$$D_n = \frac{1}{5}\left[x\left(-\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\right)\Big|_0^{10} + \int_0^{10}\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{10}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[-\frac{100}{n\pi}\cos n\pi + \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10}\right]$$

$$= \frac{-20(-1)^n}{n\pi}$$

$$= \frac{20(-1)^{n+1}}{n\pi} \quad , \; n = 1, 2, \ldots$$

แทนค่าใน (5.157) จะได้คำตอบของ (5.154) คือ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{20}{n\pi}(-1)^{n+1} \; e^{-0.25\frac{n^2\pi^2}{100}t}$$

$$= \frac{20}{\pi}\left[e^{-\frac{\pi^2 t}{400}}\sin\frac{\pi x}{10} - \frac{e^{-\frac{4\pi^2 t}{400}}}{2}\sin\frac{2\pi x}{10}\right.$$

$$\left. + \frac{e^{-\frac{9\pi^2 t}{400}}}{3}\sin\frac{3\pi x}{10} \ldots\right]$$

ปัญหาอื่น ๆ สำหรับสมการความร้อน (other problems for the heat equation)

สำหรับสมการความร้อน เราสามารถเปลี่ยนเงื่อนไขขอบ เงื่อนไขขอบเอกพันธ์อื่นๆ สำหรับ $x = 0$ และ $x = \pi$ นำไปสู่ปัญหาค่าขอบของสตูร์ม - ลีอูวิลล์ และผลลัพธ์จะเหมือนกับหัวข้อที่ผ่านมา

ตัวอย่างที่ 5.12 จงแก้ปัญหาขอบของสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \; 0 < x < \ell \; , \; t > 0$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u_x(0, t) = 0 \text{ และ } u_x(\ell, t) = 0 \qquad \ldots\ldots.(5.158)$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = f(x) \; ; \quad 0 < x < \ell \qquad \ldots\ldots.(5.159)$$

วิธีทำ ในตัวอย่างนี้เงื่อนไขขอบ สำหรับ $x = 0$ และ $x = \ell$ สมนัยกับการหุ้มฉนวนที่ปลายทั้งสองของแท่ง ดังนั้นเงื่อนไข $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ เมื่อ $x = 0$ และ $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ เมื่อ $x = \ell$ หมายความว่า ไม่มีความร้อนไหลผ่าน (มีฉนวนที่สมบูรณ์หุ้ม) ที่หน้าตัด $x = 0$ และ $x = \ell$

โดยการแยกตัวแปรเหมือนที่ผ่านมานำไปสู่ปัญหาค่าขอบของ $X(x)$ ดูตัวอย่างที่ 5.10 จะได้คำตอบ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

$$T(t) = Ce^{-k\lambda^2 t}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u_x(0, t) = 0$ จะได้ $X'(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X'(x) = -\lambda A\sin\lambda x + \lambda B\cos\lambda x$$

หรือ $X'(0) = \lambda B = 0$

$$B = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = A\cos\lambda x$$

$$X'(x) = -\lambda A\sin\lambda x$$

ใช้เงื่อนไข $u_x(\ell, t) = 0$ จะได้ $X'(\ell) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X'(\ell) = -\lambda A\sin\lambda\ell = 0$$

แต่ $A \neq 0$ ดังนั้น

$$\lambda\sin\lambda\ell = 0$$

จะได้ $\lambda = 0$ หรือ $\sin\lambda\ell = 0 = \sin n\pi$

เพราะฉะนั้น $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{\ell}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

และ $X_n(x) = A_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$

$$T_n(t) = C_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{\ell^2}}$$

หรือ

$$u_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t) = D_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{\ell^2}}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน จะได้คำตอบซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขขอบ คือ

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}\, e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{\ell^2}}$$

หรือ $$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{kn^2\pi^2 t}{\ell^2}} \cos\frac{n\pi x}{\ell} \qquad \text{.......(5.160)}$$

ในเมื่อ $D_0 = \frac{a_0}{2}$ และ $D_n = a_n$

จาก (5.160) แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5.159) เพราะฉะนั้น

$$u(x, 0) = f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}, \quad 0 < x < \ell$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุพันธ์ฟูเรียร์โคไซน์ ของ $f(x)$

ดังนั้น $$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

จากตัวอย่างนี้ ถ้าโจทย์กำหนด $f(x)$ มาให้ก็จะหาค่า a_n ได้ ซึ่งเมื่อเอาไปแทนใน (5.160) ก็จะได้คำตอบของปัญหาขอบ

ตัวอย่างที่ 5.13 จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \quad \text{สำหรับ } 0 < x < \pi \ , \ t > 0$$

และ $$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0 \text{ และ } u(x, 0) = \sin x$$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ เหมือนกับตัวอย่างที่ 5.11 โดยวิธีแยกตัวแปร จะได้คำตอบ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

และ $$T(t) = Ce^{-k\lambda^2 t}$$

แล้วใช้เงื่อนไขขอบ $\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0$ และ $\frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0$ เพราะฉะนั้นจะได้

$$X(x) = A\cos\lambda x \quad \text{และ} \quad -\lambda A\sin\lambda = 0$$

แต่ $\lambda A \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin\lambda\pi = 0 = \sin n\pi$$

หรือ $\lambda = n$

สมมุติให้ $\lambda = \lambda_n = n$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$

คำตอบทั่วไป คือ

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$= A_n \cos nx \cdot C_n e^{-kn^2t}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน จะได้คำตอบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cos nx \; e^{-kn^2t}$$

หรือ $$u(x, t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \cdot e^{-kn^2t} \qquad ......(5.161)$$

ในเมื่อ $D_0 = \frac{1}{2} a_0$ และ $D_n = a_n$ เมื่อ $n = 1, 2, ...$

แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = \sin x$ นั่นคือ แทนค่า $t = 0$ ลงใน (5.16) จะได้

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \sin x \qquad ....(5.162)$$

สมการ (5.162) คืออนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของ $\sin x$ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ a_0 และ a_n หาได้โดยสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} (-\cos x) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

และ $$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(1+n)x + \sin(1-n)x] \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(1+n)\pi - 1}{1+n} + \frac{\cos(1-n)\pi - 1}{1-n} \right]$$

เพราะว่า $\cos(1+n)\pi = \cos(\pi+n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

และ $\cos(1-n)\pi = \cos(\pi-n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

ดังนั้น

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n - 1}{1+n} + \frac{-(-1)^n - 1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n + 1}{\pi}\left(\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right)$$

$$= \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi(1-n^2)}$$

แทนค่า a_0, a_n ลงใน (5.161) จะได้คำตอบแท้จริง คือ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[1+(-1)^n]}{\pi(1-n^2)} \cos nx\, e^{-kn^2t}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left(0 + \frac{2}{(-3)}\cos 2x\, e^{-4kt} + 0 + \frac{2}{-15}\cos 4x\, e^{-16kt}\right.$$

$$\left. + 0 + \frac{2}{-35}\cos 6x\, e^{-36kt} + \ldots\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\times 3}\cos 2x \cdot e^{-4kt} + \frac{1}{3\times 5}\cos 4x\, e^{-16kt}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5\times 7}\cos 6x\, e^{-36kt} + \ldots\right)$$

หรือ $$u(x,t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx\, e^{-4n^2kt}}{(4n^2-1)}$$

ในกรณีที่ปลายทั้งสองของแท่งโลหะมีเงื่อนไขขอบเป็นแบบผสม คือปลายด้านหนึ่งมีเงื่อนไขขอบตามตัวอย่างที่ 5.10 และอีกปลายหนึ่งมีเงื่อนไขขอบตามตัวอย่างที่ 5.12 นั่นคือสามารถเขียนปัญหาได้เป็น

ตัวอย่างที่ 5.14 จงหาคำตอบของสมการ

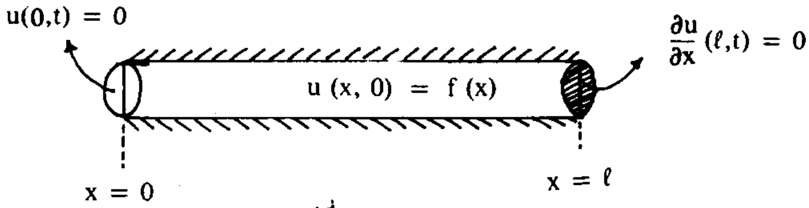
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \; 0 < x < \ell,\; t > 0 \qquad \ldots\ldots.(5.163)$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u(0, t) = 0 \quad \text{และ} \quad u_x(\ell, t) = 0 \qquad \text{.......(5.164)}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0 \qquad \text{.......(5.165)}$$



รูปที่ 5.1

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติคำตอบ

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ลงใน (5.163) แล้วแยกตัวแปร สมมุติให้แต่ละด้านเท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง $(-\lambda^2)$ ดังนั้น จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการ และคำตอบของสองสมการเชิงอนุพันธ์นี้คือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad \text{.......(5.166)}$$

และ $$T(t) = C e^{-k\lambda^2 t} \qquad \text{.......(5.167)}$$

แทนค่า $x = 0$ ลงใน (5.166) แล้วใช้เงื่อนไขขอบแรก $u(0, t) = 0$ จะได้

$$X(0) = A = 0$$

นั่นคือ $$X(x) = B\sin\lambda x \qquad \text{.......(5.168)}$$

หรือ $$X'(x) = B\lambda\cos\lambda x \qquad \text{.......(5.169)}$$

แทนค่า $x = \ell$ ลงใน (5.169) แล้วใช้เงื่อนไขขอบที่สอง $u_x(\ell, t) = 0$ จะได้

$$X'(\ell) = B\lambda\cos\lambda\ell = 0$$

แต่ $B\lambda \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\cos \lambda\ell = 0 = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$\lambda\ell = \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

หรือ $\lambda = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2\ell} \; ; \; n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น คำตอบซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ (5.164) คือ

$$u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$= D_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \cdot e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{4\ell^2}} \qquad \ldots\ldots.(5.170)$$

ในเมื่อ $D_n = B_n \cdot C_n$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน ดังนั้น

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \cdot e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{4\ell^2}} \qquad \ldots\ldots.(5.171)$$

แทนค่า $t = 0$ ใน (5.171) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5.165) จะได้

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell} \qquad \ldots\ldots.(5.172)$$

(5.172) คือ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x)$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ $f(x)$ คือ

$$D_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\, dx$$

นั่นคือ คำตอบของ (5.163) ซึ่งสอดคล้องตาม (5.164) และ (5.165) คือ

$$u(x, t) = \frac{2}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\, dx \right\} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2\ell}\; e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{4\ell^2}}$$

ตัวอย่างที่ 5.15 กำหนดให้ผิวด้านข้างของแท่งแก้ว ซึ่งยาว 10 ซม. มีฉนวนหุ้มต่อต้านการไหลของความร้อนในแท่งแก้ว ซึ่งแท่งแก้วนี้บางมากทำให้การไหลของความร้อนสามารถกำหนดได้ว่าไหลไปในทิศทางเดียว และอุณภูมิเริ่มต้นเป็น $100^\circ C$ จงหาอุณหภูมิที่จุดใด ๆ ของแท่งแก้วที่เวลาใด ๆ ถ้าปลายด้านซ้ายรักษาอุณหภูมิเป็น $0^\circ C$ ขณะที่ปลายด้านขวา $(x = 10)$ มีฉนวนหุ้ม (นั่นคือ $u_x(10, t) = 0$)

วิธีทำ จากตัวอย่างนี้ สามารถแก้ปัญหาเหมือนตัวอย่างที่ 5.13 เพียงแต่แทนค่า $\ell = 10$ นั่นคือ จะได้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{20} \quad ; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น คำตอบใหม่ ตาม (5.171) คือ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{20} \cdot e^{-\frac{k(2n-1)^2 \pi^2 t}{400}}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 100$ เพราะฉะนั้น

$$u(x, 0) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{20}$$

และ
$$\begin{aligned} D_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{20} \, dx \\ &= \frac{2}{10} \int_0^{10} (100) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{20} \, dx \\ &= 20 \left[\frac{-20}{(2n-1)\pi} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{20} \right] \Big|_0^{10} \\ &= \frac{40}{(2n-1)\pi} \left[1 - \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \right] \end{aligned}$$

เพราะว่า $\cos \frac{(2n-1)\pi}{2} = 0$ เมื่อ $n = 1, 2, \ldots$

เพราะฉะนั้น

$$D_n = \frac{40}{(2n-1)\pi} \quad ; \; n = 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น คำตอบแท้จริง ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไข $u(0, t) = 0,\ u_x(10, t) = 0$ และ $u(x, 0) = 100$ คือ

$$u(x, t) = \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{20} e^{-\frac{k(2n-1)^2\pi^2 t}{400}}$$

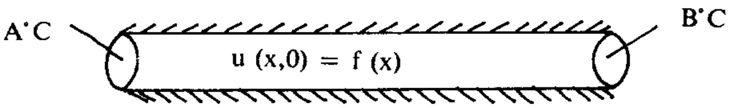
ในกรณีที่ปลายทั้งสองของแท่งโลหะมีอุณหภูมิคงที่ตลอดเวลา $t > 0$ ดังนั้น ปัญหาสามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \ell \ , \ t > 0 \qquad ....(5.173)$$

$$u(0, t) = A \ , \quad u(\ell, t) = B \qquad ....(5.174)$$

และ $$u(x, 0) = f(x) \quad ; \quad 0 < x < \ell \qquad ....(5.175)$$

ในเมื่อ A, B เป็นค่าคงที่



รูปที่ 5.12

วิธีทำ การแก้ปัญหาตัวอย่างนี้ จะต้องใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปร $u(x, t)$ ไปเป็นตัวแปร $v(x, t)$ โดยสมการ

$$v(x, t) = u(x, t) - g(x) \qquad ....(5.176)$$

ในเมื่อ $g(x)$ คือฟังก์ชันของ x เพียงอย่างเดียว และมีเงื่อนไขสำหรับ $g(x)$ ว่า

$g''(x) = 0$, $g(0) = A$ และ $g(\ell) = B$

จากเงื่อนไข $\quad g''(x) = 0$

ดังนั้น $\quad g(x) = c_1 x + c_2 \qquad ....(5.177)$

ซึ่งเมื่อใช้เงื่อนไข $g(0) = A$ จะได้

$$c_2 = A$$

และเมื่อใช้เงื่อนไข $g(\ell) = B$ จะได้

$$g(\ell) = B = c_1\ell + A$$

หรือ $$c_1 = \frac{B - A}{\ell}$$

แทนค่า c_1 และ c_2 ลงใน (5.177) เพราะฉะนั้น

$$g(x) = A + \frac{(B-A)\,x}{\ell} \qquad \text{.......(5.178)}$$

เมื่อแทนค่า (5.176) ลงใน (5.173), (5.174) และ (5.175) จะได้สมการชุดใหม่ซึ่งอยู่ในรูปตัวแปร $v(x, t)$ และมีเงื่อนไขขอบเป็นแบบเอกพันธ์ นั่นคือ

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \; 0 < x < \ell \;,\; t > 0$$

$v(0, t) = 0$ และ $v(\ell, t) = 0 \;;\; t > 0$

$v(X, 0) = f(x) - g(x) \;;\; 0 < x < \ell$

ปัญหาใหม่ที่ได้นี้ ก็คือปัญหาในตัวอย่างที่ 5.13 นั่นเอง เมื่อหาคำตอบ $v(x, t)$ จากปัญหาชุดใหม่แล้ว ให้นำไปแทนใน (5.176) อีกครั้งหนึ่ง เพื่อหาค่าคำตอบ $u(x, t)$ ซึ่งจะเป็นคำตอบของ (5.173) ตามที่เราต้องการ

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาคำตอบของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \; 0 < x < 10, \; t > 0$$

$u(0, t) = 90$ และ $u(10, t) = 60 \;;\; t > 0$

$u(x, 0) = 5x + 50 \;;\; 0 < x < 10$

วิธีทำ จาก (5.178) จะได้

$$g(x) = 90 + \left(\frac{60-90}{10}\right)x$$

$$= 90 - 3x$$

ดังนั้น

$$v(x,t) = u(x,t) - (90-3x)$$

เขียนเป็นสมการชุดใหม่ในรูปตัวแปร $v(x, t)$ และมีเงื่อนไขขอบแบบเอกพันธ์ นั่นคือ

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad ; \; 0 < x < 10 \;,\; t > 0$$

$$v(0,t) = 0 \quad \text{และ} \quad v(10,t) = 0 \quad ; \; t > 0$$

$$v(x,0) = 5x + 50 - (90-3x) = 8x - 40 \quad ; \; 0 < x < 10$$

จะพบว่า คำตอบของปัญหาชุดใหม่นี้เหมือนการหาคำตอบในตัวอย่างที่ 5.10 นั่นคือ

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}\, e^{-\frac{n^2\pi^2}{100}kt}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $v(x, 0) = 8x - 40$ **เพราะฉะนั้น**

$$v(x,0) = 8x - 40 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{2}{10}\int_0^{10}(8x-10)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{8}{5}\int_0^{10} x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx - 8\int_0^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{8}{5}\left[x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}} \right)\Big|_0^{10} + \int_0^{10} \frac{\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\, dx \right]$$

$$-8\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}} \right)\Big|_0^{10}$$

$$= \frac{8}{5}\left[-\frac{100}{n\pi}(-1)^n + \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} \right] + \frac{80}{n\pi}\left[(-1)^n - 1 \right]$$

$$= -\frac{160}{n\pi}(-1)^n + 0 + \frac{80}{n\pi}(-1)^n - \frac{80}{n\pi}$$

$$b_n = -\frac{80}{n\pi}\left[(-1)^n + 1 \right] \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{80}{n\pi}\left[(-1)^n + 1 \right] \sin\frac{n\pi x}{10}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{100}}$$

$$= -\frac{80}{\pi}\left[0 + \frac{2}{2}\sin\frac{2\pi x}{10}\, e^{-\frac{4\pi^2 kt}{100}} + 0 + \frac{2}{4}\sin\frac{4\pi x}{10}\, e^{-\frac{16\pi^2 kt}{100}} \right.$$

$$\left. + 0 + \frac{2}{6}\sin\frac{6\pi x}{10}\, e^{-\frac{36\pi^2 kt}{100}} \right.$$

$$= -\frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{25}}$$

ดังนั้น

$$u(x, t) = v(x, t) + g(x)$$

หรือ $$u(x, t) = 90 - 3x - \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}\, e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{25}}$$

ในตัวอย่างต่อไปนี้ เราจะพิจารณาคำตอบของสมการความร้อนหนึ่งมิติ ในกรณีของแท่งซึ่งขยายไปถึงอนันต์ทั้งสองข้าง ในกรณีนี้จะเหมือนกับกรณีการสั่นของเส้นลวดซึ่งยาวเป็นอนันต์ (ตัวอย่างที่ 5.9) เราจะไม่มีเงื่อนไขขอบ มีเพียงเงื่อนไขเริ่มต้น

ตัวอย่างที่ 5.16 จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$ ในกรณีที่แท่งยาวถึงอนันต์ อุณหภูมิเริ่มต้นกำหนดให้เป็น $f(x)$ สำหรับ $-\infty < x < \infty$

วิธีทำ ฟังก์ชัน $u(x, t)$ สอดคล้องตามสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = f(x) \quad \text{สำหรับ} \quad -\infty < x < \infty \qquad \text{.......(5.179)}$$

ทำเหมือนตัวอย่างที่ 5.9 สมมุติให้

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \qquad \text{.......(5.180)}$$

แทนค่า $u(x, t)$ ลงในสมการความร้อนหนึ่งมิติ จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \qquad \text{.......(5.181)}$$

$$T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0 \qquad \text{.......(5.182)}$$

คำตอบทั่วไปของ (5.181) และ (5.182) คือ

$$X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

$$T(t) = C e^{-k\lambda^2 t}$$

เพราะฉะนั้น

$$u(x, t, \lambda) = X(x)\, T(t)$$

$$= (D \cos \lambda x + E \sin \lambda x)\, e^{-k\lambda^2 t} \qquad \text{......(5.183)}$$

คือคำตอบของสมการความร้อนหนึ่งมิติ ในเมื่อ D และ E คือค่าคงที่ตามใจชอบ เพราะว่า f (x) ใน (5.179) โดยทั่วไปไม่ใช่ฟังก์ชันมีคาบ โดยอ้างเหตุผลเหมือนกรณีการสั่นของเส้นลวดซึ่งยาวเป็นอนันต์ (ตามตัวอย่างที่ 5.9) พิจารณา D และ E เหมือนฟังก์ชันของ λ ดังนั้น ฟังก์ชัน

$$u(x, t) = \int_0^\infty u(x, t, \lambda)\, d\lambda$$

$$= \int_0^\infty [D(\lambda) \cos \lambda x + E(\lambda) \sin \lambda x]\, e^{-k\lambda^2 t}\, d\lambda \qquad ....(5.184)$$

เป็นคำตอบของสมการความร้อนหนึ่งมิติ ด้วย

จากสมการ (5.179)

$$u(x, 0) = f(x) = \int_0^\infty [D(\lambda) \cos \lambda x + E(\lambda) \sin \lambda x]\, d\lambda \qquad ....(5.185)$$

ถ้า

$$D(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda y\, dy$$

$$E(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \sin \lambda y\, dy$$

ดังนั้น จากทฤษฎีฟูเรียร์อินทิกรัล เราจะเขียน (5.185) เป็น

$$u(x, 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda (x-y)\, dy \right] d\lambda \qquad ....(5.186)$$

ดังนั้น จาก (5.184)

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(y) \cos \lambda (x-y)\, e^{-k\lambda^2 t}\, dy \right] d\lambda \qquad ....(5.187)$$

กำหนดว่าเราสามารถเปลี่ยนลำดับของอินทิเกรต

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty f(y) \left[\int_0^\infty e^{-k\lambda^2 t} \cos \lambda (x-y)\, d\lambda \right] dy \qquad ....(5.188)$$

เพื่อจะหาค่าอินทิกรัลในวงเล็บใหญ่ เราจะใช้สูตรอินทิกรัล จากตาราง

$$\int_0^\infty e^{-s^2} \cos 2bs\, ds = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2} \qquad ....(5.189)$$

เปลี่ยนตัวแปร λ โดยสมมุติให้ $s = \lambda\sqrt{kt}$ และเลือก

$$b = \frac{x-y}{2\sqrt{kt}}$$

เพราะฉะนั้น สูตร (5.189) เขียนใหม่เป็น

$$\int_0^\infty e^{-k\lambda^2 t}\cos\lambda(x-y)\,d\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2\lambda\sqrt{kt}}\,e^{-(x-y)^2/4kt} \qquad \text{.......(5.190)}$$

แทนค่า (5.190) ลงใน (5.188)

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-(x-y)^2/4kt}\,dy \qquad \text{.......(5.191)}$$

ให้ตัวแปรใหม่ของอินทิกรัลนี้ $q = \dfrac{x-y}{2\sqrt{kt}}$

ดังนั้น สมการ (5.191) เขียนใหม่เป็น

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-2q\sqrt{kt}\,)\,e^{-q^2}\,dq \qquad \text{.......(5.192)}$$

5.5 สมการของลาปลาซ (Laplace's equation)

ในหัวข้อต่อไปนี้เราจะพิจารณาฟังก์ชัน u ซึ่งอยู่ใน 3 มิติ โดยเราจะวิเคราะห์ฟูเรียร์ถึงทฤษฎีศักย์ (potential theory) ทฤษฎีศักย์ คือทฤษฎีของคำตอบของสมการลาปลาซ

$$\nabla^2 u = 0 \qquad \text{.......(5.193)}$$

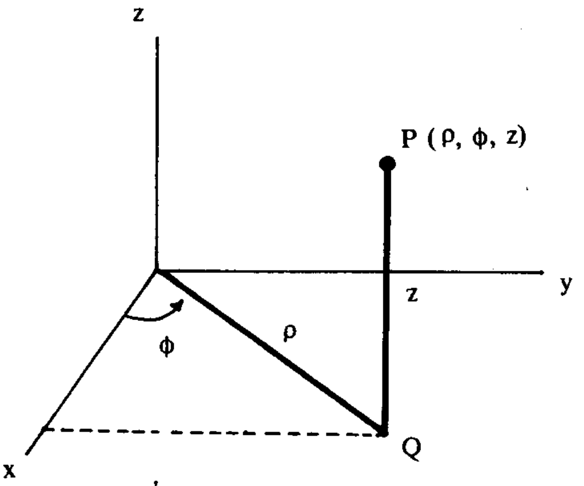
ในเมื่อ $\nabla^2 u$ คือลาปลาเซียนของ u สมการของลาปลาซที่ปรากฏจะเกี่ยวข้องกับศักย์ความดึงดูดของโลก (gravitational potentials) ศักย์ไฟฟ้าสถิตย์ (electrostatic potentials) ปัญหาความร้อนประจำที่ (stationary heat problems) เป็นต้น

จากหัวข้อที่ผ่านมาในพิกัดฉาก (rectangular coordinates) ลาปลาเซียนของฟังก์ชัน u ใน 3 มิติ คือ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{.......(5.194)}$$

ตามรูป 5.12 ในพิกัดทรงกระบอก (cylindrical coordinates) (ρ, ϕ, z) สามารถเขียนลาปลาเซียนของฟังก์ชัน u ในรูป

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad \text{.......(5.195)}$$



รูปที่ 5.12 ในพิกัดทรงกระบอก

ในพิกัดทรงกระบอก (ρ, φ, z) ตามรูป 5.12 จุด P ในพิกัดฉาก คือ

$$x = \rho\cos\phi,\quad y = \rho\sin\phi,\quad z = z \qquad ....(5.196)$$

เพราะฉะนั้น ρ และ φ คือพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ในระนาบ xy ของจุด Q ในเมื่อ Q คือโพเจกชันของ P บนระนาบ xy

ความสัมพันธ์ (5.196) สามารถเขียนในรูป

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}\ ,\quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\ ,\quad z = z \qquad ....(5.197)$$

ให้ u แทนฟังก์ชันของ x, y และ z เพราะฉะนั้นตามที่แสดงใน (5.196) จะเป็นฟังก์ชันของตัวแปรต้น (independent variables) 3 ค่า ρ, φ และ z ด้วย ถ้า u และอนุพันธ์ของมันเทียบกับตัวแปร ρ, φ และ z อันดับหนึ่งและอันดับสองเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง เราจะได้สมการลาปลาเชียนในพจน์ของตัวแปรเหล่านั้นโดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) สำหรับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (composite function)

จากสมการ (5.197)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \phi}\cdot\frac{\partial \phi}{\partial x}\\ &= \frac{\partial u}{\partial \rho}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{\partial u}{\partial \phi}\,\frac{y}{x^2+y^2} \qquad ....(5.198)\end{aligned}$$

เมื่อ y และ z เป็นค่าคงที่ ในการหาอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial x}$ ขณะที่ ϕ และ z เป็นค่าคงที่ ในการหาอนุพันธ์ $\frac{\partial}{\partial \rho}$ และ ϕ วัดในหน่วยเรเดียน โดยวิธีเดียวกันนี้

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{x}{x^2+y^2} \qquad ....(5.199)$$

จากสูตร (5.198) สามารถเขียนในรูป

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\rho}\right) - \frac{\partial u}{\partial \phi} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{\rho^2}\right) + \frac{x}{\rho} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) - \frac{y}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right)$$

กฎลูกโซ่ใช้กับสองอนุพันธ์หลัง จะได้

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi \partial \rho} \cdot \frac{y}{\rho^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\right) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} \frac{x}{\rho} - \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \frac{y}{\rho^2}$$

แทนค่าและทำให้ง่ายขึ้น จะพบว่า

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{y^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{x^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \qquad ....(5.200)$$

โดยวิธีเดียวกัน จาก (5.199) จะพบว่า

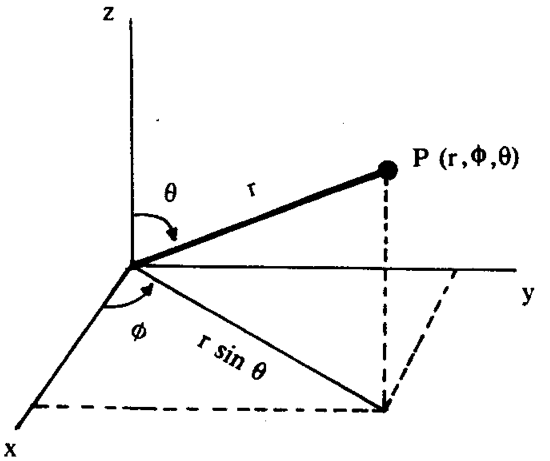
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{x^2}{\rho^3} \frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{2xy}{\rho^4} \frac{\partial u}{\partial \phi} + \frac{y^2}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{2xy}{\rho^3} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho \partial \phi} + \frac{x^2}{\rho^4} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \qquad ....(5.201)$$

เพราะฉะนั้น ลาปลาเชียนของ u ในพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad ....(5.202)$$

สำหรับพิกัดทรงกลม (r, ϕ, θ) ของจุด P ตามรูป 5.13 คือความเกี่ยวข้องกับ x, y และ z ตามสมการ

$$x = r \sin\theta \cos\phi, \quad y = r \sin\theta \sin\phi, \quad z = r\cos\theta \qquad ....(5.203)$$



รูปที่ 1.3 ในพิกัดทรงกระบอก

พิกัด ϕ คือ พิกัดร่วมของพิกัดทรงกระบอกกับพิกัดทรงกลม ขณะที่พิกัดอื่น ๆ ในสองระบบเกี่ยวข้องกันด้วยสมการรูปเหมือน สมการ (5.197) กล่าวคือ

$$z = r\cos\theta \qquad \rho = r\sin\theta \qquad ....(5.204)$$

ผลที่จะเกิดขึ้น (5.202) สามารถแปลงไปอยู่ในพิกัดทรงกลมโดยใช้ขั้นตอนสมนัยกับข้างบน หรือโดยการเปลี่ยนอักษร ดังนั้น

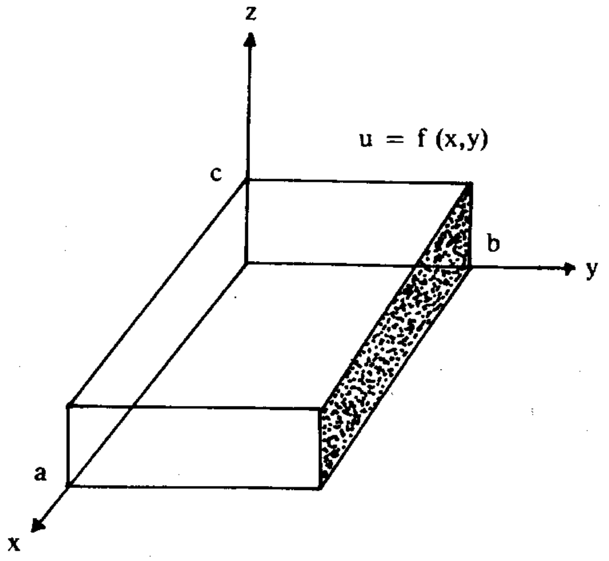
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad ....(5.205)$$

เทคนิคการแยกตัวแปรประยุกต์ใช้กับสมการของลาปลาซในสองมิติ $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ได้อธิบายในหัวข้อที่ผ่านมาแล้ว ในตัวอย่างต่อไปนี้ จะพิจารณาในกรณี 3 มิติ

ตัวอย่างที่ 5.17 พิจารณากล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าตามรูป 5.14 จงหาการแจกจ่ายศักย์ (potential distribution) ถ้าศักย์เป็นศูนย์ที่ทุก ๆ ด้านและด้านล่างของกล่อง และมีศักย์เป็น $f(x, y)$ บนด้านบน

วิธีทำ ให้ u (x, y, z) เป็นการแจกจ่ายศักย์ในกล่องรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ตามรูป 5.14 ดังนั้น u (x, y, z) สอดคล้องตามสมการ

$$\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \qquad ....(5.206)$$



รูปที่ 5.14 กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้า

และเงื่อนไขขอบ

$$u(0, y, z) = u(a, y, z) = u(x, 0, z) = u(x, b, z)$$

$$= u(x, y, 0) = 0 \qquad ....(5.207)$$

$$u(x, y, c) = f(x, y) \qquad ....(5.208)$$

โดยวิธีแยกตัวแปร กำหนดให้คำตอบของ (5.206) อยู่ในรูป

$$u(x, y, z) = X(x)\, Y(y)\, Z(z) \qquad ....(5.209)$$

แทนค่า (5.209) ลงใน (5.206) จะลดรูปเป็น

$$X''(x)\, Y(y)\, Z(z) + X(x)\, Y''(y)\, Z(z) + X(x)\, Y(y)\, Z''(z) = 0$$

หารตลอดสมการด้วย X (x) Y (y) Z (z) แล้วแยกตัวแปร

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = k_x^2 \qquad ....(5.210)$$

ในเมื่อ k_x^2 คือค่าคงที่ การแยกนี้ขึ้นกับความจริงว่าด้านซ้ายเป็นอิสระของทั้ง y และ z และด้านขวาเป็นอิสระของ x

เพราะฉะนั้น

$$X''(x) + k_x^2 X(x) = 0 \qquad \text{.......(5.211)}$$

หลังจากนั้นแยกครั้งที่สองจะได้

$$\frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \frac{Z''(z)}{Z(z)} - k_x^2 = k_y^2 \qquad \text{.......(5.212)}$$

จากสมการนี้ จะได้สมการใหม่

$$Y''(y) + k_y^2 Y(y) = 0 \qquad \text{.......(5.213)}$$

$$Z''(z) - k_z^2 Z(z) = 0 \qquad \text{.......(5.214)}$$

ในเมื่อ $k_z^2 = k_x^2 + k_y^2$ คำตอบทั่วไปของ (5.211), (5.213) และ (5.214) คือ

$$X(x) = A \cos k_x x + B \sin k_x x \qquad \text{.......(5.215)}$$

$$Y(y) = C \cos k_y y + D \sin k_y y \qquad \text{.......(5.216)}$$

$$Z(z) = E \cosh k_z z + F \sinh k_z z \qquad \text{.......(5.217)}$$

จากเงื่อนไขขอบ (5.207)

$$X(0) = X(a) = 0$$

$$Y(0) = Y(b) = 0$$

$$Z(0) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(0) = A = 0$$

$$X(a) = B \sin k_x a = 0 = \sin m\pi$$

ดังนั้น

$$k_x a = m\pi \quad \text{หรือ}$$

$$k_x = \frac{m\pi}{a} \quad ; \quad m = 1, 2, \ldots \qquad \text{.......(5.218)}$$

โดยวิธีเดียวกัน

$$y(0) = C = 0$$

$$y(b) = D \sin k_y b = 0 = \sin n\pi$$

ดังนั้น

$$k_y b = n\pi$$

หรือ $k_y = \dfrac{n\pi}{b}$; $n = 1, 2, \ldots$ ....(5.219)

และจะได้ $Z(0) = E = 0$

ถ้าเราเขียนต่อไป

$$k_z^2 = k_x^2 + k_y^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) = k_{mn}^2$$

หรือ $k_z = k_{mn} = \pi\sqrt{\dfrac{m^2}{a^2} + \dfrac{n^2}{b^2}}$ ....(5.220)

นั่นคือ จะได้คำตอบ

$$X(x) = X_m(x) = B_m \sin\frac{m\pi x}{a} \; ; \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$Y(y) = Y_n(y) = D_n \sin\frac{n\pi y}{b} \; ; \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$Z(z) = Z_{mn}(z) = F_{mn} \sinh k_{mn} z$$

เพราะฉะนั้น เขียน $b_{mn} = B_m D_n F_{mn}$ มันจะตามฟังก์ชัน

$$u_{mn}(x, y, z) = X_m(x)\, Y_n(y)\, Z_{mn}(z)$$

$$= b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{b} \sinh k_{mn} z \qquad ....(5.221)$$

ในเมื่อ $m = 1, 2, \ldots$, $n = 1, 2, \ldots$, และ k_{mn} นิยามโดย (5.220) คือ คำตอบของ (2.206) ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบ (5.207)

เพื่อให้สอดคล้องเงื่อนไข (5.208) กำหนดว่า คำตอบที่ต้องการเขียนในรูป

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, z)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{b} \sinh k_{mn} z \qquad ....(5.222)$$

ถ้าให้ $c_{mn} = b_{mn} \sinh k_{mn} c$ ....(5.223)

แทนเงื่อนไขขอบ (5.208) ใน (5.222) จะได้

$$f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \; ; \quad 0 < x < a, 0 < y < b$$

.......(5.224)

เพราะฉะนั้น สัมประสิทธิ์ c_{mn} คือสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของ $f(x, y)$ จาก (5.107) สัมประสิทธิ์เหล่านี้สามารถหาได้โดยสูตร

$$c_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(x, y) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{b}\, dx\, dy \qquad ....(5.225)$$

เมื่อแทนค่า c_{mn} ใน (5.222) และใช้ (5.223) จะได้คำตอบที่ต้องการในรูป

$$u(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{b} \frac{\sinh k_{mn} z}{\sinh k_{mn} c} \qquad ....(5.226)$$

ในเมื่อ k_{mn} นิยามโดย (5.220)

ตัวอย่างที่ 5.18 ใช้ตัวอย่างที่ 5.17 โดยเปลี่ยนเฉพาะเงื่อนไข

$$u(x, y, c) = f(x, y) = U_0 \text{ เมื่อ } U_0 \text{ เป็นค่าคงที่}$$

วิธีทำ จาก (5.225)

$$\begin{aligned}
c_{mn} &= \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a U_0 \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi x}{b}\, dx\, dy \\
&= \frac{4U_0}{ab} \int_0^a \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx \int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy \\
&= \frac{4U_0}{ab} \left[\frac{a}{m\pi} \cos\frac{m\pi x}{a} \Big|_0^a \cdot \frac{b}{n\pi} \cos\frac{n\pi y}{b} \Big|_0^b \right] \\
&= \frac{4U_0}{mn\pi^2} \left[\{(-1)^m - 1\} \{(-1)^n - 1\} \right] \\
&= \begin{cases} \dfrac{16U_0}{mn\pi^2} & \text{สำหรับ } m, n \text{ ที่เป็นเลขคี่} \\ 0 & \text{สำหรับ } m, n \text{ ที่เป็นเลขคู่} \end{cases}
\end{aligned}$$

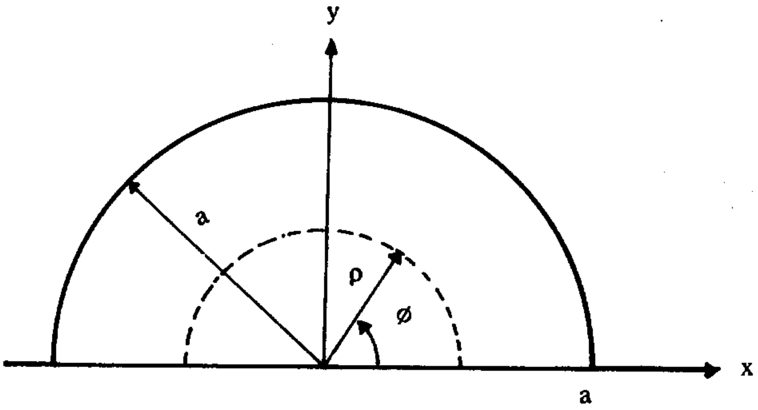
เพราะฉะนั้น จาก (5.226)

$$u(x, y, z) = \frac{16\, U_0}{\pi^2} \sum_{m=\text{เลขคี่}}^{\infty} \sum_{n=\text{เลขคี่}}^{\infty} \frac{1}{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \frac{\sinh k_{mn} z}{\sinh k_{mn} c} \qquad ....(5.227)$$

ในเมื่อ $k_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}$

ในตัวอย่างต่อไปนี้ จะพิจารณาการหาคำตอบของสมการของลาปลาซในพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates)

ตัวอย่างที่ 5.19 จงหาการแจกจ่ายอุณหภูมิภาวะคงที่ (steady-state temperature) ในแผ่นครึ่งวงกลมรัศมี a มีฉนวนหุ้มทั้งสองหน้า และขอบส่วนโค้งของแผ่นครึ่งวงกลมรักษาอุณหภูมิคงที่เป็น U_0 และที่ล้อมรอบเส้นผ่าศูนย์กลางรักษาอุณหภูมิเป็น 0°C ตามรูป 5.15



รูปที่ 5.15 แผ่นครึ่งวงกลม

วิธีทำ เพราะว่าในตัวอย่างนี้ การไหลของความร้อนในแผ่นครึ่งวงกลม คือการไหลในสองมิติ และขอบเป็นทรงกระบอก ดังนั้นลาปลาเซียนของ u ในสองมิติ ในพิกัดทรงกระบอก (หรือพิกัดเชิงขั้ว) จะถูกนำมาใช้ เพราะฉะนั้นจาก (5.195)

$$\nabla^2 u(\rho, \phi) = \frac{\partial^2 u(\rho, \phi)}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho, \phi)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u(\rho, \phi)}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{.......(5.228)}$$

อุณหภูมิ $u(\rho, \phi)$ พิจารณาเหมือนฟังก์ชันของ ρ และ ϕ สอดคล้อง (5.228) และเงื่อนไขขอบ ตามรูป 5.15

$$u(a, \phi) = U_0 \quad \text{.......(5.229)}$$

$$u(\rho, 0) = 0 \quad \text{.......(5.230)}$$

$$u(\rho, \pi) = 0 \quad \text{.......(5.231)}$$

โดยวิธีแยกตัวแปร กำหนดให้คำตอบของ (5.228) เขียนในรูป

$$u(\rho, \phi) = R(\rho)\,\Phi(\phi) \quad \text{.......(5.232)}$$

แทนค่า (5.232) ลงใน (5.228)

$$R''(\rho)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho}\,R'(\rho)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2}\,R(\rho)\,\Phi''(\phi) = 0$$

หรือ

$$\rho^2 R''(\rho)\,\Phi(\phi) + \rho R'(\rho)\,\Phi(\phi) + R(\rho)\,\Phi''(\phi) = 0 \qquad ....(5.233)$$

หาร (5.233) ด้วย $R(\rho)\,\Phi(\phi)$ แล้วแยกตัวแปร

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho\frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = k^2 \qquad ....(5.234)$$

ในเมื่อ k^2 คือค่าคงที่ โดยวิธีเดียวกับตัวอย่างที่ 5.17 ด้านซ้ายเป็นอิสระของ ϕ และด้านขวาเป็นอิสระของ ρ ดังนั้น จาก (5.234) จะได้สมการสองสมการ คือ

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0 \qquad ....(5.235)$$

$$\Phi''(\phi) + k^2\,\Phi(\phi) = 0 \qquad ....(5.236)$$

คำตอบทั่วไปของ (5.236) คือ

$$\Phi(\phi) = A\cos k\phi + B\sin k\phi \qquad ....(5.237)$$

เพื่อที่จะหา (5.235) เราจะแปลง

$$\rho = e^s$$

เพราะฉะนั้น

$$R'(\rho) = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{ds}\cdot\frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\,\frac{dR}{ds}$$

$$R''(\rho) = \frac{1}{\rho}\,\frac{d^2R}{ds^2} - \frac{1}{\rho^2}\,\frac{dR}{ds}$$

และ (5.235) สามารถเขียนลดรูปเป็น

$$\frac{d^2R}{ds^2} - k^2R = 0$$

คำตอบทั่วไปของสมการนี้คือ

$$R(\rho) = C\,e^{ks} + D\,e^{-ks}$$

เพราะว่า $e^s = \rho$ เพราะฉะนั้น

$$R(\rho) = C\,\rho^{k} + D\,\rho^{-k} \qquad ......(5.238)$$

จากเงื่อนไขขอบ (5.230) และ (5.231)

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\phi(0) = A = 0$$

และ $\phi(\pi) = B \sin k\pi = 0$

ถ้า $B = 0$ จะได้คำตอบสำคัญน้อย (trivial solution) เพราะฉะนั้น จะได้

$$\sin k\pi = 0 = \sin n\pi$$

$$k\pi = n\pi$$

หรือ $k = n \;;\; n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น จะได้คำตอบ

$$\Phi(\phi) = \Phi_n(\phi) = B_n \sin n\phi \;;\quad n = 1, 2, \ldots \qquad ....(5.239)$$

ใน (5.238) พบว่าเมื่อ $\rho \to 0$ พจน์ $\rho^{-k} \to \infty$ (เพราะว่า $k = n > 0$) เพราะว่า $\rho = 0, R(0) = 0$

D จะมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น

$$R(\rho) = R_n(\rho) = C_n \rho^n \quad n = 1, 2, \ldots \qquad ....(5.240)$$

เพราะฉะนั้น

$$u_n(\rho, \phi) = R_n(\rho)\,\Phi_n(\phi)$$

$$= b_n \rho^n \sin n\phi \quad n = 1, 2, \ldots \qquad ....(5.241)$$

ในเมื่อ $b_n = B_n C_n$ สอดคล้อง (5.228) และเงื่อนไขขอบ (5.230) และ (5.231) เพื่อให้สอดคล้องเงื่อนไขขอบ (5.229) เรากำหนดคำตอบที่ต้องการอยู่ในรูป

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^n \sin n\phi \qquad ....(5.242)$$

จาก (5.229)

$$u(a, \phi) = U_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n a^n \sin n\phi \qquad ....(5.243)$$

ดังนั้น $b_n a^n$ คือสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ไซน์ ของ U_0 และ

$$b_n a^n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} U_0 \sin n\phi \, d\phi$$

$$= \frac{-2U_0}{\pi} \left. \frac{\cos n\phi}{n} \right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-2U_0}{\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n} \right]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4U_0}{n\pi} & \text{สำหรับ } n = 1, 3, \ldots \\ 0 & \text{สำหรับ } n = 2, 4, \ldots \end{cases}$$

หรือ $b_n = \dfrac{4U_0}{\pi n a^n} \quad ; \; n = 1, 3, \ldots$

ด้วยค่าเหล่านี้ของ b_n คำตอบ (5.242) คือ

$$u(\rho, \phi) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=\text{เลขคี่}}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\rho}{a}\right)^n \sin n\phi$$

แบบฝึกหัด 5.2

สมการความร้อน

1. ที่หน้าตัด $x = 0$ และ $x = c$ ของแท่งเล็ก ๆ แท่งหนึ่ง มีอุณหภูมิเป็น $0^\circ C$ และอุณหภูมิเริ่มต้น $f(x)$ คือ $\sin \frac{\pi x}{c}$ จงหาสูตรอุณหภูมิ

2. จากปัญหาข้อ 1 ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } 0 < x < \frac{1}{2}c \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{1}{2}c < x < c \end{cases}$$

จงแสดงว่า

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right) \sin \frac{n\pi x}{c}$$

3. จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$ ในแท่งแก้วซึ่งมีความยาว 50 ซม. $k = 5$ กำหนดให้เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(0, t) = u(50, t) = 0^\circ C$$

และ $u(x, 0) = 20^\circ C$

4. จากปัญหาข้อ 3. จงหาอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางของแท่งแก้วเมื่อเวลาผ่านไป 5 นาที

5. จากปัญหาข้อ 3. จงหาอุณหภูมิที่จุด $x = 10$ จากปลายด้านซ้าย เมื่อเวลาผ่านไปนาน 1 ชั่วโมง

6. สำหรับแท่งซึ่งยาว 10 ซม. $k = 2$ $u(x, 0) = 10x$ ที่เวลาเริ่มต้น $(t = 0)$ ปลายทั้งสองด้านมีฉนวนหุ้ม (ไม่มีความร้อนไหลผ่านจุดปลายทั้งสอง) เพราะฉะนั้นเงื่อนไขขอบคือ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=10} = 0$ จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$

7. สำหรับแท่งซึ่งยาว 60 cm. $k = 1$ $u(x, 0) = x^2$ ปลายทั้งสองมีอุณหภูมิเป็น $0^\circ C$ จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$

8. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(5, t) = 0$$

และ $u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$

9. จากปัญหาข้อ 8. ถ้าเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x$$

จงหาคำตอบของสมการความร้อน

10. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 6, \ t > 0$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$u(0, t) = 0, \quad u(6, t) = 0$$

และ $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 3 \\ 0 & ; \quad 3 < x < 6 \end{cases}$

11. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$u_x(0, t) = 0, \quad u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$

ถ้า

(ก) $u(x, 0) = 30 \cos 5x$

(ข) $u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

12. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 4 , t > 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(4, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x - 2 \sin 5\pi x$$

13. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 6, \; t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0 \quad , \quad u_x(6, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 2x$$

14. จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \pi, \; t > 0$$

$$u(0, t) = 1, \quad u(\pi, t) = 3, \quad u(x, 0) = 2$$

15. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{สำหรับ } 0 < x < a, \; 0 < y < b$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0 \quad \text{และ}$$

$$u(x, 0) = f(x)$$

16. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad 0 < x < a, \; 0 < y < \infty$$

และ $u(x, y) \to 0$ เมื่อ $y \to \infty$, $u(0, y) = 0$, $u(a, y) = 0$

และ $u(x, 0) = x(a-x)$

17. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad \rho < 1,\ 0 < \phi < \pi$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \pi) = 0 \text{ และ } u(1, \phi) = \phi(\pi - \phi)$$

18. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{สำหรับ } \rho < 1,\ 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u(\rho, 0) = 0,\ \frac{\partial u}{\partial \phi}(\rho, \frac{\pi}{2}) = 0 \text{ และ } u(1, \phi) = \phi$$

คำตอบแบบฝึกหัด 5.2

1. $\exp\left(-\frac{\pi^2 kt}{c^2}\right) . \sin\frac{\pi x}{c}$

2. $\frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{c^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{c}$

3. $\frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)}\right]\exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{500}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{50}$

4. $0.068^{\circ}C$

5. $2.1\,(10^{-30})\,^{\circ}C$

6. $50-\frac{400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\exp\left[-\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{50}\right]\cos\frac{(2n-1)\pi x}{10}$

7. $7200\sum_{n=1}^{\infty} b_n . \exp\left[-\frac{n^2\pi^2 t}{3600}\right]\sin\frac{n\pi x}{60}$

   เมื่อ $b_n \;=\; \frac{1}{n\pi}-\frac{4}{n^3\pi^3}$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่

   และ $\;=\; -\frac{1}{n\pi}$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่

8. $10\sin 4\pi x\;\exp(-32\pi^2 t)$

9. $10\exp(-32\pi^2 t)\sin 4\pi x - 5\exp(-72\pi^2 t)\sin 6\pi x$

10. $\sum_{n=1}^{\infty} 2\left[\frac{1-\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n\pi}\right]\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{36}\right)\sin\frac{n\pi x}{6}$

11. (ก) $30\,e^{-75t}\cos 5x$

    (ข) $20\,e^{-27t}\cos 3x - 5\,e^{-243t}\cos 9x$

12. $3\,e^{-2\pi^2 t}\sin\pi x - 2\,e^{-50\pi^2 t}\sin 5\pi x$

13. $6+\frac{24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right)\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$

14. $1+\frac{2x}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2\left[\frac{1+(-1)^n}{n\pi}\right]e^{-n^2 t}\sin nx$

15. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\frac{\sinh[n\pi(b-y)/a]}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$

    ในเมื่อ $b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx$