บทที่ 2
ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

มีวิธีการอ้างเหตุผล ซึ่งการสรุปผลจะอาศัยกฎเกณฑ์ของตรรกศาสตร์ ซึ่งในบทนี้จะได้ศึกษากฎเกณฑ์ต่าง ๆ ของตรรกศาสตร์

จงพิจารณาการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

1. ถ้าสมศักดิ์ขยันเรียน แล้วสมศักดิ์จะประสบความสำเร็จในการเรียน
2. สมศักดิ์ขยันเรียน
3. เพราะฉะนั้น สมศักดิ์ประสบความสำเร็จในการเรียน

ถ้าเรายอมรับข้อความ 1. และ 2. เป็นจริง เราต้องยอมรับว่าข้อความ 3. เป็นจริง

ข้อความ 1. และ 2. เรียกว่า สมมุติฐานหรือข้อตั้ง (hypotheses or premises) ของการอ้างเหตุผล และข้อความ 3. เรียกว่าข้อสรุปหรือข้อยุติ (conclusion) การอ้างเหตุผลเช่นนี้เรียกว่า การอ้างเหตุผลแบบนิรนัย (deductive reasoning) ถ้าข้อสรุปได้จากสมมุติฐานซึ่งเป็นไปตามกฎเกณฑ์ทางตรรกศาสตร์ เรากล่าวว่าการอ้างเหตุผล สมเหตุสมผล (valid) ตรรกศาสตร์เป็นวิธีการอ้างเหตุผลที่ยอมรับเพียงข้อสรุปตามกฎเกณฑ์ที่กำหนด ในตรรกศาสตร์สัญลักษณ์ เราจะใช้คำว่า ประพจน์เพื่ออ้างอิงถึงประโยคบอกเล่า หรือประโยคปฏิเสธ

2.1 ประพจน์ (proposition หรือ statement)

ประพจน์ คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธ ซึ่งเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น ประพจน์อย่างง่ายคือประพจน์เพียงประพจน์เดียวที่ไม่มีตัวเชื่อมใด ๆ

ทุกข้อความต่อไปนี้เป็นประพจน์

1. กรุงเทพมหานครเป็นเมืองหลวงของประเทศไทย
2. ปักกิ่งเป็นเมืองหลวงของประเทศลาว
3. $-3 + 4 = 1$
4. $6 + (-8) = 2$

ประพจน์ 1. และ 3. เป็นจริง แต่ประพจน์ 2. และ 4. เป็นเท็จ

บางประโยคไม่เป็นประพจน์ดังตัวอย่างต่อไปนี้

1. มังคุดกิโลกรัมละเท่าไร
2. ให้นักเรียนอ่านข้อความบนกระดาน
3. $x + 3 = 5$
4. $x + y = 10$

ประโยคคำถาม หรือประโยคคำสั่งไม่จัดเป็นประพจน์ นั่นคือ ประโยค 1. และประโยค 2. ไม่ใช่ประพจน์เพราะไม่สามารถจำแนกได้ว่าประโยคนั้นเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ประโยคที่มีตัวแปรอยู่มักไม่จัดเป็นประพจน์ เนื่องจากยังไม่เป็นจริงหรือเป็นเท็จ โดยที่ตัวแปรในประโยคยังไม่ถูกกำหนดค่า วิธีที่จะสร้างประพจน์จากประโยคสัญลักษณ์เช่นข้อ 3. และ 4. จะได้กล่าวในตอนหลัง

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าประโยคในข้อใดเป็นประพจน์

1) สมศรีจะซื้อรถยี่ห้ออะไร
2) คืนนี้สมศรีต้องไปงานวันเกิดรองประธานด้วยนะ
3) ใจกลางของโลกยังร้อนอยู่
4) สุนทรภู่เป็นกวีเอกของไทยในช่วงอยุธยาตอนปลาย
5) $2y + 3 = 9$

ตอบ 1) ประโยค "สมศรีจะซื้อรถยี่ห้ออะไร" เป็นประโยคคำถามจึงไม่เป็นประพจน์

2) ประโยค "คืนนี้สมศรีต้องไปงานวันเกิดรองประธานด้วยนะ" เป็นประโยคคำสั่งจึงไม่เป็นประพจน์

3) ประโยค "ใจกลางของโลกยังร้อนอยู่" เป็นประโยคบอกเล่า เป็นประพจน์ และมีค่าความจริงเป็นจริง

4) ประโยค "สุนทรภู่เป็นกวีเอกของไทยในช่วงอยุธยาตอนปลาย" เป็นประโยคบอกเล่าเป็นประพจน์และมีค่าความจริงเป็นเท็จ

5) ประโยค "$2y + 3 = 9$" เป็นประโยคที่มีตัวแปร ยังบอกไม่ได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จจึงยังไม่จัดเป็นประพจน์

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงตอบว่าแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นประพจน์ หรือไม่เป็นประพจน์
   1. ห้ามเดินไปด้านหลังอาคาร
   2. สมศักดิ์ จะกินขนมไหม
   3. วันที่ 31 ธันวาคม พ.ศ. 2548 เป็นวันหยุด
   4. นั่งลง และเงียบ ๆ
   5. กรุงเทพมหานครจะสร้างรถไฟใต้ดินในปี พ.ศ. 2551 ที่ฝั่งธนบุรี
   6. $5 - 8 = -3$
   7. $4 + 9 \neq 5 + 8$
   8. $x + 5 = 12$

2. จงเขียนประโยคที่เป็นประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง และประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จมาอย่างละ 5 ประโยค

2.2 การเชื่อมประพจน์

ในทางตรรกศาสตร์ เราจะแทนประพจน์ด้วยอักษรในภาษาอังกฤษ เช่น p , q , r , s , ... และนิยามตัวเชื่อม (connective) ได้แก่ "และ" "หรือ" "ถ้า ... แล้ว" และ "ก็ต่อเมื่อ" รวมทั้งการนิยาม "นิเสธ" ของประพจน์ เราอาจเรียกประพจน์อย่างง่ายตั้งแต่สองประพจน์ขึ้นไปที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อมตัวใดตัวหนึ่ง หรือหลายตัว ว่าประพจน์ประกอบ (compound statement) ประพจน์จะถูกแปลงให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์ และทำให้อยู่ในรูปอย่างง่าย แล้วจึงแปลงกลับ เป็นข้อความภาษา

จากบทนิยามพื้นฐานของประพจน์ จะเห็นได้ว่า ค่าความจริง (truth value) ของประพจน์ใด ๆ จะเป็น จริง (true) ใช้ตัวย่อ T หรือเท็จ (false) ใช้ตัวย่อ Fอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น และค่าความจริงของประพจน์ประกอบอาจเป็นจริงหรือเท็จ ขึ้นอยู่กับค่าความจริงของประพจน์อย่างง่ายในแต่ละกรณี ซึ่งจะต้องตรวจสอบโดยใช้กฎของการเชื่อมประพจน์ด้วยบทนิยามของตัวดำเนินการ (operator)

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "และ" (and)

ประพจน์สองประพจน์สามารถเชื่อมกันโดยใช้คำว่า "และ" สร้างประพจน์ประกอบ ซึ่งเรียกว่า การเชื่อม (conjunction) ของ p และ q ใช้สัญลักษณ์ $p \wedge q$ (อ่านว่า p และ q)

ตัวอย่างที่ 1 ให้ p แทน ประพจน์ "ฝนกำลังตก"

q แทน ประพจน์ "พายุกำลังมา"

ดังนั้น $p \wedge q$ แทน "ฝนกำลังตกและพายุกำลังมา"

ค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $p \wedge q$ จะเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

T_1 : ถ้า p เป็นจริง และ q เป็นจริง แล้ว $p \wedge q$ เป็นจริง นอกจากนั้นแล้ว $p \wedge q$ จะเป็นเท็จ

กล่าวได้ว่า การเชื่อมของสองประพจน์เป็นจริงเฉพาะกรณีที่แต่ละประพจน์เป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2 พิจารณา ประพจน์สี่ประพจน์ต่อไปนี้

(1) 2 + 5 = 6 และ 2 + 2 = 4

(2) 2 + 5 = 7 และ 2 + 2 = 5

(3) 2 + 5 = 7 และ 2 + 2 = 4

(4) 2 + 5 = 6 และ 2 + 2 = 3

โดย T_1 มีเพียง ข้อ (3) ที่เป็นจริง ส่วนข้ออื่น ๆ เป็นเท็จเนื่องจากเป็นจริงเพียงประพจน์เดียวหรือไม่มีประพจน์ใดเป็นจริง

เราสามารถใช้ตารางแสดง T_2 ได้ ซึ่ง ในการสร้างตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์ ที่ประกอบด้วยประพจน์สองประพจน์จะมีกรณีต่าง ๆ $2^2 = 4$ กรณี ดังตาราง 2.2.1

ตาราง 2.2.1 ตารางแสดง ค่าความจริงของ $p \wedge q$ กรณีต่าง ๆ

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ข้อควรจำ $p \wedge q$ เป็นจริงเมื่อ ทั้ง p และ q เป็นจริง กรณีอื่น ๆ $p \wedge q$ เป็นเท็จ

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "หรือ" (or)

ประพจน์สองประพจน์สามารถเชื่อมกันโดยใช้คำว่า "หรือ" สร้างประพจน์ประกอบ ซึ่งเรียกว่า การเลือก (disjunction) ของ p และ q ใช้สัญลักษณ์ $p \vee q$

ตัวอย่างที่ 3 ให้ p แทน ประพจน์ "ฝนกำลังตก"

q แทน ประพจน์ "พายุกำลังมา"

ดังนั้น $p \vee q$ แทน "ฝนกำลังตกหรือพายุกำลังมา"

ค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $p \vee q$ จะเป็นไปตามสมบัติต่อไปนี้

T_2 : ถ้า p เป็นจริง หรือ q เป็นจริง หรือทั้งสองประพจน์ เป็นจริง แล้ว $p \vee q$ เป็นจริง นอกจากนั้นแล้ว $p \vee q$ เป็นเท็จ หรือกล่าวได้ว่า การเลือกของ สองประพจน์เป็นเท็จเฉพาะกรณีที่แต่ละประพจน์เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 4 พิจารณา ประพจน์ห้าประพจน์ต่อไปนี้

(1) $2 + 5 = 6$ หรือ $2 + 2 = 4$

(2) $2 + 5 = 7$ หรือ $2 + 2 = 5$

(3) $2 + 5 = 7$ หรือ $2 + 2 = 4$

(4) $2 + 5 = 6$ หรือ $2 + 2 = 4$

(5) $2 + 5 = 6$ หรือ $2 + 2 = 5$

โดย T_2 ข้อ (1) ถึงข้อ (4) เป็นจริง เนื่องจากมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่เป็นจริง มีเพียง ข้อ (5) ที่เป็นเท็จ เพราะเป็นเท็จทั้งสองประพจน์

ตารางแสดงค่าความจริงของ $p \vee q$ โดยกำหนดให้ $p \vee q$ เป็นเท็จเมื่อทั้ง p และ q เป็นเท็จ นอกนั้น $p \vee q$ เป็นจริง แสดงได้ดังตาราง 2.2.2

ตาราง 2.2.2 ตารางแสดง p , q และ $p \vee q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ข้อควรทราบ $p \vee q$ เป็นจริงเมื่อ p หรือ q ตัวใดตัวหนึ่งหรือทั้งสองตัว เป็นจริง $p \vee q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ ทั้ง p และ q เป็นเท็จ

นิเสธ (negation) ของประพจน์

จากประพจน์ที่กำหนดให้ เราสามารถสร้างประพจน์ใหม่โดยการใช้นิเสธ

นิเสธของประพจน์คือประพจน์ที่มีค่าความจริงตรงข้ามกับประพจน์ที่กำหนดให้

นั่นคือ ถ้าประพจน์เป็นจริง นิเสธของประพจน์นั้นจะเป็นเท็จ และถ้าประพจน์เป็นเท็จ นิเสธของประพจน์นั้นจะเป็นจริง

พิจารณาประพจน์

"ฝนตก" นิเสธของประพจน์คือ "ไม่เป็นความจริงที่ฝนตก" ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ "ฝนไม่ตก"

สัญลักษณ์ที่กำหนดขึ้นเพื่อช่วยในการศึกษาตรรกศาสตร์

ถ้า p แทนประพจน์ นิเสธของประพจน์ p กำหนดโดย ~p

T_3 : ถ้า p เป็นจริง แล้ว ~p เป็นเท็จ และถ้า p เป็นเท็จแล้ว ~p เป็นจริง หรือกล่าวได้ว่าค่าความจริงของนิเสธของประพจน์จะตรงข้ามกับค่าความจริงของประพจน์ดั้งเดิม

เราอาจใช้ตารางแสดงทุกค่าความจริง (จริง - เท็จ) ที่เป็นไปได้ ของประพจน์

ตาราง 2.2.3 แสดงค่าความจริงของ p และ ~p

p	~p
T	F
F	P

ตัวอย่างที่ 5 จงหานิเสธของประพจน์

1) 2 + 4 = 7

2) วันนี้เป็นวันพุธ

3) $\overline{AB}$ ขนานกับ $\overline{CD}$

ตอบ 1) $2 + 4 \neq 7$

2) วันนี้ไม่ใช่วันพุธ

3) $\overline{AB}$ ไม่ขนานกับ $\overline{CD}$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนดประพจน์ดังนี้

p : 3 + 5 = 7

q : 3 × 5 = 15

$r : 5 \div 15 = 3$

$s : 4 - 9 = -5$

จงพิจารณาว่าประพจน์ประกอบในแต่ละข้อ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) $p \vee q$	2) $p \vee r$	3) $p \wedge q$
4) $p \wedge s$	5) $\sim p \wedge q$	6) $\sim p \vee r$

ตอบ 1) p เป็นเท็จ q เป็นจริง ดังนั้น $p \vee q$ เป็นจริง

2) p เป็นเท็จ r เป็นเท็จ ดังนั้น $p \vee r$ เป็นเท็จ

3) p เป็นเท็จ q เป็นจริง ดังนั้น $p \wedge q$ เป็นเท็จ

4) p เป็นเท็จ s เป็นจริง ดังนั้น $p \wedge s$ เป็นเท็จ

5) $\sim p$ เป็นจริง q เป็นจริง ดังนั้น $\sim p \wedge q$ เป็นจริง

6) $\sim p$ เป็นจริง r เป็นเท็จ ดังนั้น $\sim p \vee r$ เป็นจริง

ข้อควรจำ p เป็นจริงเมื่อ $\sim p$ เป็นเท็จ และ $\sim p$ เป็นจริง เมื่อ p เป็นเท็จ

ในการหานิเสธของประพจน์ที่มีคำว่า ทั้งหมด (all) ไม่มี (none) หรือมีบ้าง (some) ยกตัวอย่าง นิเสธของประพจน์ "นักเรียนทุกคนมีไม้บรรทัด" คือ "ไม่เป็นความจริงที่นักเรียนทุกคนมีไม้บรรทัด" ซึ่งมีความหมายเช่นเดียวกับ "มีนักเรียนบางคนไม่มีไม้บรรทัด" ในทางคณิตศาสตร์ คำว่ามีบ้าง (some) หมายถึงมีอย่างน้อยหนึ่ง (at least one)

คำที่เป็นนิเสธในประพจน์ที่มีคำว่า ทั้งหมด มีบ้าง มีอยู่บ้างที่ไม่ และไม่มี ดังนี้

คำในประพจน์	นิเสธของคำในประพจน์
ทั้งหมด	มีอยู่บ้างที่ไม่
มีบ้าง	ไม่มี
มีอยู่บ้างที่ไม่	ทั้งหมด
ไม่มี	มีอยู่บ้าง

ตัวอย่างเช่น

ประพจน์	นิเสธของประพจน์
เป็ดบางตัวบินได้	ไม่มีเป็ดตัวใดบินได้
เป็ดบางตัวไม่บิน	เป็ดทุกตัวบิน
เป็ดทุกตัวออกไข่	เป็ดบางตัวไม่ออกไข่
ไม่มีเป็ดตัวใดออกไข่	เป็ดบางตัวออกไข่

ตัวอย่างที่ 7 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1) นักเรียนทุกคนชอบเล่นเกม

2) นักเรียนบางคนชอบคณิตศาสตร์

3) มีจำนวนนับ x ซึ่ง $5x = 24$

4) สำหรับจำนวนนับ x ทุกจำนวน $x + x = x \times x$

ตอบ 1) นักเรียนบางคนไม่ชอบเล่นเกม

2) ไม่มีนักเรียนคนใดชอบคณิตศาสตร์

3) ไม่มีจำนวนนับ x ซึ่ง $5x = 24$

4) มีจำนวนนับ x ที่ $x + x \neq x \times x$

ตัวอย่างที่ 8 จงแปลงประพจน์ที่กำหนดให้เป็นข้อความ

1) $p \wedge q$ 2) $\sim p$ 3) $\sim(p \wedge q)$

4) $\sim p \wedge q$ 5) $\sim(\sim p)$

เมื่อกำหนดให้ p คือ ฉันกินอาหารถูกหลักโภชนาการ

และ q แทน ฉันมีร่างกายแข็งแรง

ตอบ 1) $p \wedge q$ หมายถึง ฉันกินอาหารถูกหลักโภชนาการ และฉันมีร่างกายแข็งแรง

2) $\sim p$ หมายถึงฉันกินอาหารไม่ถูกหลักโภชนาการ

3) $\sim(p \wedge q)$ หมายถึง ไม่เป็นความจริงที่ว่า ฉันกินอาหารถูกหลักโภชนาการ และมีร่างกายแข็งแรง

4) $\sim p \wedge q$ หมายถึง ฉันกินอาหารไม่ถูกหลักโภชนาการ และมีร่างกายแข็งแรง

5) ~(~p) หมายถึง ไม่เป็นความจริงที่ว่าฉันกินอาหารไม่ถูกหลักโภชนาการ ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ ฉันกินอาหารถูกหลักโภชนาการ

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ถ้า ... แล้ว"

ประพจน์จำนวนมากในคณิตศาสตร์ จะอยู่ในรูป ถ้า p แล้ว q ประพจน์ที่แสดงในรูป ถ้า p แล้ว q เรียกว่าประพจน์แบบมีเงื่อนไข หรือการแจงเหตุสู่ผล (conditionals or implications) และเขียนแทนด้วย $p \rightarrow q$ ซึ่งประพจน์สามารถอ่านได้เป็น "p implies q" เรียก p ว่าประพจน์นำ (antecedent) และเรียก q ว่า ประพจน์ตาม (consequent)

พิจารณาประพจน์แบบต่าง ๆ ที่สามารถเขียนในรูป "ถ้า - แล้ว"

ประพจน์ : นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่หนึ่งมีอายุ 6 ปี

รูป ถ้า - แล้ว : ถ้าเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่หนึ่ง แล้ว จะมีอายุ 6 ปี

ประพจน์ : นักศึกษาวิชาเอกฟิสิกส์ทุกคนต้องเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์

รูป ถ้า - แล้ว : ถ้าเป็นนักศึกษาวิชาเอกฟิสิกส์ แล้วจะต้องเรียนคณิตศาสตร์ประยุกต์

การแจงเหตุสู่ผลอาจต้องคิดถึงคำมั่นสัญญา เช่น สมมุติว่า โกสุมให้คำมั่นสัญญากับนิภาพรว่า "ถ้าฉันสอบได้ที่หนึ่ง แล้วฉันจะพาเธอไปเที่ยวเชียงใหม่" ถ้าโกสุมปฏิบัติตามสัญญา การแจงเหตุสู่ผลจะเป็นจริง แต่ถ้าโกสุมไม่รักษาคำมั่นสัญญา แสดงว่า "การแจงเหตุสู่ผลเป็นเท็จ"

พิจารณาความเป็นไปได้สี่แบบต่อไปนี้

ความเป็นไปได้สี่แบบของ สมมุติฐาน และข้อสรุป ในประพจน์ของการแจงเหตุสู่ผล

	p	q	
1)	T	T	โกสุมสอบได้ที่หนึ่ง : โกสุมพานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่
2)	T	F	โกสุมสอบได้ที่หนึ่ง : โกสุมไม่พานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่
3)	F	T	โกสุมสอบไม่ได้ที่หนึ่ง : โกสุมพานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่
4)	F	F	โกสุมสอบไม่ได้ที่หนึ่ง : โกสุมไม่พานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่

กรณีที่โกสุมผิดคำมั่นสัญญา คือ เมื่อโกสุมสอบได้ที่หนึ่งและไม่พานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่คือกรณีที่ 2) เท่านั้น ในกรณีที่โกสุมสอบไม่ได้ที่หนึ่งโกสุมจะพานิภาพรไปเที่ยวเชียงใหม่หรือไม่ก็ได้ ไม่ถือว่าผิดคำมั่นสัญญา

T_4 การแจงเหตุสู่ผล $p \rightarrow q$ เป็นจริง ในกรณีต่าง ๆ ยกเว้นกรณีที่ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ หรือกล่าวได้ว่า การแจงเหตุสู่ผลจะเป็นเท็จในกรณีเดียว คือ เมื่อเหตุเป็นจริงแต่ผลเป็นเท็จ กรณี นอกนั้น การแจงเหตุสู่ผลเป็นจริง

บทนิยามของการแจงเหตุสู่ผลสามารถสรุปได้ดังตาราง 2.2.4

ตาราง 2.2.4 ตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์แบบมีเงื่อนไข หรือการแจงเหตุสู่ผล

p	q	การแจงเหตุสู่ผล $p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

การแจงเหตุสู่ผลอาจกล่าวได้หลายแบบ เช่น

1) ถ้าฝนตก แล้วท้องนาจะเปียก (ถ้า p แล้ว q)
2) ถ้าฝนตก ท้องนาจะเปียก (ถ้า p , q)
3) ท้องนาเปียก ถ้าฝนตก (q ถ้า p)
4) ฝนตก ดังนั้น ท้องนาเปียก (p ดังนั้น q)
5) ถ้าฝนตก ดังนั้นท้องนาเปียก (ถ้า p ดังนั้น q)
6) ฝนตกเป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับท้องนาเปียก (p เป็นเงื่อนไขที่พอเพียงสำหรับ q)
7) ท้องนาเปียกเป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับฝนตก (q เป็นเงื่อนไขจำเป็นสำหรับ p)

การแจงเหตุสู่ผล $p \rightarrow q$ มีประพจน์การแจงเหตุสู่ผลที่สัมพันธ์กันดังนี้

ประพจน์	: ถ้า p แล้ว q	$p \rightarrow q$
บทกลับ	: ถ้า q แล้ว p	$q \rightarrow p$
ผกผัน	: ถ้า ~p แล้ว ~q	$\sim p \rightarrow \sim q$
แย้งสลับที่	: ถ้า ~q แล้ว ~p	$\sim q \rightarrow \sim p$

ตัวอย่างที่ 9 จงเขียน บทกลับ ผกผัน และแย้งสลับที่ สำหรับแต่ละประพจน์ต่อไปนี้

(1) ถ้า $3x + 1 = 12$ แล้ว $x = 4$

(2) ถ้าฉันขายรถยนต์ได้ ฉันจะไปเที่ยวต่างประเทศ

วิธีทำ (1) บทกลับ : ถ้า $x = 4$ แล้ว $3x + 1 = 12$

ผกผัน : ถ้า $3x + 1 \neq 12$ แล้ว $x \neq 4$

แย้งสลับที่ : ถ้า $x \neq 4$ แล้ว $3x + 1 \neq 12$

(2) บทกลับ : ถ้า ฉันไปเที่ยวต่างประเทศ แล้ว ฉันจะขายรถยนต์ได้

ผกผัน : ถ้าฉันขายรถยนต์ไม่ได้ แล้วฉันจะไม่ไปเที่ยวต่างประเทศ

แย้งสลับที่ : ถ้าฉันไม่ไปเที่ยวต่างประเทศ แล้ว ฉันขายรถยนต์ไม่ได้

จากตัวอย่าง ประพจน์และผกผันของประพจน์นั้นไม่จำเป็นต้องมีค่าความจริงเหมือนกัน

ตาราง 2.2.5 จะแสดงว่า ในรูปทั่วไป ประพจน์การแจงเหตุสู่ผล และประพจน์ แย้งสลับที่มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี และบทกลับ และผกผันของประพจน์การแจงเหตุสู่ผลมีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี ดังตารางต่อไปนี้

ตาราง 2.2.5 แสดงประพจน์การแจงเหตุสู่ผล บทกลับ ผกผัน และ แย้งสลับที่

p	q	$\sim p$	$\sim q$	แจงเหตุสู่ผล $p \rightarrow q$	บทกลับ $q \rightarrow p$	ผกผัน $\sim p \rightarrow \sim q$	แย้งสลับที่ $\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

ข้อสังเกต $p \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จเนื่องกรณีเดียว คือ เมื่อ p มีค่าความจริงเป็นจริง และ q มีค่าความจริงเป็นเท็จ กรณีอื่น ๆ $p \rightarrow q$ จะมีค่าความจริงเป็นจริง

การเชื่อมประพจน์ด้วยตัวเชื่อม "ก็ต่อเมื่อ"

ประพจน์ที่อยู่ในรูป p ก็ต่อเมื่อ q (p if and only if q หรือ p iff q) เรียกว่า ประพจน์แบบมีเงื่อนไขสองทาง และเขียนแทนด้วย $p \leftrightarrow q$

เมื่อกล่าวถึงประพจน์แบบมีเงื่อนไขสองทาง อาจต้องคิดถึงคำมั่นสัญญา เช่น สมมุติโกสุมให้คำมั่นสัญญากับนิภาพรว่า "ฉันจะพาเธอไปเที่ยวต่างประเทศก็ต่อเมื่อฉันได้ทุนการศึกษาต่างประเทศ" ถ้าโกสุมปฏิบัติตามสัญญา ประพจน์แบบมีเงื่อนไขสองทางจริงแสดงว่าประพจน์ โกสุมจะพานิภาพรไปเที่ยวต่างประเทศ และประพจน์ โกสุม ได้ทุนศึกษาต่างประเทศ ต้องมีค่าความจริงเหมือนกัน

T_5 : ถ้า p และ q มีค่าความจริงเหมือนกัน แล้ว $p \leftrightarrow q$ เป็นจริง ถ้า p และ q มีค่าความจริงตรงข้ามกัน แล้ว $p \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 10 ให้ p แทน โกสุมจะพานิภาพรไปเที่ยวต่างประเทศ

q แทน โกสุมได้ทุนศึกษาต่อต่างประเทศ

ดังนั้น $p \leftrightarrow q$ แทน โกสุมจะพานิภาพรไปเที่ยวต่างประเทศ ก็ต่อเมื่อ โกสุม ได้ทุนศึกษาต่อต่างประเทศ และเขียนตารางแสดงค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ ได้ ดังตาราง 2.2.6

ตาราง 2.2.6 ค่าความจริงของ p , q และ $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

เมื่อเชื่อมประพจน์การแจงเหตุสู่ผล และบทกลับ ด้วยตัวเชื่อม "และ" ได้ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ประพจน์ประกอบนี้มีค่าความจริงเหมือนกับค่าความจริงของ $p \leftrightarrow q$ กรณีต่อกรณี ดังแสดงด้วยตาราง 2.2.7 ต่อไปนี้

ตาราง 2.2.7 แสดงค่าความจริงของ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ และ $p \leftrightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ดังนั้นจึงสามารถเขียน $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ แทนด้วย $p \leftrightarrow q$ ซึ่งปกติจะอ่านว่า p ก็ต่อเมื่อ q (p if and only if q)

ตัวอย่างที่ 11 กำหนดประพจน์ต่อไปนี้

p แทน $2 = 1 + 1$ q แทน $2 = 3 + 1$

r แทน $2 \neq 4$ s แทน $2 - 4 = 4 - 2$

จงพิจารณาประพจน์แบบมีเงื่อนไขสองทางในแต่ละข้อว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) $p \leftrightarrow q$

2) $p \leftrightarrow r$

3) $r \leftrightarrow q$

4) $q \leftrightarrow s$

วิธีคิด 1) p เป็นจริง q เป็นเท็จ ดังนั้น $p \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

2) p เป็นจริง r เป็นจริง ดังนั้น $p \leftrightarrow r$ เป็นจริง

3) r เป็นจริง q เป็นเท็จ ดังนั้น $r \leftrightarrow q$ เป็นเท็จ

4) q เป็นเท็จ s เป็นเท็จ ดังนั้น $q \leftrightarrow s$ เป็นจริง

แบบฝึกหัด 2.2

1. กำหนดประพจน์ดังนี้ $p : 3 + 5 = 7$ $q : 3 \times 5 = 15$

   $r : 5 \div 15 = 3$ $s : 4 - 9 = -5$

   พิจารณาว่าประพจน์ประกอบในแต่ละข้อ เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

   1) $\sim(q \wedge r)$ 2) $\sim(q \vee r)$

   3) $\sim r \vee \sim s$ 4) $\sim r \wedge \sim s$

   5) $(\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim r \wedge \sim s)$

2. ตรวจสอบว่าแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ และตรวจสอบประพจน์เป็นจริงหรือเป็นเท็จ

   1) $2 + 5 = 8$ 2) ปิดประตูให้หน่อย

   3) มีนบุรีเป็นจังหวัด 4) เวลาเท่าไร

   5) $6 \times 5 = 30$ 6) $4x = 32$

   7) $2x^2 > x + 1$ 8) 3 เป็นคำตอบของสมการ $4x - 2 = 10$

   9) $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกตัวของ A เป็นสมาชิกของ B

   10) $\{1, 2, 3, 6, -7\} \not\subset \{1, 2, 3, 6, -7\}$

3. จงเขียนนิเสธของแต่ละข้อต่อไปนี้

1) หนังสือมีจำนวนหน้า 250 หน้า

2) สำหรับจำนวนเต็ม x ใด ๆ $x - 5 = 5 - x$

3) ไม่ใช่จำนวนนับทุกจำนวนที่หารด้วย 3 ได้ลงตัว

4) หกน้อยกว่าลบแปด

5) แดงเป็นคนผอม

6) $3 \times 5 = 18$

7) กวางทุกตัวมีขาสี่ขา

8) สุนัขทุกตัวว่ายน้ำไม่ได้

9) ไม่เป็นความจริงที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากเป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส

10) สำหรับจำนวนนับ x ทุกจำนวน $x + 6 = 6 + x$

11) นักเรียนบางคนชอบตีปิงปอง

12) แมวทุกตัวกินหนู

4. เติมตารางค่าความจริงต่อไปนี้

1)

q	$\sim q$	$\sim(\sim q)$
T	....	....
F	....	....

2)

q	$\sim q$	$q \vee \sim q$	$q \wedge \sim q$
T	....	....	....
F	....	....	....

3) จากข้อ 4 ข้อย่อย 1 q เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $\sim(\sim q)$ หรือไม่

4) จากข้อ 4 ข้อย่อย 2 $q \vee \sim q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $q \wedge \sim q$ หรือไม่

5. ให้ q แทน ฝนตก

p แทน นักเรียนไม่มาโรงเรียน

จงเขียนแต่ละข้อต่อไปนี้โดยใช้สัญลักษณ์

1) ฝนตกและนักเรียนไม่มาโรงเรียน

2) นักเรียนไม่มาโรงเรียน หรือ ฝนตก

3) นักเรียนมาโรงเรียนและฝนไม่ตก

4) ไม่เป็นความจริงที่ว่าฝนตกและนักเรียนไม่มาโรงเรียน

6. ถ้า p เป็นจริงและ q เป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของข้อต่อไปนี้

1) $p \vee \sim q$

2) $p \wedge \sim q$

3) $\sim(\sim q) \wedge p$

4) $\sim(\sim q) \vee \sim q$

5) $p \vee \sim p$

6) $p \wedge \sim p$

7. เติมตารางค่าความจริงให้สมบูรณ์

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

8. ให้ p แทน เงินเดือนมากขึ้น q แทน เสียภาษีมากขึ้น จงเปลี่ยนประพจน์ต่อไปนี้เป็นรูปสัญลักษณ์

1) เงินเดือนมากขึ้น และเสียภาษีมากขึ้น

2) เงินเดือนไม่มากขึ้น แต่เสียภาษีมากขึ้น

3) เงินเดือนมากขึ้น หรือเสียภาษีไม่มากขึ้น

4) ไม่เป็นความจริงที่ว่า เงินเดือนมากขึ้น และเสียภาษีมากขึ้น

9. จงเปลี่ยนประโยคต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปสัญลักษณ์

1) ถ้าฝนตก แล้ว ถนนเปียก

2) สมชายชวนสมศรีไปดูภาพยนตร์ ก็ต่อเมื่อสมชายทำโครงการเสร็จ

3) รูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนเป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

4) สมศักดิ์จะไปต่างประเทศก็ต่อเมื่อสมศักดิ์สอบชิงทุนได้

5) ถ้าประชาไปเชียงใหม่แล้ว ประชาจะไม่ได้ไปเกณฑ์ทหาร

6) ถ้าสมควรซื้อบ้านแล้วสมควรจะต้องทำงานหนัก

7) ประเสริฐจะร่ำรวย ก็ต่อเมื่อ มีถนนตัดผ่านที่ดินของประเสริฐ

8) สมศรีจะเกษียณอายุราชการก็ต่อเมื่อสมศรีอายุหกสิบปี

9) สมศรีจะได้รับเงินบำนาญ ก็ต่อเมื่อสมศรีเกษียณอายุราชการ

10. กำหนดประพจน์ต่อไปนี้

p แทน $5 < 8 - 3$ q แทน $6 = 4 + 2$

r แทน $2 \neq 4$ s แทน $3 - 5 = 5 - 3$

จงพิจารณาประพจน์แบบการแจงเหตุสู่ผล และประพจน์มีเงื่อนไขสองทางในแต่ละข้อว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ

1) $p \rightarrow q$ 2) $p \leftrightarrow q$

3) $p \rightarrow r$ 4) $p \leftrightarrow r$

5) $r \rightarrow q$ 6) $r \leftrightarrow q$

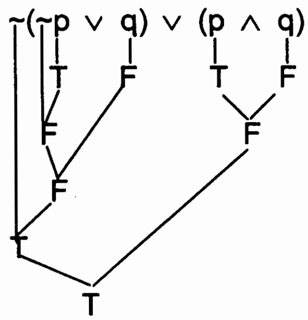
7) $q \rightarrow s$ 8) $q \leftrightarrow s$

2.3 ค่าความจริงของประพจน์ประกอบ

ในตอนนี้เราจะพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ประกอบ โดยใช้วงเล็บเพื่อบอกลำดับของการดำเนินการ (order of operations) ของประพจน์ เช่น $\sim(p \wedge q)$ หมายถึง นิเสธของประพจน์ "p และ q" และอ่านว่า ไม่ใช่กรณีที่ p และ q และสำหรับ $\sim p \wedge q$ หมายถึง นิเสธของ p และประพจน์ q หรืออ่านว่านิเสธ p และ q

ตัวอย่างที่ 1 กำหนดให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $\sim(p \vee q) \vee (p \wedge q)$

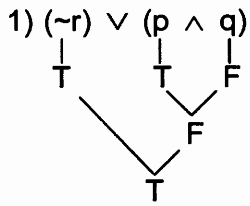
วิธีทำ เขียนแสดงค่าความจริง ด้วย T และ F ของประพจน์อย่างง่าย และประพจน์ประกอบไปตามลำดับ ได้ประพจน์ประกอบที่เป็นโจทย์ ได้ดังนี้



จะเห็นได้ว่าผลลัพธ์ขึ้นอยู่กับ ประพจน์อย่างง่าย แต่ละประพจน์ตามที่โจทย์ระบุ

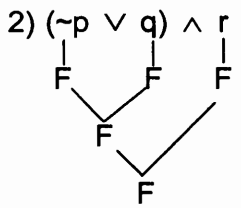
ตัวอย่างที่ 2 ให้ p มีค่าความจริงเป็นจริง q มีค่าความจริงเป็นเท็จ และ r มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ 1) $(\sim r) \vee (p \wedge q)$ 2) $(\sim p \vee q) \wedge r$

วิธีทำ



แทนค่าความจริง

จะได้ประพจน์ประกอบเป็นจริง



แทนค่าความจริง

จะได้ประพจน์ประกอบเป็นเท็จ

แบบฝึกหัด 2.3

กำหนดให้ p , q , r , s , t และ u เป็นประพจน์ ที่มีค่าความจริงเป็น จริง จริง เท็จ เท็จ จริง เท็จ ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ประกอบต่อไปนี้

1) $(p \wedge q) \vee r$	2) $(p \vee q) \wedge r$
3) $(p \wedge q) \rightarrow r$	4) $(p \wedge r) \vee q$
5) $(p \wedge r) \rightarrow s$	6) $(s \wedge t) \rightarrow u$
7) $p \leftrightarrow r$	8) $[(p \rightarrow r) \wedge p] \rightarrow r$
9) $(p \rightarrow t) \leftrightarrow (\sim p \vee t)$	10) $[(p \rightarrow s) \wedge (s \rightarrow p)] \leftrightarrow (p \leftrightarrow s)$

2.4 ประพจน์ประกอบที่สมมูลกันทางตรรกศาสตร์

นอกจากจะใช้ตาร่างสรุปค่าความจริงของประพจน์ประกอบแล้ว ยังใช้ตารางค่าความจริงตรวจสอบว่าประพจน์ประกอบสองประพจน์มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณีหรือไม่ ถ้ามีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี เรียกว่า สมมูลกันทางตรรกศาสตร์ (logical equivalent)

> ประพจน์ประกอบสองประพจน์สมมูลกันทางตรรกศาสตร์ ก็ต่อเมื่อประพจน์ประกอบทั้งสองนั้นมีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

ตัวอย่างที่ 1 จงใช้ตารางเพื่อแสดง $p \wedge q$ และ $q \wedge p$ สมมูลเชิงตรรกศาสตร์

วิธีทำ ใช้ตารางแสดงค่าความจริงของ $p \wedge q$ และ $q \wedge p$ ได้ดังนี้

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

เพราะฉะนั้น $p \wedge q$ และ $q \wedge p$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ เขียนแทนด้วย $p \wedge q \equiv q \wedge p$

ตัวอย่างที่ 2 จงใช้ตารางแสดงว่า $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ และ $p \leftrightarrow q$ สมมูลกัน

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	$P \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

เพราะฉะนั้น $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ และ $p \leftrightarrow q$ สมมูลกัน เขียนแทนด้วย $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv p \leftrightarrow q$

ตัวอย่างที่ 3 ตารางต่อไปนี้แสดงว่า $(p \rightarrow q)$ และ $\sim p \vee q$ สมมูลกัน

p	$\sim p$	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
T	F	T	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	T	F	T	T

ตัวอย่างอื่นของสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

ให้นักเรียนพิจารณา $\sim p \vee \sim q$ และ $\sim(p \wedge q)$ ในตาราง

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$
T	T	F	F	F	T	F
T	F	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	F	T

สังเกตว่า $\sim p \vee \sim q$ และ $\sim(p \wedge q)$ มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี ดังนั้น ประพจน์ประกอบเป็น สมมูลเชิงตรรกศาสตร์ เช่นเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $\sim p \wedge \sim q$ และ $\sim(p \vee q)$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

2.4.1 สมบัติของสมมูลเชิงตรรกศาสตร์

สมบัติ 1 สมบัติการสลับที่ (commutative properties)

(1) $p \wedge q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $q \wedge p$

(2) $p \vee q$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $q \vee p$

สมบัติ 2 สมบัติการเปลี่ยนหมู่ (associative property)

(1) $p \wedge (q \wedge r)$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $(p \wedge q) \wedge r$

(2) $p \vee (q \vee r)$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $(p \vee q) \vee r$

สมบัติ 3 สมบัติการแจกแจง (distributive properties)

(1) $p \wedge (q \vee r)$เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(2) $p \vee (q \wedge r)$ เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

สมบัติ 4 กฎดีมอร์แกน (De Morgan's Laws)

(1) $\sim p \vee \sim q$ สมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $\sim(p \wedge q)$

(2) $\sim p \wedge \sim q$ สมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับ $\sim(p \vee q)$

แบบฝึกหัด 2.4.1

1. ประพจน์ประกอบในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์กันหรือไม่

   1) $\sim(p \wedge q)$ และ $\sim p \wedge \sim q$ 2) $\sim(p \wedge q)$ และ $\sim p \vee \sim q$

   3) $\sim(p \vee q)$ และ $\sim p \wedge \sim q$ 4) $\sim(p \vee q)$ และ $\sim p \vee \sim q$

2. จงประยุกต์ใช้ กฎดีมอร์แกน เพื่อเขียนข้อความให้สมมูลทางตรรกศาสตร์กับข้อความที่กำหนดให้

   1) ไม่เป็นความจริงที่ดวงเดือนสอบคณิตศาสตร์ได้เต็ม และสอบภาษาอังกฤษได้สูงสุด

   2) ไม่เป็นความจริงที่เก๋จะไปดูภาพยนตร์หรือจะไปว่ายน้ำ

   3) ฝนไม่ตกหรือพายุไม่รุนแรง

   4) แก้วซักผ้าไม่สะอาด และทำอาหารไม่อร่อย

2.4.2 สัจนิรันดร์

ข้อความทางตรรกศาสตร์ซึ่งข้อสรุปสมมูลกับข้อตั้ง เรียกว่า สัจนิรันดร์ (tautology) ซึ่งหมายถึงว่า ประพจน์ประกอบ ที่มีค่าความจริงเป็นจริง ในทุกกรณีของค่าความจริงของประพจน์อย่างง่ายแบบต่าง ๆ เรียกว่า สัจนิรันดร์

ประพจน์ประกอบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรียกว่า สัจนิรันดร์

พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

ฝนตก หรือ ฝนไม่ตก

ประพจน์ข้างต้น เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เช่น $p \vee (\sim p)$ และแสดงค่าความจริงได้ดังตาราง 2.4.1

ตาราง 2.4.1 แสดงค่าความจริงของ $p \vee (\sim p)$

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
T	F	T
F	T	T

สังเกตว่า $p \vee (\sim p)$ จะเป็นจริงเสมอ ดังนั้น $p \vee (\sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

วิธีหนึ่งที่จะสร้างสัจนิรันดร์คือนำประพจน์ที่เป็นสมมูลเชิงตรรกศาสตร์ เช่น $p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$ มาเชื่อมด้วยสัญลักษณ์ $\leftrightarrow$ ซึ่งเป็นเงื่อนไขสองทาง ดังนี้

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

เนื่องจากทั้ง $p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$ มีค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

ดังนั้น $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างอื่น ๆ ของสัจนิรันดร์ เช่น

1) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \vee q)$

2) $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

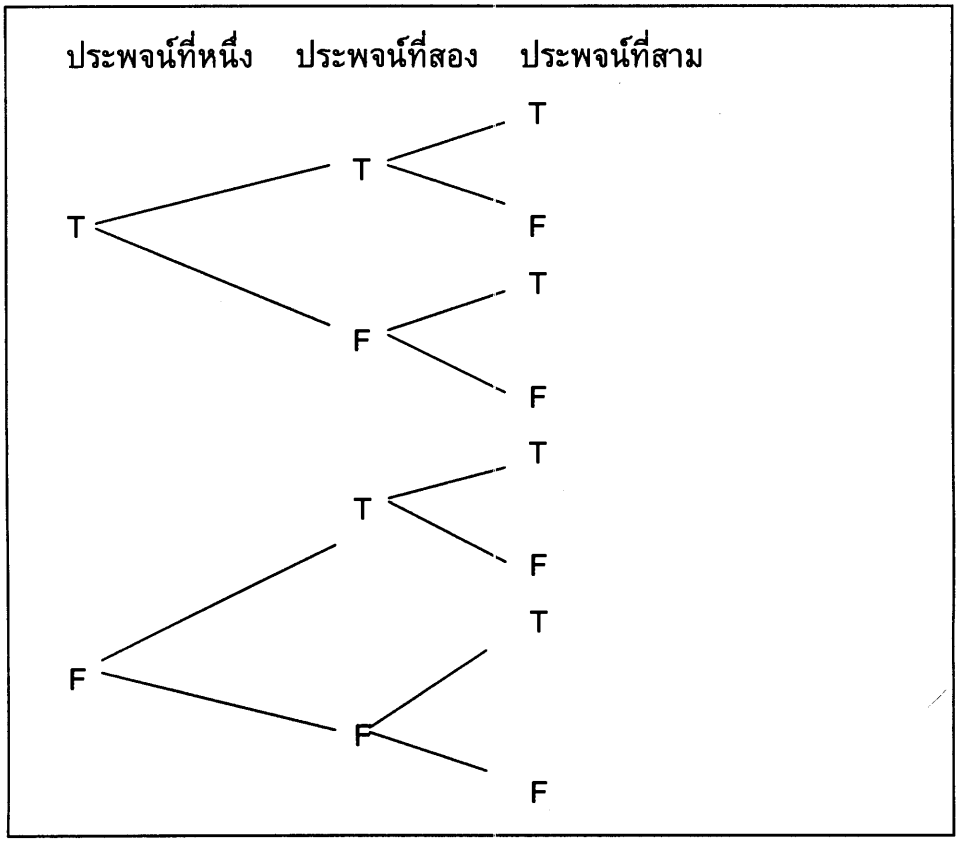
3) $\sim(p \vee q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

4) $r \vee (p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee p) \wedge (r \vee q)$

5) $r \wedge (p \vee q) \leftrightarrow (r \wedge p) \vee (r \wedge q)$

ในกรณีที่ประพจน์ประกอบ มีประพจน์ต่าง ๆ สามประพจน์ที่ไม่ใช่นิเสธของกันและกัน ในการสร้างตารางแสดงค่าความจริงของประพจน์ จะประกอบด้วยกรณีต่าง ๆ $2^3 = 8$ กรณี ดังแผนภาพต้นไม้ และตาราง 2.4.2

กรณีต่างๆ อาจพิจารณาได้จากแผนภูมิต้นไม้ดังนี้



แผนภาพต้นไม้แสดงกรณีต่าง ๆ ที่เป็นไปได้ของประพจน์ประกอบ

ตาราง 2.4.2 ค่าความจริงของ $r \vee (p \wedge q) \leftrightarrow (r \vee p) \wedge (r \vee q)$

p	q	r	$p \wedge q$	$r \vee (p \wedge q)$	$(r \vee p)$	$(r \vee q)$	$(r \vee p) \wedge (r \vee q)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	F	T	F
F	F	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

ค่าความจริงเหมือนกันกรณีต่อกรณี

จงตรวจสอบว่าข้อ 1) 2) 3) และข้อ 5) เป็นสัจนิรันดร์ โดยสร้างตารางตรวจสอบสำหรับประพจน์ที่เชื่อมด้วย $\leftrightarrow$ ที่เป็นสัจนิรันดร์ เช่น ประพจน์ประกอบในตาราง 2.4.2

พิจารณาค่าความจริงของประพจน์ประกอบ $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$ ดังตาราง

P	q	$P \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

ประพจน์ประกอบข้างต้นนี้เป็นสัจนิรันดร์

ประพจน์ประกอบที่เชื่อมด้วย $\rightarrow$ ที่เป็นสัจนิรันดร์ เช่น

1) $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ 2) $(p \rightarrow q) \rightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

3) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ 4) $(p \wedge q) \rightarrow p$

5) $p \rightarrow (p \vee q)$

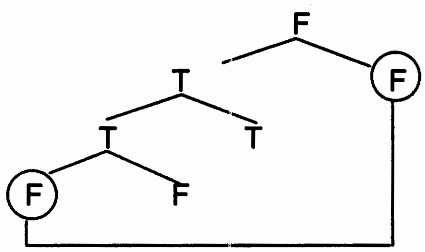
จงตรวจสอบว่าข้อ 1) - 5) เป็นสัจนิรันดร์ โดยสร้างตารางตรวจสอบ

ในการตรวจสอบความเป็นสัจนิรันด์ของประพจน์ประกอบ ที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า - แล้ว" โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง ซึ่งจะสมมุติให้ประพจน์ประกอบที่กำหนดให้เป็นเท็จ ซึ่งจะเกิดขึ้นได้กรณีเดียว คือ เมื่อประพจน์นำ เป็นจริง และประพจน์ตามเป็นเท็จ แล้วจึงหาค่าความจริงของประพจน์อย่างง่าย หากมีข้อขัดแย้งกับที่สมมุติไว้ แสดงว่าประพจน์ประกอบนั้นเป็นสัจนิรันดร์ ถ้าไม่มีข้อขัดแย้ง แสดงว่าประพจน์ประกอบ นั้นมีกรณีที่เป็นเท็จรูปแบบของประพจน์จึงไม่เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 8 ประพจน์ประกอบ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมุติ $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$$



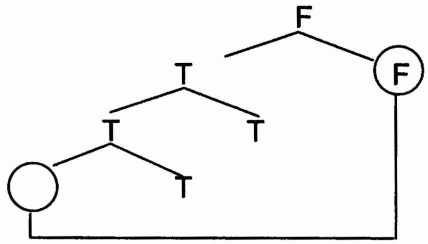
เกิดข้อขัดแย้ง เพราะ p และ ~p มีค่าความจริงเป็น F เหมือนกัน

ดังนั้น ประพจน์ประกอบเป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่างที่ 9 ประพจน์ประกอบ $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow \sim p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

วิธีทำ สมมุติ $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow \sim p$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow \sim p$$



จะเห็นได้ว่าสามารถกำหนดค่าของ P ให้เป็น T หรือเป็น F ก็ได้ แต่ถ้ากำหนดให้ P เป็น T จะไม่เกิดข้อขัดแย้ง นั่นคือรูปแบบของประพจน์มีกรณีที่เป็นเท็จ จึงไม่เป็นสัจนิรันดร์

จงตรวจสอบความเป็นสัจนิรันดร์ โดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง

1. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

2. $[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

2.4.3 การอ้างเหตุผล

การอ้างเหตุผลในทางตรรกศาสตร์ คือ การอ้างว่าเมื่อมี ประพจน์ P_1, P_2, P_3,…, P_n ชุดหนึ่ง แล้วสามารถสรุปได้ประพจน์ C อันหนึ่งได้ การอ้างเหตุผลประกอบด้วยส่วนสำคัญสองส่วน คือ สมมุติฐาน หรือสิ่งกำหนดให้ ได้แก่ P_1, P_2, P_3, …, P_n และข้อสรุป ได้แก่ C การอ้างเหตุผลอาจสมเหตุสมผล หรือไม่สมเหตุสมผลก็ได้ ซึ่งอาจตรวจสอบความสมเหตุสมผลได้โดยใช้ตัวเชื่อม $\wedge$ เชื่อมสมมุติฐานทั้งหมด และใช้ตัวเชื่อม $\rightarrow$ เชื่อมส่วนที่เป็นสมมุติฐานกับ ข้อสรุป ดังนี้

$$(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$$

ถ้าประพจน์ประกอบ $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่าการอ้างเหตุผลสมเหตุสมผล (valid)

ถ้าประพจน์ประกอบ $(P_1 \wedge P_2 \wedge P_3 \wedge \ldots \wedge P_n) \rightarrow C$ ไม่เป็นสัจนิรันดร์ แสดงว่าการอ้างเหตุผลไม่สมเหตุสมผล (invalid)

เนื่องจากประพจน์ประกอบที่เชื่อมด้วยตัวเชื่อม "ถ้า … แล้ว" จะเป็นเท็จได้กรณีเดียว คือ สมมุติฐาน เป็นจริง และข้อสรุปเป็นเท็จ นอกจากวิธีตรวจสอบโดยวิธีการหาข้อขัดแย้ง ดังที่กล่าวแล้วยังสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผล ซึ่งอาจทำได้อีกวิธีหนึ่งคือยอมรับว่า

สมมุติฐานเป็นจริงแล้วพิจารณาว่า ข้อสรุปจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ ถ้าข้อสรุปมีค่าความจริงเป็นจริงเสมอ เรากล่าวว่าการอ้างเหตุผล สมเหตุสมผล แต่ถ้าข้อสรุปอาจมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จ เรากล่าวว่าการอ้างเหตุผลไม่สมเหตุสมผล

จากการพิจารณา ประพจน์ประกอบที่เป็นสัจนิรันดร์ เราได้รูปแบบการอ้างเหตุผลที่สมเหตุสมผล ซึ่งจะนำไปใช้ในการอ้างอิงในการพิสูจน์รูปแบบของประพจน์อื่น ๆ ดังนี้

รูปแบบที่ 1 สมมุติฐาน 1. $p \rightarrow q$

2. p

ข้อสรุป q

รูปแบบที่ 2 สมมุติฐาน 1. $p \rightarrow q$

2. $\sim q$

ข้อสรุป $\sim p$

รูปแบบที่ 3 สมมุติฐาน 1. $p \rightarrow q$

2. $q \rightarrow r$

ข้อสรุป $p \rightarrow r$

รูปแบบที่ 4 สมมุติฐาน 1. $p \rightarrow q$

ข้อสรุป $\sim q \rightarrow \sim p$

หรือข้อสรุป $\sim p \vee q$

รูปแบบที่ 5 สมมุติฐาน 1. $p \vee q$

2. $\sim p$

ข้อสรุป q

รูปแบบที่ 6 สมมุติฐาน 1. $p \rightarrow q$

2. $r \rightarrow s$

3. $p \vee r$

ข้อสรุป $q \vee s$

รูปแบบที่ 7 สมมุติฐาน 1. $p \wedge q$

ข้อสรุป p

หรือข้อสรุป q

รูปแบบที่ 8 สมมุติฐาน p

ข้อสรุป $p \vee q$

ตัวอย่างที่ 10 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

(1) สมมุติฐาน 1. $s \wedge t$

2. $s \rightarrow q$

3. $u \rightarrow \sim q$

ข้อสรุป $u \vee r$

(2) สมมุติฐาน 1. $s \rightarrow t$

2. $u \rightarrow \sim t$

3. $\sim u$

ข้อสรุป s

วิธีทำ (1) 1. $s \wedge t$ (กำหนด)

2. $s \rightarrow q$ (กำหนด)

3. $u \rightarrow \sim q$ (กำหนด)

4. s (ข้อ 1 รูปแบบที่ 7)

5. q (ข้อ 2 และข้อ 4 รูปแบบที่ 1)

6. $\sim u$ (ข้อ 3 และข้อ 5 รูปแบบที่ 2)

ข้อสรุป .การอ้างเหตุผลสมเหตุสมผล

วิธีทำ (2) 1. $s \rightarrow t$ (กำหนด)

2. $u \rightarrow \sim t$ (กำหนด)

3. $\sim u$ (กำหนด)

4. $t \rightarrow \sim u$ (จากข้อ 2 รูปแบบที่ 4)

5. $s \rightarrow \sim u$ (จากข้อ 1 และข้อ 4 รูปแบบที่ 3)

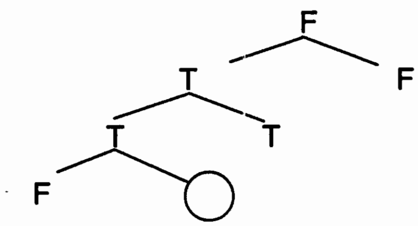
6. $\sim s \vee \sim u$ (จากข้อ 5 รูปแบบที่ 4)

ข้อสรุป การอ้างเหตุผลไม่สมเหตุสมผล เนื่องจากมี $\sim s \vee \sim u$ และมี $\sim u$ ไม่สามารถสรุปผลเป็น s ได้

หรืออาจแสดงข้อ (2) โดยสมมุติให้ประพจน์ประกอบเป็นเท็จ ว่าข้อสรุป ที่ได้จะเป็นอย่างไร

วิธีทำ สมมุติ $\{[(s \rightarrow t) \wedge (u \rightarrow \sim t)] \wedge \sim u\} \rightarrow s$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

$$\{[(s \rightarrow t) \wedge (u \rightarrow \sim t)] \wedge \sim u\} \rightarrow s$$



จะเห็นได้ว่าถ้ากำหนดให้ s เป็น F จะไม่เกิดข้อขัดแย้ง ไม่ว่าจะกำหนดค่า t เป็นจริงหรือเป็นเท็จ นั่นคือประพจน์ประกอบมีกรณีที่เป็นเท็จ จึงไม่เป็นสัจนิรันดร์

แบบฝึกหัด 2.4.2

1. จงเขียนแต่ละข้อต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์เมื่อกำหนด

   p แทนฝนตก

   q แทนถนนเปียก

1) ถ้าฝนตกแล้วถนนเปียก

2) ถ้าฝนไม่ตกแล้วถนนเปียก

3) ถ้าฝนตกแล้วถนนไม่เปียก

4) ถ้าถนนเปียกแล้วฝนตก

5) ถ้าถนนไม่เปียกแล้วฝนตก

6) ถ้าถนนไม่เปียกแล้วฝนไม่ตก

7) ถนนเปียกก็ต่อเมื่อฝนตก

2. สำหรับการแจงเหตุสู่ผลต่อไปนี้ จงหาบทกลับ ผกผัน และแย้งสลับที่

1) ถ้าเธอดื่มนม แล้วเธอจะมีสุขภาพแข็งแรง

2) ถ้าเธอทำงานหนักแล้ว เธอจะร่ำรวย

3) ถ้าแก้วเลี้ยงไก่ แล้วแก้วจะมีไข่ไว้รับประทาน

4) ถ้าคุณใช้เงินเกินตัว แล้วคุณจะต้องขายสมบัติที่แม่ให้

3. สร้างตารางค่าความจริงสำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้

1) $q \rightarrow (q \vee p)$

2) $(q \wedge r) \rightarrow r$

3) $q \leftrightarrow \sim(\sim q)$

4) $(q \rightarrow r) \leftrightarrow (\sim q \vee r)$

5) $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow s)$

4. ถ้า p เป็นจริง q เป็น เท็จ r เป็นจริง และ s เป็นจริง จงหาค่าความจริงของ

1) $(p \wedge r) \rightarrow q$

2) $(p \vee q) \wedge r \rightarrow (p \vee q)$

3) $(p \wedge \sim p) \leftrightarrow r$

4) $(p \vee \sim p) \leftrightarrow r$

5) $(p \wedge q) \wedge r \rightarrow (p \vee q) \vee r$

5. การแจงเหตุสู่ผลและบทกลับของมันเป็นเท็จทั้งคู่ได้หรือไม่ จงอธิบาย

6. ดวงเดือนสร้างประพจน์ที่เป็นจริง "ถ้าฝนตก ดวงเดือนจะขับรถไปทำงาน" จะส่งผลให้ประพจน์ต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่ "ถ้าฝนไม่ตก ดวงเดือนจะไม่ขับรถไปทำงาน"

7. จงเขียนประพจน์ที่สมมูลเชิงตรรกศาสตร์กับประพจน์ "ถ้าฝนตกแล้วดวงเดือนจะเป็นหวัด"

8. จงเขียนตารางเพื่อตรวจสอบว่าข้อต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1) $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

2) $[(s \rightarrow t) \wedge \sim t] \rightarrow \sim s$

3) $[(m \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow r)] \rightarrow (m \rightarrow r)$

4) $[(m \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow \sim m$

5) $[(p \rightarrow q) \rightarrow [(p \wedge s) \rightarrow q]$

6) $(\sim p \vee \sim q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim q)$

7) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

8) $p \rightarrow (p \vee q)$

9) $(p \wedge q) \rightarrow q$

10) $(\sim p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

11) $[(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$

12) $[(m \rightarrow n) \wedge n] \rightarrow m$

13) $[(m \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow r) \wedge m] \rightarrow r$

14) $[(m \rightarrow n) \wedge (n \rightarrow r) \wedge \sim m] \rightarrow \sim r$

9. จงพิจารณาว่าข้อสรุปจากสมมุติฐานต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

สมมุติฐาน : ถ้าแก้วกู้เงินซื้อบ้าน แก้วต้องทำงานหนักขึ้น ถ้าแก้วทำงานหนักขึ้นแก้วจะต้องซื้อรถ

ข้อสรุป :

1) ถ้าแก้วกู้เงินซื้อบ้าน แก้วจะต้องซื้อรถ

2) ถ้าแก้วไม่ได้ซื้อบ้านแล้วแก้วไม่ได้ซื้อรถ

3) ถ้าแก้วไม่ได้ซื้อบ้านแล้วแก้วซื้อรถ

4) ถ้าแก้วไม่ได้ซื้อรถแล้วแก้วไม่ได้ซื้อบ้าน

5) ถ้าแก้วไม่ได้ซื้อรถแล้วแก้วซื้อบ้าน

10. จงหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล โดยใช้กฎการอ้างเหตุผลทางอ้อมสองครั้ง จากสมมุติฐานต่อไปนี้

สมมุติฐาน : ถ้าชาวสวนขายผลไม้ได้ราคาดี ชาวสวนจะมีเงินเพียงพอที่จะใช้หนี้ธนาคาร

ถ้าชาวสวนมีเงินใช้หนี้ธนาคาร ธนาคารจะปล่อยกู้มากขึ้น

ธนาคารไม่ปล่อยกู้มากขึ้น

11. จงแสดงวิธีทำว่าข้อสรุปต่อไปนี้สมเหตุสมผลหรือไม่

1) ข้อตั้ง 1. ถ้าคุณเล่นฟุตบอล แล้วคุณจะมีร่างกายแข็งแรง

2. ถ้าคุณมีร่างกายแข็งแรง แล้วคุณดำน้ำได้นาน

3. คุณเล่นฟุตบอล

ข้อสรุป : คุณดำน้ำได้นาน

2) ข้อตั้ง 1. ถ้าคุณรับงานมาก แล้วคุณจะต้องนอนดึก

2. ถ้าคุณนอนดึก แล้วคุณจะทำงานไม่มีประสิทธิภาพ

3. ถ้าคุณทำงานไม่มีประสิทธิภาพ คุณจะโดนพักงาน

4. คุณรับงานมาก

ข้อสรุป : คุณจะโดนพักงาน

3) ข้อตั้ง 1. ถ้าคุณรับประทานอาหารไม่ถูกหลัก แล้วคุณจะมีโรคภัย

2. ถ้าคุณกินผักแล้วคุณจะมีร่างกายแข็งแรง

3. ถ้าคุณมีร่างกายแข็งแรง แล้ว คุณจะไม่มีโรคภัย

4. คุณกินผัก

ข้อสรุป : คุณรับประทานอาหารถูกหลัก

2.5 ทุตรรกบท (fallacies)

บางครั้งการสรุปผลไม่สมเหตุสมผล ในหัวข้อนี้จะแสดงตัวอย่างของการสรุปผลที่ไม่สมเหตุสมผล

2.5.1 ทุตรรกบทของบทกลับ (fallacy of the converse)

ตัวอย่างที่ 1 จงแสดงว่า ประพจน์ต่อไปนี้ไม่สมเหตุสมผล

ถ้าครูตรวจการบ้านของนักเรียนแล้ว ครูจะทราบข้อมูลเกี่ยวกับผลการเรียนของนักเรียน

ครูทราบข้อมูลเกี่ยวกับผลการเรียนของนักเรียน

เพราะฉะนั้น ครูตรวจการบ้าน

วิธีทำ ประพจน์ข้างต้นเขียนได้ในรูป

$p \to q$

$\underline{q}$

$\therefore p$

โดยพิจารณาตารางค่าความจริง เราสามารถตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการสรุปผล

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$[(p \to q) \wedge q] \to p$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

จะเห็นได้ว่า มีบางกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อยที่ทำให้ ประพจน์ประกอบเป็นเท็จ ดังนั้น การสรุปไม่สมเหตุสมผล

2.5.2 ทุตรรกบทของผกผัน (fallacy of the inverse)

พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

ถ้าครูตรวจการบ้านของนักเรียนแล้ว ครูจะทราบข้อมูลเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน

ครูไม่ตรวจการบ้านของนักเรียน

เพราะฉะนั้น ครูไม่ทราบข้อมูลเกี่ยวกับการเรียนของนักเรียน

แม้ว่าครูซักถามครูคนอื่นหรือผู้ปกครองของนักเรียน ครูก็อาจทราบข้อมูลเกี่ยวกับผลการเรียนของนักเรียนได้ ซึ่งแสดงว่าการสรุปผลไม่สมเหตุสมผล ซึ่งแสดงค่าความจริงของประพจน์ประกอบได้จากตาราง $[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to (\sim q)$.

p	q	$p \to q$	$\sim p$	$(p \to q) \wedge (\sim p)$	$\sim q$	$[(p \to q) \wedge (\sim p)] \to (\sim q)$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	F	T	T
F	T	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T	T

จะเห็นได้ว่า มีบางกรณีของค่าความจริงของประพจน์ย่อย ที่ทำให้ประพจน์ประกอบเป็นเท็จ ดังนั้น การสรุปไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบความสมเหตุสมผลจากประพจน์ต่อไปนี้

ถ้าเธอมีเงิน แล้วเธอจะมีเพื่อนมาก

เธอไม่มีเงิน

เพราะฉะนั้น เธอมีเพื่อนไม่มาก

วิธีทำ เขียนสัญลักษณ์แสดงประพจน์ข้างต้นได้ดังนี้

$p \to q$

$\underline{\sim p}$

$\therefore \sim q$

จะเห็นได้ว่า การอ้างเหตุผลนี้ เป็นทุตรรกบทของผกผันที่เพิ่งกล่าวมา นั่นคือการอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

2.5.3 แบบรูปลูกโซ่เท็จ (False Chain Pattern)

พิจารณาประพจน์ต่อไปนี้

ถ้าเธอทำงานเก่ง แล้วเจ้านายจะพอใจ ถ้าเธอทำงานเก่ง แล้วเธอได้เงินเดือนสูง เพราะฉะนั้น เจ้านายพอใจ แล้ว เธอได้เงินเดือนสูง

ประพจน์ข้างต้นแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์

$p \to q$

$p \underline{\to} r$

$\therefore q \to r$

ซึ่งสามารถพิสูจน์ความไม่สมเหตุสมผลโดยการสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ ประกอบ $[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow r)$

p	q	r	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow r)$	$(q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$	$[(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)] \rightarrow (q \rightarrow r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F	T
T	F	T	F	T	T	F	T
T	F	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

จะเห็นได้ว่า มีบางกรณีของการกำหนดค่าความจริงของประพจน์ย่อย ที่ทำให้ประพจน์ประกอบเป็นเท็จ ดังนั้นการสรุปจึงไม่สมเหตุสมผล

จากที่กล่าวแล้วถึงทุตรรกบทสามแบบ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

ทุตรรกบทของบทกลับ	ทุตรรกบทของผกผัน	แบบรูปลูกโซ่เท็จ
$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$	$p \rightarrow q$
$\underline{q}$	$\underline{\sim p}$	$p \underline{\rightarrow} r$
$\therefore p$	$\therefore \sim q$	$\therefore q \rightarrow r$

นั่นคือ การสรุปสามแบบข้างบนนี้ เป็นการสรุปที่ไม่สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงแสดงว่า $[(s \rightarrow t) \wedge \sim t] \rightarrow \sim s$ เป็นสัจนิรันดร์โดยการสร้างตาราง
2. จงแสดงว่า $[(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge \sim r] \rightarrow p$ เป็นสัจนิรันดร์โดยการสร้างตาราง

3. จงแสดงว่า $[(r \rightarrow s) \wedge \sim r] \rightarrow \sim s$ เป็นประพจน์ที่ไม่สมเหตุสมผล โดยการสร้างตาราง ประพจน์ที่ไม่สมเหตุสมผลนี้ มีชื่อว่าอย่างไร

4. จงตรวจสอบว่าการสรุปผลในข้อ 4.1 - 4.8 สมเหตุสมผลหรือไม่

1) $p \rightarrow q$	2) $p \rightarrow q$
$\underline{\quad q}$	$\underline{\quad \sim q}$
$\therefore \sim p$	$\therefore p$
3) $p \rightarrow q$	4) $p \vee q$
$\underline{\quad \sim q}$	$\underline{\quad \sim p}$
$\therefore \sim p$	$\therefore q$
5) $p \vee q$	6) $p \rightarrow q$
$\underline{\quad \sim q}$	$\underline{\quad p}$
$\therefore p$	$\therefore q$
7) $p \rightarrow \sim q$	8) $\sim p \rightarrow q$
$\underline{\quad q}$	$\underline{\quad \sim p}$
$\therefore \sim p$	$\therefore q$

5. จงตรวจสอบว่าข้อสรุปในข้อ 1) – 6) เป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผลหรือไม่หากสมเหตุสมผลให้บอกชื่อแบบของการอ้างเหตุผล และถ้าไม่สมเหตุสมผลให้ตรวจสอบข้อคลาดเคลื่อนในการอ้างเหตุผล

1) ถ้าฉันถูก สลากออมสินแล้ว ฉันจะซื้อโทรทัศน์ใหม่
   ฉันถูกสลากออมสิน
   เพราะฉะนั้น ฉันจะซื้อโทรทัศน์ใหม่
2) ถ้า x^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว x เป็นจำนวนคี่
   x เป็นจำนวนคู่
   เพราะฉะนั้น x^2 เป็นจำนวนคู่
3) งูเห่าทุกตัวกลัวพังพอน
   สัตว์ที่กลัวพังพอนทุกตัวว่ายน้ำได้
   เพราะฉะนั้นงูเห่าทุกตัวว่ายน้ำได้

4) แมวทุกตัวออกลูกเป็นตัว
ในห้องนี้ไม่มีสัตว์ที่ออกลูกเป็นตัว
เพราะฉะนั้นในห้องนี้ไม่มีแมว

5) ถ้าฉันไม่จ่ายค่าทรัพย์สินส่วนกลาง แล้วหน้าบ้านฉันจะโดนตัดไฟฟ้า
ฉันไม่จ่ายค่าทรัพย์สินส่วนกลาง
เพราะฉะนั้นหน้าบ้านฉันโดนตัดไฟฟ้า

6) ถ้าเขตนี้ไม่มีตำรวจดูแล แล้วเขตนี้จะมีผู้ร้ายมาก
เขตนี้มีผู้ร้ายไม่มาก
เพราะฉะนั้นเขตนี้มีตำรวจดูแล

7) ถ้าเมืองหลวงมีรถไฟฟ้าใต้ดินไปยังฝั่งธนบุรี แล้วจะแก้ปัญหาการจราจรได้มาก
เมืองหลวงแก้ปัญหาการจราจรไม่ได้มาก
เพราะฉะนั้นเมืองหลวงไม่มีรถไฟฟ้าใต้ดินไปยังฝั่งธนบุรี

8) บริษัท PIT มีการบริการดี
บริษัทที่จัดระบบดี มีการบริการดี
เพราะฉะนั้น บริษัท PIT จัดระบบดี

9) ถ้าสมศรีชอบเรียนปรัชญา แล้วสมศรีจะชอบวิชาตรรกศาสตร์
สมศรีไม่ชอบเรียนปรัชญา
เพราะฉะนั้นสมศรีไม่ชอบวิชาตรรกศาสตร์

10) ถ้ามาลีทำงานล่วงเวลา เธอจะได้รับเงินเพิ่มขึ้น
มาลีไม่ได้รับเงินเพิ่มขึ้น
เพราะฉะนั้น มาลีไม่ทำงานล่วงเวลา

11) ถ้ามาลีไม่มีจักรยาน เธอจะต้องเดินไปปากซอย
มาลีไม่ต้องเดินไปปากซอย
เพราะฉะนั้น มาลีมีจักรยาน

12) ถ้า $2x - 4 = 12$ แล้ว $x = 8$
$x \neq 8$
เพราะฉะนั้น $3x - 4 \neq 12$

13) ถ้าหนูแจ๋วกินผักขม หนูแจ๋วจะฉลาด
หนูแจ๋วฉลาด
เพราะฉะนั้น หนูแจ๋วกินผักขม

14) ถ้าสมใจขี่จักรยานไปทำงาน สมใจจะช่วยชาติประหยัดเงิน
สมใจไม่ขี่จักรยานไปทำงาน
เพราะฉะนั้น สมใจไม่ช่วยชาติประหยัดเงิน

15) นักคณิตศาสตร์ทุกคนเป็นคนมีเหตุผล
คนมีเหตุผลทุกคนเป็นคนฉลาด
เพราะฉะนั้น นักคณิตศาสตร์ทุกคนเป็นคนฉลาด

16) ถ้าชาวนาไม่ได้น้ำจากคลองชลประทาน ต้นข้าวจะตาย
ต้นข้าวไม่ตาย
เพราะฉะนั้น ชาวนาได้น้ำจากคลองชลประทาน

6. จากข้อ 1) - 8) แต่ละข้อ โจทย์กำหนดข้อตั้งหรือสมมุติฐานมาให้ จงใช้ข้อตั้งทุกข้อหาข้อสรุปที่สมเหตุสมผล

1) ถ้าเธอพูดภาษาอังกฤษได้แล้วเธอจะได้เป็นฝ่ายต้อนรับ
ถ้าเธอเป็นฝ่ายต้อนรับแล้ว เธอจะรู้จักผู้คนมาก

2) ถ้าฉันขาดเงินลงทุน แล้วฉันจะไม่สามารถสร้างผลผลิตที่เป็นมาตรฐาน
ฉันสร้างผลผลิตที่เป็นมาตรฐาน

3) ถ้าเราไปดูดนตรี แล้ว เราจะได้เสื้อยืดที่ระลึก
เราไม่ได้เสื้อยืดที่ระลึก

4) $a = 0$ หรือ $b = 0$
$b \neq 0$

5) ถ้า $m n = 0$ แล้ว $m = 0$ หรือ $n = 0$
$m \neq 0$ และ $n \neq 0$

6) ถ้าแดดออก แล้วดอกไม้จะเหี่ยว
ถ้าดอกไม้เหี่ยวแล้ว จะขายดอกไม้ไม่ได้
ฉันจะมีเงินใช้ ถ้าขายดอกไม้ได้

7) ถ้าคุณเรียนจบปริญญาเอก แล้วคุณต้องทำงานด้านการเพิ่มผลผลิต
   ถ้าองค์กรไม่มั่นคง แล้ว คุณไม่ได้ทำงานด้านการเพิ่มผลผลิต
   องค์กรมั่นคง
8) ถ้าประชาชนมีงานทำ แล้ว รัฐบาลจะเก็บภาษีได้มาก
   ถ้าประชาชนมีงานทำ แล้ว ประชาชนจะไม่ยากจน
   ประชาชนมีงานทำ

2.6 ประโยคเปิด (open sentence) และตัวบ่งปริมาณ (quantifiers)

ประโยคเปิด คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร ไม่เป็นประพจน์ และเมื่อแทนค่าตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์

ตัวอย่าง ของประโยคเปิด

$x + 3 > 8$ เป็นประโยคเปิด

$(x + 4)(x - 7) = 0$ เป็นประโยคเปิด

เราใช้สัญลักษณ์ เช่น $P(x)$, $Q(x)$, … หรือ $P(x , y)$, $Q(x , y)$,… แทนประโยคเปิด เช่นกำหนด $P(x)$ แทน $x + 3 > 8$ หรือ $P(x , y)$ แทน x น้อยกว่า y เป็นต้น

ประโยคเปิดที่มีตัวบ่งปริมาณ และเอกภพสัมพัทธ์ เป็นประพจน์ โดยที่ตัวบ่งปริมาณประกอบด้วยคำต่าง ๆ เช่น สำหรับทุกตัว (all) ทุก ๆ (every) มีบางสิ่ง (some) และมี (there exists)

2.6.1 ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว หรือตัวบ่งปริมาณแสดงทั้งหมด (universal quantifiers)

ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว หรือตัวบ่งปริมาณแสดงทั้งหมด จะพาดพิงถึงสมาชิกทั้งหมดในเซต

พิจารณาข้อความต่อไปนี้

"วิศวกรทุกคนร่ำรวย"

เราสามารถเขียนประพจน์ข้างต้นนี้ได้เป็น "ถ้าบุคคลเป็นวิศวกรแล้วเขาจะร่ำรวย"

ถ้าเราแทนทั้งบุคคล และเขาด้วย x จะได้

"ถ้า x เป็นวิศวกร แล้ว x ร่ำรวย"

เราเรียกประโยคเช่นนี้ว่าประโยคเปิด เนื่องจาก ข้อความ "x เป็นวิศวกร" และ "x ร่ำรวย" ไม่สามารถหาค่าความจริงได้ แต่เมื่อแทน x ด้วยชื่อบุคคลใดบุคคลหนึ่ง จะบอกได้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ จึงเป็นประพจน์

เราใช้สัญลักษณ์ ที่เรียกว่าตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว (universal quantifier) "$\forall$" อ่านว่า all หรือสำหรับทุก เช่น สัญลักษณ์ $\forall x$ แทน สำหรับ x ทุกตัว

ให้ E เป็นเซตของวิศวกรทุกคน R เป็นเซตของคนร่ำรวยทุกคน ดังนั้น "$x \in E$" หมายถึง "x เป็นวิศวกร" "$x \in R$" หมายถึง "x เป็นคนร่ำรวย"

ดังนั้นประพจน์ "วิศวกรทุกคนร่ำรวย" เขียนแทนได้ด้วยสัญลักษณ์

$\forall x[x \in E \rightarrow x \in R]$

ซึ่งเป็นจริงก็ต่อเมื่อ $x \in E \rightarrow x \in R$ เป็นจริงสำหรับทุก x ในเอกภพสัมพัทธ์

ประโยค $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน P(x) ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริงทั้งหมด

ประโยค $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน P(x) ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ

บทนิยาม 2.5.1 ให้ P(x) เป็นประโยคเปิด แล้ว ประพจน์ "$\forall x$ P(x)" เป็นจริง ก็ต่อเมื่อแต่ละข้อความที่ได้จาก P(x) โดยการแทน x ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เป็นจริง สำหรับทุก x

ยกตัวอย่าง

$\forall x$ [x + 3 < x + 4] ประโยคเปิด คือ x + 3 < x + 4 เมื่อแทน x ด้วย 5 เราจะได้ 8 < 9 ซึ่งเป็นประพจน์ที่เป็นจริง

$\forall x\ [x^2 \leq x + 2]$ เป็นจริงสำหรับเอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นจำนวนจริงตั้งแต่ -1 ถึง 2

แต่ $\forall x\ [x^2 \leq x + 2]$ เป็นเท็จสำหรับเอกภพสัมพัทธ์ที่เป็นจำนวนจริง เช่น จะเห็นได้ว่า เมื่อแทน x ด้วย 3 ใน $x^2 \leq x + 2$ จะได้ $9 \leq 5$ ซึ่งเป็นเท็จ

พิจารณาประพจน์สองประพจน์ต่อไปนี้

"วิศวกรทุกคนร่ำรวย" แทนด้วยสัญลักษณ์

$\forall x[x \in E \rightarrow x \in R]$

และ "คนร่ำรวยทุกคนอยู่บ้านหลังใหญ่" แทนด้วยสัญลักษณ์

$\forall x[x \in R \rightarrow x \in B]$

จากประพจน์สองประพจน์นี้ จะได้ข้อสรุป

"วิศวกรทุกคนอยู่บ้านหลังใหญ่" แทนด้วยสัญลักษณ์

$\forall x[x \in E \rightarrow x \in B]$

ซึ่งเป็นข้อสรุปที่สมเหตุสมผล เนื่องจากสอดคล้องกับการอ้างเหตุผลถ่ายทอดดังนี้

ข้อตั้ง $p \rightarrow q$

ข้อตั้ง $q \underline{\rightarrow} r$

ข้อสรุป $\therefore p \rightarrow r$

ในตอนนี้จะได้กล่าวถึงสมบัติมูลฐานของ ตัวบ่งปริมาณสำหรับทุกตัว ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.6.1 ให้ $P(x)$ เป็นประโยคเปิด และให้ a เป็นสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วประพจน์ $\forall x[P(x)] \rightarrow P(a)$ เป็นจริง

พิสูจน์ ประพจน์ $\forall x[P(x)]$ จะเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง

1. สมมุติ $\forall x[P(x)]$ เป็นจริง โดยบทนิยาม 2.5.1 จะได้ว่า เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ประพจน์ที่เป็นจริง ดังนั้น $P(a)$ เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow P(a)$ เป็นจริง

2. สมมุติ $\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\forall x[P(x)] \rightarrow P(a)$ เป็นจริง เนื่องจากประพจน์นี้อยู่ในรูป

$p \rightarrow q$ และเราให้ p เป็นเท็จ จะได้ $p \rightarrow q$ เป็นจริง

แบบฝึกหัด 2.6 (1)

1. ให้ S แทนเซตของนักศึกษามหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ L แทนนักศึกษาสนใจการเมือง จงแสดงประพจน์ต่อไปนี้ด้วยคำพูด

1) $\forall x[x \in S]$

2) $\forall y[y \in L]$

3) $\forall z[\sim(z \in L)]$

4) $\sim\forall z[\sim(z \in L)]$

5) $\forall t[t \in S \rightarrow t \in L]$

6) $\forall u[u \in L \rightarrow u \in S]$

7) $\forall x[x \in S \rightarrow x \in L] \wedge \forall y[y \in L \rightarrow y \in S]$

8) $\forall x[x \in S \leftrightarrow x \in L]$

2. จงแสดงว่าข้อความต่อไปนี้สมเหตุสมผล :

1) ผู้ชายทุกคนสนใจทำงานการเมือง ; นายขนมต้มเป็นผู้ชาย ดังนั้นนายขนมต้มสนใจทำงานการเมือง

2) นักศึกษาทุกคนได้รับทุนการศึกษา ผู้ได้รับทุนการศึกษาทุกคนเรียนระดับปริญญาโท ดังนั้น นักศึกษาทุกคนเรียนระดับปริญญาโท

3. ให้ P(x) เป็นประโยคเปิด และ m และ n เป็นสมาชิกของเอกภพสัมพัทธ์ จงแสดงว่า ประพจน์ “$\forall x[P(x)] \rightarrow P(m) \wedge P(n)$” เป็นสัจนิรันดร์

4. ให้ P(x) และ Q(x) เป็นประโยคเปิด จงแสดงว่าประพจน์
“$\forall y[P(y) \wedge Q(y)] \rightarrow (\forall y[P(y)] \wedge \forall y[Q(y)])$” เป็นสัจนิรันดร์

5. ให้ P(z) และ Q(z) เป็นประโยคเปิด จงแสดงว่าประพจน์
“$(\forall z[P(z)] \wedge \forall z\,[Q(z)\,] \rightarrow \forall z[P(z) \wedge Q(z)]$” เป็นสัจนิรันดร์

6. ให้ P(x) และ Q(x) เป็นประโยคเปิด จงแสดงว่าประพจน์
“$\forall x[P(x) \rightarrow Q(x)] \rightarrow (\forall x[P(x)] \wedge \forall x[Q(x)])$” เป็นสัจนิรันดร์

7. ให้ P(x) และ Q(x) เป็นประโยคเปิด จงแสดงว่าประพจน์
“$(\forall x[P(x)] \rightarrow \forall x[Q(x)]) \rightarrow \forall x[P(x)] \rightarrow Q(x)]$” ไม่เป็นสัจนิรันดร์

2.6.2 ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง (The Existential Quantifier)

ตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง จะพาดพิงถึงมีสมาชิกของเซต ตั้งแต่หนึ่ง หรือมากกว่า หรืออาจรวมความถึงทั้งหมดในเซตก็ได้

พิจารณาประพจน์ "นักเรียนบางคนเรียนเคมี" บางหรือบ้าง (some) ในทางคณิตศาสตร์หมายถึงมีตั้งแต่หนึ่งขึ้นไป

ให้ S เป็นเซตของนักเรียนทุกคน และให้ C เป็นเซตของคนที่เรียนเคมีทุกคน ดังนั้น ประพจน์ "นักเรียนบางคนเรียนเคมี" เป็นจริงถ้าประโยคเปิดในรูป "$x \in S \wedge x \in C$" ก่อให้เกิดประพจน์ที่เป็นจริง ตั้งแต่หนึ่งประพจน์ ขึ้นไป

สำหรับตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง ซึ่งยืนยันว่ามีอย่างน้อยหนึ่ง ใช้สัญลักษณ์ $\exists$ แทนตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง (The Existential Quantifier)

ดังนั้น เราจะได้ $\exists x[x \in S \wedge x \in C]$ ซึ่งอ่านว่า "มีอย่างน้อยหนึ่ง x ซึ่ง $x \in S \wedge x \in C$" ซึ่งสัญลักษณ์ $\exists x[x \in S \wedge x \in C]$ เป็นสัญลักษณ์แทนประพจน์ "นักเรียนบางคนเรียนเคมี"

ประโยค $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน P(x) ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นจริง

ประโยค $\exists x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ก็ต่อเมื่อ แทนตัวแปร x ใน P(x) ด้วยสมาชิกแต่ละตัวในเอกภพสัมพัทธ์แล้วได้ประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จทั้งหมด

บทนิยาม 2.6.2 ให้ P(x) เป็นประโยคเปิด แล้วประพจน์ $\exists x[P(x)]$ กล่าวว่าเป็นจริงก็ต่อเมื่อแต่ละข้อความที่ได้จาก P(x) โดยการแทนค่า x ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เป็นประพจน์และมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์จากประพจน์เหล่านี้ที่เป็นจริง

2.6.3 สมมูล และนิเสธของประโยคที่มีตัวบ่งปริมาณ

ประโยคเปิด เช่น $P(x) \rightarrow Q(x)$ เมื่อแทน x ด้วยสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์จะได้ประพจน์ในรูป $p \rightarrow q$ แต่ $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$ ดังนั้น เราจะกล่าวว่า $P(x) \rightarrow Q(x)$ สมมูลกับ $\sim P(x) \vee Q(x)$

รูปแบบของประโยคเปิดที่สมมูลกัน เช่น

$[P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow P(x)]$ สมมูลกับ $Q(x) \leftrightarrow P(x)$

$P(x) \wedge Q(x)$ สมมูลกับ $Q(x) \wedge P(x)$

$P(x) \vee Q(x)$ สมมูลกับ $Q(x) \vee P(x)$

$P(x) \wedge [Q(x) \vee R(x)]$ สมมูลกับ $[P(x) \wedge Q(x)] \vee [P(x) \wedge R(x)]$

$P(x) \vee [Q(x) \wedge R(x)]$ สมมูลกับ $[P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee R(x)]$

จากสมมูลของประโยคเปิดเมื่อเติมตัวบ่งปริมาณชนิดเดียวกันไว้ข้างหน้า จะได้รูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน เช่น

$\forall x\, [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [Q(x) \leftrightarrow P(x)]$

$\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\, [Q(x) \wedge P(x)]$

$\forall x\, [P(x) \wedge [Q(x) \vee R(x)]\,]$สมมูลกับ $\forall x\, [P(x) \wedge Q(x)] \vee [P(x) \wedge R(x)]$

$\exists x\, [P(x) \rightarrow Q(x)] \wedge [Q(x) \rightarrow P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [Q(x) \leftrightarrow P(x)]$

$\exists x\, [P(x) \vee Q(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [Q(x) \vee P(x)]$

$\exists x\, [P(x) \vee [Q(x) \wedge R(x)]\,]$สมมูลกับ $\exists x\, [[P(x) \vee Q(x)] \wedge [P(x) \vee R(x)]]$

$\exists x\, [P(x) \rightarrow \forall x\, Q(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [\sim P(x) \vee \forall x\, Q(x)]$

ทฤษฎีบท 2.6.3.1 และ ทฤษฎีบท 2.6.3.2 ที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นรูปแบบของประพจน์ที่สมมูลกัน และเป็นนิเสธกัน

ทฤษฎีบท 2.6.3.1 $\sim\forall x\, [P(x)]$ สมมูลกับ $\exists x\, [\sim P(x)]$

เขียนในรูปสัญลักษณ์ $\sim\forall x[P(x)] \equiv \exists x[\sim P(x)]$

พิสูจน์ เราต้องแสดงว่าประพจน์ $\sim\forall x[P(x)]$ และประพจน์ $\exists x[\sim P(x)]$ สมมูลกัน นั่นคือมีค่าความจริงเหมือนกันในแต่ละกรณี

$\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ ในกรณีที่มีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่มีค่าความจริงเป็นเท็จ หรือมีอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่ได้จากการแทนค่า x ใน $\sim P(x)$ ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง ดังนั้น $\exists x[\sim P(x)]$ เป็นจริง ขั้นต่อไปสมมุติว่า

$\sim\forall x[P(x)]$ เป็นเท็จ ดังนั้น $\forall x[P(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง ดังนั้น แต่ละประพจน์ที่ได้จากการแทนค่า x ใน P(x) ด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ เป็นจริง และนั่นคือ แต่ละประพจน์ที่ได้จากการแทนค่า x ใน ~P(x) เป็นเท็จ ดังนั้น $\exists x[\sim P(x)]$ เป็นเท็จ

ทฤษฎีบท 2.6.3.2 $\sim\exists x\,[P(x)]$ สมมูลกับ $\forall x\,[\sim P(x)]$

เขียนในรูปสัญลักษณ์ $\sim\exists x\,[P(x)] \equiv \forall x\,[\sim P(x)]$

ให้เขียนแสดงการพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 2.6.3.1 กล่าวเป็นคำพูดว่า สองข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

"ไม่เป็นความจริงที่ว่า สำหรับทุก $a \in A$, P(a) เป็นจริง"

และ " มี $a \in A$ ซึ่ง P(a) เป็นเท็จ"

เช่นเดียวกัน สองข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

"ไม่เป็นความจริงที่ว่า มี $a \in A$ ซึ่ง P(a) เป็นจริง"

และ "สำหรับทุก $a \in A$, P(a) เป็นเท็จ"

ตัวอย่างที่ 1

1) ประพจน์ $\exists x[x + 2 > 8]$, U = N เป็นประพจน์ที่เป็นจริง เนื่องจากเมื่อแทน x ใน x + 2 > 8 ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน U แล้วทำให้ประพจน์เป็นจริง เช่น แทน x ด้วย 7 จะได้ 7 + 2 > 8 เป็นจริง

2) ประพจน์ $\exists x[x + 2 > 8]$, U = I^- เป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ เนื่องจากเมื่อแทน x ใน x + 2 > 8 ด้วยสมาชิกแต่ละตัว ใน U แล้วได้ประพจน์เป็นเท็จทั้งหมด

3) ประพจน์ $\exists x[x^2 + 1 < 7]$, U = {1 , 2 , 3 , 4} เป็นประพจน์ที่เป็นจริง เนื่องจากเมื่อแทน x ใน $x^2 + 1 < 7$ ด้วยสมาชิกอย่างน้อยหนึ่งตัวใน U แล้วทำให้ประพจน์เป็นจริง เช่น แทน x ด้วย 2 จะได้ 4 + 1 < 7 เป็นจริง

4) ประพจน์ $\exists x[x^2 + 1 < 7]$, U = {3 , 4 , 5} เป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ เนื่องจากเมื่อแทน x ใน $[x^2 + 1 < 7]$ ด้วยสมาชิกแต่ละตัว ใน U แล้วได้ประพจน์เป็นเท็จทั้งหมด

ตัวอย่างที่ 2 จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ เอกภพสัมพัทธ์คือ จำนวนจริง

1) $\exists x[|x| = x]$

2) $\exists x[x^2 = x]$

3) $\forall x[x + 1 > |x|]$

4) $\forall x[|x + 3| \geq |x|]$

ตอบ 1) จริง เนื่องจากสำหรับ x ที่มากกว่าหรือเท่ากับศูนย์ เช่น ให้ x= 5 จะได้ $|x| = x$

2) จริง ถ้าให้ $x = 0$ จะได้ $x^2 = x$

3) เท็จ เนื่องจากเมื่อให้ $x = -5$ จะได้ $-5 + 1 > 5$ ซึ่งเป็นเท็จ

4) เท็จ เนื่องจากเมื่อให้ $x = -2$ จะได้ $1 \geq 2$ ซึ่งเป็นเท็จ

ตัวอย่างที่ 3 จงหานิเสธของ ประพจน์ในแต่ละข้อในตัวอย่างที่ 1

ตอบ 1) $\sim\exists x[|x| = x] \equiv \forall x[\sim(|x| = x)] \equiv \forall x[|x| \neq x]$

2) $\sim\exists x[x^2 = x] \equiv \forall x[\sim(x^2 = x)] \equiv \forall x[x^2 \neq x]$

3) $\sim\forall x[x+1 > |x|] \equiv \exists x[\sim(x + 1 > |x|)] \equiv \exists x[x + 1 \leq |x|]$

4) $\sim\forall x[|x+3| \geq |x|] \equiv \exists x[\sim(|x + 3| \geq |x|)] \equiv \exists x[|x + 3| < |x|]$

นิเสธของข้อความบ่งปริมาณ

จากที่เรียนมาแล้ว เราทราบว่า $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

เช่นเดียวกัน

$$\sim(\forall x[P(x)] \wedge \exists y[Q(y)]) \equiv \sim\forall x[P(x) \vee \sim\exists y[Q(y)]$$

$$\equiv \exists x[\sim P(x) \vee \forall y \sim Q(y)]$$

$$\sim(\forall x[P(x)] \vee \exists y[Q(y)]) \equiv \sim\forall x[P(x)] \wedge \sim\exists y[Q(y)]$$

$$\equiv \exists x[\sim P(x)] \wedge \forall y[\sim Q(y)]$$

ตัวอย่างที่ 4 จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) ถ้าสิงโตหิวอาหาร แล้ว สิงโตจะไล่ฆ่ากวาง

2) วันนี้สิงโตอิ่ม และกวางออกหากิน

วิธีทำ 1) สังเกตว่า $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ ดังนั้น

ไม่เป็นความจริงที่ว่าถ้าสิงโตหิวอาหารแล้ว สิงโตจะไล่ฆ่ากวาง ซึ่งสมมูลกับสิงโตหิวอาหาร แต่สิงโตไม่ไล่ฆ่ากวาง

2) สังเกตว่า $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ ดังนั้น

ไม่เป็นความจริงที่ว่าวันนี้สิงโตอิ่ม และกวางออกหากิน ซึ่งสมมูลกับสิงโตไม่อิ่ม หรือ กวางไม่ออกหากิน

ต่อไปนี้เป็นบทแทรกที่พิสูจน์ได้โดยง่าย

บทแทรก 2.6.2.1 $\sim\forall x[\sim P(x)] \equiv \exists x[P(x)]$

บทแทรก 2.6.2.2 $\sim\exists x[\sim P(x)] \equiv \forall x[P(x)]$

บทแทรก 2.6.2.3 $\sim\exists x[P(x)] \equiv \forall x[\sim P(x)]$

เพื่อแสดงค่าของตัวบ่งปริมาณ ให้เราพิจารณาข้อความต่อไปนี้

"แพทย์บางคนมีบ้านสวย คนมีบ้านสวยทุกคนมีความสุขในชีวิต เพราะฉะนั้นแพทย์บางคนมีความสุขในชีวิต" วิเคราะห์ข้อความ ให้ E แทนเซตของแพทย์ทุกคน R แทนเซตของคนทุกคนที่มีบ้านสวย และ H แทนเซตของคนทุกคนที่มีความสุขในชีวิต ดังนั้นจากข้อความข้างต้นแปลงเป็นสัญลักษณ์ได้ดังนี้

สมมุติฐาน : $\exists x[x \in E \wedge x \in R]$, $\forall y[y \in R \rightarrow y \in H]$

ข้อสรุป : $\exists z[z \in E \wedge x \in H]$

เพื่อแสดงว่าข้อความนี้สมเหตุสมผล เราต้องแสดงว่าข้อสรุปเป็นจริงในแต่ละกรณีของค่าความจริง ภายใต้สมมุติฐานทั้งสองข้อ เป็นจริง ซึ่ง $\exists x[x \in E \wedge x \in R]$ เป็นจริง เพราะฉะนั้นจะมีบุคคล เช่น นายแพทย์เกษม ซึ่งค่าความจริงของ "นายแพทย์เกษม $\in$ E $\wedge$ นายแพทย์เกษม $\in$ R" เป็นจริง ซึ่งหมายถึงว่า ค่าความจริงของนายแพทย์เกษม $\in$ E เป็นจริง และค่าความจริงของนายแพทย์เกษม $\in$ R เป็นจริง เนื่องจาก $\forall y[y \in R \rightarrow$

$y \in H]$ เป็นจริง ในกรณีค่าความจริงนี้ จะได้ว่า นายแพทย์เกษม $\in R \rightarrow$ นายแพทย์เกษม $\in H$" เป็นจริง เพราะฉะนั้น ค่าความจริงของ นายแพทย์เกษม $\in H$ เป็นจริง ดังนั้น $\exists z[z \in E \wedge z \in H]$ เป็นจริงในกรณีของค่าความจริงที่กำหนดให้ซึ่งแสดงว่าข้อความที่กล่าวนี้ สมเหตุสมผล

การแสดงข้อความที่ไม่สมเหตุสมผล ให้พิจารณาข้อความต่อไปนี้ :

"นักเรียนพยาบาลทุกคนรักอาชีพพยาบาล ; คนรักอาชีพพยาบาลบางคนเป็นน่ารัก ; เพราะฉะนั้น นักเรียนพยาบาลบางคนน่ารัก"

ให้ S แทนเซตของนักเรียนพยาบาลทุกคน

C แทนเซตของคนรักอาชีพพยาบาล

G แทนเซตของคนน่ารักทุกคน

จากข้อความข้างต้นจะได้

สมมุติฐาน : $\forall x[x \in S \rightarrow x \in C]$; $\exists x[x \in C \wedge x \in G]$

ข้อสรุป : $\exists x[x \in S \wedge x \in G]$

เพื่อแสดงว่าข้อความนี้ไม่สมเหตุสมผล เราต้องสร้างกรณีค่าความจริงภายใต้สมมุติฐานทั้งสองข้อ เป็นจริงและข้อสรุปเป็นเท็จ ซึ่งเป็นเรื่องง่าย

ให้ สมฤดี $\in S$ เป็นเท็จ สมฤดี $\in C$ เป็นจริง และ สมฤดี $\in G$ เป็นจริง ทำให้สมมุติฐานที่ สองเป็นจริง กำหนดค่าความจริงเพื่อให้แต่ละประพจน์ที่ได้จากการแทน x ด้วยสมาชิกในเซต S เป็นเท็จ และแต่ละประพจน์ที่ได้จากการแทน x ด้วยสมาชิก ในเซต G เป็นจริง ซึ่งจะทำให้สมมุติฐานทั้งสองเป็นจริง แต่ผลสรุปเป็นเท็จ ซึ่งแสดงว่าข้อความข้างต้นไม่สมเหตุสมผล

ตอนนี้ให้เราพิจารณาทฤษฎีเกี่ยวกับตัวบ่งปริมาณสำหรับตัวมีจริง

ทฤษฎีบท 2.6.3.2 ให้ P(x) และ Q(x) เป็นประโยคเปิดใด ๆ ดังนั้น ประพจน์

$\exists x[P(x) \wedge Q(x)] \rightarrow \exists x[P(x)] \wedge \exists x[Q(x)]$ เป็นสัจนิรันดร์

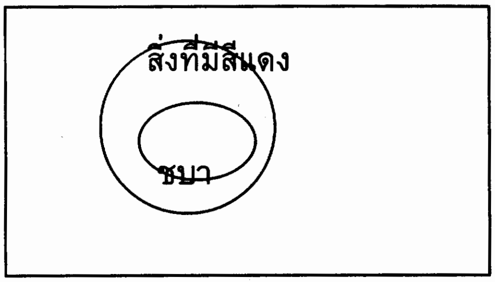
พิสูจน์ พิจารณากรณี $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นเท็จ จะได้ประพจน์แบบมีเงื่อนไขเป็นจริง

พิจารณากรณี $\exists x[P(x) \wedge Q(x)]$ เป็นจริง จะได้ว่า $\exists x[P(x)]$ และ $\exists x[Q(x)]$ เป็นจริงทั้งคู่ จะได้ประพจน์แบบมีเงื่อนไขเป็นจริง

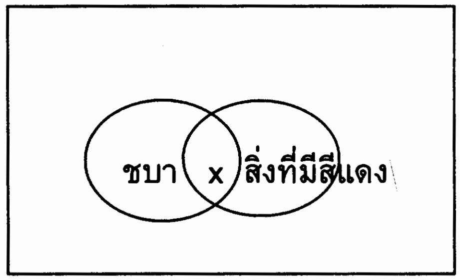
ตัวอย่างอื่น ๆ ของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณแสดงสมาชิกทั้งหมดของเซต หรือแสดงสมาชิกบางส่วนของเซต ดังนี้

1) ดอกชบาทั้งหมดมีสีแดง (ทั้งหมด)
2) นักเรียนทุกคนสอบผ่านคณิตศาสตร์ (ทั้งหมด)
3) สำหรับจำนวนเต็ม x แต่ละจำนวน x + 0 = x (ทั้งหมด)
4) ดอกชบาบางดอกมีสีแดง (มีอยู่)
5) มีจำนวนนับที่น้อยกว่าสามที่เป็นจำนวนคู่ (มีอยู่)
6) มีผู้หญิงที่สูงกว่า 190 เซนติเมตร (มีอยู่)

เราสามารถใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แสดงประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ ยกตัวอย่างภาพประกอบ 2.6.3.1 แสดงประพจน์ในข้อ 1) ภาพประกอบ 2.6.3.2 แสดงประพจน์ ในข้อ 4)



ภาพประกอบ 2.6.3.1



ภาพประกอบ 2.6.3.2

จากภาพประกอบ 2.6.3.2 x ที่อยู่ในรูปเพื่อแสดงว่าต้องมีอย่างน้อยหนึ่งสมาชิกของเซตของดอกชบาที่เป็นสีแดง

แบบฝึกหัด 2.6.3

1. กำหนด A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ ในเอกภพสัมพัทธ์ A

1) $\exists x[x + 3 = 5]$
2) $\forall x[x + 3 < 10]$

3) $\forall x[x + 3 < 9]$

4) $\exists x[x + 3 < 9]$

2. จงหานิเสธของประพจน์ในแต่ละข้อย่อยของข้อ 1)

3. จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ในแต่ละข้อต่อไปนี้เมื่อกำหนด R เป็นเอกภพสัมผัส

1) $\exists x[x^2 = x]$

2) $\exists x[x^2 - 2x + 5 = 0]$

3) $\forall x[x^2 = x]$

4) $\forall x[x - 2 < x]$

4. กำหนด A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1) $\exists x[x + 3 < 4]$ 2) $\exists x[x + 3 > 4]$

3) $\forall x[\frac{1}{2}x < 10]$ 4) $\forall x[x^2 + 2x \geq 3]$

5. จงหานิเสธของประพจน์ในแต่ละข้อย่อยของข้อ 4)

6. จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) นักศึกษาทุกคนพักในหอพักนักศึกษา

2) นักศึกษาวิชาเอกคณิตศาสตร์ทุกคนเป็นผู้ชาย

3) นักศึกษาบางคนขับรถเก๋งมาเรียนหนังสือ

7. จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

1) ถ้าครูไม่อยู่ปฏิบัติงานแล้วนักเรียนบางคนจะไม่อ่านหนังสือ

2) นักเรียนทุกคนทำการบ้านเสร็จ และครูอยู่ปฏิบัติงาน

3) นักเรียนบางคนทำการบ้านไม่เสร็จ หรือครูไม่อยู่ปฏิบัติงาน

8. จงยกตัวอย่างสำหรับแต่ละประพจน์ต่อไปนี้ เพื่อแสดงว่าประพจน์เป็นเท็จ เมื่อกำหนดให้ A = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์

1) $\forall x[x + 3 < 12]$

2) $\forall x$[x เป็นจำนวนเฉพาะ]

3) $\forall x[x^2 > 1]$

4) $\forall x$[x เป็นจำนวนคู่]

9. จงยกตัวอย่างสำหรับแต่ละประพจน์ต่อไปนี้ เพื่อแสดงว่าประพจน์เป็นเท็จ เมื่อกำหนดให้ A = {1 , 2 , 3 , 5 , 7 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์

1) $\forall x$[x เป็นจำนวนเฉพาะ]

2) $\forall x$[x เป็นจำนวนคี่]

3) $\forall x[|x| = x]$

10. จงตรวจสอบความสมเหตุสมผลของการอ้างเหตุผลต่อไปนี้

1) รถสามล้อ ออกแบบสำหรับลูกค้าที่เป็นแม่ค้า ไม่มีสิ่งที่ออกแบบสำหรับลูกค้าที่เป็นแม่ค้ามีคุณภาพสูง เพราะฉะนั้นไม่มีรถสามล้อที่มีคุณภาพสูง

2) ไม่มีทหารที่ไม่ออกกำลังกาย ครูบางคนออกกำลังกาย ดังนั้นทหารบางคนเป็นครู

3) แมวบางตัวอาศัยอยู่บนภูเขา ทุกสิ่งที่อาศัยอยู่บนภูเขาเป็นค่าง เพราะฉะนั้นแมวบางตัวเป็นค่าง

4) รถเก๋งบางคันใช้น้ำมันดีเซล รถราชการบางคันใช้น้ำมันเบนซิน ไม่มีรถเก๋งที่เป็นรถราชการ เพราะฉะนั้นรถราชการบางคันไม่ใช้น้ำมันเบนซิน

5) แพทย์ทุกคน สุขภาพดี ประชาชนที่สุขภาพดีทุกคน เป็นคนฉลาด คนที่ฉลาดบางคนเป็นครู เพราะแพทย์ทุกคนเป็นครู

6) คนงานบางคนเกียจคร้าน ไม่มีคนที่เกียจคร้านร่ำรวย ดังนั้น ไม่มีคนงานร่ำรวย

2.7 ประพจน์ที่เกี่ยวข้องกับตัวบ่งปริมาณหลาย ๆ ตัว

หัวข้อนี้จะพิจารณาประโยคเปิด p(x , y ,...) ซึ่งมีตัวแปรมากกว่าหนึ่งตัว ซึ่งนิพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณสำหรับแต่ละตัวแปรเช่น

$\forall x \exists y[P(x , y)]$ หรือ $\exists x \forall y \forall z [P(x , y , z)]$

เป็นประพจน์ และจะมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง

พิจารณาตัวอย่างประพจน์

กำหนดจำนวน x จะมีจำนวน y ซึ่ง x + y = 1 และกำหนดสัญลักษณ์

$\forall x[\exists y[x + y = 1]]$

ดังนั้นประพจน์ที่กำหนดให้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ $\exists y[x + y = 1]$ เป็นจริง ยกตัวอย่างแทน x ด้วย 2 เราจะได้ประพจน์ $\exists y[2 + y = 1]$ ซึ่งเป็นจริงก็ต่อเมื่อ y = -1 ทำนอง

เดียวกันแต่ละประพจน์ที่ได้จาก $\exists y[x + y = 1]$ สำหรับแต่ละค่าของ x ในเอกภพสัมพัทธ์สามารถแสดงว่าเป็นจริง ดังนั้น $\forall x[\exists y[x + y = 1]]$ เป็นจริง

พิจารณาประพจน์

มีจำนวน x ซึ่ง $x \cdot y = 0$ เมื่อ y เป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง ประพจน์นี้แสดงในรูปสัญลักษณ์ด้วย $\exists x[\forall y[x \cdot y = 0]]$

ประพจน์นี้เป็นจริงก็ต่อเมื่อ ประพจน์ที่ได้จากประโยคเปิด $\forall y[x \cdot y = 0]$ เป็นประพจน์ที่เป็นจริง เมื่อ แทน x ด้วย 0 เราจะได้ประพจน์ $\forall y[0 \cdot y = 0]$ ประโยคเปิด $0 \cdot y = 0$ ทำให้ได้ประพจน์ที่เป็นจริง เพราะฉะนั้น $\forall y[0 \cdot y = 0]$ เป็นจริง ดังนั้น $\exists x[\forall y[x \cdot y = 0]]$ เป็นจริง

พิจารณาประพจน์ที่เป็นเท็จ

มีจำนวน y ซึ่ง $x + y = 0$ เมื่อใดก็ตามที่ x เป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง ประพจน์นี้กำหนดได้โดย $\exists y[\forall x[x + y = 0]]$

เราต้องการพิสูจน์ว่าประพจน์ที่กำหนดให้เป็นเท็จ

สมมุติว่า ประพจน์เป็นจริง ดังนั้นประโยคเปิด $\forall x[x + y = 0]$ ก่อกำเนิดอย่างน้อยหนึ่งประพจน์ที่เป็นจริง ให้ a เป็นจำนวนจำนวนหนึ่ง เมื่อแทน y ด้วยค่า a จะได้ $\forall x[x + a = 0]$ เป็นประพจน์ ดังนั้น $\forall x[x + a = 0]$ เป็นจริง ตามสมมุติฐาน แต่ประโยคเปิด $x + a = 0$ จะก่อให้เกิดประพจน์ที่เป็นจริงเฉพาะเมื่อ แทนค่า x ด้วย $1 + (-a)$ เราจะได้ประพจน์ $[1 + (-a) + a = 0]$ ดังนั้น $\exists y[\forall x[x + y = 0]]$ จึงเป็นเท็จ

ต่อไปในการเขียนประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณหลาย ๆ ตัว เพื่อความสะดวกเราจะเขียน โดยละวงเล็บบางวงเล็บเช่นจะเขียน $\exists y \forall x[P(x , y)]$ แทน $\exists y[\forall x[P(x , y)]]$

จะเขียน $\forall x \exists y[P(x , y)]$ แทน $\forall x[\exists y[P(x , y)]]$

ในรูปทั่วไป เราจะกล่าวว่าตัวบ่งปริมาณทางซ้ายของวงเล็บใหญ่เป็นตัวเชื่อมหลักของประพจน์ ตัวอย่างเช่น $\forall x \forall y \forall z[x + (y + z) = (x + y) + z]$ หมายถึง $\forall x[\forall y[\forall z[x + (y + z) = (x + y) + z]]]$

ตัวอย่างที่ 1 จงตรวจสอบค่าความจริงของแต่ละประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อ { 1 , 2 , 3 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์

1) $\exists x \forall y[x^2 < y + 2]$

2) $\forall x \exists y[x^2 + y^2 < 13]$

3) $\forall x \forall y[x^2 + y^2 < 10]$

วิธีทำ 1) เป็นจริง เช่นถ้า $x = 1$ แล้ว $1 < y + 2$ สำหรับแต่ละค่าของ y ซึ่งเป็นจำนวน ในเอกภพสัมพัทธ์

2) เป็นจริง เช่น ให้ $y = 1$ ดังนั้น $x^2 + 1 < 13$ เป็นจริงสำหรับแต่ละค่าของ x ซึ่งเป็นจำนวนในเอกภพสัมพัทธ์

3) เป็นเท็จ เนื่องจาก ถ้าแทน x ด้วย 2 และแทน y ด้วย 3 จะได้ $2^2 + 3^2 = 13$ ซึ่งไม่น้อยกว่า 10

ตัวอย่างที่ 2 กำหนด A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงตรวจสอบว่าประโยคต่อไปนี้ เป็นประพจน์หรือประโยคเปิด ถ้าเป็นประพจน์จงหาค่าความจริงของประพจน์ ถ้าเป็นประโยคเปิด จงหาค่าความจริงของแต่ละประพจน์ ในเอกภพสัมพัทธ์ A

1) $\forall x \exists y[x + y < 8]$ 2) $\forall x \forall y[x + y < 12]$

3) $\forall x[x + y < 10]$ 4) $\exists y[x + y < 10]$

วิธีทำ 1) $\forall x \exists y[x + y < 8]$

ประโยคเปิดในสองตัวแปรมีตัวบ่งปริมาณทั้งสองตัว ดังนั้นจึงเป็นประพจน์ และเป็นประพจน์ที่เป็นจริง เนื่องจาก จะมี y เช่น y = 1 ซึ่ง

$x + 1 < 8$ เป็นจริง สำหรับแต่ละค่าของ $x \in A$

2) $\forall x \forall y[x + y < 12]$

ประโยคเปิดในสองตัวแปรมีตัวบ่งปริมาณทั้งสองตัว ดังนั้นจึงเป็นประพจน์ และเป็นประพจน์ที่เป็นเท็จ เนื่องจาก เมื่อ $x = 6$ และ $y = 6$ จะได้ $x + y = 12$ ไม่น้อยกว่า 12

3) $\forall x[x + y < 10]$

ประโยคเปิดในสองตัวแปรมีตัวบ่งปริมาณเพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นจึงเป็นประโยคเปิด และ จะมีค่า y ที่ทำให้ประโยคเป็นจริงคือ y ที่เป็นสมาชิกของ { 1 , 2 , 3 }

4) $\exists y[x + y < 10]$

ประโยคเปิดในสองตัวแปรมีตัวบ่งปริมาณเพียงตัวแปรเดียว ดังนั้นจึงยังคงเป็นประโยคเปิด และ จะมีค่า x ที่ทำให้ประโยคเป็นจริง เป็นสมาชิกทุกตัวในเซต A

ทฤษฎีบท 2.7.1 ให้ P(x , y) เป็นประโยคเปิดที่เกี่ยวข้องกับสองตัวแปร แล้วประพจน์

$\exists x \forall y[P(x , y)] \rightarrow \forall y \exists x[P(x , y)]$ เป็นสัจนิรันดร์

พิสูจน์ พิจารณาค่าความจริงแต่ละกรณี ซึ่ง $\exists x \forall y[P(x , y)]$ เป็นจริง จะได้ว่ามี a ในเอกภพสัมพัทธ์ ซึ่งประพจน์ $\forall y[P(a , y)]$ เป็นจริง ดังนั้น ตัวบ่งปริมาณในรูป P(a , y) ก่อกำเนิด เฉพาะประพจน์ที่เป็นจริง ซึ่งหมายถึงว่าประพจน์ P(a , b) เป็นจริง เมื่อใดก็ตามที่ b เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ แต่ประพจน์ $\forall y \exists x[P(x , y)]$ เป็นจริงก็ต่อเมื่อ ประพจน์ $\exists x[P(x , y)]$ ก่อกำเนิดเพียงประพจน์ที่เป็นจริง ให้ b เป็นสมาชิกใด ๆ ในเอกภพสัมพัทธ์ เราจะแสดงว่าประพจน์ $\exists x[P(x , b)]$ เป็นจริง แทน x ด้วย a ในประโยคเปิด P(x , y) เราจะได้ P(a , b) เป็นประพจน์ที่เป็นจริง เพราะฉะนั้น ประพจน์ $\exists x[P(x , b)]$ เป็นจริง เมื่อใดก็ตามที่ b เป็นสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์

แบบฝึกหัด 2.7

1. คำนวณค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อเอกภพสัมพัทธ์ เป็นเซตของจำนวนจริง

   1) $\forall x \forall y[x \cdot y = y \cdot x]$
   2) $\forall x \forall y[x < y]$
   3) $\forall x \exists y[x < y]$
   4) $\forall x \forall y[x < y \rightarrow x - 6 < y - 6]$
   5) $\exists x \forall y[x < y]$
   6) $\forall x \forall y \forall z[x(yz) = (xy)z]$
   7) $\forall x \forall y \forall z [x(y + z) = xy + xz]$
   8) $\forall x[x \cdot x = 3]$
   9) $\exists x[x \cdot x = 3]$

10) $\forall x[x \cdot x = 3] \rightarrow \exists x[x \cdot x = 3]$

2. จงตรวจสอบค่าความจริงของแต่ละประพจน์ต่อไปนี้ เมื่อ { 1 , 2 , 3 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์

1) $\exists x \forall y \forall z[x^2 + y^2 < 2z^2]$

2) $\exists x \exists y \forall z[x^2 + y^2 < 2z^2]$

3. กำหนด A = { 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 } เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์หรือประโยคเปิดในข้อ 1) - 4) ต่อไปนี้

1) $\forall x \exists y[x + y < 13]$

2) $\forall x \forall y[x + y < 13]$

3) $\forall x[x + y < 13]$

4) $\exists y[x + y < 13]$

4. จงหานิเสธของ

1) $\exists x \forall y[P(x , y)]$

2) $\forall x \forall y[P(x , y)]$

3) $\exists x \exists y[P(x , y)]$

4) $\exists x \exists y \forall z[P(x , y , z)]$

5) $\forall x \exists y[P(x)] \vee [Q(y)]$

6) $\exists x \forall y[P(x , y)] \rightarrow Q[(x , y)]$