บทที่ 3
คุณสมบัติอื่น ๆ ของอนุกรมฟูเรียร์
Further Properties of Fourier Series

3.1 การลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ (Uniform convergence)

ทฤษฎีบท 3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$ ซึ่ง $f(-\pi) = f(\pi)$ และกำหนดให้อนุพันธ์ของมัน f' เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วงนั้น ดังนั้นอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{.......(3.1)}$$

ลู่เข้า เมื่อ a_n และ b_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

และจากการทดสอบเปรียบเทียบ (comparison test) พบว่า แต่ละอนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad \text{และ} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \qquad \text{.......(3.2)}$$

ลู่เข้าเหมือนผลลัพธ์การลู่เข้าของอนุกรม (3.1)

พิสูจน์ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ f' คือ

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx$$

และ
$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx \qquad \text{.......(3.3)}$$

หาค่าได้ (exist) เพราะว่า f' มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

จากโจทย์กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f(-\pi) = f(\pi)$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \{ f(x) \} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{\pi} \{ f(\pi) - f(-\pi) \} \\ &= 0 \end{aligned} \qquad \text{.......(3.4)}$$

เมื่อพิจารณาที่ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จะได้สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ f' คือ

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx$$

หาค่าโดยการอินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \cos nx \quad ; \quad dv = f'(x) \, dx$

$du = -n \sin nx \, dx \quad ; \quad v = f(x)$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\cos x \cdot f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} + n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{\cos n\pi \cdot f(\pi) - \cos n(-\pi) f(-\pi)}{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{\cos n\pi}{\pi} [f(\pi) - f(-\pi)] + nb_n$$

$$= nb_n \qquad \ldots\ldots.(3.5)$$

และ $$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\sin nx \cdot f(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{\sin n\pi f(\pi) - \sin n(-\pi) f(\pi)}{\pi} - \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

เพราะว่า $\sin n\pi = \sin(-n\pi) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\beta_n = -n a_n \qquad \ldots\ldots..(3.6)$$

สังเกตว่าเงื่อนไข $f(-\pi) = f(\pi)$ เมื่อขยายคาบของ f ก็ยังมีความต่อเนื่อง เป็นเงื่อนไขจำเป็น ทำให้สมการของ α_n ลดรูปเป็น $\alpha_n = nb_n$

ให้ S_m แทนผลรวมย่อยของอนุกรมอนันต์ (3.1) แสดงความสัมพันธ์ (3.5) และ (3.6)

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

เพราะว่า $S_m \geq 0$ ตามอสมการของโคชี (Cauchy's inequality) เพราะฉะนั้น

$$S_m \leq \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{m} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \right]^{1/2} \qquad \ldots\ldots.(3.7)$$

ผลบวกแรกทางขวามือมีขอบเขตสำหรับทุกค่าของ m เพราะว่าอนุกรมอนันต์ของพจน์บวก $\frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

จากอสมการของเบสเซล (Bessel's inequality) สำหรับฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ f′ เทียบกับเซตเชิงตั้งฉากปกติ

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos kx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\} \quad (k, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

บนช่วง $(-\pi, \pi)$ ซึ่งจะพบว่า สำหรับทุกค่าของ m

$$\sum_{n=1}^{m} (\alpha_n^2 + \beta_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\, f'(x) \,] \, dx$$

เพราะว่า $\alpha_0 = 0$ เพราะฉะนั้น ส่วนทางขวามือของเงื่อนไข (3.7) มีขอบเขตสำหรับทุกค่าของ m และของ S_m ด้วย

เพราะว่า S_m มีขอบเขตและลำดับไม่ลดลง (nondecreasing sequence) ลิมิตของ S_m เมื่อ m เข้าใกล้อนันต์ หาค่าได้ นั่นคือ อนุกรม (3.1) ลู่เข้าตามที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท 3.2 *ภายใต้เงื่อนไขที่กล่าวในทฤษฎีบท 3.1 การลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์*

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \cos nx) \qquad \ldots\ldots(3.8)$$

สู่ f (x) บนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$ *เป็นแบบสัมบูรณ์และแบบสม่ำเสมอเมื่อเทียบกับ x บนช่วงนั้น*

พิสูจน์ เงื่อนไขที่ว่า f และ f′ มีความต่อเนื่องและสามารถหาค่าอนุพันธ์ข้างเดียวได้ การกระจายฟังก์ชันมีคาบ f สำหรับทุกค่าของ x ซึ่งได้จากนิยามฟูเรียร์ คืออนุกรม (3.8) จะลู่เข้าสู่ f (x) สำหรับทุก ๆ ที่บน $-\pi \leq x \leq \pi$ ดังนั้น

$$| a_n \cos nx + b_n \sin nx | \leq | a_n | + | b_n |$$

และอนุกรมของค่าคงที่ $|a_n| + |b_n|$ ลู่เข้า เพราะว่าแต่ละอนุกรมของ (3.2) ลู่เข้า ดูการทดสอบเปรียบเทียบ (comparison test) และการทดสอบเอ็มไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass M-test) เพราะฉะนั้นนำมาประยุกต์เพื่อแสดงว่าการลู่เข้าของอนุกรม (3.8) เป็นแบบสัมบูรณ์ และแบบสม่ำเสมอ ตามที่กล่าวไว้ในทฤษฎีบท 3.2 โดยการแยกพจน์โคไซน์ล้วน ๆ และไซน์ล้วน ๆ นั่นคือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

เมื่อ $-\pi \le x \le \pi$

และอนุกรมทั้งสองจะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และสม่ำเสมอ

ตัวอย่างที่ 3.1 จงแสดงว่า

(ก) $\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Mt = \dfrac{\sin (M + \frac{1}{2}) t}{2 \sin \frac{1}{2} t}$

(ข) $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \dfrac{\sin (M+\frac{1}{2}) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2}$ และ

$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \dfrac{\sin (M+\frac{1}{2}) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2}$

วิธีทำ

(ก) จากสูตรตรีโกณมิติ เพราะว่า

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} \{ \sin (A+B) - \sin (A-B) \}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos nt \sin \frac{1}{2} t = \frac{1}{2} \{ \sin (n + \frac{1}{2}) t - \sin (n - \frac{1}{2}) t \}$$

ดังนั้น ถ้ารวมจาก $n = 1$ ถึง M จะได้

$$\sin \frac{1}{2} t (\cos t + \cos 2t + \dots + \cos Mt) = \frac{1}{2} (\sin \frac{3}{2} t - \sin \frac{1}{2} t)$$

$$+ \frac{1}{2} (\sin \frac{5}{2} t - \sin \frac{3}{2} t) + \dots + \frac{1}{2} (\sin (M + \frac{1}{2}) t - \sin (M - \frac{1}{2}) t)$$

$$= \frac{1}{2} \{ \sin (M + \frac{1}{2}) t - \sin \frac{1}{2} t \} \qquad \text{.......(3.9)}$$

หาร (3.9) ด้วย $\sin \frac{1}{2} t$ แล้วบวก $\frac{1}{2}$ เข้าทั้งสองข้างจะได้

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \dots + \cos Mt = \frac{\sin (M + \frac{1}{2}) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} \qquad \text{.......(3.10)}$$

อินทิเกรต (3.10) เทียบกับ t จาก $t = 0$ ถึง $t = \pi$ จะได้

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt\right) dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right) dt}{2 \sin \frac{1}{2} t}$$

พิจารณาอินทิกรัลซ้ายมือ

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt\right) dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} dt + \int_0^{\pi} \cos t \, dt + \ldots + \int_0^{\pi} \cos Mt \, dt \qquad \ldots\ldots.(3.11)$$

แต่ $\int_0^{\pi} \cos nt \, dt = -\frac{\sin nt}{n} \Big|_0^{\pi}$; $n = 1, 2, 3, \ldots, M$

$$= 0 \qquad \ldots\ldots.(3.12)$$

แทนค่า (3.12) ลงใน (3.11)

$$\int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \ldots + \cos Mt\right) dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right) t \, dt}{2 \sin \frac{1}{2} t} = \frac{\pi}{2}$$

หรือ $$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าอินทิเกรต (3.10) เทียบกับ t จาก $t = -\pi$ ถึง $t = 0$ จะได้

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} \frac{\sin\left(M + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{1}{2} t} dt = \frac{1}{2}$$

3.2 การอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ (Integrating of Fourier series)

การอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ ภายใต้เงื่อนไขทั่ว ๆ ไป มีลักษณะเป็นไปได้มากกว่าการหาอนุพันธ์ ที่คาดหวังดังนี้เพราะว่าในการอินทิเกรตจะมีตัวประกอบ (factor) n อยู่ที่ตัวส่วนของพจน์ทั่วไป ซึ่งจะแสดงในทฤษฎีบทต่อไปว่า มันไม่ใช่เหตุสำคัญว่า อนุกรมเริ่มแรก (original series) ลู่เข้าสู่ฟังก์ชันของมัน เพื่อว่าอนุกรมที่ได้จากการอินทิเกรตลู่เข้าสู่อินทิกรัลของ

ฟังก์ชัน ซึ่งแน่นอนอนุกรมที่ได้จากการอินทิเกรต ไม่เป็นอนุกรมฟูเรียร์ ถ้า $a_0 \neq 0$ เพราะจะมีพจน์ $\frac{a_0 x}{2}$ อยู่

ในการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ จะแยกพิจารณาเป็น 2 กรณี ดังนี้

กรณีที่ 1 เมื่อ $a_0 = 0$

กรณีที่ 2 เมื่อ $a_0 \neq 0$

พิจารณากรณีที่ 1 $a_0 = 0$

กำหนดว่า ถ้า f (x) เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ ฟังก์ชัน

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt \qquad \text{.......(3.13)}$$

จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ยกเว้นจุดที่ f ไม่ต่อเนื่อง เพราะฉะนั้น F (x) ยังคงต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $[-\pi, \pi]$ ด้วย

กำหนดให้ $F(\pi) = F(-\pi)$ จาก (3.13) แทนค่า $x = -\pi$ จะได้

$$F(-\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0$$

ดังนั้น

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \pi a_0 = 0$$

หรือ $a_0 = 0$

เมื่อ $\frac{1}{2} a_0$ คือสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ตัวแรกของฟังก์ชัน f (x) ใช้ทฤษฎีบทที่ผ่านมา เราสามารถสรุปจากหลักเกณฑ์ได้ว่า อนุกรมฟูเรียร์ สำหรับฟังก์ชันมีคาบของ F (x) จะลู่เข้าสู่ F (x) ที่ทุก ๆ ค่าของ x

ผลที่ได้นี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ f (x) และ $|f(x)|$ ต่างถูกกำหนดให้สามารถอินทิเกรตได้

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ F (x) ที่ได้จากการอินทิเกรตอนุกรมของ f (x) เมื่อ $n \geq 1$ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์โคไซน์ A_n ของ F (x) คือ

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = F(x)$; $dv = \cos nx\, dx$

$du = F'(x)\, dx$; $v = \dfrac{\sin nx}{n}$

แทนค่า

$$An = \frac{1}{\pi}\left[F(x) \cdot \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} F'(x)\, dx \right]$$

เพราะว่า $F(-\pi) = F(\pi) = 0$ และ $F'(x) = f(x)$

เพราะฉะนั้น

$$An = \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \right]$$

หรือ $$An = -\frac{bn}{n} \qquad \text{.......(3.14)}$$

โดยวิธีเดียวกัน สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ ไซน์ B_n ของ $F(x)$ คือ

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = F(x)$ และ $dv = \sin x\, dx$

เพราะฉะนั้น

$$B_n = \frac{a_n}{n} \qquad \text{.......(3.15)}$$

และสัมประสิทธิ์ A_0 คือ

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = F(x)$; $dv = dx$

$du = F'(x)\, dx$; $v = x$

แทนค่าจะได้

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\left[x\ F(x) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} x F'(x)\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)\, dx \right]$$

เพราะว่า $F(-\pi) = F(\pi)$ และ $F'(x) = f(x)$ เพราะฉะนั้น

$$A_0 = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x f(x)\, dx \qquad \text{.......(3.16)}$$

จากข้อพิจารณาเหล่านี้ทำให้เกิดทฤษฎีบทที่น่าสังเกตต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบเป็น 2π และ มีอนุกรมฟูเรียร์เป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{.......(3.17)}$$

ดังนั้น กำหนดค่า A_0 ตาม (3.16) จะได้

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) \qquad \text{.......(3.18)}$$

และสมการนี้จะเป็นจริงสำหรับทุกค่าของ x ถึงแม้ว่าอนุกรมฟูเรียร์ (3.17) จะไม่ลู่เข้าก็ตาม ยิ่งกว่านั้น อนุกรม (3.18) คือ อนุกรมฟูเรียร์ที่แท้จริงของฟังก์ชันด้านซ้าย

พิจารณากรณีที่ 2 $a_0 \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $(-\pi, \pi)$ ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์ ซึ่งสมนัยกับ f คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{.......(3.19)}$$

ลู่เข้าหรือไม่ก็ตาม สมการเท่ากันข้างล่างยังคงเป็นจริง นั่นคือ

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt = \frac{1}{2} a_0 (x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n \sin nx - b_n (\cos nx - \cos n\pi) \right] \qquad \text{.......(3.20)}$$

เมื่อ $-\pi \leq x \leq \pi$ อนุกรมที่ได้ใหม่เกิดจากการอินทิเกรตอนุกรมเริ่มแรกทีละพจน์

พิสูจน์ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ ฟังก์ชัน F ซึ่งนิยามเป็น

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\, dt - \frac{1}{2} a_0 x \qquad \text{.......(3.2i)}$$

มีความต่อเนื่อง ยิ่งกว่านั้น

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{2} a_0$$

ยกเว้นที่จุดซึ่ง f ไม่ต่อเนื่อง เพราะฉะนั้น F' เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $(-\pi, \pi)$ ด้วย เพราะว่า

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt - \frac{1}{2} a_0\pi$$
$$= a_0\pi - \frac{1}{2} a_0\pi = \frac{1}{2} a_0\pi .$$

และ $F(-\pi) = \frac{1}{2} a_0\pi$ เพราะว่า $F(\pi) = F(-\pi)$ ดังนั้น ตามทฤษฎีบทฟูเรียร์ สำหรับทุกค่าของ x บนช่วง $-\pi \le x \le \pi$ จะได้ความจริงว่า

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

ที่ซึ่ง

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx\, dx$$

และ $$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx\, dx$$

เมื่อ $n \neq 0$ อินทิเกรตสองอินทิกรัลหลังสุดทีละส่วน โดยใช้ความจริงที่ว่า F เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และ F' เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ เพราะฉะนั้น

$$A_n = \frac{1}{n\pi} \left[F(x) \sin nx \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F'(x) \sin nx\, dx \right]$$
$$= \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(x) - \frac{1}{2} a_0 \right] \sin nx\, dx$$
$$= -\frac{b_n}{n}$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ $B_n = \frac{a_n}{n}$ เพราะฉะนั้น

$$F(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (a_n \sin nx - b_n \cos nx) \qquad \text{.......(3.22)}$$

เมื่อ $-\pi \le x \le \pi$ แต่เพราะว่า $F(\pi) = \frac{1}{2} a_0\pi$

$$\frac{1}{2} a_0\pi = \frac{1}{2} A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n \cos n\pi$$

หรือ $$\frac{1}{2} A_0 = \frac{1}{2} a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} b_n \cos n\pi \qquad \text{.......(3.23)}$$

แทนค่า (3.23) ลงใน (3.22) จะได้

$$F(x) = \frac{1}{2} a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n \sin nx - b_n (\cos nx - \cos n\pi) \right]$$

แทนค่า (3.21) จะได้ (3.20) ตามต้องการ นั่นคือ

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \frac{1}{2}a_0x = \frac{1}{2}a_0\pi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n \sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi)\right]$$

หรือ
$$\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{2}a_0(x+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[a_n \sin nx - b_n(\cos nx - \cos n\pi\right]$$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบทสามารถเขียนอินทิกรัล จาก x_0 ถึง x ได้ เมื่อ $-\pi \le x_0 \le \pi$

และ $-\pi \le x \le \pi$ โดยที่

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt - \int_{-\pi}^{x_0} f(t)\,dt$$

จากทฤษฎีบท 3.4 สามารถพูดใหม่ได้ว่า "สำหรับอนุกรมฟูเรียร์ใด ๆ (จะลู่เข้าหรือไม่ก็ตาม) สามารถอินทิเกรตทีละพจน์ระหว่างลิมิตใด ๆ บนช่วงนั้นได้และอนุกรมที่ได้ใหม่จะลู่เข้าสู่อินทิกรัลของฟังก์ชันมีคาบ โดยสัมพันธ์กับอนุกรมเริ่มแรก"
นั่นคือ เมื่อ $a_0 \neq 0$ อนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

สำหรับทุกค่าของ α และ β ; $-\pi \le \alpha \le \pi$ และ $-\pi \le \beta \le \pi$ จะได้ว่า

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{1}{2}a_0\right)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\beta}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,dx \qquad \text{.......(3.24)}$$

ตัวอย่างที่ 3.2 กำหนดให้อนุกรมฟูเรียร์ของ $\frac{1}{2}x$ สำหรับ $-\pi \le x \le \pi$ คือ

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n} + \dots \qquad \text{.......(3.25)}$$

จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ x^2 โดยการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ที่กำหนดให้

วิธีทำ จาก (3.24) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\frac{1}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \quad ; \quad -\pi \le x \le \pi$$

นั่นคือ $a_0 = 0$ และ $b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ใช้ทฤษฎีบท 3.3 หาค่า A_0

$$จากสูตร \quad A_0 = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\, f(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left(\frac{1}{2}x\right) dx$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi^2}{3}$$

ดังนั้น แทนค่า A_0 และ $f(x)$ ลงใน (3.18) จะได้

$$\int_{-\pi}^{x}\left(\frac{1}{2}x\right) dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(0)}{n}\sin nx - \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}\cos nx\right]$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - \pi^2) = -\frac{\pi^2}{6} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$\frac{1}{4}x^2 = -\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

หรือ $$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad ....(3.26)$$

จากตัวอย่างนี้ สามารถหาอนุกรมฟูเรียร์ของ x^2 ได้อีกวิธีหนึ่ง โดยใช้ทฤษฎีบท 3.4 นั่นคือ ให้อินทิเกรต อนุกรมฟูเรียร์ ที่โจทย์กำหนดให้ทีละพจน์ อนุกรมฟูเรียร์ของ x^2 คืออนุกรมฟูเรียร์ที่เราต้องการ ดังนั้น จากอนุกรมฟูเรียร์

$$\frac{1}{2}x = \sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx + \ldots$$

หรือ $$\frac{1}{2}x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx \quad ; -\pi \le x \le \pi$$

ถ้าอินทิเกรตอนุกรมนี้เทียบกับ x จาก α ถึง x เหมือน (3.24) จะได้

$$\int_{\alpha}^{x}\frac{1}{2}x\, dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{x}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\, dx$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2}\Big|_{\alpha}^{x} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\Big|_{\alpha}^{x}$$

$$\frac{1}{4}(x^2 - \alpha^2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}(\cos nx - \cos n\alpha)$$

ถ้ากำหนดให้ α เป็นค่าคงที่ $-\pi \le \alpha \le \pi$ ดังนั้น

$$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}\alpha^2 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\alpha + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$x^2 = \alpha^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\alpha + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

หรือ $$x^2 = C + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad \text{.......(3.27)}$$

เมื่อ C คือค่าคงที่ และเท่ากับ $\alpha^2 - 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos n\alpha$ จากอนุกรมที่ได้ใหม่นี้ พบว่า C คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ตัวแรกของ x^2 ดังนั้น

$$C = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^2}{3}$$

แทนค่า C ลงใน (3.27) เพราะฉะนั้น

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx \qquad \text{.......(3.28)}$$

ข้อสังเกต ในกรณีที่โจทย์กำหนดอนุกรมฟูเรียร์มาให้ ถ้า $a_0 = 0$ การหาอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ โดยการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์เริ่มแรก สามารถทำได้ทั้งสองวิธี และคำตอบที่หาได้จะเท่ากันทั้งสองวิธี (ดูตัวอย่างที่ 3.2)

ตัวอย่างที่ 3.3 กำหนดให้ สำหรับ $-\pi \le x \le \pi$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi \le x \le \pi$

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots\right)$$

โดยการอินทิเกรต อนุกรมฟูเรียร์ที่กำหนดให้

วิธีทำ เนื่องจากตัวอย่างนี้ $a_0 \neq 0$ ดังนั้น การหาอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ โดยการอินทิเกรต จึงทำได้เพียงวิธีเดียว คือใช้ทฤษฎีบท 3.4 เท่านั้น (จะใช้ทฤษฎีบท 3.3 เหมือนตัวอย่างที่ 3.2 ไม่ได้)

เพราะฉะนั้น อินทิเกรต อนุกรมที่กำหนดให้ เทียบกับ x จาก 0 ถึง x จะได้

$$\int_0^x x^2\,dx = \frac{\pi^2}{3}\int_0^x dx + 4\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx\,dx$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^x = \frac{\pi^2}{3}x\Big|_0^x + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx\Big|_0^x$$

$$\frac{x^3}{3} = \frac{\pi^2 x}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$\frac{x}{3}(x^2-\pi^2) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

$$-x(\pi^2-x^2) = 12\left(-\frac{\sin nx}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} - \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots\right)$$

หรือ $$x(\pi-x)(\pi+x) = 12\left(\frac{\sin x}{1^3} - \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} - \dots\right)$$

ตัวอย่างที่ 3.4 สำหรับ $0 < x < \pi$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx$$

จงแสดงว่า สำหรับ $0 < x < \pi$

$$\cos x = 1 - \frac{2x}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n(4n^2-1)}$$

วิธีทำ ตัวอย่างนี้ เหมือนกับตัวอย่างที่ 3.3 เพราะว่า $a_0 \neq 0$ ดังนั้นเราจะใช้ทฤษฎีบท 3.4 เนื่องจาก $0 < x < \pi$ เพราะฉะนั้น อินทิเกรตอนุกรมที่กำหนดให้เทียบกับ x จาก 0 ถึง x จะได้

$$\int_0^x \sin x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^x dx - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\int_0^x \frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cos nx\,dx$$

$$-\cos x\Big|_0^x = \frac{2}{\pi}x\Big|_0^x - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1}\cdot\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^x$$

$$-\cos x + 1 = \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(1+\cos n\pi)}{n(n^2-1)}\cdot\sin nx$$

$$\cos x = 1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{2}{2\times 3}\sin 2x + 0 + \frac{2}{4\times 15}\sin 4x + 0 + \frac{2}{6\times 35}\sin 6x + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin 2x}{1\times2\times3} + \frac{\sin 4x}{3\times4\times5} + \frac{\sin 6x}{5\times6\times7} + \dots\right)$$

$$= 1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{2n(4n^2-1)}$$

$$= 1 + \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2nx}{n(4n^2-1)}$$

3.3 การหาอนุพันธ์ของอนุกรมฟูเรียร์ (Differentiation of Fourier series)

ถึงแม้ว่าอนุกรมฟูเรียร์สามารถอินทิเกรตได้เสมอ ดังตัวอย่างที่ผ่านมา แต่การหาอนุพันธ์ของอนุกรมฟูเรียร์จะต้องระมัดระวังมากกว่าการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ ตามตัวอย่างข้างล่างนี้

ตัวอย่างที่ 3.5 สำหรับ $-\pi < x < \pi$

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx \qquad \text{.......(3.29)}$$

จงแสดงว่า อนุกรมฟูเรียร์นี้ สามารถหาอนุพันธ์ได้หรือไม่

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ (3.29) จะได้

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{d}{dx}\sin nx$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx \qquad \text{.......(3.30)}$$

อนุกรมที่ได้ใหม่มองผิวเผินเหมือนว่าหาอนุพันธ์ได้ แต่จริง ๆ แล้ว อนุกรมนี้ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ (not differentiable) เพราะว่า อนุพันธ์ที่ได้ใหม่

$$2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos nx$$

ไม่ลู่เข้า เพราะว่าพจน์ที่ n ของอนุกรมนี้ ค่าไม่เข้าสู่ศูนย์เมื่อ n เข้าใกล้ค่าอนันต์ การทดสอบว่าอนุกรมนี้ไม่ลู่เข้า ให้ทดสอบโดยใช้ทฤษฎีบท การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ เมื่ออนุกรมนี้เป็นอนุกรมสลับ (alternating series)

การขยายคาบของ f ซึ่งมีคาบเป็น 2π แทนโดยอนุกรมแรกสำหรับทุกค่าของ x มีจุดไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = \pm \pi$

ความต่อเนื่องของฟังก์ชันมีคาบเป็นเงื่อนไขที่สำคัญ สำหรับการหาอนุพันธ์ของอนุกรมฟูเรียร์ได้ เงื่อนไขที่เพียงพอสามารถกล่าวดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $-\pi \le x \le \pi$ ซึ่ง $f(-\pi) = f(\pi)$ และให้ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วงนั้น ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์เขียนแทนด้วย

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \; ; \; -\pi \le x \le \pi \qquad \text{.......(3.31)}$$

ในเมื่อ

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$ และ $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่แต่ละจุดในเมื่อ $f''(x)$ หาค่าได้

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \; ; \; -\pi < x < \pi \qquad \text{.......(3.32)}$$

เพราะว่าฟังก์ชัน f' สอดคล้องตามเงื่อนไขของทฤษฎีบทฟูเรียร์ และถูกแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ที่แต่ละจุด x ในเมื่ออนุพันธ์ของมัน $f''(x)$ หาค่าได้ ที่จุดเหล่านั้น f' มีความต่อเนื่อง ดังนั้น

$$f'(x) = \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \qquad \text{.......(3.33)}$$

ในเมื่อ α_n และ β_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ และ

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos nx \, dx$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx$$

แต่ f สอดคล้องตามเงื่อนไข $f(-\pi) = f(\pi)$ ในทฤษฎีบท 3.5 ซึ่งพบในหัวข้อ 3.1 สมการ (3.4), (3.5) และ (3.6) ว่า

$\alpha_0 = 0, \alpha_n = n b_n, \beta_n = -na_n \quad (n = 1, 2, 3 \ldots)$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงใน (3.33) จะได้ (3.32) นั่นคือ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx) \quad -\pi < x < \pi$$

ที่จุด x ซึ่ง $f''(x)$ หาค่าไม่ได้ แต่ f' มีอนุพันธ์จากด้านขวาและด้านซ้าย การหาอนุพันธ์ยังคงสมบูรณ์ในความเข้าใจว่าอนุกรมใน (3.32) ลู่เข้าสู่ค่าเฉลี่ยของ $f'(x+0)$ และ $f'(x-0)$ นั่นคือการขยายคาบของ f ยังคงเป็นจริง

ทฤษฎีบท 3.5 สามารถประยุกต์กับรูปอื่น ๆ ของอนุกรมฟูเรียร์ได้ ตัวอย่างเช่น ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ f' เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บนช่วง $0 \le x \le c$ ดังนั้นอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์สำหรับ f บนช่วงนั้น สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุดซึ่ง $f''(x)$ หาค่าได้

ตัวอย่างที่ 3.6 โดยการหาอนุพันธ์ของอนุกรมฟูเรียร์ สำหรับ $0 \le x \le \pi$

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right) \qquad \dots\dots(3.34)$$

จงแสดงว่า สำหรับ $0 \le x \le \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ (3.34) จะได้

$$\frac{d}{dx}[x(\pi - x)] = \frac{8}{\pi}\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right]$$

$$\pi - 2x = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

เอา -2 หารตลอด แล้วบวกด้วย $\frac{\pi}{2}$ ทั้งสองข้าง จะได้

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

ตัวอย่างที่ 3.7 กำหนดให้ สำหรับ $-\pi \le x \le \pi$

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\times 3} - \frac{\cos 3x}{2\times 4} + \frac{\cos 4x}{3\times 5} - \dots\right) \qquad \dots\dots(3.35)$$

จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi < x < \pi$

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\times 3}\sin 2x - \frac{3}{2\times 4}\sin 3x + \frac{4}{3\times 5}\sin 4x - \dots\right)$$

วิธีทำ หาอนุพันธ์ของ (3.35) จะได้

$$\frac{d}{dx}[x \sin x] = \frac{1}{2}\sin x - 2\left(\frac{-2}{1\times 3}\sin 2x - \frac{-3}{2\times 4}\sin 3x + \frac{-4}{3\times 5}\sin 4x + \ldots\right)$$

$$x \cos x + \sin x = \frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\times 3}\sin 2x - \frac{3}{2\times 4}\sin 3x + \frac{4}{3\times 5}\sin 4x - \ldots\right)$$

$$x \cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\times 3}\sin 2x - \frac{3}{2\times 4}\sin 3x + \frac{4}{3\times 5}\sin 4x - \ldots\right)$$

แบบฝึกหัด 3.1

การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์

1. จงอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ ของ $x(\pi-x)(\pi+x)$

$$x(x^2-\pi^2) \neq 12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$$

จาก $-\pi$ ถึง x แล้วจงแสดงว่า

$$\frac{1}{48}(x^2-\pi^2)^2 = \frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx$$

2. จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi < x < \pi$

(ก) $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x - \frac{3}{2\cdot 4}\sin 3x + \frac{4}{3\cdot 5}\sin 4x - \ldots\right)$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi \le x \le \pi$

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \ldots\right.$$

(ค) จงอินทิเกรตผลจากข้อ (ข) จาก $-\pi$ ถึง x แล้วจงแสดงว่า

$$x(1+\cos x) = \frac{3}{2}\sin x + 2\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right)$$

3. โดยการหาอนุพันธ์ผลลัพธ์ของแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ข) จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $0 \le x \le \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$