บทที่ 5
การประยุกต์กับปัญหาค่าขอบ
(Applications to Boundary Value Problems)

5.1 การแยกตัวแปรและอนุกรมฟูเรียร์ (Separation of variables and Fourier series)

ปัญหาค่าขอบจำนวนมากในวิศวกรรมคณิตศาสตร์ สามารถแก้ปัญหาได้ง่าย โดยวิธีแยกตัวแปร (separation of variables) ซึ่งเป็นวิธีหนึ่งในหลาย ๆ วิธีที่ใช้หาคำตอบของปัญหาค่าขอบ และสามารถหาคำตอบได้ดังนี้

โดยวิธีนี้กำหนดว่า คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย (partial differential equation) สามารถแยกเป็นผลคูณของฟังก์ชันไม่รู้ค่า (unknown functions) โดยที่แต่ละฟังก์ชันขึ้นกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียวเท่านั้น (นั่นคือ ถ้าในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยมีตัวแปรอิสระ 2 ตัว ก็จะสมมุติฟังก์ชันไม่รู้ค่าสองฟังก์ชัน หรือถ้ามีตัวแปรอิสระ 3 ตัว ก็จะสมมุติฟังก์ชันไม่รู้ค่าสามฟังก์ชัน) แทนค่าคำตอบที่สมมุติในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย แล้วย้ายข้างเพื่อให้ด้านหนึ่งขึ้นกับตัวแปรเพียงตัวเดียว อีกด้านขึ้นกับตัวแปรที่เหลือ เนื่องจากแต่ละด้านต่างขึ้นกับตัวแปรอิสระเพียงตัวเดียว เพราะฉะนั้นสมการนี้จะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อแต่ละด้านมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง นั่นคือ เราจะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ (ordinary differential equation) ในรูปหนึ่งตัวแปรอย่างน้อยสองสมการ (ตามจำนวนตัวแปรอิสระ) ดังนั้นเราจะสามารถหาค่าฟังก์ชันไม่รู้ค่าได้ แทนค่าฟังก์ชันไม่รู้ค่าในคำตอบ คำตอบที่ได้คือคำตอบทั่วไป (general solution) ของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ซึ่งเมื่อใช้เงื่อนไขขอบ (boundary conditions) ที่โจทย์กำหนดให้ จะหาค่าคงที่ในคำตอบทั่วไปได้ แทนค่าคงที่ในคำตอบทั่วไปจะได้คำตอบใหม่เรียกว่า "คำตอบเฉพาะ (particular solution)" หลังจากนั้นให้สร้างคำตอบใหม่โดยใช้คำตอบเฉพาะเป็นหลัก โดยใช้ "หลักการวางซ้อน (superposition principle) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) สุดท้ายก็จะได้คำตอบใหม่ เรียกว่า "คำตอบแท้จริง" (actual solution)" ซึ่งเป็นคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยที่ต้องการ

ทฤษฎีบทที่ใช้หาคำตอบที่แท้จริง (actual solution)

ทฤษฎีบท 5.1 (หลักการวางซ้อน) กล่าวว่า ถ้า $u_1, u_2, \ldots, u_n$ คือคำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยเอกพันธ์เชิงเส้น (linear homogeneous partial differential equation) ดังนั้น $c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_nu_n$ (ในเมื่อ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ เป็นค่าคงที่) จะเป็นคำตอบของสมการข้างต้นด้วย

การหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ แบ่งได้ 2 กรณี คือ

กรณีที่ 1 เมื่อรากของสมการช่วย (auxiliary equation) เป็นจำนวนจริง (real number) m_1, m_2 ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$y = c_1e^{m_1x} + c_2e^{m_2x} \qquad \ldots\ldots.(5.1)$$

ในเมื่อ c_1, c_2 เป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - y = 0 \qquad \ldots\ldots.(5.2)$$

สมการช่วยคือ

$$m^2 - 1 = 0$$

$$m = \pm 1$$

หรือ $m_1 = 1$ และ $m_2 = -1$

เพราะฉะนั้น คำตอบทั่วไปของ (5.2) คือ

$$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$$

กรณีที่ 2 เมื่อรากของสมการช่วยอยู่ในรูปเชิงซ้อน (complex form) $a + bi$ ดังนั้น คำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ คือ

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx) \qquad \ldots\ldots.(5.3)$$

ตัวอย่างเช่น สมการเชิงอนุพันธ์

$$y'' - 2y' + 4y = 0 \qquad \ldots\ldots.(5.4)$$

สมการช่วยคือ

$$m^2 - 2m + 4 = 0$$

ใช้สูตรกำลังสอง (quadratic formula)

$$m = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$= \quad 1 \pm \sqrt{3}i$$

นั่นคือ $m_1 = 1 + \sqrt{3}i$ และ $m_2 = 1 - \sqrt{3}i$

ดังนั้น คำตอบของ (5.4) คือ

$$y = e^{x}(c_1 \cos \sqrt{3}\,x + c_2 \sin \sqrt{3}\,x)$$

ต่อไปการหาคำตอบทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ในปัญหาค่าขอบจะไม่แสดงวิธีหาคำตอบ แต่จะยกคำตอบไปใช้เลย เช่นเมื่อทราบว่ารากของสมการเป็นจำนวนจริง คำตอบคือ (5.1) แต่ถ้าทราบว่ารากของสมการเป็นจำนวนเชิงซ้อน คำตอบคือ (5.3)

ตัวอย่างที่ 5.1 จงแก้ปัญหาค่าขอบ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{.......(5.5)}$$

ในเมื่อ $0 < x < c,\ t > 0$

เงื่อนไขขอบ (boundary conditions)

$$y(0, t) = y(c, t) = 0$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions)

$$y(x, 0) = f(x) \quad ; \ 0 \le x \le c$$

$$y_t(x, 0) = 0$$

วิธีทำ ใช้วิธีแยกตัวแปร

สมมุติให้

$$y(x, t) = X(x)\ T(t) \qquad \text{.......(5.6)}$$

แทนค่า $y(x, t)$ ลงใน (5.5)

$$X(x)\,T''(t) = a^2 X''(x)\ T(t)$$

ย้ายฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเหมือนกันไว้ทางเดียวกัน แล้วสมมุติให้เท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda$$

ดังนั้น จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ คือ

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad \text{.......(5.7)}$$

และ $T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$ ....(5.8)

ค่าคงที่ λ ที่สมมุติขึ้นมา เรายังไม่ทราบว่าควรจะมีค่าเป็นเท่าใด เพื่อว่า การหาคำตอบในปัญหาขอบใช้ได้ ดังนั้นจึงต้องพิจารณาค่าของ λ เป็น 3 กรณี คือ กรณี $\lambda < 0$, $\lambda = 0$ และ $\lambda > 0$

กรณีที่ 1 เมื่อ $\lambda < 0$ เพื่อความสะดวกเราจะสมมุติให้ $\lambda = -\mu^2$ เมื่อ μ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น จาก (5.7) เขียนใหม่ได้เป็น

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$$

คำตอบคือ

$$X(x) = c_1 e^{\mu x} + c_2 e^{-\mu x} \qquad \text{.......(5.9)}$$

แทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.6) แล้วใช้เงื่อนไขขอบ $y(0, t) = 0$ จะได้

$$y(0, t) = X(0) \quad T(t) = 0$$

แต่ $T(t) \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = 0$$

นั่นคือ สรุปได้ว่า ถ้า $x = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ ....(5.10)

แทนค่า $x = c$ ลงใน (5.6) แล้วใช้เงื่อนไขขอบ $y(c, t) = 0$ จะได้

$$y(c, t) = X(c) \cdot T(t) = 0$$

แต่ $T(t) \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(c) = 0$$

นั่นคือ สรุปได้ว่า ถ้า $x = c$ จะได้ $X(c) = 0$ ....(5.11)

ดังนั้น ถ้าแทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.9) แล้วใช้ (5.10) จะได้

$$X(0) = c_1 + c_2 = 0$$

หรือ $c_2 = -c_1$

แทนค่า c_2 ลงใน (5.9)

$$\begin{aligned} X(x) &= c_1 e^{\mu x} + (-c_1) e^{-\mu x} \\ &= 2c_1 \left(\frac{e^{\mu x} - e^{-\mu x}}{2} \right) \\ &= c_3 \sin h(\mu x) \qquad ; c_3 = 2c_1 \end{aligned} \qquad \text{.......(5.12)}$$

แทนค่า $x = c$ ลงใน (5.12) แล้วใช้ (5.11) จะได้

$$X(c) = c_3 \sinh(\mu c) = 0$$

แต่ $\sinh(\mu c) \neq 0$ เพราะว่า $\mu c > 0$ ($\sinh(\mu c)$ จะเป็นศูนย์ก็ต่อเมื่อ $\mu c = 0$ เท่านั้น)

เพราะฉะนั้น

$$c_3 = 0$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า c_3 ลงใน (5.12)

$$X(x) \equiv 0$$ เป็นคำตอบสำคัญน้อย (trivial solution)

นั่นคือ การสมมุติให้ $\lambda < 0$ จึงใช้ไม่ได้ เพราะว่าทำให้คำตอบที่ได้เป็นศูนย์เสมอ

กรณีที่ 2 เมื่อ $\lambda = 0$ ดังนั้น จาก (5.7) เขียนใหม่ได้เป็น

$$X''(x) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_1 x + c_2 \qquad \text{.......(5.13)}$$

แทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.13) แล้วใช้ (5.10)

$$X(0) = c_2 = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_1 x \qquad \text{.......(5.14)}$$

แทนค่า $x = c$ ลงใน (5.14) แล้วใช้ (5.11)

$$X(c) = c_1 c = 0$$

แต่ $c \neq 0$ ตามโจทย์ เพราะฉะนั้น

$$c_1 = 0$$

ซึ่งเมื่อแทนค่า c_1 ลงใน (5.14)

$$X(x) \equiv 0$$ เป็นคำตอบสำคัญน้อย (trivial solution)

นั่นคือ การแทนค่า $\lambda = 0$ จึงใช้ไม่ได้อีก เพราะทำให้คำตอบที่ได้เป็นศูนย์เสมอ

กรณีที่ 3 เมื่อ $\lambda > 0$ เพื่อความสะดวกในการพิจารณาจะสมมุติให้ $\lambda = \mu^2$ เมื่อ μ เป็นจำนวนจริง ดังนั้น จาก (5.7) และ (5.8) สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x \qquad \text{.......(5.15)}$$

และ $T''(t) + \mu^2 a^2 T(t) = 0$

$$T(t) = c_3 \cos \mu at + c_4 \sin \mu at \qquad \text{.......(5.16)}$$

แทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.15) แล้วใช้ (5.10) จะได้

$$X(0) = c_1 = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \mu x \qquad \text{.......(5.17)}$$

แทนค่า $x = c$ ลงใน (5.17) แล้วใช้ (5.11) จะได้

$$X(c) = c_2 \sin \mu c = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ ดังนั้น

$$\sin \mu c = 0 = \sin n\pi$$

$$\mu = \frac{n\pi}{c}$$

แทนค่า μ ลงใน (5.17)

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \qquad \text{.......(5.18)}$$

แทนค่า (5.18) และ (5.16) ลงใน (5.6)

$$y(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \left(c_3 \cos \frac{an\pi t}{c} + c_4 \sin \frac{an\pi t}{c} \right) \qquad \text{.......(5.19)}$$

$$y_t(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \left(-c_3 \frac{an\pi}{c} \sin \frac{an\pi t}{c} + c_4 \frac{an\pi}{c} \cos \frac{an\pi t}{c} \right) \qquad \text{.......(5.20)}$$

แทนค่า $t = 0$ ลงใน (5.20) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y_t(x, 0) = 0$

$$y_t(x, 0) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \left(0 + \frac{c\,an\pi}{c}(1) \right) = 0$$

แต่ $c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \neq 0$ และ $\frac{an\pi}{c} \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$c_4 = 0$$

ดังนั้น จาก (5.19)

$$y(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c} \cdot c_3 \cos \frac{an\pi t}{c}$$

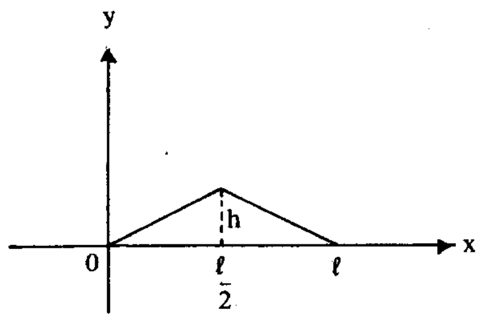
$$= E \sin \frac{n\pi x}{c} \cos \frac{an\pi t}{c} \;;\; E = c_2 c_3$$

นั่นคือ เราสามารถหาคำตอบได้เมื่อ $\lambda > 0$

สรุป กล่าวได้ว่า ค่าคงที่ที่สมมุติทางขวามือ คือ $-\lambda$ จะต้องมีค่าน้อยกว่าศูนย์ จึงจะหาคำตอบได้ (เพราะว่า $\lambda > 0$) ดังนั้น เพื่อความสะดวก ต่อไปจะแทน $-\lambda$ ด้วย $-\lambda^2$ เมื่อ λ เป็นจำนวนจริง

5.2 สมการการสั่นของเส้นลวด (The vibration string equations)

สมการการสั่นของเส้นลวด หรือสมการคลื่น (wave equation) เกิดจากการนำเส้นลวดยาว ℓ มาขึงตึงระหว่างจุดตรึงคงที่สองจุด ที่ $x = 0$ และ $x = \ell$ บนแกน x ที่เวลา $t = 0$ ถ้าดึงเส้นลวดให้สูง h (ตามรูป 5.1) แล้วปล่อย เส้นลวดก็จะสั่นขึ้นลงในทิศทางแกน y (ตั้งฉากกับแกน x) ในกรณีนี้ถือว่า เส้นลวดมีความยืดหยุ่นน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวของเส้นลวด l ($h \ll \ell$) และความตึงในเส้นลวดเท่ากันตลอดทั้งเส้น



รูป 5.1

เพื่อหาสมการการสั่นของเส้นลวด เราจะกำหนดเป็นข้อ ๆ ดังนี้

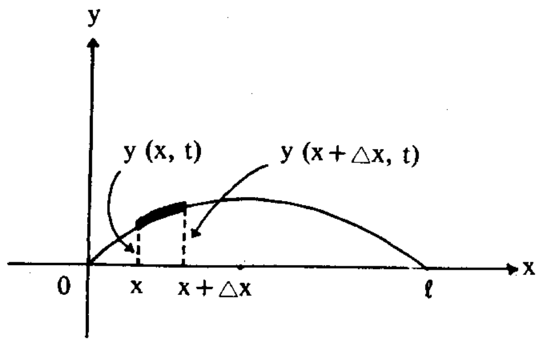
(ก) การเคลื่อนที่จะอยู่บนระนาบเดียว (ระนาบ xy) และในระนาบนี้แต่ละจุดบนเส้นลวดเคลื่อนที่ตั้งฉากกับตำแหน่งสมดุล (equilibrium position) ของเส้นลวด

(ข) การหักเหของเส้นลวดระหว่างเคลื่อนที่มีค่าน้อยมาก ซึ่งผลจากการเปลี่ยนความยาวของเส้นลวดไม่มีผลต่อความตึง T

(ค) การยืดหยุ่นของเส้นลวดเป็นแบบสมบูรณ์ นั่นคือ ส่งผ่านแรงเฉพาะในทิศทางของความยาวของมัน

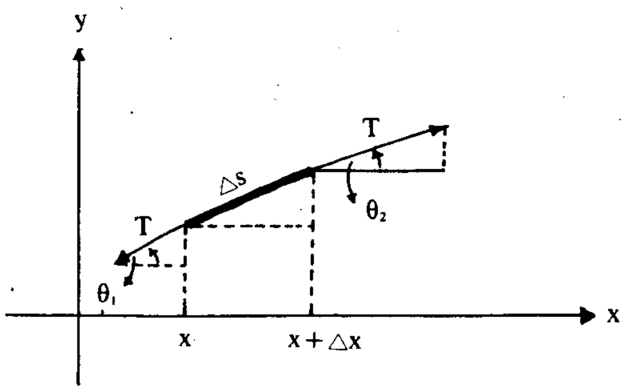
(ง) ความชันของโค้งที่หักเหของเส้นลวด คือที่ทุก ๆ จุด และตลอดเวลามีค่าน้อยมาก ดังนั้นค่าของ $\sin\theta$ สามารถแทนด้วย $\tan\theta$ ได้ เมื่อ θ คือมุมแห่งความเอียงของเส้นสัมผัสกับโค้งที่หักเห

สมมุติว่า ที่เวลา t ใด ๆ เส้นลวดมีรูปร่างดังรูป 5.2 และ $y(x, t)$ คือระยะการเคลื่อนที่ของจุด x บนเส้นลวด ที่เวลา t ในขณะเดียวกันระยะการเคลื่อนที่ของจุดใกล้เคียง $x+\triangle x$ บนเส้นลวด คือ $y(x+\triangle x, t)$



รูป 5.2

พิจารณาแรงที่กระทำบนส่วนย่อยของเส้นลวดระหว่าง x และ $x+\triangle x$ สมมุติให้เป็น $\triangle s$ ซึ่งประกอบด้วยแรงสองแรง คือ แรงดึง $T(x)$ ไปทางซ้าย และแรงดึง $T(x+\triangle x)$ ไปทางขวา (ดูรูป 5.3) กำหนดว่า ความตึงในเส้นลวดมีค่าคงที่ T



รูป 5.3

กำหนดให้ค่าคงที่ $a^2 = \dfrac{T}{\mu}$

ในเมื่อ T คือ ความตึงในเส้นลวด

μ คือ มวลต่อหนึ่งหน่วยความยาวของเส้นลวด

เพราะฉะนั้น แรงรวมตามแนวดิ่ง คือ

$$T \sin \theta_2 - T \sin \theta_1 \qquad \text{.......(5.21)}$$

เพราะว่า $\sin \theta = \tan \theta$ เมื่อ θ มีค่าน้อย ๆ ดังนั้น (5.21) เขียนใหม่เป็น

$$T \tan \theta_2 - T \tan \theta_1$$

หรือ $$T \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\triangle x} - T\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x} \qquad \text{.......(5.22)}$$

จากกฎของนิวตัน (Newton's law) กล่าวว่า แรงลัพธ์ที่กระทำต่อส่วนโค้งของเส้นลวด $\triangle s$ จะเท่ากับมวลของเส้นลวด $(\mu\triangle s)$ คูณกับอัตราเร่งของ $\triangle s$ ซึ่งกำหนดให้เป็น $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon$ โดยที่ $\varepsilon \to 0$ เมื่อ $\triangle s \to 0$ ดังนั้นจะได้

$$T \left[\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\triangle x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}\right] = (\mu\triangle s)\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon\right) \qquad \text{.......(5.23)}$$

เนื่องจากการสั่นของเส้นลวดเป็นแบบสั่นน้อย ๆ เพราะฉะนั้น $\triangle s \simeq \triangle x$ เอา (5.23) หารด้วย $\mu\triangle x$ จะได้

$$\frac{T}{\mu}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\triangle x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}}{\triangle x}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varepsilon$$

ใส่ลิมิต เมื่อ $\triangle x \to 0$ (ซึ่งทำให้ $\varepsilon \to 0$ ด้วย)

$$a^2 \lim_{\triangle x \to 0}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x+\triangle x} - \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x}}{\triangle x}\right] = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

หรือ $$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}} \qquad \text{.......(5.24)}$$

สมการ (5.24) คือ สมการการสั่นของเส้นลวดหรือสมการคลื่น ซึ่งการสั่นในลักษณะนี้เป็นแบบหนึ่งมิติ

ตัวอย่างที่ 5.1 จงหาคำตอบของสมการคลื่น (wave equation)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \ell \qquad \text{.......(5.25)}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ (boundary conditions) เป็น

$$y(0, t) = y(\ell, t) = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } t \qquad \text{.......(5.26)}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions) เป็น

$$y(x, 0) = f(x) \quad \text{และ} \quad \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) \qquad \text{.......(5.27)}$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t) \qquad \text{.......(5.28)}$$

แทนค่า (5.28) ลงใน (5.25)

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 X''(x) T(t)$$

หรือ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda = -\lambda^2 \qquad \text{.......(5.29)}$$

ดังนั้น จาก (5.29) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์เชิงเส้นสามัญสองสมการ คือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad \text{.......(5.30)}$$

และ

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \qquad \text{.......(5.31)}$$

คำตอบ X (x) และ T (t) ของ (5.30) และ (5.31) คือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad \text{.......(5.32)}$$

$$T(t) = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t \qquad \text{.......(5.33)}$$

แทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.32) แล้วใช้ (5.10) สรุปได้ว่า

$$X(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0 \qquad \text{.......(5.34)}$$

ดังนั้น

$$X(x) = B\sin\lambda x \qquad \text{.......(5.35)}$$

ใช้เงื่อนไขที่สองของ (5.26) โดยแทน $x = \ell$ ลงใน (5.35)

$$X(\ell) = B\sin\lambda\ell = 0$$

แต่ $B \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin \lambda \ell = 0 = \sin n\pi \quad ; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \ldots\ldots(5.36)$$

$$\lambda \ell = n\pi$$

หรือ

$$\lambda = \frac{n\pi}{\ell} \quad ; n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots(5.36)$$

ดังนั้น จะได้เซตอนันต์ของคำตอบ $X(x) = X_n(x)$ ในเมื่อ

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots(5.37)$$

และคำตอบ (5.31) เขียนใหม่เป็น

$$T_n(t) = C_n \cos \frac{an\pi t}{\ell} + D_n \sin \frac{an\pi t}{\ell} \qquad \ldots\ldots(5.38)$$

เพราะฉะนั้นฟังก์ชัน

$$y_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$= \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(E_n \cos \frac{an\pi t}{\ell} + F_n \sin \frac{an\pi t}{\ell} \right) \qquad \ldots\ldots(5.39)$$

คือคำตอบของ (5.25) ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ (5.26) ใน (5.39) สัมประสิทธิ์ E_n และ F_n ยังไม่ได้หาค่า สังเกตว่า $E_n = B_nC_n$ และ $F_n = B_nD_n$

จะพบว่าคำตอบ $y_n(x, t)$ ของ (5.39) ยังไม่ได้สอดคล้องตามเงื่อนไข (5.27) ดังนั้น จึงต้องสร้างคำตอบใหม่ โดยใช้ "หลักการวางซ้อน (Superposition principle)"

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$$

หรือ

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \left(E_n \cos \frac{an\pi t}{\ell} + F_n \sin \frac{an\pi t}{\ell} \right) \ldots\ldots(5.40)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5.27) โดยแทน $t = 0$ ลงใน (5.40) จะได้

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} = f(x) \qquad \ldots\ldots(5.41)$$

หาอนุพันธ์ของ (5.40) เทียบกับ t แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5.27) จะได้

$$\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{an\pi}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = g(x) \qquad \ldots\ldots(5.42)$$

จาก (5.41) และ (5.42) อนุกรมที่เหลือคืออนุกรมฟูเรียร์ไซน์ทั้งสองสมการ ดังนั้น เราสามารถหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ E_n และ F_n ได้โดยสูตร

$$E_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \; ; \; n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots(5.43)$$

และ $$F_n \left(\frac{an\pi}{\ell}\right) = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

หรือ $$F_n = \frac{2}{an\pi} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \; ; \; n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots(5.44)$$

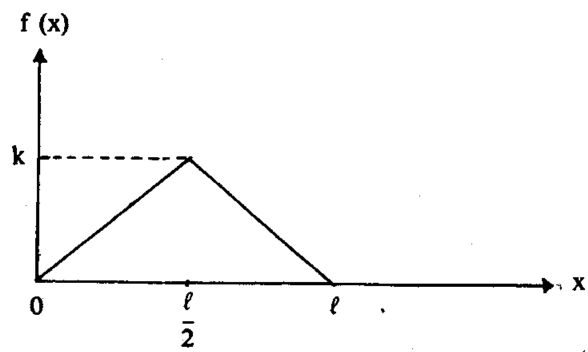
เพราะฉะนั้น ค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ E_n และ F_n ที่หาได้จาก (5.43) และ (5.44) เมื่อแทนลงใน (5.40) จะได้คำตอบที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.2 จงหาคำตอบของ (5.25) และมีเงื่อนไขขอบเหมือน (5.26) แต่เงื่อนไขเริ่มต้นเปลี่ยนเป็น

$$y(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2k}{\ell} x & \text{สำหรับ} \quad 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ \frac{2k}{\ell} (\ell - x) & \text{สำหรับ} \quad \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases} \qquad \ldots\ldots(5.45$$

และ $$\left.\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0 \qquad \ldots\ldots(5.46)$$

วิธีทำ เขียนกราฟของ f (x)



รูป 5.4

เพราะว่า $g(x) = 0$ จาก (5.44) จะได้ $F_n = 0$ หาค่า E_n จาก (5.43)

$$E_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{2kx}{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} \frac{2k}{\ell}(\ell - x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\frac{2k}{\ell}\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + 2k\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx - \frac{2k}{\ell}\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right] \qquad ....(5.47)$$

พิจารณา

$$\int_0^{\frac{\ell}{2}} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\ell}{2}} + \int_0^{\frac{\ell}{2}} \frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\,dx$$

$$\frac{\ell^2}{2n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\ell^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\frac{\ell}{2}}$$

$$= \frac{\ell^2}{2n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{\ell^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad ....(5.48)$$

$$\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}$$

$$= \frac{\ell}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) \qquad ....(5.49)$$

$$\int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = x\left(\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right)\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\,dx$$

$$= \frac{\ell^2}{n\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi\right) + \frac{\ell^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_{\frac{\ell}{2}}^{\ell}$$

$$= \frac{\ell^2\cos n\pi/2}{2n\pi} - \frac{\ell^2\cos n\pi}{n\pi} - \frac{\ell^2}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad ....(5.50)$$

แทนค่า (5.48), (5.49) และ (5.50) ลงใน (5.47)

$$E_n = \frac{2}{\ell}\left[\frac{k\ell}{n\pi}\left(-\cos\frac{n\pi}{2}\right) + \frac{2k\ell}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2\ell k}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2k\ell}{n\pi}\cos n\pi - \frac{k\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2k\ell}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2k\ell}{(n\pi)^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\ell} \left[\frac{4k\ell}{(n\pi)^2} \sin\frac{n\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่า E_n และ F_n ลงใน (5.40) จะได้คำตอบ

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{\ell} \left(\frac{8k}{n^2\pi^2} \sin\frac{n\pi}{2} \cos\frac{an\pi t}{\ell} + (0) \sin\frac{an\pi t}{\ell} \right)$$

$$= \frac{8k}{\pi^2} \left(\sin\frac{\pi x}{\ell} \cos\frac{a\pi t}{\ell} + 0 - \frac{1}{3^2} \sin\frac{3\pi x}{\ell} \cos\frac{3a\pi t}{\ell} \right.$$

$$\left. + 0 + \frac{1}{5^2} \sin\frac{5\pi x}{\ell} \cos\frac{5a\pi t}{\ell} + 0 \ldots \right)$$

$$= \frac{8k}{\pi^2} \left(\sin\frac{\pi x}{\ell} \cos\frac{a\pi t}{\ell} - \frac{1}{3^2} \sin\frac{3\pi x}{\ell} \cos\frac{3a\pi t}{\ell} + \ldots \right)$$

$$= \frac{8k}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \cos\frac{a(2n-1)\pi t}{\ell}$$

ตัวอย่างที่ 5.3 จากตัวอย่างที่ 5.1 ถ้า $y(x, 0) = f(x)$ แต่ $\left.\frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = 0$ จงแสดงว่าคำตอบของ ตัวอย่างที่ 5.1 สามารถเขียนเป็น

$$y(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x - at) + \frac{1}{2} f_1(x + at) \qquad \ldots\ldots.(5.51)$$

ในเมื่อ $f_1(x)$ คือ การขยายระยะออกไปเป็นฟังก์ชันคี่ของ $f(x)$ และมีคาบเป็น 2ℓ

วิธีทำ คำตอบทั่วไปของ (5.25) คือ (5.40)

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{\ell} \left(E_n \cos\frac{an\pi t}{\ell} + F_n \sin\frac{an\pi t}{\ell} \right)$$

เพราะว่า ความเร็วเริ่มต้น (initial velocity) $g(x)$ เป็นศูนย์ จาก (5.44) F_n มีค่าเป็นศูนย์ และ (5.40) ลดรูปเหลือ

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \cos\frac{an\pi t}{\ell} \qquad \ldots\ldots.(5.52)$$

ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (trigonometric identity)

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} \left[\sin(A-B) + \sin(A+B) \right]$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\sin \frac{n\pi x}{\ell} \cos \frac{an\pi t}{\ell} = \frac{1}{2} \left[\sin \frac{n\pi}{\ell}(x-at) + \sin \frac{n\pi}{\ell}(x+at) \right]$$

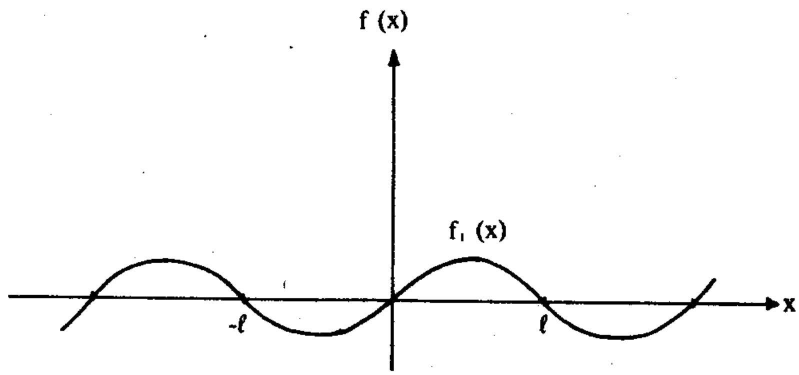
เพราะฉะนั้น สามารถเขียน (5.52) อยู่ในรูป

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi(x-at)}{\ell} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi(x+at)}{\ell} \qquad ....(5.53)$$

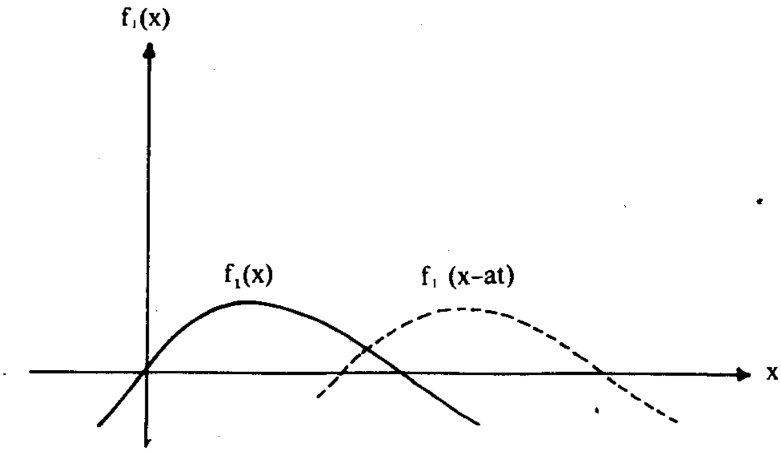
เปรียบเทียบกับ (5.41) เราสรุปได้ว่า สองอนุกรมข้างบนได้จากการแทนค่า x ด้วย $(x-at)$ และ $(x+at)$ ตามลำดับ เพราะฉะนั้น

$$y(x, t) = \frac{1}{2} f_1(x-at) + \frac{1}{2} f_1(x+at)$$

ในเมื่อ $f_1(x)$ คือ การขยายระยะออกไปเป็นฟังก์ชันคี่ของ $f(x)$ และมีคาบเป็น 2ℓ แสดงตามรูป 5.5



รูปที่ 5.5 การขยายระยะออกไปของ $f_1(x)$ ของตัวอย่างที่ 5.3



รูปที่ 5.6 กราฟของ f_1 (x) และ f_1 (x-at) ของตัวอย่างที่ 5.3

กราฟ f_1 (x-at) ที่ได้จากกราฟของ f_1 (x) โดยเลื่อน at หน่วย ไปทางขวา (ดูรูป 5.6) นั่นคือ เมื่อเคลื่อนที่ในทิศทาง x ที่เป็นบวก ด้วยความเร็ว a ขณะที่เวลาเพิ่มขึ้น อันนี้หมายความว่า f_1 (x-at), (a > 0) แทนคลื่นซึ่งเคลื่อนที่ไปทางขวา ขณะที่ t เพิ่มขึ้น โดยลักษณะเดียวกัน f_1 (x+at) แทนคลื่นซึ่งเคลื่อนที่ไปทางซ้าย ด้วยความเร็ว a ดังนั้น คำตอบ y (x, t) คือ การวางซ้อนของคลื่นทั้งสองนี้

ตัวอย่างที่ 5.4 จงหาคำตอบของสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad ....(5.54)$$

ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(0, t) = y(2, t) = 0$$

$$y(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad y_t(x, 0) = 0$$

วิธีทำ ใช้วิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่า y (x, t) ลงใน (5.54) จะได้

$$X(x)\,T''(t) = 9\,X''(x) \cdot T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{9}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

ดังนั้น

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T''(t) + 9\lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad ....(5.56)$$

$$T(t) = C\cos 3\lambda t + D\sin 3\lambda t \qquad ....(5.57)$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = A = 0$$

นั่นคือ

$$X(x) = B\sin\lambda x \qquad ....(5.58)$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(2, t) = 0$ จะได้ $X(2) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(2) = B\sin 2\lambda = 0$$

แต่ $B \neq 0$ จะได้

$$\sin 2\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{2} \quad ; \ n = 1, 2, \ldots$$

แทนค่า λ ลงใน (5.58) และ (5.57)

$$y(x, t) = B\sin\frac{n\pi x}{2}\left(C\cos\frac{3n\pi t}{2} + D\sin\frac{3n\pi t}{2}\right) \qquad ....(5.59)$$

$$y_t(x, t) = B\sin\frac{n\pi x}{2}\left(-C\frac{3n\pi}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2} + D\frac{3n\pi}{2}\cos\frac{3n\pi t}{2}\right)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y_t(x, 0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$y_t(x, t) = B\sin\frac{n\pi x}{2}\left(0 + D\frac{3n\pi}{2}(1)\right) = 0$$

แต่ $B\sin\frac{n\pi x}{2} \neq 0$ และ $n \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$D = 0$$

ดังนั้น คำตอบ (5.59) จะเหลือ

$$y(x,t) = B \sin \frac{n\pi x}{2} \; C \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

หรือ $$y(x,t) = E \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{3n\pi t}{2} \quad ; \quad E = B \cdot C \qquad \text{.......(5.60)}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0) = \sin 2\pi x$ จะได้

$$y(x,0) = E \sin \frac{n\pi x}{2} = \sin 2\pi x$$

ใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ $E = 1$ และ $n = 4$ ดังนั้น คำตอบแท้จริง คือ

$$y(x,t) = \sin 2\pi x \cos 6\pi t$$

ตัวอย่างที่ 5.5 ใช้คำถามของตัวอย่างที่ 5.4 เพียงแต่เปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$y(x,0) = \sin 2\pi x - 4 \sin 3\pi x + 7 \sin 5\pi x \qquad \text{.......(5.61)}$$

วิธีทำ การหาคำตอบในกรณีนี้ จะต้องสร้างคำตอบใหม่โดยใช้หลักการวางซ้อน (superposition principle) โดยใช้คำตอบ (5.60) เป็นหลัก นั่นคือ

$$y(x,t) = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{2} \cos \frac{3n_1\pi t}{2} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{2} \cos \frac{3n_2\pi t}{2}$$
$$+ E_3 \sin \frac{n_3\pi x}{2} \cos \frac{3n_3\pi t}{2} \qquad \text{.......(5.62)}$$

แทนค่า $t = 0$ ลงใน (5.62) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5.61)

$$y(x,0) = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{2} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{2} + E_3 \sin \frac{n_3\pi x}{2}$$

$$= \sin 2\pi x - 4 \sin 3\pi x + 7 \sin 5\pi x$$

ใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$E_1 = 1 \quad , \quad n_1 = 4$

$E_2 = -4 \quad , \quad n_2 = 6$

$E_3 = 7 \quad , \quad n_3 = 10$

ดังนั้น คำตอบแท้จริง คือ

$$y(x,t) = \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 4 \sin 3\pi x \cos 9\pi t + 7 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$$

ข้อสังเกต จากตัวอย่างที่ 5.4 และตัวอย่างที่ 5.5 จะพบว่า เงื่อนไขเริ่มต้น y (x, 0) จะอยู่ในรูปของฟังก์ชันไซน์ล้วน ๆ ดังนั้น การสร้างคำตอบใหม่โดยหลักการวางซ้อน จะสร้างคำตอบใหม่ให้มีจำนวนพจน์เท่ากับ จำนวนพจน์ของ y (x, 0) ที่โจทย์กำหนดมาให้ (ดูตัวอย่างที่ 5.5) แต่ถ้าโจทย์กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้น y (x, 0) เป็นฟังก์ชันอื่น ๆ ที่ไม่ได้อยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ล้วน ๆ เช่น

$$y(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{x}{20} & \text{สำหรับ } 0 \le x \le 5 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{20} & \text{สำหรับ } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

หรือ $y(x, 0) = 0.05\,x\,(2-x)$

การสร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน ในกรณีนี้ จะอยู่ในรูปอนุกรมอนันต์ ซึ่งไม่เหมือนกับการสร้างคำตอบของตัวอย่างที่ผ่านมา ให้ดูตัวอย่างต่อไปนี้เพื่อเปรียบเทียบกัน

ตัวอย่างที่ 5.6 ใช้คำถามของตัวอย่างที่ 5.4 แต่เปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$y(x, 0) = 0.05x\,(2-x)$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 5.4 จะได้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{2} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$T_n(t) = C_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + D_n \sin\frac{3n\pi t}{2}$$

ดังนั้น

$$y_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$= B_n \sin\frac{n\pi x}{2}\left(C_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + D_n \sin\frac{3n\pi t}{2} \right)$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยใช้หลักการวางซ้อน จะได้

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{2}\left(C_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + D_n \sin\frac{3n\pi t}{2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi x}{2}\left(E_n \cos\frac{3n\pi t}{2} + F_n \sin\frac{3n\pi t}{2} \right) \quad \ldots\ldots.(5.63)$$

ในเมื่อ $E_n = B_n \cdot C_n$ และ $F_n = B_n \cdot D_n$

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{2} \left(- E_n \frac{3n\pi}{2} \sin \frac{3n\pi t}{2} + F_n \frac{3n\pi}{2} \cos \frac{3n\pi t}{2} \right)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0) = 0$

$$y_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{2} \left(0 + F_n \frac{3n\pi}{2} (1) \right) = 0$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} F_n \frac{3n\pi}{2} \sin \frac{n\pi x}{2} = 0$

นั่นคือ $F_n = 0$ เพราะฉะนั้น

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{3n\pi t}{2}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0) = 0.05x(2 - x)$

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{n\pi x}{2} = 0.05x(2-x)$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ; $0 < x < 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx \\ &= \frac{2}{2} \int_0^2 0.05x(2-x) \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx \\ &= 0.1 \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx - 0.05 \int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx \qquad \text{.......(5.64)} \end{aligned}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2} \, dx &= x \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) \Bigg|_0^2 + \int_0^2 \frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \, dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi + \frac{4}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Bigg|_0^2 \\ &= -\frac{4}{n\pi} \cos n\pi \qquad \text{.......(5.65)} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = x^2\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 + 2\int_0^2 \frac{x\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\,dx$$

$$= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\left[x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\,dx\right]$$

$$= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\left[0 + \frac{4}{(n\pi)^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]$$

$$= -\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1) \qquad \text{.......(5.66)}$$

แทนค่า (6.65) และ (6.66) ลงใน (6.64) จะได้

$$E_n = 0.1\left(-\frac{4}{n\pi}\cos n\pi\right) - 0.05\left\{\frac{8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{16}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1)\right\}$$

$$= -\frac{0.4}{n\pi}\cos n\pi + \frac{0.4}{n\pi}\cos n\pi - \frac{0.8}{n^3\pi^3}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{0.8}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right] \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น คำตอบที่ต้องการ คือ

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0.8}{n^3\pi^3}\left[1 - (-1)^n\right]\sin\frac{n\pi x}{2}\cos\frac{3n\pi t}{2}$$

$$= \frac{0.8}{\pi^3}\left(\frac{2}{1^3}\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{3\pi t}{2} + 0 + \frac{2}{3^3}\sin\frac{3\pi x}{2}\cos\frac{9\pi t}{2} + 0 + \frac{2}{5^3}\sin\frac{5\pi x}{2}\cos\frac{15\pi t}{2} + 0 + \ldots\right)$$

$$= \frac{1.6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\cos\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

จากตัวอย่างที่ 5.6 จะพบว่า ในกรณีที่โจทย์กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นเป็นฟังก์ชันยาก การหาค่า E_n จะหาได้ยาก ซึ่งผิดกับตัวอย่างที่ 5.4 ที่กำหนดเงื่อนไขเริ่มต้นอยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ การแก้ปัญหาในลักษณะนี้ ใช้การเทียบสัมประสิทธิ์เป็นพจน์ ๆ ไปหาคำตอบจะง่ายกว่าตัวอย่างที่ 5.5 มาก จึงควรเลือกวิธีการหาคำตอบโดยดูจากเงื่อนไขเริ่มต้นที่โจทย์กำหนดมาให้

การพิจารณาการสั่นของเส้นลวดอีกลักษณะหนึ่ง กล่าวคือ ปลายด้านหนึ่งของเส้นลวด ตรึงอยู่กับที่ ส่วนปลายอีกด้านเคลื่อนที่ได้แบบอิสระ (free) ซึ่งเราสามารถกำหนดเงื่อนไขได้ง่าย โดยแทนค่า $x = 0$ ที่ปลายด้านตรึงกับที่ และ $x = \ell$ ที่ปลายด้านอิสระ ดังนั้น จะได้เงื่อนไข 2 เงื่อนไขคือ

$$y(0, t) = 0 \text{ และ } \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\ell, t} = 0 \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } t$$

เพราะว่าผลคูณคำตอบทั่วไปของ (5.25) คือ

$$y(x, t) = (A \cos\lambda x + B \sin \lambda x)(C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t)$$

แทนค่า $x = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $y(0, t) = 0$ จะได้

$$y(0, t) = A(C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t) = 0$$

หรือ $A = 0$

เพราะฉะนั้น

$$y(x, t) = B \sin \lambda x \; (C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t)$$

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} = B \lambda \cos \lambda x \; (C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t)$$

แทนค่า $x = \ell$ แล้วใช้เงื่อนไข $\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{\ell, t} = 0$

$$\frac{\partial y(\ell, t)}{\partial x} = B\lambda \cos \lambda\ell \, (C \cos a\lambda t + D \sin a\lambda t) = 0$$

จากสมการนี้เราสรุปว่า

$$\lambda = 0$$

หรือ $\cos \lambda\ell = 0 = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2}$

$$\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell}$$

และสุดท้าย จะให้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$$

คำตอบทั่วไปของปัญหาเกิดจากการบวกผลคูณของคำตอบซึ่งสมนัยกับแต่ละ λ_n เข้าด้วยกัน (สร้างคำตอบโดยหลักการวางซ้อนนั่นเอง) เพราะฉะนั้น

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \lambda_n x \,(C_n \cos a\lambda_n t + D_n \sin a\lambda_n t)$$

หรือ
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \left[C_n \cos \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} + D_n \sin \frac{(2n-1)\pi at}{2\ell} \right] \qquad \text{.......(5.67)}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $y(x, 0) = f(x)$ จะได้

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \quad ; \quad E_n = B_n \cdot C_n$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ เส้นลวดยาว ℓ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ คือ

$$E_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\, dx \qquad \text{.......(5.68)}$$

โดยวิธีเดียวกัน ถ้าใช้เงื่อนไขความเร็วเริ่มต้น $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x,0} = g(x)$ จะได้

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)\pi a}{2\ell} F_n \right] \frac{\sin (2n-1)\pi x}{2\ell} \quad ; \quad F_n = B_n \cdot D_n$$

ดังนั้น

$$F_n = \frac{4}{(2n-1)a\pi} \int_0^{\ell} g(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\, dx \qquad \text{.......(5.69)}$$

แทนค่า E_n, F_n ลงใน (5.67) ก็จะได้คำตอบที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.7 จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 16 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \text{.......(5.70)}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$y_x(0, t) = 0 \text{ และ } y(3, t) = 0 \qquad \text{.......(5.71)}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x, 0) = 0, \; y_t(x, 0) = 12 \cos \pi x + 16 \cos 3\pi x - 8 \cos 5\pi x \qquad \text{.......(5.72)}$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมติให้

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่าใน (5.70)

$$X(x)\, T''(t) = 16\, X''(x)\, T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{16}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ 2 สมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T''(t) + 16\,\lambda^2\, T(t) = 0$$

คำตอบของสองสมการ คือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$T(t) = C\cos 4\lambda t + D\sin 4\lambda t$$

ดังนั้น

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$= (A\cos\lambda x + B\sin\lambda x) \cdot T(t)$$

หรือ $y_x(x, t) = (-A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x) \cdot T(t)$

แทนค่า $x = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขแรกใน (5.71)

$$y_x(0, t) = B\lambda \cdot T(t) = 0$$

แต่ $T(t) \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$B = 0$$

นั่นคือ

$$X(x) = A\cos\lambda x$$

แทนค่า $x = 3$ แล้วใช้เงื่อนไขที่สองใน (5.71) จะได้

$$X(3) = A\cos 3\lambda = 0$$

แต่ $A \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\cos 3\lambda = 0 = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$3\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{6} \quad ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น

$$y(x,t) = A\cos\frac{(2n-1)\pi x}{6}\left(C\cos\frac{4(2n-1)\pi t}{6} + D\sin\frac{4(2n-1)\pi t}{6}\right)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขที่หนึ่งใน (5.71)

$$y(x,0) = A\cos\frac{(2n-1)\pi x}{6}\,(C) = 0$$

แต่ $A\cos\frac{(2n-1)\pi x}{6} \neq 0$ จะได้ $C = 0$ และ

$$y(x,t) = E\cos\frac{(2n-1)\pi x}{6}\sin\frac{4(2n-1)\pi t}{6} \quad ; \quad E = AD \qquad \ldots\ldots(5.73)$$

สร้างคำตอบใหม่โดยหลักการวางซ้อน (superposition principle) ให้มีจำนวนพจน์เท่ากับ จำนวนพจน์ของเงื่อนไขเริ่มต้นที่สองใน (5.72) โดยใช้คำตอบใน (5.73) เป็นหลัก นั่นคือ

$$\begin{aligned} y(x,t) &= E_1\cos\frac{(2n_1-1)\pi x}{6}\sin\frac{4(2n_1-1)\pi t}{6} \\ &\quad + E_2\cos\frac{(2n_2-1)\pi x}{6}\sin\frac{4(2n_2-1)\pi t}{6} \\ &\quad + E_3\cos\frac{(2n_3-1)\pi x}{6}\sin\frac{4(2n_3-1)\pi t}{6} \qquad \ldots\ldots(5.74) \end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ของ (5.74) เทียบกับ t

$$\begin{aligned} y_t(x,t) &= E_1\cos\frac{(2n_1-1)\pi x}{6}\left[\frac{4(2n_1-1)\pi}{6}\right]\cos\frac{4(2n_1-1)\pi t}{6} \\ &\quad + E_2\cos\frac{(2n_2-1)\pi x}{6}\left[\frac{4(2n_2-1)\pi}{6}\right]\cos\frac{4(2n_3-1)\pi t}{6} \\ &\quad + E_3\cos\frac{(2n_3-1)\pi x}{6}\left[\frac{4(2n_3-1)\pi}{6}\right]\cos\frac{4(2n_3-1)\pi t}{6} \end{aligned}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้นที่สองใน (5.72)

$$\begin{aligned} y_t(x,0) &= \frac{4(2n_1-1)\pi}{6}E_1\cos\frac{(2n_1-1)\pi x}{6} + \frac{4(2n_2-1)\pi}{6}E_2\cos\frac{(2n_2-1)\pi x}{6} \\ &\quad + \frac{4(2n_3-1)\pi}{6}E_3\cos\frac{(2n_3-1)\pi x}{6} \\ &= 12\cos\pi x + 16\cos 3\pi x - 8\cos 5\pi x \end{aligned}$$

ใช้การเทียบสัมประสิทธิ์ สมการเป็นจริงเมื่อ

$$\frac{4(2n_1-1)\pi E_1}{6} = 12 \ ; \qquad \frac{(2n_1-1)}{6} = 1 \qquad ....(5.75)$$

$$\frac{4(2n_2-1)\pi E_2}{6} = 16 \ ; \qquad \frac{2n_2-1}{6} = 3 \qquad ....(5.76)$$

$$\frac{4(2n_3-1)\pi E_3}{6} = -8 \ ; \qquad \frac{2n_3-1}{6} = 5 \qquad ....(5.77)$$

จาก (5.75), (5.76) และ (5.77) จะได้

$$E_1 = \frac{3}{\pi} \ , \quad n_1 = \frac{7}{2}$$

$$E_2 = \frac{4}{3\pi} \ , \quad n_2 = \frac{19}{2}$$

$$E_3 = \frac{-2}{5\pi} \ , \quad n_3 = \frac{31}{2}$$

แทนค่าเหล่านี้ลงใน (5.74) จะได้คำตอบแท้จริง

$$y(x, t) = \frac{3}{\pi} \cos \pi x \sin 4\pi t + \frac{4}{3\pi} \cos 3\pi x \sin 12\pi t - \frac{2}{5\pi} \cos 5\pi x \sin 20\pi t$$

สมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เป็นเอกพันธ์ (Nonhomogeneous partial differential equations)

การแทนค่าฟังก์ชันไม่รู้ค่าตัวใหม่เพื่อลดรูปสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยแบบไม่เป็นเอกพันธ์ไปเป็นแบบเอกพันธ์ ดังนั้น ถ้าตัวแปรสามารถแยกได้ และถ้าเงื่อนไขขอบใหม่ของจุดสองจุดสามารถทำเป็นเอกพันธ์ได้ โดยเลือกฟังก์ชันใหม่ที่เหมาะสม ดังนั้นปัญหาของสตูร์ม-ลีดูวิลล์ (Sturm-Liouville) จึงเกิดขึ้น

เพื่อแสดงและพิจารณาระยะขจัดข้างบนเส้นลวดที่ยื่นออกไป เมื่อมีแรงภายนอกต่อหนึ่งหน่วยความยาวมากระทำขนานกับแกน y ให้แรงนั้นเป็นปฏิภาคกับระยะจากปลายด้านหนึ่ง และให้ระยะขจัดเริ่มต้น (initial displacement) และความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ หน่วยของ x และ t สามารถเลือก ดังนั้นปัญหากลายเป็น

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + Ax \ ; \ 0 < x < 1, \ t > 0 \qquad ....(5.78)$$

$$y(0,t) = y(1,t) = y(x,0) = y_t(x,0) = 0 \qquad \text{.......(5.79)}$$

ในพจน์ของฟังก์ชันใหม่ Y ในเมื่อ

$$y(x,t) = Y(x,t) + \psi(x)$$

แทนค่า $y(x, t)$ ลงใน (5.78) จะได้

$$Y_{tt}(x,t) = Y_{xx}(x,t) + \psi''(x) + A\,x$$

สมการนี้จะเป็นแบบเอกพันธ์ ถ้า

$$\psi''(x) = -A\,x \qquad \text{.......(5.80)}$$

เงื่อนไขขอบสองจุดของ Y จะกลายเป็น

$$Y(0,t) + \psi(0) = 0,\ Y(1,t) + \psi(1) = 0$$

ซึ่งสมการทั้งสองจะเป็นแบบเอกพันธ์ ถ้า

$$\psi(0) = 0,\ \psi(1) = 0 \qquad \text{.......(5.81)}$$

จากเงื่อนไข (5.72) และ (5.73) จะพบว่า

$$\psi(x) = \frac{A}{6}\,x(1-x^2)\ ;\ 0 \le x \le 1 \qquad \text{.......(5.82)}$$

ปัญหาค่าขอบใน Y ประกอบด้วยเงื่อนไข

$$Y_{tt} = Y_{xx}$$

$$Y(0,t) = Y(1,t) = 0$$

และ $$Y(x,0) = -\psi(x)$$

$$Y_t(x,0) = 0$$

ซึ่งสมการชุดใหม่นี้เป็นกรณีพิเศษของปัญหาที่แก้ในตัวอย่างที่ 5.3 เพราะฉะนั้น คำตอบของปัญหาชุดนี้เขียนได้เป็น

$$Y(x,t) = -\frac{1}{2}\left[\psi(x-t) + \psi(x+t)\right]$$

หรือ $$y(x,t) = \psi(x) - \frac{1}{2}\left[\psi(x-t) + \psi(x+t)\right]$$

ในเมื่อ $\psi(x)$ นิยามสำหรับทุกค่าจำกัดของ x เป็นการขยายระยะออกไปเป็นฟังก์ชันคี่ ของ ψ และมีคาบเป็น 2

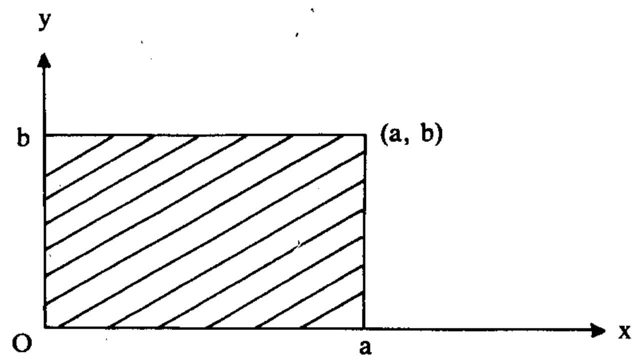
5.3 สมการคลื่นสองมิติ (Two-dimensional wave equation)

การสั่นของเส้นลวดและเงื่อนไขแบบต่าง ๆ ของสมการคลื่นหนึ่งมิติ ได้อธิบายแล้วจากหัวข้อที่ผ่านมา ต่อจากนี้ไปเราจะประยุกต์เทคนิคการวิเคราะห์ฟูเรียร์ใช้กับปัญหาต่าง ๆ ของการสั่นในสองมิติ

สมการการสั่น (แบบน้อย ๆ) ของเนื้อเยื่อ (membrane) กำหนดโดยสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad \text{.......(5.83)}$$

เมื่อ $u(x, y, t)$ คือการหักเห(สั่น) ของเนื้อเยื่อ และ $c^2 = T/\rho$ เมื่อ ρ คือมวลของเนื้อเยื่อต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ และ T คือแรงตึงของเนื้อเยื่อ สมการ (5.83) เรียกว่า สมการคลื่นสองมิติ พิจารณาเนื้อเยื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามรูป 5.7



รูป 5.7 **เนื้อเยื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้า**

และจงหาคำตอบของ (5.83) ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขขอบต่อไปนี้

$u(x, y, t) = 0$ ที่ขอบของเนื้อเยื่อสำหรับทุกค่าของ t นั่นคือ

$u(x, y, t) = 0$ สำหรับ $x = 0, x = a, y = 0$ และ $y = b$ ....(5.84)

เงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \qquad \text{.......(5.85)}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) \right|_{t=0} = g(x, y) \qquad \text{.......(5.86)}$$

ในเมื่อ $f(x, y)$ และ $g(x, y)$ คือระยะขจัดเริ่มต้น และความเร็วเริ่มต้นที่กำหนดให้ของเนื้อเยื่อตามลำดับ

วิธีทำ กำหนดว่าคำตอบของ (5.83) อยู่ในรูป

$$u(x, y, t) = X(x)\,Y(y)\,T(t) \qquad \text{.......(5.87}$$

แทนค่า (5.87) ลงใน (5.83)

$$X(x)\,Y(y)\,T''(t) = c^2\left(X''(x)\,Y(y)\,T(t) + X(x)\,Y''(y)\,T(t)\right)$$

เอา $X(x)\,Y(y)\,T(t)$ หารตลอดสมการ และแยกตัวแปร

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} \qquad \text{.......(5.88)}$$

เพราะว่าด้านขวาของ (5.88) ขึ้นกับตัวแปร t เพียงตัวเดียว ขณะที่ด้านซ้ายไม่ขึ้นกับตัวแปร t สมการ (5.88) จะเป็นจริงได้เมื่อ แต่ละด้านต่างเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $-\kappa^2$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{1}{c^2}\,\frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2$$

จากนี้จะได้สมการเชิงอนุพันธ์ สองสมการ

$$T''(t) + c^2k^2\,T(t) = 0 \qquad \text{.......(5.89)}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2$$

หรือ $$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} \qquad \text{.......(5.90)}$$

พิจารณา (5,90) อีกครั้ง พบว่าด้านซ้ายขึ้นกับตัวแปร x เพียงตัวเดียว และด้านขวาขึ้นกับตัวแปร y เพียงตัวเดียว ดังนั้นด้านทั้งสองจะต้องมีค่าเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง ค่าคงที่นี้จะมีค่าติดลบ (เงื่อนไขขอบอย่างอื่นไม่สามารถสอดคล้อง) ค่านี้คือ $-k_x^2$

ดังนั้น

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -k^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k_x^2$$

จากนี้จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ

$$X''(x) + k_x^2\,X(x) = 0 \qquad \text{.......(5.91)}$$

$$Y''(y) + k_y^2\,Y(y) = 0 \qquad \text{.......(5.92)}$$

ในเมื่อ

$$k_y^2 = k^2 - k_x^2 \quad \text{หรือ} \quad k_x^2 + k_y^2 = k^2 \qquad ....(5.93)$$

คำตอบทั่วไปของ (5.89), (5.91) และ (5.92) คือ

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x \qquad ....(5.94)$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y \qquad ....(5.95)$$

$$T(t) = E \cos ckt + F \sin ckt \qquad ....(5.96)$$

จากเงื่อนไขขอบ (5.84)

$$X(0) = 0, \; X(a) = 0, \; Y(0) = 0, \; Y(b) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(0) = A = 0 \text{ และ } X(a) = B \sin k_x a = 0$$

จะได้ $k_x a = m\pi$

หรือ $$k_x = \frac{m\pi}{a} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \qquad ....(5.97)$$

โดยวิธีเดียวกัน

$$Y(0) = C = 0 \text{ และ } Y(b) = D \sin k_y b = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$k_y b = n\pi$$

หรือ $$k_y = \frac{n\pi}{b} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (5.98)$$

โดยวิธีนี้จะได้คำตอบ

$$X_m(x) = B_m \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

$$Y_n(y) = D_n \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

เพราะว่า $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

$$k^2 = k_{mn}^2 = \frac{m^2\pi^2}{a^2} + \frac{n^2\pi^2}{b^2} \qquad ....(5.99)$$

และคำตอบทั่วไปที่สมนัยของ (5.89) คือ

$$T_{mn}(t) = E_{mn} \cos k_{mn} ct + F_{mn} \sin k_{mn} ct$$

ดังนั้น ฟังก์ชัน

$$u_{mn}(x, y, t) = X_m(x)\, Y_n(y)\, T_{mn}(t)$$

$$= (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \sin k_{mn} ct) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ....(5.100)$$

เมื่อ $m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$ และ k_{mn} กำหนดโดย (5.99) คือคำตอบของสมการคลื่น (5.83) ซึ่งมีเงื่อนไขขอบของเนื้อเยื่อสี่เหลี่ยมผืนผ้าเป็นศูนย์ ตามรูป 5.7 ต่อไปเราจะหาค่าคงที่ตามใจชอบ (arbitrary constants) G_{mn} และ H_{mn}

เพื่อให้ได้คำตอบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขเริ่มต้น (5.85) และ (5.86) เราจะใช้ผลลัพธ์เหมือนวิธีที่ใช้ในตัวอย่างที่ 5.1

พิจารณาอนุกรมทวีคูณ (double series)

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn} \cos k_{mn} ct + H_{mn} \sin k_{mn} ct) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ....(5.101)$$

จาก (5.101) และ (5.85)

$$u(x, y, 0) = f(x, y)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ....(5.102)$$

อนุกรม (5.102) เรียกว่า "อนุกรมฟูเรียร์ทวีคูณ (double Fourier series)" ของ $f(x, y)$ ในบริเวณ $0 < x < a$ และ $0 < y < b$ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ G_{mn} ของ $f(x, y)$ ใน (5.102) สามารถหาได้โดย กำหนดให้

$$J_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ....(5.103)$$

แล้วเขียน (5.102) ใหม่ในรูป

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} J_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \qquad ....(5.104)$$

เมื่อให้คงค่า y (5.104) คืออนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x, y)$ และถูกพิจารณาเหมือนฟังก์ชันของ x จากสูตรการหาสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น $J_m(y)$ มีสูตรเป็น

$$J_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \qquad ....(5.105)$$

และ (5.103) คืออนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ของ $J_m(y)$ เพราะฉะนั้น สัมประสิทธิ์ G_{mn} กำหนดเป็น

$$G_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b J_m(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy \qquad ....(5.106)$$

แทนค่า (5.105) ลงใน (5.106)

$$G_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx\, dy \qquad ....(5.107)$$

ในเมื่อ $m = 1, 2, \ldots, n = 1, 2, \ldots$

เพื่อจะหาค่าของ H_{mn} ของ (5.100) เราหาอนุพันธ์ของ (5.100) ทีละพจน์ เทียบกับ t แล้วใช้ (5.86)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} &= g(x, y) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} H_{mn}\, ck_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \qquad ....(5.108) \end{aligned}$$

ทำเหมือนข้างต้น จะได้

$$H_{mn} = \frac{4}{abc\, k_{mn}} \int_0^b \int_0^a g(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx\, dy \qquad ....(5.109)$$

ในเมื่อ $m = 1, 2, \ldots$ และ $n = 1, 2, \ldots$

เพราะฉะนั้น (5.101) กับสัมประสิทธิ์ซึ่งกำหนดตาม (5.107) และ (5.109) คือคำตอบที่ต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.8 จงหาคำตอบของสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$u(x, y, t) = 0$ เมื่อ $x = 0, x = a, y = 0, y = b$

$u(x, y, 0) = xy(x-a)(y-b)$

$$\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$$

วิธีทำ จาก (5.101)

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (G_{mn}\cos k_{mn}ct + H_{mn}\sin k_{mn}ct) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

ให้ $t = 0$

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} G_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

ตาม (5.107)

$$\begin{aligned}
G_{mn} &= \frac{4}{ab}\int_0^b \int_0^a u(x, y, 0) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{ab}\int_0^b \int_0^a xy(x-a)(y-b) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dx\, dy \\
&= \frac{4}{ab}\int_0^b y(y-b) \left\{ \int_0^a x(x-a) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \right\} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy \\
&= \frac{4}{ab}\int_0^a x(x-a) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \int_0^b y(y-b) \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy
\end{aligned}$$

พิจารณาอินทิกรัล

$$\int_0^a x(x-a) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx = \int_0^a x^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx - a\int_0^a x \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx$$

อินทิกรัลแรกทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วนสองครั้ง และอินทิกรัลพจน์ที่สองทางขวา อินทิเกรตทีละส่วนหนึ่งครั้ง ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_0^a x^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx &= x^2\left(-\frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\right)\Big|_0^a + 2\int_0^a x\frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\, dx \\
&= -\frac{a^3}{m\pi}\cos m\pi + \frac{2a}{m\pi}\left\{ x\left(\frac{a}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}\right)\Big|_0^a \right. \\
&\qquad \left. - \int_0^a \frac{a}{m\pi}\sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \right\} \\
&= -\frac{a^3}{m\pi}\cos m\pi + \frac{2a}{m\pi}\left\{ 0 + \frac{a^2}{m^2\pi^2}\cos\frac{m\pi x}{a}\Big|_0^a \right\} \\
&= -\frac{a^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2a^3}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m - 1\right]
\end{aligned}$$

$$\int_0^a x \sin\frac{m\pi x}{a}dx = x\left(-\frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}\right)\Big|_0^a + \int_0^a \frac{a}{m\pi}\cos\frac{m\pi x}{a}dx$$

$$= -\frac{a^2(-1)^m}{m\pi} + \frac{a^2}{m^2\pi^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\Big|_0^a$$

$$= -\frac{a^2(-1)^m}{m\pi}$$

ดังนั้น

$$\int_0^a x(x-a)\sin\frac{m\pi x}{a}dx = -\frac{a^3}{m\pi}(-1)^m + \frac{2a^3}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m - 1\right] + \frac{a^3}{m\pi}(-1)^m$$

$$= \frac{2a^3}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m - 1\right]$$

โดยวิธีเดียวกันจะได้

$$\int_0^b y(y-b)\sin\frac{m\pi y}{b}dy = \frac{2b^3}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

นั่นคือ จะได้

$$G_{mn} = \frac{4}{ab}\frac{2a^3}{m^3\pi^3}\left[(-1)^m - 1\right]\frac{2b^3}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{64\,a^2b^2}{\pi^6m^3n^3} & \text{เมื่อ } m \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 0 & \text{เมื่อ } m \text{ และ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

เพราะว่า $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0$ และจาก (5.109) $H_{mn} = 0$ ดังนั้น คำตอบสุดท้าย คือ

$$u(x, y, t) = \frac{64a^2b^2}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3n^3}\cos k_{mn}ct\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

ในเมื่อ $k_{mn}^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$

ในตัวอย่างต่อไปนี้ จะพิจารณาการสั่นของเส้นลวดที่ยาวเป็นอนันต์ ในกรณีนี้จะไม่มีเงื่อนไขขอบ มีแต่เงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 5.9 จงหาระยะขจัด (displacement) $y(x, t)$ ของเส้นลวดซึ่งยาวอนันต์ ความเร็วเริ่มต้นเป็นศูนย์ และระยะขจัดเริ่มต้น (initial displacement) เป็น $f(x)$ สำหรับ $-\infty < x < \infty$

วิธีทำ ฟังก์ชัน y (x, t) สอดคล้องตามสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x, t)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x, 0) = f(x) \;;\; -\infty < x < \infty \qquad ....(5.110)$$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}(x, t)\right|_{t=0} = 0 \qquad ....(5.111)$$

ตามตัวอย่างที่ 5.1 แทนค่า

$$y(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

ลงใน (5.25) จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ คือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad ....(5.112)$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0 \qquad ....(5.113)$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$T(t) = C\cos a\lambda t + D\sin a\lambda t$$

คือคำตอบของ (5.112) และ (5.113) ตามลำดับ ใช้เงื่อนไข (5.111)

$$T'(0) = a\lambda D = 0$$

หรือ $D = 0$

ดังนั้น

$$y(x, y\,;\lambda) = (F\cos\lambda x + G\sin\lambda x)\cos a\lambda t \qquad ....(5.114)$$

คือคำตอบของ (5.25) ซึ่งสอดคล้องตาม (5.111)

อนุกรมใด ๆ ของฟังก์ชัน (5.114) หาได้ตามวิธีเช่นที่ผ่านมาโดยให้ λ เป็นผลคูณของจำนวนคงค่า (fix number) จะนำไปสู่ฟังก์ชันซึ่งมีคาบใน x เมื่อ t = 0 อย่างไรก็ตาม เพราะว่า f (x) ใน (5.110) ไม่ได้กำหนดว่าเป็นฟังก์ชันมีคาบ ดังนั้นในกรณีนี้เราจะใช้ฟูเรียร์อินทิกรัล แทน อนุกรมฟูเรียร์

เพราะว่า F และ G ใน (5.114) คือค่าตามใจชอบ เราจะพิจารณาค่าเหล่านี้เหมือนฟังก์ชันของ λ และเขียน F = F (λ) และ G = G (λ) เพราะว่าสมการคลื่น (5.25) เป็นเชิงเส้นและเอกพันธ์ ดังนั้น ฟังก์ชัน

$$y(x, t) = \int_0^\infty y(x, t; \lambda)\, d\lambda = \int_0^\infty \Big[F(\lambda) \cos \lambda x + G(\lambda) \sin \lambda x \Big] \cos a\lambda t \, d\lambda \qquad \text{.......(5.115)}$$

เป็นคำตอบของ (5.25)

จาก (5.110)

$$y(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty \Big[F(\lambda) \cos \lambda x + G(\lambda) \sin \lambda x \Big] d\lambda \qquad \text{.......(5.116)}$$

จากทฤษฎีบทฟูเรียร์อินทิกรัล

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(x) \cos \omega (t-x)\, dx \Big] d\omega \qquad \text{.......(5.117)}$$

หรือเขียนใหม่เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda (x-y)\, dy \Big] d\lambda \qquad \text{.......(5.118)}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(y) \left(\cos \lambda x \cos \lambda y + \sin \lambda x \sin \lambda y \right) dy \Big] d\lambda$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big[\cos \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda y \, dy + \sin \lambda x \int_{-\infty}^\infty f(y) \sin \lambda y \, dy \Big] d\lambda \qquad \text{.......(5.119)}$$

ถ้ากำหนดให้

$$F(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda y \, dy \quad \text{และ}$$

$$G(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \sin \lambda y \, dy$$

ดังนั้น (5.119) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$f(x) = \int_0^\infty [F(\lambda) \cos \lambda x + G(\lambda) \sin \lambda x]\, d\lambda \qquad \text{.......(5.120)}$$

เปรียบเทียบ (5.120) กับ (5.116) จะเขียน (5.116) เป็น

$$y(x, 0) = f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \Big[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda (x-y)\, dy \Big] d\lambda \qquad \text{.......(5.121)}$$

ดังนั้น จาก (5.115)

$$y(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(y)\cos\lambda(x-y)\cos a\lambda t \, dy \right] d\lambda \quad ....(5.122)$$

ใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ

$$\cos\lambda(x-y)\cos a\lambda t = \frac{1}{2}\left[\cos\lambda(x+at-y) + \cos\lambda(x-at-y)\right]$$

เพราะฉะนั้น (5.122) กลายเป็น

$$y(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\lambda(x+at-y)\,dy\right] d\lambda$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\lambda(x-at-y)\,dy\right] d\lambda \quad ....(5.123)$$

ถ้าแทนค่า x ด้วย $x \pm at$ ใน (5.118)

$$f(x \pm at) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y)\cos\lambda(x \pm at - y)\,dy\right] d\lambda$$

และเมื่อเปรียบเทียบกันกับ (5.122)

$$y(x,t) = \frac{1}{2} f(x+at) + \frac{1}{2} f(x-at)$$

ซึ่งเป็นสมการที่คุ้นเคยสำหรับการเดินทางของคลื่น ดูตัวอย่างที่ 5.3

แบบฝึกหัด 5.1

สมการการสั่นของเส้นลวด หรือสมการคลื่น

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาคำตอบ y ของสมการคลื่น $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

1. $y(0, t) = y(10, t) = y_t(x, 0) = 0$ และ
$y(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{10}$

2. $y(0, t) = y(10, t) = y_t(x, 0) = 0$ และ
$y(x, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi x}{10}$

3. $y(0, t) = y(10, t) = y_t(x, 0) = 0$ และ
$y(x, 0) = \frac{x}{20}$ สำหรับ $0 \leq x \leq 5$
$= \frac{1}{2} - \frac{x}{20}$ สำหรับ $5 \leq x \leq 10$

4. $y(0, t) = y(2\pi, t) = y(x, 0) = 0$
และ $y_t(x, 0) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = 0, \pi, 2\pi \\ 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{เมื่อ } \pi < x < 2\pi \end{cases}$

5. $y(0, t) = y(10, t) = y(x, 0) = 0$
เมื่อ $y_t(x, 0) = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi x}{10}$

6. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$y(0, t) = 0 \quad , \quad y(2, t) = 0$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$$

7. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad x > 0, t > 0$$

กำหนดเงื่อนไข

$$y(0, t) = 10 \sin 2t \ , \ y(x, 0) = 0, \ y_t(x, 0) = 0$$

และ $\lim_{x \to \infty} y(x, t) = 0$

8. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$

$$y(0, t) = 0 \ , \ y(\pi, t) = 0$$

$y(x, 0) = 0.1 \sin x + 0.01 \sin 4x$ และ $y_t(x, 0) = 0$

9. จากตัวอย่างที่ 5.4 เงื่อนไขขอบคงเดิม ให้เปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มใหม่ นั่นคือ กำหนดให้

$y(x, 0) = 0$ และ $y_t(x, 0) = 0.05x(2-x)$

10. จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \pi, \ t > 0$$

$$y_x(0, t) = \ , \ y(\pi, t) = h \ , \ y_t(x, 0) = 0$$

และ $y(x, 0) = 0$

11. ขึงลวดเส้นหนึ่ง โดยตรึงจุดปลายทั้งสองที่ $x = 0$ และ $x = \ell$ ที่เวลา $t = 0$ จุดกึ่งกลางของเส้นลวด ถูกดึงให้สูงขึ้นมาเป็นระยะ h จากแนวราบ แล้วปล่อยเส้นลวด จงหาระยะขจัดที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$

12. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad x > 0, t > 0$$

$$y_x(0, t) = A \sin \omega t \ , \ y(x, 0) = 0 \ , \ y_t(x, 0) = 0$$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.1

1. $3 \sin \frac{\pi x}{10} \cos \frac{a\pi t}{10}$

2. $-\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)(4n^2-4n-3)} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{10} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{10}$

3. $\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi x}{10} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{10}$

4. $\frac{4}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{(2n-1)^2} \right] \sin (2n-1)x \sin (2n-1)at$

5. $\frac{2}{\pi a} \sin \frac{\pi x}{10} \sin \frac{\pi at}{10}$

6. $y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$

8. $0.1 \sin x \cos 2t + 0.01 \sin 4x \cos 8t$

9. $\frac{3.2}{3\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2} \sin \frac{3(2n-1)\pi t}{2}$

10. $\frac{8h}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)} \sin (n-\frac{1}{2})x \,.\, \sin (2n-1)t$

11. $\frac{8h}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{\ell} \cos \frac{(2n-1)\pi at}{\ell}$

12. $\frac{Aa}{\omega} \left\{ \cos \omega \left(1 - \frac{x}{a}\right) - 1 \right\}$ ถ้า $t > \frac{x}{a}$ และเป็นศูนย์เมื่อ $t \leq \frac{x}{a}$

5.4 สมการการนำความร้อน (Heat conduction equation)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u \qquad \text{.......(5.124)}$$

ในเมื่อ

$u = u(x, y, z, t)$ คืออุณหภูมิที่ตำแหน่ง (x, y, z) ในของแข็งที่เวลา t

k คือ สภาพการแพร่กระจาย (diffusivity) และ

$$k = \frac{K}{\sigma\mu}$$

โดยที่

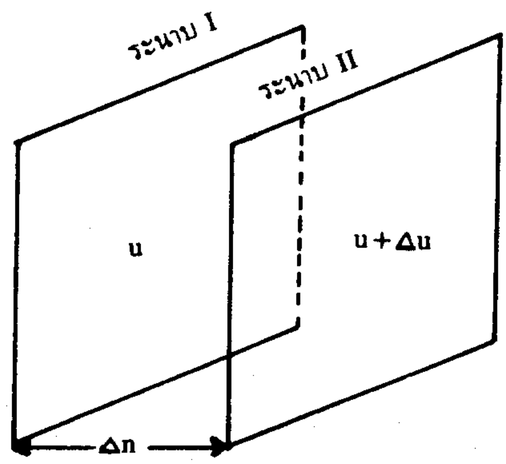
K คือ สภาพการนำความร้อน (thermal conductivity)

σ คือ ความร้อนจำเพาะ (specific heat)

และ μ คือ มวลต่อปริมาตร (ความหนาแน่น)

กำหนดว่า K, σ, μ เป็นค่าคงที่ทั้งหมด และเรียก $\nabla^2 u$ ว่า "ลาปลาซเซียน (Laplacian) ของ u" ซึ่งอยู่ในพิกัดฉาก 3 มิติ นั่นคือ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{.......(5.125)}$$



รูปที่ 5.8

กำหนดให้ u เป็นอุณหภูมิ (temperation) $\triangle n$ เป็นระยะห่างระหว่าง ระนาบ I และระนาบ II ซึ่งวางขนานกันและมีอุณหภูมิเป็น u และ $u+\triangle u$ ตามลำดับ (ดูรูป 5.8) ตามความเป็นจริงจะพบว่าอุณหภูมิจะไหลจากที่ที่มีอุณหภูมิสูง ไปยังที่ที่มีอุณหภูมิต่ำเสมอ ในที่นี้จะเรียกจำนวนความร้อนต่อหนึ่งหน่วยพื้นที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลาว่า "ฟลักซ์ความร้อน (heat flux) ซึ่งจะเป็นปฏิภาคตรงกับความแตกต่างของอุณหภูมิ $\triangle u$ และเป็นสัดส่วนกลับกับระยะห่าง $\triangle n$ ดังนั้น

$$\text{ฟลักซ์ความร้อนจากระนาบ I ไปยังระนาบ II} = -K\frac{\triangle u}{\triangle n} \qquad \ldots\ldots(5.125)$$

โดยที่K คือค่าคงที่ซึ่งเกิดจากปฏิภาค และเรียกว่า "สภาพการนำความร้อน" เครื่องหมายลบเกิดขึ้นเพราะระนาบ II มีอุณหภูมิสูงกว่าระนาบ I ดังนั้น ฟลักซ์ความร้อนจึงควรไหลจากระนาบ II ไปยังระนาบ I (ตามความเป็นจริง) เครื่องหมายลบที่เกิดขึ้นบอกให้ทราบว่าฟลักซ์ความร้อนไหลตรงกันข้ามกับความเป็นจริง

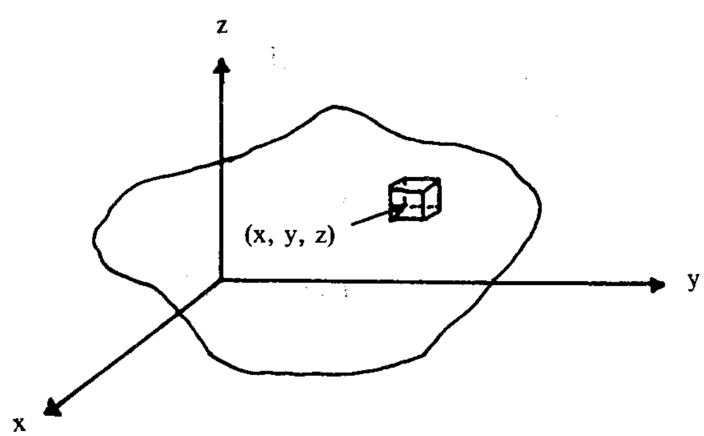
จากสมการ (5.125) ถ้าใส่ลิมิตเมื่อ $\triangle u$ และ $\triangle n$ เข้าใกล้ศูนย์ นั่นคือ จะได้ว่า

$$\text{ฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านระนาบ I} = -K\frac{\partial u}{\partial n} \qquad \ldots\ldots(5.126)$$

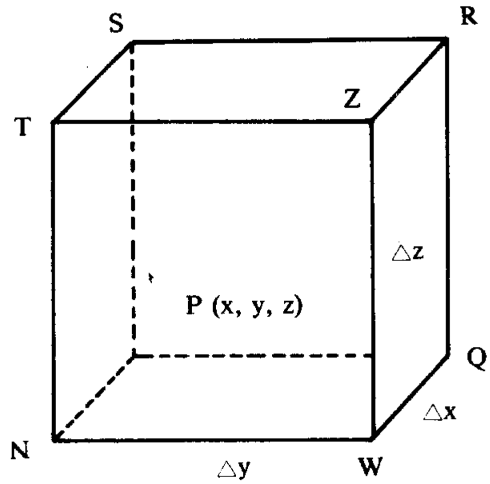
บางครั้งเราเรียก $\frac{\partial u}{\partial n}$ ว่า "เกรเดียนต์ของ u" เขียนในรูปเวคเตอร์คือ ∇u ดังนั้น (5.126) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\text{ฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านระนาบ I} = -K\nabla u \qquad \ldots\ldots(5.127)$$

ต่อไปจะดูการไหลของความร้อนในของแข็งในระบบพิกัดฉาก 3 มิติ ดูรูป 5.9, รูป 5.10



รูปที่ 5.9



รูปที่ 5.10 รูปขยายสี่เหลี่ยมลูกบาศก์

พิจารณาปริมาตรย่อยรูปลูกบาศก์ ในของแข็ง ซึ่งมีปริมาตร V ตามรูป 5.9 โดยที่ปริมาตรย่อยนี้ มีปริมาตรเป็น $\triangle x \triangle y \triangle z$ ดูรูป 5.10 พิจารณาระนาบ PQRS แล้วใช้ (5.127) มาประยุกต์ ดังนั้น

ฟลักซ์ความร้อนที่ผ่านระนาบ PQRS $= -K \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$

หรือพูดอีกอย่างว่า จำนวนความร้อนต่อพื้นที่ต่อหนึ่งหน่วยเวลาที่ผ่านเข้าระนาบ PQRS $= -K \dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$

เพราะว่าพื้นที่ของระนาบ PQRS $= \triangle y \triangle z$

ดังนั้น จำนวนความร้อนทั้งหมดที่ผ่านเข้าระนาบ PQRS ในเวลา $\triangle t$ คือ

$$-K \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x \triangle y \, \triangle z \, \triangle t \qquad ....(5.128)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ จำนวนความร้อนทั้งหมดที่ผ่านออกระนาบ NWZT ในเวลา $\triangle t$ คือ

$$- K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\triangle x} \triangle y \triangle z \triangle t \qquad ....(5.129)$$

เพราะฉะนั้น จำนวนความร้อนที่เหลือในปริมาตรย่อย เมื่อความร้อนไหลในทิศ x คือจำนวนความร้อนที่ไหลเข้าลบด้วยจำนวนความร้อนที่ไหลออก นั่นคือเท่ากับ

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\triangle x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x} \right\} \triangle y \triangle z \triangle t \qquad ....(5.130)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ สามารถแสดงว่า จำนวนความร้อนที่เหลือในปริมาตรย่อยเมื่อความร้อนไหลในทิศ y และ z จะได้

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\triangle y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y} \right\} \triangle x \triangle z \triangle t \qquad ....(5.131)$$

และ $$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\triangle z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z} \right\} \triangle x \triangle y \triangle t \qquad ....(5.132)$$

ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น จำนวนความร้อนทั้งหมดในปริมาตรย่อย หาได้โดยรวม (5.130), (5.131) และ (5.132) และจำนวนความร้อนนี้ทำให้อุณหภูมิของปริมาตรย่อยเพิ่มขึ้น $\triangle u$ ดังนั้น เราจึงรู้ว่าจำนวนความร้อนที่ต้องการเพื่อเพิ่มอุณหภูมิของมวล m เป็น $\triangle u$ คือ $m\sigma \triangle u$

จากสูตร $M = DV$

ในเมื่อ M คือมวล D คือความหนาแน่น และ V คือปริมาตร

ในปริมาตรย่อย มวลคือ m ความหนาแน่นของของแข็งคือ μ และปริมาตรย่อยคือ $\triangle x \triangle y \triangle z$ เพราะฉะนั้น

$$m = \mu (\triangle x \triangle y \triangle z)$$

จำนวนความร้อนที่เกิดจากการรวม (5.130), (5.131) และ (5.132) = $m\sigma \triangle u$ = $\sigma\mu \triangle x \triangle y \triangle z \triangle u$

$$\left\{ K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x+\triangle x} - K \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x} \right\} \triangle y \triangle z \triangle t + \left\{ K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y+\triangle y} - K \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y} \right\}$$
$$\triangle x \triangle y \triangle t + \left\{ K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z+\triangle z} - K \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z} \right\} \triangle x \triangle y \triangle t = \sigma\mu \triangle x \triangle y \triangle z \triangle u$$

เอา $\triangle x \triangle y \triangle z \triangle t$ หารตลอด

$$K\,\frac{\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\triangle x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right\}}{\triangle x} + K\,\frac{\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\triangle y} - \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}\right\}}{\triangle y}$$

$$+ K\,\frac{\left\{\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+\triangle z} - \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}\right\}}{\triangle z} = \sigma\mu\,\frac{\triangle u}{\triangle t}$$

ใส่ลิมิตเมื่อ $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle z$ และ $\triangle t$ เข้าใกล้ศูนย์ ดังนั้น

$$K\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + K\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + K\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t}$$

$$K\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = \sigma\mu\frac{\partial u}{\partial t}$$

หรือ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\,\nabla^2 u$ ....(5.133)

เมื่อ $k = \dfrac{K}{\sigma\mu}$ สภาพการแพร่กระจาย (diffusivity)

ในกรณีที่อุณหภูมิ u ไม่ขึ้นกับเวลา t (steady-state temperature) จะได้ $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ ดังนั้น (5.133) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\nabla^2 u = 0 \qquad ....(5.134)$$

สมการนี้เรียกว่า "สมการของลาปลาซ (Laplace's equation)"

(5.133) เรียกว่า สมการการไหลของความร้อนในสามมิติ ต่อไปเราจะพิจารณาการไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ เช่น การไหลของความร้อนในเส้นลวด ซึ่งมีฉนวนหุ้มด้านข้าง ดังนั้น (5.133) เขียนใหม่เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ....(5.135)$$

สมการนี้ คือสมการความร้อนในหนึ่งมิติ (The heat equation in one dimension) หรือสมการการไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ (one dimensional heat flow or heat conduction equation) ในเมื่อ u (x, t) คืออุณหภูมิภายในแท่งโลหะซึ่งมีความยาว ℓ ปลายทั้งสองของโลหะมีอุณหภูมิ A (t) และ B (t) และอุณหภูมิเริ่มต้น (initial temperature) ของแท่งโลหะเป็นฟังก์ชันของระยะทาง f (x) ดังนั้น เราสามารถเขียนปัญหาขอบ ของการไหลของความร้อนในหนึ่งมิติ ได้ดังนี้

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; 0 < x < \ell ,\ 0 < t < \infty \qquad ....(5.136)$$

เงื่อนไขขอบ (boundary conditions)

$$u(0, t) = A(t) \text{ และ } u(\ell, t) = B(t) \qquad ....(5.137)$$

เงื่อนไขเริ่มต้น (initial conditions)

$$u(x, 0) = f(x)\ ,\ 0 < x < \ell \qquad ....(5.138)$$

การหาคำตอบของ (5.136) ซึ่งมีเงื่อนไขตาม (5.137) และ (5.138) ง่ายที่สุด เมื่อ $A(t) = 0$ และ $B(t)$ ตลอดทุกค่าของ t ซึ่งเป็นกรณีเฉพาะ (particular case) และเรียกเงื่อนไขขอบลักษณะนี้ว่า "เงื่อนไขขอบเอกพันธ์ (homogeneous boundary conditions)

ตัวอย่างที่ 5.10 พิจารณาอุณหภูมิในแท่งสม่ำเสมอความยาว ℓ ซึ่งไหลไปตามแกน x ปลายทั้งสองของแท่งมีอุณหภูมิเป็นศูนย์ ถ้าอุณหภูมิเริ่มต้นในแท่ง คือ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ} \quad 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ \ell - x & \text{สำหรับ} \quad \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

ในเมื่อ x คือระยะที่วัดจากปลายด้านหนึ่ง จงหาการแจกจ่ายอุณหภูมิ หลังจากเวลานาน t

วิธีทำ เพราะว่าอุณหภูมิ $u(x, t)$ ขึ้นกับ x และ t สมการความร้อนหนึ่งมิติ (5.136)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad ....(5.139)$$

เงื่อนไขขอบ คือ

$$u(0, t) = 0\ ,\ u(\ell, t) = 0 \qquad ....(5.140)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น คือ

$$u(x, 0) = f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ} \quad 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ \ell - x & \text{สำหรับ} \quad \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases} \qquad ....(5.141)$$

อีกครั้งหนึ่ง โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้คำตอบเขียนในรูป

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \qquad ....(5.142)$$

และแทนค่าลงใน (5.139) เพราะฉะนั้น

$$X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t) \qquad ....(5.143)$$

หารด้วย X (x) T (t) และแยกตัวแปร

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k}\frac{T'(t)}{T(t)} \qquad ....(5.144)$$

ฟังก์ชันด้านซ้ายขึ้นกับตัวแปร x ขณะที่ด้านขวาขึ้นกับเฉพาะค่า t ดังนั้น สรุปได้ว่าทั้งสองด้านจะต้องเท่ากับค่าคงที่ ให้ค่าคงที่นี้คือ λ ซึ่งจะต้องมีค่าเป็นลบ เพราะว่า ถ้า $\lambda > 0$ คำตอบเฉพาะ $u(x, t) = X(x)T(t)$ ซึ่งสอดคล้อง (5.140) คือ $u(x, t) = 0$ นั่นคือ ถ้า

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \mu^2$$

ดังนั้น

$$X''(x) - \mu^2 X(x) = 0$$

และคำตอบทั่วไป คือ

$$X(x) = A e^{\mu x} + B e^{-\mu x}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ (5.140)

$$A + B = 0 \text{ และ } Ae^{\lambda \ell} + B e^{-\lambda \ell} = 0$$

หาค่า A และ B จะได้

$$A = -B = 0$$

ดังนั้น $X(x) = 0$ และ

$u(x, t) = 0$ ซึ่งให้เฉพาะคำตอบสำคัญน้อย (trivial solution)

แสดงว่า $\lambda > 0$ ใช้ไม่ได้

เพราะฉะนั้น ถ้าให้ $\lambda = -\mu^2$ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \qquad ....(5.145)$$

$$T'(t) + k\mu^2 T(t) = 0 \qquad ....(5.146)$$

คำตอบทั่วไปของ (5.145) และ (5.146) คือ

$$X(x) = A\cos\mu x + B\sin\mu x \qquad ....(5.147)$$

$$T(t) = C e^{-k\mu^2 t} \qquad ....(5.148)$$

จากเงื่อนไขขอบ (5.140)

$$X(0) = A = 0$$

$$X(\ell) = B\sin\mu\ell = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\mu\ell = n\pi \text{ หรือ } \mu = \frac{n\pi}{\ell}, \; n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots.(5.149)$$

จะได้คำตอบของ (5.145) ซึ่งสอดคล้อง (5.140) คือ

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}, \; n = 1, 2, \ldots \qquad \ldots\ldots.(5.150)$$

คำตอบที่สมนัยของ (5.146) คือ

$$T_n(t) = C_n e^{-k\mu^2 t} = C_n e^{-kn^2\pi^2 t/\ell^2}$$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชัน

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)\, T_n(t) \\ &= b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{\frac{-kn^2\pi^2 t}{\ell^2}} \end{aligned}$$

ในเมื่อ $b_n = B_n \cdot C_n$ คือคำตอบของสมการ ความร้อน (5.139) ซึ่งสอดคล้อง (5.140)

หาคำตอบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไข (5.141) ด้วย พิจารณาอนุกรม

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-kn^2\pi^2 t/\ell^2} \qquad \ldots\ldots.(5.151) \end{aligned}$$

จาก (5.141) และ (5.151)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell} \qquad \ldots\ldots.(5.152)$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ของ f (x) ตาม (5.142) ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ b_n คือ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\ &= \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\frac{\ell}{2}} x \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx + \int_{\frac{\ell}{2}}^{\ell} (\ell - x) \sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx\right] \\ &= \begin{cases} 0 & \text{สำหรับ } n \text{ ที่เป็นเลขคู่} \\ \dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & \text{สำหรับ } n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\dfrac{4\ell}{n^2\pi^2} & \text{สำหรับ } n = 3, 7, 11, \ldots \end{cases} \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น คำตอบ คือ

$$u(x, t) = \frac{4\ell}{\pi^2}\left[\sin\frac{\pi x}{\ell} e^{-\frac{k\pi^2 t}{\ell^2}} - \frac{1}{9}\sin\frac{3\pi x}{\ell} e^{-\frac{k9\pi^2 t}{\ell^2}} + \ldots\right] \quad \text{.......(5.153)}$$

สังเกตว่า คำตอบ $u(x, t)$ ของ (5.153) จะมีค่าน้อยหลังจากช่วงเวลาผ่านไปนาน นั่นคือ

$u(x, t) \to 0$ เมื่อ $t \to \infty$

ตัวอย่างที่ 5.11 จงหาคำตอบของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{.......(5.154)}$$

ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ

$u(0, t) = 0$ และ $u(10, t) = 0$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$u(x, 0) = x$

กำหนดให้ $k = 0.25$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$

แทนค่า $u(x, t)$ ลงใน (5.154) แล้วหารด้วย $X(x)\,T(t)$ แยกตัวแปร จะได้

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{0.25}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{.......(5.155)}$$

$$T'(t) + 0.25\lambda^2 T(t) = 0 \quad \text{.......(5.156)}$$

และคำตอบของ (5.155) และ (5.156) คือ

$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$

$T(t) = C e^{-0.25\lambda^2 t}$

ใช้เงื่อนไขขอบแรก

$$u(0, t) = 0 \text{ จะได้ } X(0) = 0 \text{ เพราะฉะนั้น}$$

$$X(0) = A = 0$$

นั่นคือ $X(x) = B \sin \lambda x$

ใช้เงื่อนไขขอบที่สอง

$$u(10, t) = 0 \quad \text{จะได้} \quad X(10) = 0 \text{ เพราะฉะนั้น}$$

$$X(10) = B \sin 10\lambda = 0$$

$$10\lambda = n\pi$$

หรือ $\lambda = \frac{n\pi}{10}$, $n = 1, 2, \ldots$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{10}$, $n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น

$$X_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{10}$$

$$T_n(t) = C_n e^{-0.25 \frac{n^2\pi^2}{100} t}$$

และ $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = D_n \sin \frac{n\pi x}{10} e^{-0.25 \frac{n^2\pi^2}{100} t}$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน จะได้

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{10} e^{-0.25 \frac{n^2\pi^2}{100} t} \qquad \text{.......(5.157)}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = x$

$$u(x, 0) = x = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{n\pi x}{10}$$

จะพบว่าอนุกรมนี้ คือ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ x เพราะฉะนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ D_n สามารถหาได้ โดยสูตร

$$D_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

แทนค่า $f(x) = x$ และ $\ell = 10$

$$D_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} x \sin \frac{n\pi x}{10} \, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts)