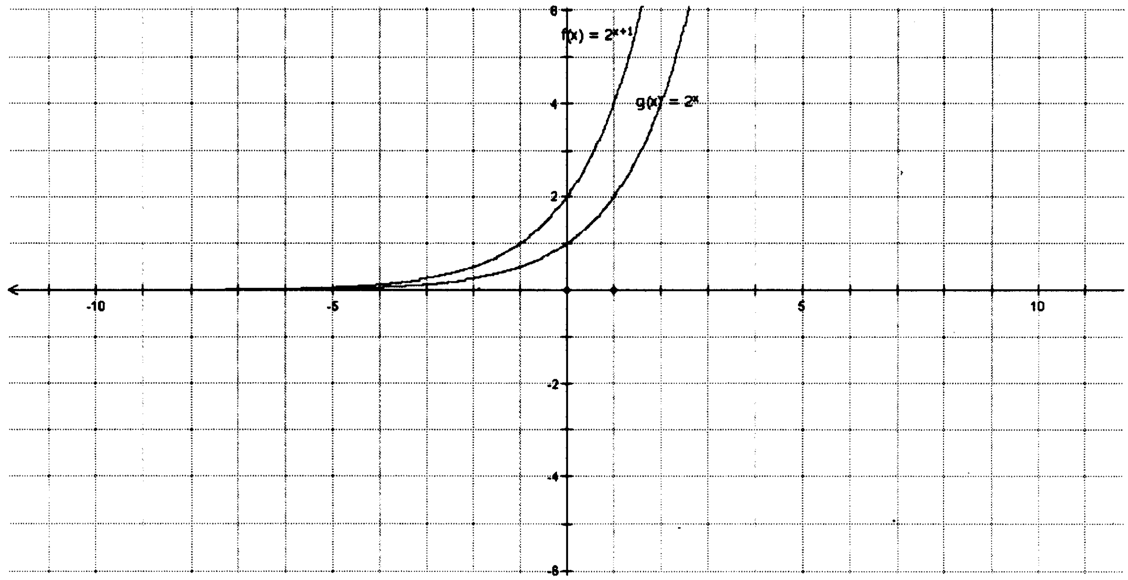
1) $f(x) = 3^x + 2$

2) $g(x) = 2^{x+1}$

วิธีทำ 1) เขียนกราฟของ $f(x) = 3^x + 2$ โดยเริ่มจาก $y = 3^x$ แล้วเลื่อนจุดทุกจุดขึ้นข้างบน 2 หน่วย จะได้กราฟของ $y = 3^x$ และ $f(x) = 3^x + 2$ ดังนี้




2) เขียนกราฟของ $g(x) = 2^{x+1}$ โดยเริ่มจากการเขียนกราฟของ $y = 2^x$ และเลื่อนทุกจุดไปทางซ้าย 1 หน่วย จะได้กราฟของ g ดังรูป



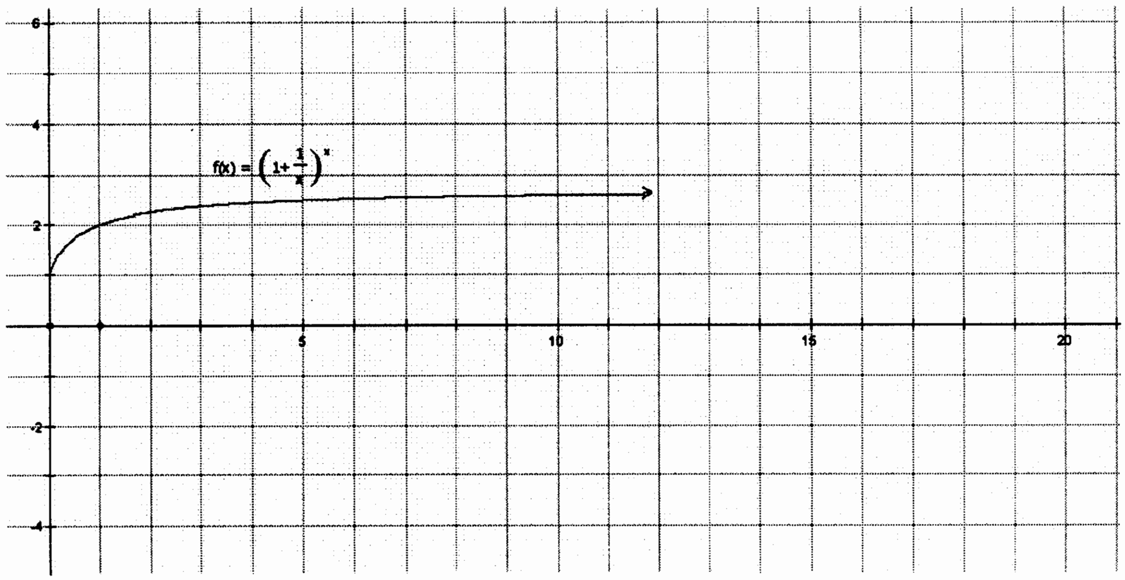

**จำนวน e**

มีจำนวนอตรรกยะที่กำหนดครั้งแรกด้วยอักษร e โดยนักคณิตศาสตร์ชาวสวิส Leonhard Euler (1707-1783) จำนวน e เป็นค่าของ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

กระบวนการศึกษาลักษณะของ นิพจน์นี้ ในขณะที่ n มีค่ามากขึ้นเรื่อย ๆ พัฒนาใน วิชาแคลคูลัส เราจะแสดงค่าบางค่าของ n ดังตารางต่อไปนี้

| n | 1 | 2 | 10 | 100 | 1000 | 10,000 | 100,000 | 1,000,000 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ | 2.0 | 2.25 | 2.5937 | 2.7048 | 2.7169 | 2.7181 | 2.7182 | 2.71828046... |




ภาพประกอบ 4.4

ฟังก์ชัน $f(x) = e^x$ เรียกว่า ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล ธรรมชาติ (natural exponential function)

ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล จะประยุกต์ใช้แก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างกว้างขวาง เช่นปัญหาที่เกี่ยวกับการเพิ่มปริมาณของประชากร เช่น การทำนายการเพิ่มปริมาณของบักเตรี การสลายของธาตุกัมมันตภาพรังสี การตรวจสอบครึ่งชีวิต (half-life) ของ strontium 90 และการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น เป็นต้น

**สูตรความเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล (Formula for Exponential Growth)**

สูตรความเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล กำหนดโดยฟังก์ชัน Q โดยที่

$Q(t) = q_0 e^{kt}$ , $k > 0$

เรียกแบบจำลองการเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล (exponential growth model)

เมื่อตัวแปร t แทนเวลา k เป็นค่าคงตัว เราอาจคิดว่า Q เป็นปริมาณสิ่งที่ศึกษาที่มีอยู่ในช่วงเวลา t สังเกตว่า เมื่อ $t = 0$ เรามี $Q(0) = q_0 e^0 = q_0$ ซึ่งกล่าวว่า $q_0$ เป็นปริมาณเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 4 จำนวนบักเตรีจากการเลี้ยงหลังจากเวลาผ่านไป t ชั่วโมง แสดงโดย

สมการ $Q(t) = 50e^{0.7t}$

1) จงหาจำนวนเริ่มต้นของบักเตรี

2) มีจำนวนบักเตรีเท่าไรเมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

วิธีทำ 1) ในเวลาเริ่มต้น t = 0 จะได้

$Q(0) = 50e^{0.7(0)} = 50 = q_0$

ดังนั้นมีบักเตรีเริ่มต้นอยู่ 50 ตัว

2) เมื่อเวลาเป็น 10 ชั่วโมงจะมีจำนวนบักเตรีเป็น

$Q(10) = 50\ e^{0.7(10)} = 50(1096.6) = 54{,}830$ ตัว

**หมายเหตุ** ค่า $e^7 = 1096.6$ สามารถหาได้จากตารางซึ่งอยู่ท้ายเล่ม

**การสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสีเลขชี้กำลัง (exponential decay)**

การสลายตัวของสารกัมมันตรังสีจะกำหนดด้วยฟังก์ชัน Q ซึ่งนิยามโดย

$Q(x) = q_0 e^{-kt}$ , $k > 0$

เรียกแบบจำลองการสลายตัวเอกซ์โพเนนเชียล (exponential decay model)

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าสารกัมมันตภาพรังสีชนิดหนึ่งสลายตัว 5% ต่อชั่วโมง ถ้ามีสารเริ่มต้น 500 กรัม จะมีสารเหลืออยู่เท่าไรหลังจากที่เวลาผ่านไปได้ 4 ชั่วโมง

วิธีทำ สมการทั่วไปของแบบจำลองการสลายตัวของสารกัมมันตภาพรังสี คือ

$Q(t) = q_0 e^{-kt}$

ในแบบจำลอง $q_0 = 500$ กรัม

k = 0.05 (เนื่องจากอัตราการสลายตัวเป็น 5%ต่อชั่วโมง)

t = 4 ชั่วโมง

จะได้ $Q(4) = 500e^{-0.05(4)} = 500e^{-0.2} = 500(0.8187) = 409.4$

ดังนั้นสารกัมมันตภาพรังสีคงเหลือ 409.4 กรัม

**ดอกเบี้ยทบต้น (compound interest)**

เราจะเริ่มจากบทนิยามของดอกเบี้ยอย่างง่าย (simple interest) ถ้าเงินต้น P คิดดอกเบี้ยอย่างง่าย ในอัตรา r ต่อปี ถ้า S เป็นจำนวนเงินรวมที่เรามีหลังจากเวลาผ่านไป t ปีกำหนดโดย S = P + Prt

ในทางธุรกิจต่าง ๆ ดอกเบี้ยที่ได้ในปีหนึ่ง ๆ จะรวมเข้ากับเงินต้นของปีก่อนกลายเป็นเงินต้นของปีต่อไปเพื่อหาดอกเบี้ยของปีต่อไป ซึ่งการคิดคำนวณดอกเบี้ยเช่นนี้ เรียกว่า ดอกเบี้ยทบต้น (compound interest)

สมมุติว่า เงินต้น P อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี ทบต้น k ครั้งต่อปี ดังนั้นอัตราดอกเบี้ยในแต่ละช่วงเวลา $t = \frac{1}{k}$ ปี

ดังนั้น จำนวน $S_1$ เมื่อสิ้นสุดช่วงเวลาที่หนึ่งเป็น

$$S_1 = P + Pr\frac{1}{k}$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

จำนวน $S_2$ เมื่อสิ้นสุดช่วงเวลาที่หนึ่งเป็น

$$S_2 = S_1 + S_1 rt$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{k}\right) + P\left(1 + \frac{r}{k}\right)r\frac{1}{k}$$

$$= \left[P\left(1 + \frac{r}{k}\right)\right]\left(1 + \frac{r}{k}\right)$$

$$= P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^2$$

โดยวิธีการเดียวกันนี้ เราจะได้ว่า

$$S_n = P\left(1 + \frac{r}{k}\right)^n$$

ซึ่งโดยปกติ จะเขียน

$$S = P(1 + i)^n$$

เมื่อ $i = \frac{r}{k}$ จากตารางท้ายเล่มกำหนดค่าของ $(1 + i)^n$ สำหรับค่าของ i และ n

ตัวอย่างที่ 6 สมมุติว่าฝากเงิน 600,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี จงหาเงินรวมเมื่อครบกำหนด 3 ปี ถ้า

1) คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 4 ครั้ง

2) คิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 2 ครั้ง

วิธีทำ 1) กำหนด P = 600,000 , r = 0.08 , k = 4 และ n = 12 (เนื่องจากมี 4 ช่วงในแต่ละปี เป็นเวลา 3 ปี) ดังนั้น

$$i = \frac{r}{k} = \frac{0.08}{4} = 0.02$$

และ $S = P(1 + i)^n = 600{,}000(1 + 0.2)^{12}$

จากตารางท้ายเล่มที่ $i = \frac{r}{k} = 0.02 = 2\%$ และ n = 12 จะได้

$S = 600{,}000 \times (1.26824179) = 760{,}945.074$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่สามจะได้รับเงินรวม 760,945.074 บาท

2) กำหนด P = 600,000 , r = 0.08 , k = 2 และ n = 6 (เนื่องจากมี 2 ช่วงในแต่ละปี เป็นเวลา 3 ปี) ดังนั้น

$$i = \frac{r}{k} = \frac{0.08}{2} = 0.04$$

และ $S = P(1 + i)^n = 600{,}000(1+ 0.4)^6$

จากตารางท้ายเล่มที่ $i = 0.04 = 4\%$ และ n = 6 จะได้

$S = 600{,}000 \times (1.26531902) = 759{,}191.412$

ดังนั้น เมื่อสิ้นปีที่สามจะได้รับเงินรวม 759,191.412 บาท

**ดอกเบี้ยทบต้นแบบต่อเนื่อง (continuous compounding)**

เมื่อ P , r และ t เป็นค่าคงตัวและความถี่ของการทบต้นเพิ่มขึ้น ทำให้เงินรวม (investment) เพิ่มขึ้น เราต้องการตรวจสอบผลของการทำให้จำนวนรอบ (conversions) ต่อปีใหญ่ขึ้น ๆ

สมมุติว่า P เป็นเงินต้น อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี ทบต้นปีละ k ครั้ง ภายหลัง t ปี จำนวนรอบทบต้น n = tk ดังนั้น ค่าของเงินรวมหลังจาก t ปีคือ

$$S = P(1 + \frac{r}{k})^{tk}$$

ให้ m = $\frac{k}{r}$ เราสามารถเขียนสมการนี้เป็น

$$S = P\left(1+\frac{1}{m}\right)^{tmr}$$

หรือ $S = P\left[\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}\right]^{rt}$

ถ้าจำนวนรอบ k ต่อปีเพิ่มขึ้น ๆ แล้วจำนวน m จะใหญ่ขึ้น ๆ เนื่องจากเราเห็นในตาราง 1 ของบทนี้แสดง $\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$ มีค่าใกล้ e เมื่อ m มีค่าใหญ่ขึ้น ๆ เราจะสรุปได้ว่า

| |
|---|
| $S = Pe^{rt}$ .................. (1) |

ในขณะที่จำนวนรอบเพิ่มขึ้น ค่าเงินรวมจะเพิ่มขึ้นด้วย แต่มีขีดจำกัด (limit) หรือมีขอบเขต (bound) กับค่านี้ และกำหนดโดยสมการ (1) เรากล่าวว่าสมการ (1) แทนผลของการทบต้นอย่างต่อเนื่อง (continuous compounding)

ตัวอย่างที่ 7 สมมุติว่า ฝากเงิน 200,000 บาท อัตราดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปี โดยทบต้นแบบต่อเนื่อง จงหาค่าของเงินรวมเมื่อเวลาผ่านไป 4 ปี

วิธีทำ ให้ P = 200,000 , r = 0.07 และ t = 4 และเราแทนในสมการ (1)

$$\begin{aligned} S &= Pe^{rt} \\ &= 200{,}000\, e^{0.07(4)} \\ &= 200{,}000\, e^{0.28} \\ &= 200{,}000\,(1.3231) \\ &= 264{,}620 \end{aligned}$$

ดังนั้นผลรวมเมื่อครบกำหนด 4 ปี คือ 264,620 บาท

โดยการแก้สมการ (1) เพื่อหาค่า P เราสามารถตรวจสอบ เงินต้น P ที่ให้เงินรวม S แบบดอกเบี้ยทบต้นชนิดต่อเนื่อง ณ เวลาในอนาคต ซึ่งค่าของ $e^{-x}$ ดูได้จากตารางท้ายเล่ม

ตัวอย่างที่ 8 สมมุติว่า เงินต้น P เมื่อฝากแบบดอกเบี้ยทบต้นชนิดต่อเนื่อง อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี ได้รับเงินรวม 100,000 บาท ในเวลา 5 ปี จงหาว่าจะฝากเงินต้นเท่าไร

วิธีทำ ใช้สมการ (1) เมื่อ S = 100,000 , r = 0.08 และ t = 5

จากสูตร S $= Pe^{rt}$

จะได้ 100,000 $= Pe^{0.08(5)}$

$= Pe^{0.4}$

$$P = \frac{100,000}{e^{0.4}}$$

$= 100,000\ e^{-0.4}$

$= 100,000(0.6703)$

$= 67,030$

ดังนั้น จะต้องฝากเงินประมาณ 67,030

## แบบฝึกหัด 4.4

1. จงเขียนกราฟของฟังก์ชัน f ที่กำหนดในแต่ละข้อ

   (1) $f(x) = 4^{x}$ (2) $f(x) = 4^{-x}$

   (3) $f(x) = 2^{x-1}$ (4) $f(x) = 2^{x+1}$

   (5) $f(x) = 2^{/x/}$ (6) $f(x) = 2^{-/x/}$

2. จงแก้สมการหาค่า x

   (1) $2^{x-1} = 2^{3}$ (2) $3^{x} = 9^{x-2}$

   (3) $2^{3x} = 4^{x-1}$ (4) $e^{x-1} = e^{4}$

3. จงแก้สมการหาค่า x

   (1) $(a + 2)^{x} = (2a - 3)^{x}$ (2) $(a + 1)^{x} = (2a)^{x}$

ในข้อ 4 –8 ใช้ตารางท้ายเล่มคำนวณหา $e^{x}$ และ $e^{-x}$

4. จำนวนบักเตรีในภาชนะสำหรับเพาะ หลังจากเวลา t ชั่วโมงแสดงโดยแบบจำลองการเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล กำหนดโดย $Q(t) = 200e^{0.25t}$

(1) จงหาจำนวนเริ่มต้นของบักเตรีในภาชนะสำหรับเพาะ

(2) จงหาจำนวนบักเตรีในภาชนะเพาะหลังจากเวลาผ่านไป 20 ชั่วโมง

5. จำนวนบักเตรีในภาชนะสำหรับเพาะ หลังจากเวลา t ชั่วโมง แสดงโดยแบบจำลองการเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล กำหนดโดย $Q(t) = q_0e^{0.01t}$ ถ้าเริ่มต้นมีจำนวนบักเตรี 200 ตัว จงหาจำนวนบักเตรี เมื่อเวลาผ่านไป 2 วัน

6. ในปี พ.ศ. 2545 ประเทศหนึ่งมีประชากรประมาณ 20 ล้านคน ถ้าการเพิ่มของประชากรเป็นแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล และถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรเป็น 2% ต่อปี จงประมาณจำนวนประชากรของประเทศนี้ในปี พ.ศ. 2570

7. จำนวนกรัมของสารโปตัสเซียม 42 หลังจากเวลาผ่านไป t ชั่วโมงกำหนดโดย แบบจำลองการสลายตัวเอกซ์โพเนนเชียล $Q(t) = q_0e^{-0.055t}$ ถ้ามีสารในเวลาเริ่มต้นจำนวน 800 กรัม จะยังคงเหลืออยู่เท่าไร เมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

8. สารกัมมันตภาพรังสี ชนิดหนึ่งมีอัตราการสลายตัว 4% ต่อชั่วโมง ถ้าในเวลาเริ่มต้นมีสารอยู่ 2,000 กรัม จงหาจำนวนสารที่เหลืออยู่เมื่อเวลาผ่านไป 10 ชั่วโมง

ข้อ 9-11 ใช้ตารางท้ายเล่มช่วยในการคิดคำนวณ

9. ฝากเงิน 240,000 บาท ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 10 ต่อปีทบต้นทุก ๆ ครึ่งปี จงหาว่าเมื่อเวลาผ่านไป 8 ปี ผู้ฝากเงินจะมีเงินรวมเท่าไร

10. พ่อแม่ฝากเงินให้ลูกเมื่อแรกเกิด จำนวน 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปีทบต้นทุก ๆ 1 ใน 4 ของปี จงหาเงินรวมเมื่อเวลาผ่านไป 18 ปี

11. ฝากเงิน P บาท ได้ดอกเบี้ย 9% ทบต้นแบบต่อเนื่อง ได้รับเงินรวม 250,000 บาท ในเวลา 20 ปี จงหาค่าประมาณของ P

### 4.5 ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic functions)

จากฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มเมื่อ $a > 1$ และเป็นฟังก์ชันลดเมื่อ $0 < a < 1$ ซึ่งจะเห็นได้ว่าไม่มีเส้นที่ขนานกับแกน Y ที่ตัดกราฟมากกว่าหนึ่งจุด เราสรุปว่า ฟังก์ชันเอกซ์โพเนนเชียล f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นจะมีฟังก์ชันผกผัน (inverse function) ของฟังก์ชัน f ซึ่งเขียนแทนด้วย $f^{-1}$ นั่นคือสำหรับ

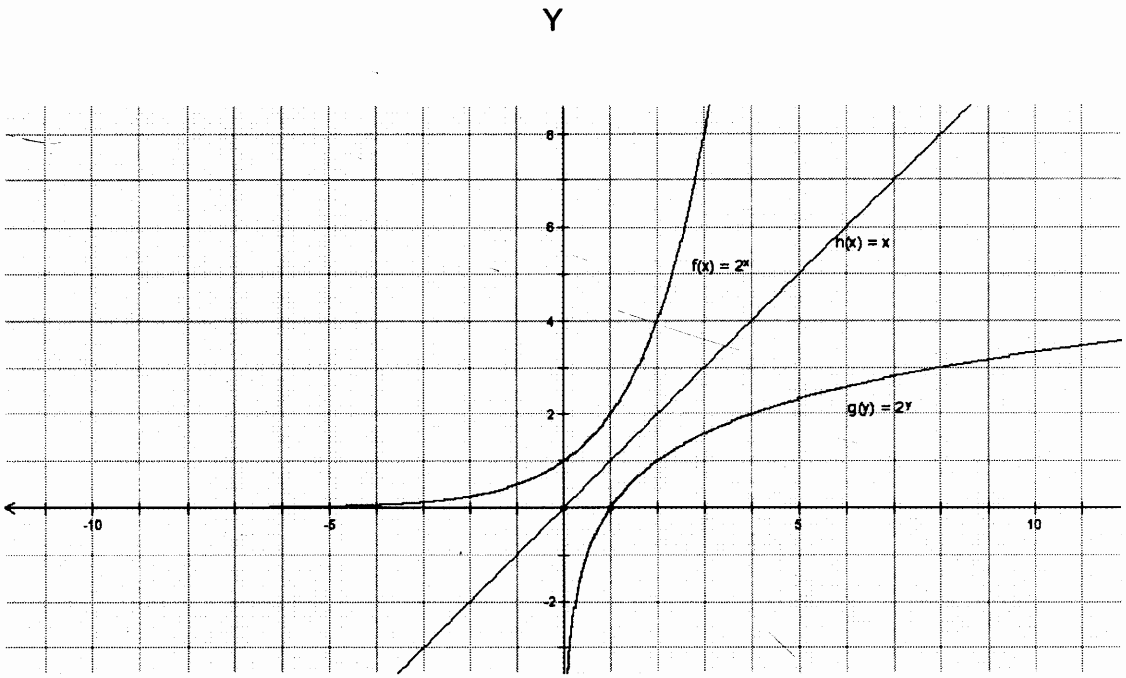
$f = \{ (x , y) \in R \times R^+ \mid y = a^x , a > 0$ และ $a \neq 1 \}$

จะมี $f^{-1}$ ซึ่ง

$f^{-1} = \{ (y, x) \in R^+ \times R \mid y = a^x, a > 0$ และ $a \neq 1 \}$ หรือ

$f^{-1} = \{ (x, y) \in R^+ \times R \mid x = a^y, a > 0$ และ $a \neq 1 \}$

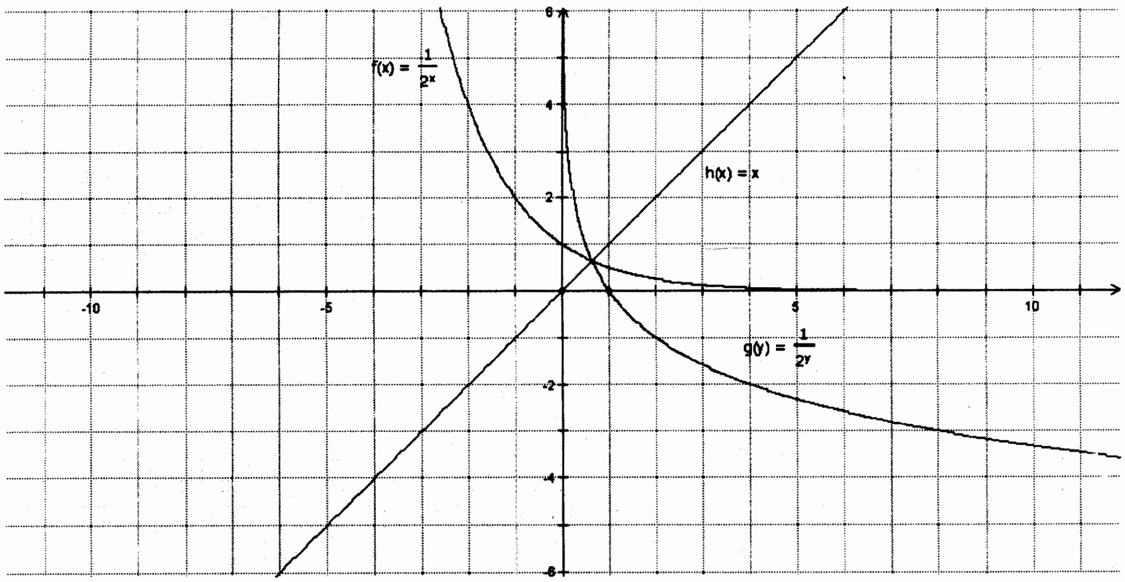
ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนกราฟของ $f = \{ (x, y) \in R \times R^+ \mid y = 2^x \}$ และกราฟของ $f^{-1} = \{ (x, y) \in R^+ \times R \mid x = 2^y \}$ บนแกนคู่เดียวกัน




สังเกตว่า f และ $f^{-1}$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

ฟังก์ชัน $f^{-1}$ ในที่นี้ เป็นฟังก์ชันลอการิทึมฐานสอง (logarithmic function base 2)

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนกราฟของ $f = \{ (x, y) \in R \times R^+ \mid y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \}$ และกราฟของ $f^{-1} = \{ (x, y) \in R^+ \times R \mid x = \left(\frac{1}{2}\right)^y \}$ บนแกนคู่เดียวกัน




สังเกตว่า f และ $f^{-1}$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันลด

ฟังก์ชัน $f^{-1}$ ในที่นี้ เป็นฟังก์ชันลอการิทึมฐาน $\frac{1}{2}$ (logarithmic function base $\frac{1}{2}$)

ในกรณีทั่วไป สำหรับ $x = a^y$ จะเขียนในรูป $y = \log_a x$

ลอการิทึมฐาน a

| |
|---|
| $y = \log_a x$ หมายถึง $x = a^y$ |

เมื่อไม่ได้ระบุฐาน เช่น log x จะหมายถึง $\log_{10} x$ และ ln x จะหมายถึง $\log_e x$ อ่านว่า ลอการิทึมฐาน e โดยที่ ln x เรียกลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm of x)

**ลอการิทึมธรรมชาติ (natural logarithm)**

รูปเอกซ์โพเนนเชียล (The exponential form) $x = a^y$ และรูปลอการิทึม (The logarithmic form) $y = \log_a x$ เป็นสองวิธีของการแสดงความสัมพันธ์เดียวกันระหว่าง x , y และ a นอกจากนั้นยังสามารถเปลี่ยนจากรูปหนึ่งไปเป็นอีกรูปหนึ่ง เหตุผลที่ต้องเขียนให้อยู่ในรูปลอการิทึมก็คือ ต้องการเขียนสมการให้อยู่ในรูปของ y เป็นฟังก์ชันของ x

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนในรูปเอกซ์โพเนนเชียล

(1) $\log_3 9 = 2$ (2) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$

(3) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ (4) $\ln 7.39 = 2$

วิธีทำ (1) $\log_3 9 = 2$ ดังนั้น $9 = 3^2$

(2) $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ ดังนั้น $\frac{1}{8} = 2^{-3}$

(3) $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$ ดังนั้น $4 = 16^{\frac{1}{2}}$

(4) $\ln 7.39 = 2$ ดังนั้น $7.39 = e^2$

ตัวอย่างที่ 4 จงเขียนในรูปลอการิทึม

(1) $49 = 7^2$ (2) $6 = \sqrt{36}$

(3) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ (4) $0.1353 = e^{-2}$

วิธีทำ (1) $49 = 7^2$ ดังนั้น $\log_7 49 = 2$

(2) $6 = \sqrt{36}$ หรือ $6 = 36^{\frac{1}{2}}$ ดังนั้น $\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{25} = 5^{-2}$ ดังนั้น $\log_5 \frac{1}{25} = -2$

(4) $0.1353 = e^{-2}$ ดังนั้น $\ln 0.1353 = -2$

**สมการลอการิทึม (logarithmic equations)**

สมการลอการิทึม มักใช้แก้ปัญหาโดยการเปลี่ยนให้เป็นรูปเอกซ์โพเนนเชียลที่สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 5 จงแก้หาค่า x

(1) $\log_3 x = -4$ (2) $\log_x 81 = 2$

(3) $\log_5 125 = x$ (4) $\ln x = \frac{1}{2}$

วิธีทำ (1) $\log_3 x = -4$

ดังนั้น $x = 3^{-4}$

$= \frac{1}{81}$

(2) $\log_x 81 = 2$

ดังนั้น $81 = x^2$

$9^2 = x^2$

$x = 2$

(3) $\log_5 125 = x$

ดังนั้น $125 = 5^x$

แต่ $125 = 5^3$

จะได้ว่า $5^x = 5^3$

$x = 3$

(4) $\ln x = \frac{1}{2}$

ดังนั้น $x = e^{\frac{1}{2}} = 1.65$

**เอกลักษณ์ลอการิทึม (logarithm identities)**

พิจารณาการหาค่าในแต่ละข้อต่อไปนี้

ตัวอย่างที่ 6 จงหาค่าของ

(1) $12^{\log_{12} 6}$ (2) $\log_{10} 10^{-4}$

(3) $\log_8 8$ (4) $\log_6 1$

วิธีทำ (1) $12^{\log_{12} 6}$

ให้ $12^{\log_{12} 6} = m$

ดังนั้น $\log_{12} 6 = \log_{12} m$

$m = 6$

นั่นคือ $12^{\log_{12} 6} = 6$

(2) $\log_{10} 10^{-4}$

ให้ $\log_{10} 10^{-4} = m$

ดังนั้น $10^{-4} = 10^{m}$

$m = -4$

นั่นคือ $\log_{10} 10^{-4} = -4$

(3) $\log_8 8$

ให้ $\log_8 8 = m$

ดังนั้น $8 = 8^{m}$

นั่นคือ $m = 1$

(4) $\log_6 1$

ให้ $\log_6 1 = m$

ดังนั้น $6^{m} = 1$

แต่ $6^{0} = 1$

จะได้ว่า $m = 0$

นั่นคือ $\log_6 1 = 0$

ถ้า $f(x) = a^{x}$ แล้ว $f^{-1}(x) = \log_a x$

พึงระลึกว่า $f[f^{-1}(x)] = x$ และ $f^{-1}[f(x)] = x$

แทน $f(x) = a^{x}$ และ $f^{-1}(x) = \log_a x$ จะได้ว่า

| | |
|---|---|
| $f[f^{-1}(x)] = x$ | $f^{-1}[f(x)] = x$ |
| $f(\log_a x) = x$ | $f^{-1}(a^{x}) = x$ |
| $a^{\log_x x} = x$ | $\log_a a^{x} = x$ |

สองเอกลักษณ์ต่อไปนี้มีประโยชน์ที่จะทำในนิพจน์อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a a^{x} = x$$

ตัวอย่างเช่น $9^{\log_9 7} = 7$

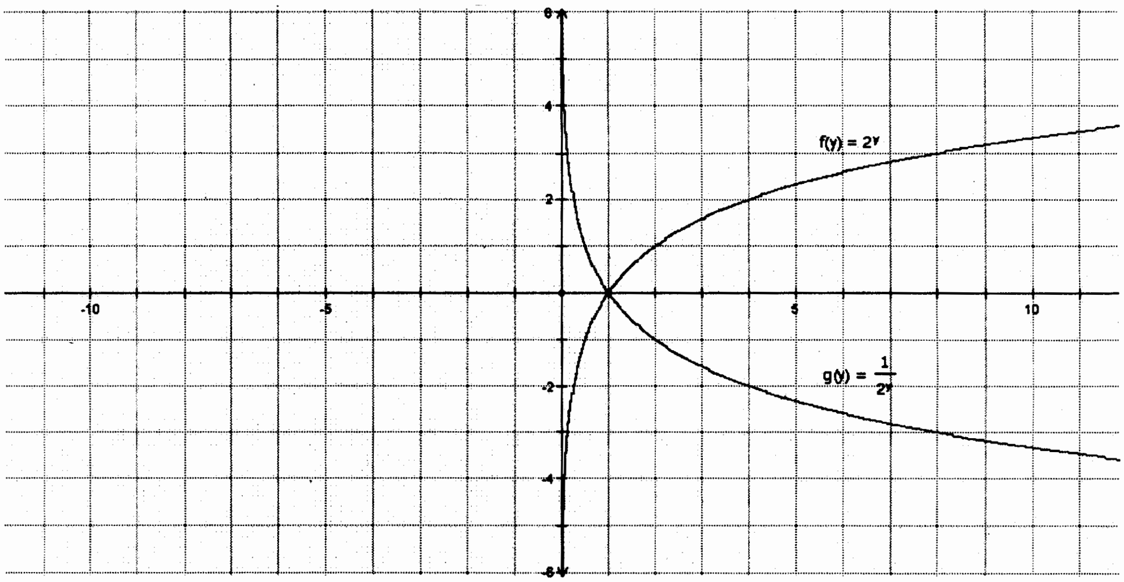
$\log_4 4^{-5} = -5$

$\log_{16} 16 = 1$

$\log_9 1 = 0$

**สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม (properties of logarithm functions)**

กราฟในรูปต่อไปนี้แสดงสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันลอการิทึม




**สมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม**

- จุด (1 , 0) อยู่บนกราฟของ ฟังก์ชัน $f(x) = \log_a x$ สำหรับทุกจำนวนจริง $a > 0$ ($a \neq 1$) หรือกล่าวได้อีกวิธีหนึ่งว่า $\log_a 1 = 0$

- โดเมนของ $f(x) = \log_a x$ เป็นเซตของจำนวนจริงบวกทุกจำนวน เรนจ์เป็นเซตของจำนวนจริงทุกจำนวน

- เมื่อ $a > 1$ , $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เมื่อ $0 < a < 1$ , $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันลด

เนื่องจาก $f(x) = \log_a x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มหรือฟังก์ชันลดอย่างใดอย่างหนึ่งเราจึงได้ว่า

| |
|---|
| กำหนด $u > 0$ , $v > 0$ , $a > 0$ และ $a \neq 1$<br>ถ้า $\log_a u = \log_a v$ แล้ว $u = v$ |

เนื่องจากกราฟของ $y = \log_a x$ และกราฟของ $y = \log_b x$ ตัดกันที่ $x = 1$ เราจึงมีกฎต่อไปนี้

ถ้า $\log_a x = \log_b x$ และ $x \neq 1$ แล้ว $a = b$

ตัวอย่างที่ 8 จงหาค่า x

(1) $\log_6(x + 1) = \log_6 36$

(2) $\log_{x-1} 34 = \log_7 34$

วิธีทำ (1) $\log_6(x + 1) = \log_6 36$

ดังนั้น $x + 1 = 36$

$x = 35$

(2) $\log_{x-1} 34 = \log_7 34$

ดังนั้น $x - 1 = 7$

$x = 8$

## แบบฝึกหัด 4.5

1. จงเขียนแต่ละสมการในรูปเลขยกกำลัง

1) $\log_3 81 = 4$

2) $\log_8 64 = 2$

3) $\log_8 64 = 2$

4) $\log \frac{1}{81} = -2$

5) $\log_{64} 4 = \frac{1}{3}$

6) $\ln 20.09 = 3$

7) $\ln \frac{1}{7.39} = -2$

8) $\ln 1 = 0$

9) $\log_{10} 0.001 = -3$

10) $\log_{125} \frac{1}{5} = -\frac{1}{3}$

2. จงเขียนแต่ละสมการในรูปลอการิทึม

1) $49 = 7^2$

2) $\frac{1}{16} = 2^{-4}$

3) $1,000,000 = 10^6$

4) $7 = \sqrt{49}$

5) $2 = \sqrt[3]{8}$

6) $\frac{1}{3} = 27^{-\frac{1}{3}}$

7) $\frac{1}{2} = 16^{-\frac{1}{4}}$

8) $81 = 27^{\frac{4}{3}}$

9) $1 = 2^0$

3. จงแก้หาค่า x

1) $\log_6 x = 2$

2) $\log_{16} x = \frac{1}{2}$

3) $\log_{36} x = -\frac{1}{2}$

4) $\log_{\frac{1}{2}} x = 5$

5) $\ln x = 2$

6) $\ln x = -3$

7) $\log_5 \frac{1}{25} = x$

8) $\log_5 (x + 1) = 3$

9) $\log_2 (x-2) = \log_2 10$

10) $\log_{x+1} 25 = \log_5 25$

4. จงหาค่าแต่ละนิพจน์ที่กำหนดให้

1) $4^{\log_4 7}$

2) $5^{\log_5 (2/3)}$

3) $e^{\ln 2}$

4) $\log_{64} 64^{-1/3}$

5) $\log_2 \frac{1}{4}$

6) $\ln e^{-2/3}$

5. จงเขียนกราฟของ

1) $f(x) = \log_4 x$

2) $f(x) = \log 2x$

3) $f(x) = \log_3 (x + 1)$

## 4.6 สมบัติพื้นฐานของลอการิทึม (fundamental properties of logarithms)

มีสมบัติพื้นฐานของลอการิทึมช่วยในการคิดคำนวณ ดังนี้

| |
|---|
| สมบัติ 1. $\log_a(A \times B) = \log_a A + \log_a B$ |
| สมบัติ 2. $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$ |
| สมบัติ 3. $\log_a A^{\gamma} = \gamma \log_a A$ |
| สมบัติ 4. $\log_a a = 1$ |
| สมบัติ 5. $\log_a 1 = 0$ |

สมบัติเหล่านี้สามารถพิสูจน์ได้ดังนี้

1. ให้ $\log_a A = \alpha$ , $\log_a B = \beta$

ดังนั้น $A = a^{\alpha}$ และ $B = a^{\beta}$

$$AB = a^{\alpha} a^{\beta}$$
$$= a^{\alpha+\beta}$$
$$\alpha + \beta = \log_a AB$$

นั่นคือ $\log_a A + \log_a B = \log_a AB$

หรือ $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$

2. ให้ $\log_a A = \alpha$ , $\log_a B = \beta$

ดังนั้น $A = a^{\alpha}$ และ $B = a^{\beta}$

$$\frac{A}{B} = \frac{a^{\alpha}}{a^{\beta}}$$
$$= a^{\alpha-\beta}$$
$$\alpha - \beta = \log_a\left(\frac{A}{B}\right)$$

นั่นคือ $\log_a A - \log_a B = \log_a\left(\frac{A}{B}\right)$

หรือ $\log_a\left(\frac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$

สมบัติ 3. , 4 และ 5. ให้ผู้เรียนพิสูจน์เอง

ตัวอย่างที่ 1 $\log_{10}(425\times316) = \log_{10}425 + \log_{10}316$

$$\log_4\left(\frac{346}{645}\right) = \log_4 346 - \log_4 645$$

$$\log_a\left(\frac{A\times B}{C}\right) = \log_a A + \log_a B - \log_a C$$

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด $\log_a 2 = 0.301$ และ $\log_a 3 = 0.477$ จงหาแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) $\log_a 12$ (2) $\log_a 81$ (3) $\log_a \frac{3}{2}$

(4) $\log_a \sqrt{a}$ (5) $\log_a 2a$

วิธีทำ (1) $\log_a 12 = \log_a(2\times2\times3)$

$= \log_a 2 + \log_a 2 + \log_a 3$

$= 0.301 + 0.301 + 0.477$

$= 1.079$

(2) $\log_a 81 = \log_a 3^4 = 4\log_a 3 = 4(0.477)$

(3) $\log_a \frac{3}{2} = \log_a 3 - \log_a 2$

$= 0.477 - 0.301$

$= 0.176$

(1) $\log_a \sqrt{a} = \frac{1}{2}\log_a a = \frac{1}{2}$

(2) $\log_a 2a = \log_a 2 + \log_a a$

$= 0.301 + 1$

$= 1.301$

**การทำลอการิทึมให้อยู่ในรูปอย่างง่าย (simplifying logarithms)**

ตัวอย่างต่อไปจะแสดงการใช้สมบัติของลอการิทึม

ตัวอย่างที่ 3 จงเขียน $\log_a \frac{(x-1)^{-2}(y+2)^3}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$ ในรูปลอการิทึมที่ง่ายกว่า

วิธีทำ $\log_a \frac{(x-1)^{-2}(y+2)^3}{\sqrt{x}\sqrt{y}}$

$= \log_a (x - 1)^{-2} + \log_a (y + 2)^3 - \log_a \sqrt{x} - \log_a \sqrt{y}$

$= -2 \log_a (x - 1) + 3 \log_a (y + 2) - \frac{1}{2} \log_a x - \frac{1}{2} \log_a y$

ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $\log_a 1.5 = p$ , $\log_a 2 = q$ และ $\log_a 5 = r$ แล้วจงหา

(1) $\log_a 15$ (2) $\log_a \sqrt{7.5}$

วิธีทำ (1) $\log_a 15 = \log_a (1.5\times2\times5)$

$= \log_a 1.5 + \log_a 2 + \log_a 5$

$= p + q + r$

(2) $\log_a \sqrt{7.5} = \frac{1}{2}\log_a (1.5 \times5)$

$= \frac{1}{2}\log_a 1.5 + \frac{1}{2}\log_a 5$

$= \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}r$

ตัวอย่างที่ 5 จงเขียนให้อยู่ในรูปลอการิทึมของนิพจน์เดียว

$3 \log_a x - \frac{1}{2}\log_a (x - 1)$

วิธีทำ $3 \log_a x - \frac{1}{2}\log_a (x - 1) = \log_a x^3 - \log_a (x - 1)^{\frac{1}{2}}$

$= \log_a \frac{x^3}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

$= \log_a \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}$

**การเปลี่ยนฐาน (change of base)**

บางครั้งเป็นเรื่องสะดวกที่จะสามารถเขียนลอการิทึมที่กำหนดพจน์ของฐาน a ในพจน์ของฐานอีกฐานหนึ่งเช่นฐาน b เราจะต้องกำหนดว่า a และ b เป็นจำนวนจริงบวกที่ไม่เท่ากับ 1 ยกตัวอย่าง ในการหา $\log_b x$ จาก $\log_a x$ ที่กำหนดให้ทำได้ดังนี้

ให้ $y = \log_b x$ ดังนั้นรูปเลขชี้กำลังที่สมมูลกันคือ $b^y = x$

ใส่ $\log_a$ ทั้งสองข้างของสมการจะได้

$\log_a b^y = \log_a x$

ประยุกต์สมบัติพื้นฐานของลอการิทึม ข้อ 3 จะได้

$y \log_a b = \log_a x$

$y = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$

| |
|---|
| เนื่องจาก $y = \log_b x$ เราจะได้<br>$\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ |

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด log 27 = 1.4314 จงหา ln 27

วิธีทำ ln 27 $= \log_e 27$

$= \dfrac{\log 27}{\log e}$

$= \dfrac{1.4314}{0.4343}$

$\approx 3.2959$

## แบบฝึกหัด 4.6

1. จงเขียนแต่ละนิพจน์ในพจน์ของผลบวกของลอการิทึม

   1) $\log_a \sqrt[3]{x^2 y^3 z^4}$ 2) $\ln \dfrac{x^4 y^2}{z^{3/2}}$

2. กำหนด log 2 = 0.30 , log 3 = 0.47 และ log 5 = 0.70 จงหาค่าของลอการิทึมของจำนวนจริงในแต่ละข้อ

   1) log 12 2) $\log \dfrac{3}{2}$ 3) $\log \dfrac{5}{6}$

   4) $\log \sqrt{7.5}$ 5) $\log \sqrt[4]{30}$

3. จงเขียนในรูปลอการิทึมของนิพจน์นิพจน์เดียว

1) $\frac{2}{3}\log_a x + 3\log_a y - \frac{3}{4}\log_a z$

2) $\frac{1}{4}(2 \ln x + 3 \ln y) - 4 \ln z$

3) $4 \log_a (x + 2) - \frac{1}{4}(\log_a y + \log_a z)$

4) $2\log_a x - 3\log_a (x + 1) - \frac{1}{2}\log_a \sqrt[3]{x-1}$

4. กำหนด ln 6 = 1.7918 และ ln 3 = 1.0986

1) กำหนด ln 22 = 3.0910 จงหา $\log_6 22$

2) กำหนด ln 78 = 4.3567 จงหา $\log_6 67$

3) กำหนด ln 7 = 1.9459 จงหา $\log_3 7$

## 4.7 การคิดคำนวณเกี่ยวกับลอการิทึม (computing with logarithms)

ในตอนนี้จะได้ใช้ลอการิทึมในการคิดคำนวณต่างๆ

เราจะใช้ 10 เป็นฐานสำหรับการคิดคำนวณเกี่ยวกับลอการิทึม เพราะว่า 10 เป็นฐานของระบบจำนวนของเรา เราเรียกลอกการิทึมที่มีฐานเป็นสิบว่า ลอการิทึมสามัญ(common logarithms) เราจะเริ่มจากการสังเกตว่า จำนวนจริงบวกใด ๆ สามารถเขียนเป็นผลคูณของ a กับเลขยกกำลังที่มีฐานเป็น 10 เมื่อ $1 < a \leq 10$ ซึ่งการเขียนในรูปดังกล่าวนี้เรียกว่า สัญกรณ์วิทยาศาสตร์ (scientific notation) ตัวอย่างของสัญกรณ์วิทยาศาสตร์

$675 = 6.75\times 10^2$

$463217 = 4.63217\times 10^5$

$0.000298 = 2.98\times 10^{-4}$

เราจะเริ่มต้นด้วยจำนวน 675 แสดงในรูป สัญกรณ์วิทยาศาสตร์

$675 = 6.75\times 10^2$

ขั้นต่อไปใส่ลอการิทึมฐานสิบ ในแต่ละข้างของสมการ และประยุกต์ใช้สมบัติของลอการิทึม

$$\begin{aligned}\text{Log } 675 &= \log (6.75 \times 10^2) \\ &= \log 6.75 + \log 10^2\end{aligned}$$

$= \log 6.75 + 2 \log 10$

$= [\log 6.75] + 2$

เขียนในรูปทั่วไปได้ดังนี้

> ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก และ $x = a \times 10^n$ แล้ว
>
> $\log x = n + \log a$

จำนวน log a เรียกว่า แมนทิสสา (mantissa) และจำนวนเต็ม n เรียก แคแรกเตอ-ริสติก (characteristic) ของ log x เนื่องจาก $x = a \times 10^n$ เมื่อ $1 < a \leq 10$ และเนื่องจากฟังก์ชัน $f(x) = \log x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม เราจะเห็นว่า $\log 1 < \log a \leq \log 10$ หรือ $0 < \log a \leq 1$

เราสรุปว่า แมนทิสสา จะเป็นจำนวนที่มากกว่าศูนย์ แต่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ตารางท้ายเล่มสามารถใช้ประมาณลอกการิทึมสามัญโดยเป็นจำนวนทศนิยมสามตำแหน่งในช่วงตั้งแต่ 1.00 และ 9.99 ในช่วงของ 0.01

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของแต่ละข้อต่อไปนี้

(1) log 73.5 (2) log 0.00451

วิธีทำ (1) $\log 73.5 = \log (7.35 \times 10^1)$

$= 1 + \log 7.35$

$= 1 + 0.8663$

$= 1.8663$

ดังนั้น แคแลกเตอริสติกของ log 73.5 คือ 1 และแมนทิสสาของ log 73.5 คือ 0.8663

(2) $\log 0.00451 = \log (4.51 \times 10^{-3})$

$= -3 + \log 4.51$

$= -3 + 0.6542$

$= -2.3458$

ดังนั้น แคแลกเตอริสติกของ log 0.00451 คือ -3 และแมนทิสสาของ log 0.00451 คือ 0.8663

ตัวอย่างที่ 2 จงหา x ถ้า

(1) $\log x = 2.8351$ (2) $\log x = -6.6478$

วิธีทำ (1)

$$\begin{aligned} \log x &= 2.8351 \\ &= 2 + 0.8351 \\ &= \log 10^2 + \log 6.84 \\ &= \log 684 \\ x &= 684 \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} \log x &= -6.6478 \\ &= -6 - 0.6478 \\ &= -7 + 0.3522 \\ &= \log 10^{-7} + \log 2.25 \\ &= 0.000000225 \end{aligned}$$

ตัวอย่างต่อไปนี้จะแสดงการใช้ลอการิทึม ช่วยในการคิดคำนวณได้

ตัวอย่างที่ 3 จงประมาณ $47.8 \times 0.345$ โดยใช้ลอการิทึม

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} N &= 47.8 \times 0.345 \\ &= 4.78 \times 10 \times 3.45 \times 10^{-1} \\ &= 4.78 \times 3.45 \\ \log N &= \log 4.78 + \log 3.45 \\ &= 0.6794 + 0.5378 \\ &= 1.2172 \\ &= 1 + 0.2172 \\ &\approx \log 10 + \log 1.65 = \log 10 \times 1.65 \\ N &\approx 16.5 \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4 จงประมาณ $\frac{\sqrt{47.4}}{2.3^3}$ โดยใช้ลอการิทึม

วิธีทำ ให้ $N = \frac{\sqrt{47.4}}{2.3^3}$

$$
\begin{aligned}
\text{ดังนั้น } \log N &= \frac{1}{2}\log 47.4 - 3 \log 2.3 \\
&= \frac{1}{2}[(\log 4.74) + 1] - 3(0.3617) \\
&= \frac{1}{2}(1.6758) - 3(0.3617) \\
&= 0.8379 - 1.0851 \\
&= -0.2472 \\
&= -1 + 0.7528 \\
&= \log 5.66 \times 10^{-1} \\
N &= 0.566
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างที่ 5 ถ้าฝากเงิน 100,000 บาท ได้ดอกเบี้ยในอัตรา 8% ต่อปี ทบต้นทุก ๆ หนึ่งในสี่ของปี จงหาเงินรวมเมื่อฝากครบกำหนด 6 ปี

วิธีทำ เรามี P = 100,000 , r = 0.08 , k = 4 และ n = 24 (24 งวดใน 6 ปี)

$$
\begin{aligned}
\text{เนื่องจาก } S &= P(1 + i)^n \\
&= 100{,}000\left(1+\frac{0.08}{4}\right)^{24} \\
&= 100{,}000(1.02)^{24} \\
\log S &= \log 100{,}000 + 24 \log 1.02 \\
&= 5 + 24(0.0086) \\
&= 5 + 0.2064 \\
&= \log 10^5 \times 1.61 \\
S &= 161{,}000
\end{aligned}
$$

ดังนั้นจะได้รับเงินรวม 161,000 บาท เมื่อครบกำหนด 6 ปี

## แบบฝึกหัด 4.7

1. หาค่าลอการิทึมต่อไปนี้ โดยใช้ตารางลอการิทึมท้ายเล่ม

   1) ln 3.2  2) log 74  3) log 4250

   4) log 48,000  5) log 6,840,000  6) log 0.345

   7) log 0.00654

2. จงประมาณค่า x โดยใช้ตารางท้ายเล่ม

   1) log x = 0.4014  2) ln x = -0.5108  3) ln x = 1.0647

   4) ln x = 2.7332  5) log x = -0.5901  6) log x = -1.2976

   7) log x = -1.6599  8) log x = -3.9004

3. จงประมาณคำตอบโดยใช้ลอการิทึม

   1) $\frac{(7.24)^{2/3}}{\sqrt[3]{(86.2)(16.4)^4}}$  2) $\frac{(32.874)(0.00125)}{(12.4)(128,000)}$

4. ใช้ลอการิทึมประมาณจำนวนเงินรวม ถ้าฝากเงิน 60,000 บาท ดอกเบี้ยร้อยละ 7 ทบต้นทุก ๆ หนึ่งในสี่ของปี เป็นเวลา 8 ปี

5. ใช้ลอการิทึมประมาณจำนวนเงินรวม ถ้าฝากเงิน 800,000 บาท เป็นเวลา 6 ปี ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 8 ทบต้นทุก ๆ เดือน

6. ใช้ลอการิทึมประมาณจำนวนเงินรวม ถ้าฝากเงิน 100,000 บาท เป็นเวลา 5 ปี ได้ดอกเบี้ยร้อยละ 7.8 ทบต้นทุก ๆ ครึ่งปี

7. จะเลือกฝากเงินแบบใดถ้าแบบแรกให้อัตราดอกเบี้ย 8.75% ทบต้นทุก ๆ หนึ่งในสี่ของปี แบบที่สองให้อัตราดอกเบี้ย 9% ทบต้นทุก ๆ รอบปี

8. พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว a , b และ c หน่วย หาได้จากสูตร

   A = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ เมื่อ s = $\frac{1}{2}(a+b+c)$

   จงใช้ลอการิทึมหาพื้นที่โดยประมาณของรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีด้านยาว 6.43 ฟุต 6.86 ฟุต และ 10.13 ฟุต

## 4.8 สมการเอกซ์โพเนนเชียล และสมการลอการิทึม (exponential and logarithmic equations)

มีปัญหาเกี่ยวกับสมการเอกซ์โพเนนเชียลบางปัญหาที่สามารถแก้ได้โดยใช้ลอการิทึม โดยที่

- ในการแก้สมการเอกซ์โพเนนเชียลเราจะใส่ลอการิทึมฐานสิบทั้งสองข้างของสมการ
- ในการแก้สมการลอการิทึม สร้างรูปลอการิทึมของนิพจน์หนึ่งบนข้างหนึ่งของสมการ และเปลี่ยนสมการ เป็นรูปเอกซ์โพเนนเชียลที่สมมูลกัน

ตัวอย่างที่ 1 จงแก้สมการ $3^{2x-1} = 17$

วิธีทำ

$$3^{2x-1} = 17$$

$$\log 3^{2x-1} = \log 17$$

$$(2x - 1) \log 3 = \log 17$$

$$2x - 1 = \frac{\log 17}{\log 3}$$

$$x = \frac{1}{2} + \frac{\log 17}{\log 3}$$

เราสามารถหาค่าประมาณของ x โดยเปิดตารางท้ายเล่มได้ดังนี้

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1.2304}{0.4771}$$

$$\approx 3.0789$$

ตัวอย่างที่ 2 จงแก้สมการ $\log x = 3 + \log 2$

วิธีทำ

$$\log x = 3 + \log 2$$

$$\log x = \log 10^3 \times 2$$

$$x = 2{,}000$$

หรืออาจทำดังนี้

$$\log x = 3 + \log 2$$

$$\log x - \log 2 = 3$$

$$\log \frac{x}{2} = 3$$

$\frac{x}{2} = 10^3$

x = 2,000

ตัวอย่างที่ 3 จงแก้สมการ $\log_3 x = 4 - \log_3(x + 2)$

วิธีทำ $\log_3 x = 4 - \log_3(x + 2)$

$\log_3 x + \log_3(x + 2) = 4$

$\log_3 x(x + 2) = 4$

$x(x - 2) = 3^4$

$x^2 - 2x - 81 = 0$

หาค่า x ได้จากสูตร

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(-81)}}{2(1)}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{328}}{2}$$

$x = 1 + \sqrt{82}$ หรือ $1 - \sqrt{82}$ แต่ x ต้องมากกว่า 0

ดังนั้น $x = 1 + \sqrt{82}$

ตัวอย่างที่ 4 ประชากรโลกเพิ่มขึ้นในอัตรา 2.5% ต่อปี ถ้าการเพิ่มประชากร เป็นแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล จงหาว่ากี่ปีจะมีประชากรเป็นสองเท่า

วิธีทำ แบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียลคือ

$Q(t) = q_0 e^{0.025t}$

เมื่อ t = 0 จะได้

$Q(0) = q_0(1) = q_0$

เราจะหาเวลา t ที่ $Q(t) = 2q_0$

นั่นคือ $Q(t) = 2q_0 = q_0 e^{0.025t}$

จะได้ $2 = e^{0.025t}$

$\ln 2 = 0.025t$

$$t = \frac{\ln 2}{0.025}$$

$$\approx \frac{0.6931}{0.025}$$

$$\approx 27.7$$

หรือประมาณ 28 ปี

ตัวอย่างที่ 5 สถาบันการเงินแห่งหนึ่งรับฝากเงิน 800,000 บาท ให้อัตราดอกเบี้ย 8% ทบต้นแบบต่อเนื่อง จงหาว่านานเท่าไรที่ผู้ฝากจะมีเงินรวมเป็น 1,200,000 บาท

วิธีทำ สูตร $S = Pe^{rt}$

เรามี S = 1,200,000 , P = 800,000 และ r = 0.08 เราต้องแก้หาค่า t ดังนั้น

$$1{,}200{,}000 = 800{,}000e^{0.08t}$$

$$e^{0.08t} = \frac{1{,}200{,}000}{800{,}000} = 1.5$$

$$0.08t = \ln 1.5$$

$$t = \frac{\ln 1.5}{0.08}$$

$$= \frac{0.4055}{0.08}$$

$$= 5.07$$

ดังนั้นใช้เวลาประมาณ 5.07 ปี สำหรับเงินต้น 800,000 บาท จะเพิ่มขึ้นเป็น 1,200,000 บาท

## แบบฝึกหัด 4.8

1. จงแก้หาค่า x

1) $4^{2x-1} = 3^{2x+3}$

2) $3^{-3x+2} = 2^{-x}$

3) $e^{x-1} = 2.3$

4) $e^{2x+3} = 20$

5) $\log x + \log 2 = 3$

6) $\log x - 2 = \log 3$

7) $\log_x (3-5x) - 1 = 0$

8) $\log x + \log (x + 21) = 2$

9) $\log(7x - 2) - \log(x - 2) - 1 = 0$ 10) $\log_2(x + 4) + \log_2(x - 2) = 3$

11) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ 12) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. สมมุติว่าประชากรของประเทศหนึ่งเพิ่มขึ้นปีละ 3% ถ้าเราทึกทักว่าการเพิ่มของประชากรเป็นแบบจำลองการเจริญเติบโตเอกซ์โพเนนเชียล จงหาว่าเป็นเวลากี่ปีที่ประชากรจะมีเป็นสามเท่าของเดิม
3. ประชากรของประเทศหนึ่งในช่วงเวลา t ปีกำหนดโดย $P = 20{,}000\ e^{0.05t}$ จงหาว่ากี่ปีต่อจากนี้ที่จะมีประชากรเป็น 50,000
4. โปตัสเซียม 42 มีอัตราการสลายตัวประมาณ 5.5% ต่อชั่วโมง สมมุติว่าการสลายตัวมีแบบจำลองเอกซ์โพเนนเชียล จงหาจำนวนชั่วโมงที่จะทำให้ปริมาณ โปตัสเซียม 42 เหลืออยู่ครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม
5. พิจารณาแบบจำลองการสลายตัวเลขชี้กำลัง กำหนดโดย $Q = q_0 e^{-0.4t}$ เมื่อ t เป็นสัปดาห์ มีกี่สัปดาห์ที่ Q สลายตัวเหลือ $\frac{1}{4}$ ของปริมาณเดิม
6. นานเท่าไรที่เงินรวมจะเพิ่มเป็นสองเท่า ถ้าอัตราดอกเบี้ยเป็น 8% ต่อปี ทบต้นทุก ๆ ครึ่งปี
7. จงหาอัตราดอกเบี้ยที่ทำให้เงินรวมเป็นสองเท่าของเงินต้นในเวลา 8 ปี ถ้าทบต้นทุก ๆ ครึ่งปี
8. ปริมาณ Q เป็นกรัม ของสารกัมมันตภาพรังสีหลังจากเวลา t วันของการสลายตัวกำหนดโดย $Q = 400e^{-kt}$ ถ้า Q = 300 เมื่อ t = 3 จงหา k (อัตราการสลายตัว)