สูตร

อนุกรมฟูเรียร์

ผนวก 1

สูตรอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series formulas)

สูตรอนุกรมฟูเรียร์แบ่งออกเป็น 2 แบบ คือ

1. **ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ** (trigonometric form) ซึ่งแบ่งออกเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1.1 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.2 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.3 เมื่อ f (x) นิยามนอกเหนือจากข้อ (1.1)และ (1.2) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

c คือ ค่าคงที่ตามใจชอบ ซึ่งจะแทนด้วยค่าต่ำสุดในช่วงที่ f (x) นิยาม

2. **ในรูปเชิงซ้อน** (complex form)

2.1 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\, dx$$

2.2 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\, dx$$

2.3 เมื่อ f (x) นิยามในช่วงอื่น ๆ ไม่ใช่ $(-\pi, \pi)$ หรือ $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

ในเมื่อ $$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\, dx$$

ข้อสังเกต การกำหนดช่วงในหัวข้อ 1 และ 2 เป็นแบบเต็มช่วง (full-range)

ในกรณีที่โจทย์กำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง (half-range) จะได้สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ 2 ลักษณะ คือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(0, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ในเมื่อ $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ในเมื่อ $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(0, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

ในเมื่อ $$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

ในเมื่อ $$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล (Parserval's Identity formulas)

เมื่อกำหนดช่วงแบบเต็มช่วง แบ่งออกได้ 3 ลักษณะคือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)\}^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\boxed{\frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \{f(x)\}^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

ลักษณะที่ 3 เมื่อ f (x) นิยามในช่วงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ $(-\pi, \pi)$ หรือ $(-\ell, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\boxed{\frac{1}{\ell} \int_{c}^{c+2\ell} \{f(x)\}^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

เมื่อกำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง แบ่งออกได้ 2 ลักษณะคือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(0, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \{ f(x) \}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(0, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \{ f(x) \}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

สูตรแปลงสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (exponential form) **หรือรูปเชิงซ้อน** (complex form) **ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณ**

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (exponential form) **กับสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปตรีโกณมิติ**

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

และ

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

ทฤษฎีบทการลู่เข้า

ผนวก 2

ทฤษฎีบทการลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า พจน์โดยทั่วไปจะเข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $n \to \infty$ นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

แต่ถ้าพจน์ทั่วไปไม่เข้าใกล้ศูนย์ เมื่อ $n \to \infty$ อนุกรมจะลู่ออก

การทดสอบเปรียบเทียบ (comparison test)

ทฤษฎีบท 2 ถ้า $0 \le a_n \le b_n$ ดังนั้น การลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะตามการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ และถ้า $a_n \ge b_n \ge 0$ ดังนั้น การลู่ออกของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะตามการลู่ออกของ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

การทดสอบอัตราส่วน (ratio test)

ทฤษฎีบท 3 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของพจน์บวก และให้ r เป็นค่าคงที่ ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า เมื่อ

$$\lim_{r\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r < 1$$

และลู่ออก เมื่อ $r > 1$ สำหรับ $r = 1$ จะสรุปไม่ได้

ทฤษฎีบท 4 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ ลู่เข้า ดังนั้น $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 5 กำหนดให้ อนุกรมสลับ (alternating series) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ ถ้า $a_n > a_{n+1} > 0$ และ $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ดังนั้น อนุกรมสลับนี้ ลู่เข้า แต่ถ้ามีข้อหนึ่งข้อใดไม่จริง อนุกรมสลับนั้น จะลู่ออก

สูตร

ตรีโกณมิติ

ผนวก 3

สูตรตรีโกณมิติ

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมประกอบ

$$\sin A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin (A-B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

$$\cos (A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\cos (A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติ ของมุมผลบวกและผลต่าง

$$2 \sin A \cos B = \sin (A+B) + \sin (A-B)$$

$$2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$$

$$2 \sin A \sin B = \cos (A-B) - \cos (A+B)$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติของมุมพหุคูณ

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

$$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$$

$$\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

ฟังก์ชันตรีโกณมิติในรูปฟังก์ชันชี้กำลัง

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

และ $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$

ตารางอินทิกรัล

ผนวก 4

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

4. $\int e^{ax}\,dx = \dfrac{e^{ax}}{a} + c$

5. $\int \ln x\,dx = x \ln x - x + c$

6. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

7. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c = \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

8. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c = -\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

11. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + c$

12. $\int \dfrac{x\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\sqrt{a^2 - x^2} + c$

13. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \dfrac{a^2}{2}\ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + c$

14. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \dfrac{a^2}{2}\sin^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

15. $\int \dfrac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x}\,dx = \sqrt{x^2 - a^2} - |a|\sec^{-1}\dfrac{x}{a} + c$

16. $\int \dfrac{\sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2 \pm x^2} - a\ln\left|\dfrac{a + \sqrt{a^2 \pm x^2}}{x}\right| + c$

17. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

18. $\int \sin^n x\,dx = -\dfrac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \dfrac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx$

19. $\int \sin mx \sin nx\,dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

20. $\int \frac{dx}{a + b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \frac{a \tan x/2 + b}{\sqrt{a^2 - b^2}} + c, \quad a^2 > b^2$

21. $\int x^n \sin x\,dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x\,dx$

22. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

23. $\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x\,dx$

24. $\int \cos mx \cos nx\,dx = \frac{\sin (m-n)x}{2(m-n)} + \frac{\sin (m+n)x}{2(m+n)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

25. $\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \tan (x/2)}{a + b} + c, \quad a^2 > b^2$

26. $\int x^n \cos x\,dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x\,dx$

27. $\int \sin mx \cos nx\,dx = \frac{\cos (n-m)x}{2(n-m)} - \frac{\cos (n+m)x}{2(n+m)} + c, \quad m^2 \neq n^2$

28. $\int \sin x \cos x\,dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + c$

29. $\int \tan x\,dx = -\ln |\cos x| + c$

30. $\int \tan^n x\,dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x\,dx, \quad n \neq 1$

31. $\int \cot x\,dx = \ln |\sin x| + c$

32. $\int \cot^n x\,dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x\,dx, \quad n \neq 1$

33. $\int \sec x\,dx = \ln |\sec x + \tan x| + c$

34. $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + c$

35. $\int \sec^n x\,dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x\,dx$

36. $\int \csc x\,dx = \ln |\csc x - \cot x| + c$

37. $\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + c$

38. $\int \csc^n x\,dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \csc^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x\,dx$

39. $\int \sin^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \sin^{-1} \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} + c$

40. $\int \cos^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \cos^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} + c$

41. $\int \tan^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \tan^{-1} \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + c$

42. $\int \cot^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \cot^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \ln (a^2 + x^2) + c$

43. $\int \sec^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \sec^{-1} \frac{x}{a} - a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

44. $\int \csc^{-1} \frac{x}{a}\, dx = x \csc^{-1} \frac{x}{a} + a \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + c$

45. $\int x^n \ln (ax)\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left[\ln (ax) - \frac{1}{n+1}\right] + c, \quad n \neq -1$

46. $\int (\ln x)^n\, dx = x(\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1}\, dx, \quad n \neq -1$

47. $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} + c$

48. $\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln |\ln x| + c$

49. $\int x^n e^{ax}\, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax}\, dx$

50. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + c$

51. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + c$

52. $\int \sinh x\, dx = \cosh x + c$

53. $\int \cosh x\, dx = \sinh x + c$

54. $\int \tanh x\, dx = \ln (\cosh x) + c$

55. $\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$

56. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx = \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

57. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2^{n+1}} \dfrac{n!}{(n/2)!^2}, & n \text{ even} \\ \dfrac{2^{n-1}[(n-1)/2]!^2}{n!}, & n \text{ odd} \end{cases}$

58. $\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2} \, dx = \dfrac{1}{2a} \Gamma(\tfrac{1}{2}) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad a > 0$