# บทที่ 4
# อินทิกรัลฟูเรียร์
# (Fourier integral)

## 4.1 สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ (The Fourier integral formula)

จากบทที่ 2 เราเคยแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์

$$\frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u)\, du + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos \left[ \frac{n\pi}{\ell} (u-x) \right] du \qquad .......(4.1)$$

ลู่เข้าสู่ $f(x)$ ในเมื่อ $-\ell < x < \ell$ เมื่อกำหนดว่าฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $(-\ell, \ell)$ และที่จุดปลายของแต่ละช่วงย่อย สามารถหาอนุพันธ์ข้างเดียวของ f ได้ และนิยามค่าเฉลี่ยของ f ที่จุดไม่ต่อเนื่องเป็น $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$

กำหนดว่า f สอดคล้องตามเงื่อนไขข้างต้นบนทุก ๆ ช่วงจำกัด ดังนั้น $\ell$ อาจกำหนดให้เป็นค่าตรึงใด ๆ หรือกว้างตามใจชอบแต่ต้องเป็นค่าจริง และอนุกรม (4.1) จะแทน $f(x)$ บนช่วงที่กว้างกว่า $-\ell < x < \ell$ ได้ แต่อนุกรม (4.1) ไม่สามารถใช้แทนบนช่วงที่มากกว่าแกน x ได้ ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันมีคาบ และมีคาบเป็น $2\ell$ เพราะว่าผลรวมของอนุกรมมีภาวะเป็นคาบ

เพื่อแสดงตัวแทน ซึ่งอาจจะสมบูรณ์สำหรับทุกค่าจริง x ในเมื่อ f ไม่เป็นฟังก์ชันมีคาบ นั่นคือ เราพยายามขยายตัวแทนข้างบนโดยให้ $\ell$ เข้าใกล้ค่าอนันต์ พจน์แรกในอนุกรม (4.1) จะหายไป กำหนดว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งทำให้อินทิกรัล $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, du$ หาค่าได้ ถ้าเราแทนค่า $\triangle\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ เพราะฉะนั้น พจน์ที่เหลือใน (4.1) จะเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \triangle\alpha \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos [ n\triangle\alpha (u-x)]\, du \ ; \ \ell = \frac{\pi}{\triangle\alpha} \qquad .......(4.2)$$

เขียนในพจน์ของฟังก์ชัน $g_\ell$ ในเมื่อ

$$g_\ell(\alpha, x) = \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos [ \alpha (u-x)]\, du \ ; \ \ell = \frac{\pi}{\triangle\alpha} \qquad .......(4.3)$$

อนุกรมใน (4.2) เขียนใหม่ในรูป

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} g_\ell(n\triangle\alpha, x)\, \triangle\alpha \qquad .......(4.4)$$

ให้ค่าของ x เป็นค่าตรึง เมื่อ $\triangle\alpha$ เป็นจำนวนบวกที่มีค่าน้อย และจุด $n\triangle\alpha$ คือค่าบวกทั้งหมดบนแกน $\alpha$ ดังนั้น ผลบวกของอนุกรม (4.4) อาจประมาณเป็นอินทิกรัล

$$\int_0^\infty g_\ell(\alpha, x)\, d\alpha \qquad \text{.......(4.5)}$$

ในเมื่อ $\ell$ มีค่าใหญ่มาก หรืออินทิกรัล $\int_0^\infty g_\infty(\alpha, x)\, d\alpha$

**ข้อสังเกต** อย่างไรก็ตามลิมิตของอนุกรม (4.4) เมื่อ $\triangle\alpha \to 0$ ไม่ใช่นิยามของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) (4.5) ถึงแม้ว่า $\ell$ สามารถตรึงค่าได้มาก

ดังนั้น ภายใต้เงื่อนไขที่เหมาะสม ฟังก์ชัน f จะเป็นตัวแทนซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u)\cos[\alpha(u-x)]\, du\, d\alpha \qquad \text{.......(4.6)}$$

ในเมื่อ $-\infty < x < \infty$

(4.6) คือสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ "Fourier integral formula" สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งจะสร้างในหัวข้อต่อไป

สูตร f (x) ในพจน์ของฟังก์ชันไซน์ และโคไซน์ของ x เขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = \int_0^\infty [A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\sin\alpha x]\, d\alpha \qquad \text{.......(4.7)}$$

$-\infty < x < \infty$ ในเมื่อ

$$\left.\begin{aligned} A(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha u\, du \\ B(\alpha) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(u)\sin\alpha u\, du \end{aligned}\right\} \qquad \text{.......(4.8)}$$

จะพบว่าสูตรที่ (4.7) และ (4.8) คล้ายกับสูตรของอนุกรมฟูเรียร์ และสูตรของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $a_n$ และ $b_n$

## 4.2 ทฤษฎีบทอินทิกรัลฟูเรียร์ (A Fourier integral theorem)

ทฤษฎีบทต่อไปนี้กำหนดให้เงื่อนไขของ f ซึ่งทำให้สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์สมบูรณ์

**ทฤษฎีบท** 4.1 ให้ f แทนฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนทุก ๆ ช่วงย่อยที่นับจำนวนได้ถ้วนบนแกน x และนิยามเป็น $\frac{1}{2}[f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)]$ ที่แต่ละจุดไม่ต่อเนื่อง $x_0$ และ

$$\int_{-\infty}^\infty |f(x)|\, dx$$

หาค่าได้ ดังนั้น ทุก ๆ จุด x ในเมื่อ อนุพันธ์ข้างเดียว $f'_R(x)$ และ $f'_L(x)$ หาค่าได้ ฟังก์ชันสามารถเขียนแทนด้วยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) \cos [\alpha (u-x)] \, du \, d\alpha \qquad \text{.......(4.9)}$$

$-\infty < x < \infty$

**พิสูจน์** จากบทที่สอง สูตรกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) เมื่อ $-\ell < x < \ell$ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}) \qquad \text{.......(4.10)}$$

และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos \frac{n\pi u}{\ell} \, du \quad ; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \sin \frac{n\pi u}{\ell} \, du \quad ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่า $a_n$, $b_n$ ลงใน (4.10)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \, du + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos \frac{n\pi u}{\ell} \, du \cos \frac{n\pi x}{\ell} \\ &\quad + \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \sin \frac{n\pi u}{\ell} \, du \sin \frac{n\pi x}{\ell} \Big] \\ &= \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \, du + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[ \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos \frac{n\pi u}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, du \\ &\quad + \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \sin \frac{n\pi u}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, du \Big] \end{aligned}$$

เพราะว่า

$$\cos \frac{n\pi u}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell} + \sin \frac{n\pi u}{\ell} \sin \frac{n\pi x}{\ell} = \cos \frac{n\pi (u-x)}{\ell}$$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \, du + \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\ell}^{\ell} f(u) \cos \frac{n\pi (u-x)}{\ell} \, du \qquad \text{.......(4.11)}$$

เนื่องจากโจทย์กำหนดว่า $\int_{-\infty}^{\infty} | f(u) | \, du$ หาค่าได้ สมมุติให้

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f(u) | \, du = M \quad ; \; M \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

ดังนั้น

$$\left| \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(u)\,du \right| \le \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} |f(u)|\,du$$

$$\le \frac{M}{2\ell}$$

และจะมีค่าเข้าสู่ศูนย์ เมื่อ $\ell$ มีค่ามาก ๆ ($\ell \to \infty$)

จาก (4.11) เมื่อ $\ell \to \infty$ จะได้

$$f(x) = \lim_{\ell \to \infty} \frac{1}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \frac{n\pi(u-x)}{\ell}\,du \qquad .......(4.12)$$

ให้ $\triangle\alpha = \frac{\pi}{\ell}$ จะได้ $\frac{1}{\ell} = \frac{\triangle\alpha}{\pi}$ ซึ่งจะพบว่า $\triangle\alpha \to 0$ เมื่อ $\ell \to \infty$

เพราะฉะนั้น เราสามารถเขียนอนุกรม (4.12) ได้ใหม่เป็น

$$f(x) = \lim_{\triangle\alpha \to 0} \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \triangle\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos[n\triangle\alpha(u-x)]\,du \qquad .......(4.13)$$

หรือ ถ้าเราสมมุติให้

$$F(\alpha) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(u-x)\,du$$

จะเขียนอนุกรม (4.13) ได้ใหม่ในรูป

$$f(x) = \lim_{\triangle\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \triangle\alpha\, F(n\triangle\alpha) \qquad .......(4.14)$$

$$= \lim_{\triangle\alpha \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha)\, \triangle\alpha$$

$$= \int_{0}^{\infty} F(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha(u-x)\,du \right] d\alpha \qquad .......(4.15)$$

เรียก (4.15) ว่า "อินทิกรัลฟูเรียร์ของ $f(x)$" หรือเขียน (4.15) ในรูปของ

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u \cos \alpha x\,du + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \sin \alpha x\,du \right] d\alpha \qquad ......(4.16)$$

ถ้า $f(u)$ เป็นฟังก์ชันคี่ จะได้

$f(u) \cos \alpha u$ เป็นฟังก์ชันคี่ และ

$f(u) \sin \alpha u$ เป็นฟังก์ชันคู่

ดังนั้น (4.16) เขียนใหม่ในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(u) \sin \alpha u \sin \alpha x \, du \right] d\alpha \qquad .......(4.17)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้า f (u) เป็นฟังก์ชันคู่ จะได้

f (u) cos αu เป็นฟังก์ชันคู่ และ

f (u) sin αu เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น (4.16) เขียนใหม่ในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \cos \alpha x \, du \right] d\alpha \qquad .......(4.18)$$

(4.17) และ (4.18) ใช้ได้ในกรณีที่ f (x) นิยามในช่วง $0 < x < \infty$ นั่นคือ กำหนดแบบครึ่งช่วง (half-range)

จาก (4.17) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(u) \sin \alpha u \, du \right] \sin \alpha x \, d\alpha \qquad .......(4.19)$$

เรียก (4.19) ว่า "สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine integral formula) ของ f (x)" ซึ่งฟังก์ชันจะอยู่ในรูปไซน์ล้วน ๆ

จาก (4.18) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du \right] \cos \alpha x \, d\alpha \qquad .......(4.20)$$

เรียก (4.20) ว่า "สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine integral formula) ของ f (x)" ซึ่งฟังก์ชันจะอยู่ในรูปโคไซน์ล้วน ๆ

ในกรณี f (x) นิยามบนครึ่งช่วงอนันต์ $x > 0$ สูตร (4.19) และ (4.20) ใช้กับการขยายฟังก์ชันคี่และฟังก์ชันคู่ของ f ตามลำดับ และแทนด้วย f (x) เมื่อ $x > 0$ ภายใต้เงื่อนไขต่อไปนี้

**บทแทรกทฤษฎีบท 4.1** ให้ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนทุก ๆ ช่วงจำกัด บนแกน x ที่เป็น บวก และนิยามเหมือนค่าเฉลี่ยของลิมิตของมัน $f(x_0+0)$ และ $f(x_0-0)$ ที่แต่ละจุด $x_0$ ($x_0 > 0$) ในเมื่อ f ไม่ต่อเนื่อง กำหนดว่า $\int_0^\infty |f(x)|\,dx$ หาค่าได้ ดังนั้นที่ทุก ๆ จุด x ($x > 0$) ในเมื่ออนุพันธ์ด้านขวาและอนุพันธ์ด้านซ้ายหาค่าได้ ฟังก์ชันถูกแทนด้วยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ (4.19) และสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ (4.20)

**ตัวอย่างที่ 4.1** จงพิสูจน์ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x \sin\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ; \quad 0 \le x < 1 \\ \frac{\pi}{4} & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\text{เมื่อ} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \le x < 1 \\ 0 & ; \quad x > 1 \end{cases}$$

**วิธีทำ** เนื่องจากโจทย์ข้อนี้กำหนดให้ f (x) นิยามในช่วง $0 < x < \infty$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du &= \int_0^1 f(u)\cos\alpha u\,du + \int_1^\infty f(u)\cos\alpha u\,du \\ &= \int_0^1 (1)\cos\alpha u\,du + \int_1^\infty (0)\cos\alpha u\,du \\ &= \left.\frac{\sin\alpha u}{\alpha}\right|_0^1 \\ &= \frac{\sin\alpha}{\alpha} \; ; \; \alpha \neq 0 \end{aligned}$$

จาก (4.18)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\,du\right]\cos\alpha x\,d\alpha \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right]\cos\alpha x\,d\alpha \end{aligned}$$

หรือ $\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin a}{a} da = \frac{\pi}{2} f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{เมื่อ } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$

พิจารณาที่จุดไม่ต่อเนื่อง x = 1 ดังนั้นใช้เงื่อนไขดีริคเลต จะได้

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax \sin a}{a} da = \frac{\pi}{2} \left[ \frac{f(1+0) + (f(1-O)}{2} \right]$$

$$= \frac{\pi}{2} \left( \frac{0+1}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

**ตัวอย่างที่** 4.2 จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2+1} d\alpha = \frac{\pi}{2} e^{-x} \qquad ; \qquad x \ge 0$$

กำหนดให้ $f(x) = e^{-x} \qquad x \ge 0$

**วิธีทำ** จาก (4.20)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha x \left[ \int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du \right] d a \qquad \ldots\ldots(4.21)$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty f(u) \cos au \, du = \int_0^\infty e^{-u} \cos au \, du$$

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts)

$$\int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du = e^{-u} \left( \frac{\sin \alpha u}{\alpha} \right) \Big|_0^\infty + \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u} \sin a u \, d u$$

อินทิเกรตทีละส่วน อินทิกรัลพจน์ที่สองอีกครั้ง จะได้

$$\int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du = 0 + \frac{1}{2} \left[ e^{-u} \left( -\frac{\cos \alpha u}{\alpha} \right) \Big|_0^\infty - \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty e^{-u} \cos \alpha u \, du \right]$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha u\, du\right]$$

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha^2}\right)\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\, du = \frac{1}{\alpha^2}$$

หรือ $\int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\, du = \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1} = \frac{1}{\alpha^2+1}$ .......(4.22)

แทนค่า (4.22) ลงใน (4.21)

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos\alpha x\left(\frac{1}{\alpha^2+1}\right) d\alpha$$

หรือ $\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{\alpha^2+1}\, d\alpha = \frac{\pi}{2} f(x) = \frac{\pi}{2} e^{-x} \; ; \; x \geq 0$

**ตัวอย่างที่ 4.3** โดยการสลับอันดับของการอินทิเกรตของอินทิกรัล

$$\int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty e^{-xy}\sin y\, dx\, dy$$

จงพิสูจน์ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}$$

**วิธีทำ** โดยการสลับอันดับของการอินทิเกรต ดังนั้น

$\int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty e^{-xy}\sin y\, dx\, dy = \int_{x=0}^\infty \left[\int_{y=0}^\infty e^{-xy}\sin y\, dy\right] dx$ ......(4.23)

พิจารณา อินทิกรัลในวงเล็บใหญ่ โดยการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_{y=0}^\infty e^{-xy}\sin y\, dy = -e^{-xy}(\cos y)\Big|_0^\infty - x\int_0^\infty e^{-xy}\cos y\, dy$$

$$= 1 - x\int_0^\infty e^{-xy}\cos y\, dy$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = 1 - x \left[ e^{-xy} (\sin y) \Big|_0^\infty + x \int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy \right]$$

$$= 1 - x \left[ 0 + x \int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy \right]$$

$$(1+x^2) \int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = 1$$

หรือ $\int_0^\infty e^{-xy} \sin y \, dy = \frac{1}{1+x^2}$ .......(4.24)

แทนค่า (4.22) ลงใน (4.21)

$$\int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty e^{-xy} \sin y \, dx \, dy = \int_{x=0}^\infty \left( \frac{1}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \tan^{-1}(x) \Big|_0^\infty$$

$$= \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0)$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad .......(4.25)$$

เพราะว่า

$$\int_{y=0}^\infty \int_{x=0}^\infty e^{-xy} \sin y \, dx \, dy = \int_0^\infty \sin y \int_0^\infty e^{-xy} \, dx \, dy$$

$$= \int_0^\infty \sin y \left( -\frac{e^{-xy}}{y} \right) \Big|_0^\infty dy$$

$$= \int_0^\infty \sin y \left( \frac{1}{y} \right) dy$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \, dy \qquad .......(4.26)$$

แต่ (4.25) = (4.26) ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\sin y}{y} \, dy = \frac{\pi}{2} \qquad .......(4.27)$$

## 4.3 สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (Fourier integral formula in exponential form)

ภายใต้เงื่อนไขที่กล่าวในทฤษฎีบท 4.1 สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์สามารถเขียนในรูป

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_0^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} 2 f(u) \cos[\alpha(u-x)]\, du\, d\alpha \qquad .......(4.28)$$

กระจายฟังก์ชันโคไซน์ ในพจน์ของฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential functions)

$$\cos[\alpha(u-x)] = = \frac{e^{i\alpha(u-x)} + e^{-i\alpha(u-x)}}{2}$$

$$= \frac{e^{i\alpha u} \cdot e^{-i\alpha x} + e^{-i\alpha u} \cdot e^{i\alpha x}}{2}$$

แทนค่าฟังก์ชันโคไซน์ใน (4.28)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_0^{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} 2 f(u) \left[ \frac{e^{i\alpha u} \cdot e^{-i\alpha x} + e^{-i\alpha u} \cdot e^{i\alpha x}}{2} \right] du\, d\alpha$$

เพราะว่า $\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |\, dx$ หาค่าได้ เพราะฉะนั้น อินทิกรัล

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du \text{ และ } \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du$$

ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอเทียบกับ $\alpha$ สำหรับทุกค่าบวก $\alpha$ ตามการทดสอบเอ็มของไว-แยร์สตราสส์ ซึ่งการลู่เข้าแบบสม่ำเสมอด้วยกันกับความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ของ f แสดงว่า อินทิกรัลเหล่านี้แทนฟังก์ชันต่อเนื่องของ $\alpha$ ดังนั้น อินทิกรัลใน (4.28) สามารถเขียนเหมือนผลรวม

$$\int_0^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du\, d\alpha + \int_0^{\beta} e^{i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du\, d\alpha \qquad .......(4.29)$$

เพราะว่าอินทิกรัลจำกัดเขตเทียบกับ $\alpha$ หาค่าได้ เหมือนอินทิกรัลของฟังก์ชันต่อเนื่องของ $\alpha$ (อินทิกรัลไม่ตรงแบบ จาก $\alpha = 0$ ถึง $\alpha = \infty$ อาจจะหาค่าไม่ได้) อย่างไรก็ตาม พจน์ที่สองของผลรวม (4.29) ถ้าแทนค่า $\alpha = -\alpha'$ จะเขียนใหม่ในรูป

$$-\int_{0}^{-\beta} e^{-i\alpha' x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha' u}\, du\, d\alpha'$$

หรือ $$\int_{-\beta}^{0} e^{-i\alpha' x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha' u}\, du\, d\alpha'$$

หลังจากเปลี่ยนตัวแปรหุ่นของ $\alpha'$ ผลรวม (4.29) สามารถเขียนใหม่ในรูป

$$\int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du\, d\alpha$$

ดังนั้น รูปชี้กำลังของสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ (4.28) คือ

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du\, d\alpha \qquad \text{.......(4.30)}$$

ในเมื่อ $-\infty < x < \infty$ เครื่องหมายลบของชี้กำลัง $-i\alpha x$ สามารถเลื่อนไปเป็นชี้กำลัง $i\alpha u$ โดยใช้ $-\alpha$ เป็นตัวแปรของการอินทิเกรต

ลิมิตใน (4.30) เรียกว่า "ค่าหลักโคชี (Cauchy principle value)" ของอินทิกรัลไม่ตรงแบบจาก $-\infty$ ถึง $\infty$ เทียบกับ $\alpha$ ค่าหลักอาจจะหาค่าได้เมื่ออินทิกรัลไม่ตรงแบบหาค่าไม่ได้ ตัวอย่าง เช่น อินทิกรัล $\int_{-\infty}^{\infty} \alpha\, d\alpha$ ไม่มีค่า (หาค่าไม่ได้) แต่ค่าหลักหาค่าได้ และมีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่า $\int_{-\beta}^{\beta} \alpha\, d\alpha = 0$ สำหรับทุกค่าของ $\beta$ ในกรณีอินทิกรัลไม่ตรงแบบหาค่าได้ ค่าของมันจะเท่ากับค่าหลัก

ถ้าเงื่อนไขต่อไปไม่กำหนดให้มีบน f ค่าหลักที่ใช้ในสูตร (4.30) ไม่สามารถแทนอินทิกรัลไม่ตรงแบบเหมือนตัวอย่างข้างล่างนี้

**ตัวอย่างที่ 4.4** กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ e^{-x} & \text{เมื่อ } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases} \qquad \text{.......(4.31)}$$

สอดคล้องทุกเงื่อนไขในทฤษฎีบทอินทิกรัลฟูเรียร์ มันจะถูกแทนโดยสูตร (4.30) ที่ทุก ๆ จุด x โดยเฉพาะที่ $x = 0$ ในกรณีนี้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du = \int_0^{\infty} e^{-u(1-i\alpha)}\, du$$

$$= \frac{-e^{-u(1-i\alpha)}}{(1-i\alpha)} \Big|_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{1-i\alpha}$$

$$= \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2} \qquad .......(4.32)$$

เพราะฉะนั้น เมื่อแทน $x = 0$ ในสูตร (4.30) อินทิกรัลจะเขียนใหม่ในรูป

$$\int_{-\beta}^{\beta} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2}\, d\alpha = \left[ \tan^{-1}(\alpha) + \frac{i}{2} \log(1+\alpha^2) \right]_{-\beta}^{\beta}$$

$$= 2\tan^{-1}(\beta) \qquad .......(4.33)$$

เมื่อแทนลิมิต $\beta \to \infty$ ลงใน (4.33) จะได้

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{1+i\alpha}{1+\alpha^2}\, d\alpha = 2\tan^{-1}(\beta) \Big|_{\beta=\infty} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

เพราะฉะนั้น จำนวนขวามือของสูตร (4.30) มีค่าเป็น $\frac{1}{2}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $f(0)$ แต่อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน (4.32) จาก $-\infty$ ถึง $\infty$ หาค่าไม่ได้ เพราะว่าฟังก์ชัน $\alpha(1+\alpha^2)^{-1}$ อินทิเกรตไม่ได้ จาก $-\infty$ ถึง $\infty$

## 4.4 การแปลงฟูเรียร์ (Fourier transform)

จากสูตร อินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ (4.17) สามารถเขียนในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} F_s(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha \;, \; x > 0 \qquad .......(4.34)$$

ในเมื่อ

$$F_s(\alpha) = \int_0^{\infty} f(u) \sin \alpha u\, du \;, \; \alpha > 0 \qquad .......(4.35)$$

ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดให้ ดังนั้น (4.34) คือสมการอินทิกรัลของฟังก์ชัน $F_s$ และสมการนี้ประกอบด้วยฟังก์ชันไม่รู้ค่าในตัวถูกอินทิเกรต สมการนี้คือสมการอินทิกรัลเอกฐาน (singular integral equation) เพราะว่าเป็นอินทิกรัลไม่ตรงแบบ สมการ (4.35) จะให้คำตอบของสมการอินทิกรัลเมื่อ $f$ สอดคล้องตามเงื่อนไขที่กล่าวไว้ในบทแทรกทฤษฎีบท 4.1 โดยการแทนค่า (4.35) ลงใน (4.34)

ฟังก์ชัน $F_s$ ซึ่งนิยามโดย (4.35) คือการแปลงฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน f การแปลง (4.35) จะเขียนย่อในรูป

$$F_s(\alpha) \quad = \quad S_\alpha\{f\} \qquad .......(4.36)$$

สร้างการสมนัยระหว่างฟังก์ชัน f และ $F_s$ ฟังก์ชัน f สอดคล้องเงื่อนไขตามบทแทรก ทฤษฎีบท 4.1 มีผลการแปลงเป็น $F_s$ จนถึงสูตร (4.34) ให้ f ในพจน์ของการแปลงของมัน นั่นคือ สูตร (4.34) ให้การแปลงผกผัน (inverse transformation)

โดยวิธีเดียวกันนี้ จาก (4.18) สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ สามารถเขียนในรูป

$$f(x) \quad = \quad \frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(\alpha)\cos\alpha x\, d\alpha \ , \ x > 0 \qquad .......(4.37)$$

ในเมื่อ

$$F_c(\alpha) \quad = \quad \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\, du \ , \ \alpha > 0 \qquad .......(4.38)$$

และเรียก (4.38) ว่า "การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine transform) ของ f ซึ่งจะเขียนย่อเป็น

$$F_c(\alpha) \quad = \quad C_\alpha\{f\}$$

การแปลงผกผันของ $C_\alpha\{f\}$ นิยามโดยสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ (4.37)

# แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 1 \text{ และ } x = -1 \end{cases}$$

ดังนั้น จงแสดงว่าสำหรับทุกค่า $x\ (-\infty < x < \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin[\alpha(1-x)] + \sin[\alpha(1+x)]}{\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin\alpha \cos\alpha x}{\alpha}\, d\alpha$$

2. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\, dt = \begin{cases} \frac{1}{2}\pi & \text{เมื่อ } k > 0 \\ -\frac{1}{2}\pi & \text{เมื่อ } k < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } k = 0 \end{cases}$$

โดยใช้สูตรการอินทิเกรต (4.27)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

3. ถ้า $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ e^{-x} & \text{เมื่อ } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f สอดคล้องทุกเงื่อนไขในทฤษฎีบทอินทิกรัลฟูเรียร์ และเพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละค่าของ x

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha \quad (-\infty < x < \infty)$$

4. จงพิสูจน์ว่า

$$\exp(-|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{1+\alpha^2}\, d\alpha \qquad (-\infty < x < \infty)$$

5. ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ} \quad x \le 0 \text{ และ } x \ge \pi \\ \sin x & \text{เมื่อ} \quad 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x + \cos[\alpha(\pi - x)]}{1-\alpha^2}\, d\alpha \quad (-\infty < x < \infty)$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเลือก $x = \frac{1}{2}\pi$ จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{1}{2}\pi\alpha}{1-\alpha^2}\, d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

6. ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ} \quad 0 < x < k \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x > k \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ} \quad x = k \end{cases}$$

จงแสดงว่า สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ประยุกต์ใช้กับ f เขียนแทนในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos k\alpha}{\alpha} \sin \alpha x\, d\alpha \quad (x > 0)$$

7. ใช้บทแทรกทฤษฎีบท 4.1 และสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ แสดงว่า

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^3 \sin \alpha x}{\alpha^4 + 4}\, d\alpha \quad (x > 0)$$

8. ใช้สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ และจงพิสูจน์ว่า

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^4 + 4} \cos \alpha x\, d\alpha \quad (x \ge 0)$$

9. ใช้หัวข้อ (4.4) กับฟังก์ชัน $e^{-kx}$ ในเมื่อ k เป็นค่าคงที่บวก จงแสดงว่า การแปลงฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชันคือ $\alpha(\alpha^2 + k^2)^{-1}$ เพราะฉะนั้น จะได้

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + k^2}\, d\alpha \quad (x > 0, k > 0)$$

10. ใช้หัวข้อ (4.4) จงพิสูจน์ว่า การแปลงฟูเรียร์โคไซน์ฟังก์ชัน $e^{-kx}$ ในเมื่อ k ปืนค่าคงที่ คือ $k(\alpha^2 + k^2)^{-1}$ เพราะฉะนั้น จงแสดงว่า

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + k^2}\, d\alpha \quad (x \geq 0, k > 0)$$