บทที่ 2
อนุกรมฟูเรียร์
(Fourier Series)

2.1 สูตรออยเลอร์ - ฟูเรียร์ (The Euler - Fourier Formulas)

อนุกรมตรีโกณมิติ ในรูป

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{.......(2.1)}$$

หรือเขียนอีกอย่างในรูปของ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$
$$+ a_n \cos nx + b_n \sin nx + \ldots \qquad \text{.......(2.2)}$$

(2.1) และ (2.2) ใช้ในการอธิบายปัญหาทางฟิสิกส์ ตัวอย่างเช่น ทฤษฎีของเสียง การไหลของความร้อน คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า วงจรไฟฟ้า เป็นต้น ประโยชน์ของอนุกรม (2.1) คือ สามารถแทนด้วยฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องได้ ซึ่งแตกต่างกับอนุกรมเทเลอร์ (Talor series) ที่แทนได้เฉพาะฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ของทุกอันดับ

อนุกรม (2.1) เรียกว่าอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) ซึ่งมีเงื่อนไขว่า ถ้าฟังก์ชัน f (x) เป็นฟังก์ชันมีคาบ (periodic function) มีคาบเป็น 2π และนิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ อนุกรม (2.1) จะลู่เข้าสู่ f (x)

อย่างไรก็ตามค่าของอนุกรมฟูเรียร์ที่ไกลออกไปสามารถแทนด้วยฟังก์ชันมีคาบ ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f (x) ซึ่งนิยามบนช่วง $0 \leq x \leq 2\pi$ สามารถแทนด้วยอนุกรมฟูเรียร์ (2.1) ได้ ข้อนี้ไม่เป็นการประหลาดเลย เพราะว่า แต่ละฟังก์ชันสามารถขยายสำหรับทุกค่าของ x ได้ โดยแทนฟังก์ชันมีคาบภายนอกช่วงที่กำหนดให้สำหรับปัญหาทางฟิสิกส์หลาย ๆ แบบ เช่นการสั่นของเส้นลวด การไหลของความร้อน การเคลื่อนที่ของคลื่น อนุกรมฟูเรียร์แทนด้วยฟังก์ชัน f (x) ซึ่งเกิดขึ้นโดยธรรมชาติ และมีประโยชน์มากในการเข้าใจปัญหาทางฟิสิกส์

2.2 การหาค่าของสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ (Evaluation of Fourier coefficients)

การหาค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ a_0, a_n, b_n สามารถหาได้ดังนี้ จาก (2.2) อินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง $x = \pi$ จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx + \ldots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + \ldots + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x\,dx + \ldots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx + \ldots \qquad \text{.......(2.3)}$$

พิจารณาอินทิกรัลทางซ้ายมือจะสามารถหาค่าได้เสมอ เพราะว่า f (x) เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ ส่วนอินทิกรัลทางขวามือ พิจารณาพจน์

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \;;\; n \neq 0 \qquad \text{.......(2.4)}$$

และ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = -\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad \text{.......(2.5)}$$

แทนค่า (2.4), (2.5) ลงใน (2.3) จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx = a_0 \pi$$

หรือ

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx} \qquad \text{.......(2.6)}$$

การหาค่าของ a_n ทำได้โดยคูณ cos nx ตลอดสมการ (2.2) แล้ว อินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง $x = \pi$ ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \cos nx\,dx + \ldots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx + b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \cos nx\,dx + \ldots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx\,dx + \ldots \qquad \text{.......(2.7)}$$

สำหรับอินทิกรัลทางขวามือเพื่อให้การหาค่าง่ายขึ้น แนะนำให้ใช้สูตรตรีโกณมิติ

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

ดังนั้น พิจารณาพจน์

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin m-n)x}{m-n}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \; ; \; m \neq n \qquad \text{.......(2.8)}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\cos 2nx + 1}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2nx \, dx + \frac{1}{2} \quad + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2}\, x \,\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{1}{2}(2\pi)$$

$$= \pi \; ; \; m \neq n \qquad \text{.......(2.9)}$$

เพราะว่า sin mx cos nx เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น ถ้าใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx \, dx = 0 \qquad \text{........(2.10)}$$

แทนค่า (2.4), (2.8) (2.9) และ (2.10) ลงใน (2.7) ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = a_n \pi$$

หรือ

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx} \qquad \text{.......(2.11)}$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

เพื่อจะหาค่าของ b_n หาได้ โดยการคูณ (2.2) ด้วย sin nx แล้วอินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง $x = \pi$ จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \frac{1}{2} a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx + a_1 \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx + \ldots$$
$$\ldots + a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin nx \, dx + \ldots$$
$$b_1 \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin nx \, dx + \ldots + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx$$
$$+ \ldots \qquad (2.12)$$

พิจารณาเหมือนการหาค่า a_n

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(m-n)x}{m-n} - \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= 0 \qquad \ldots\ldots.(2.13)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right]_{-\pi}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{2} [2\pi - 0]$$
$$= \pi \; ; \; m = n \neq 0 \qquad \ldots\ldots.(2.14)$$

แทนค่า (2.5), (2.10), 2.13) และ (2.14) ลงใน (2.12) ดังนั้น

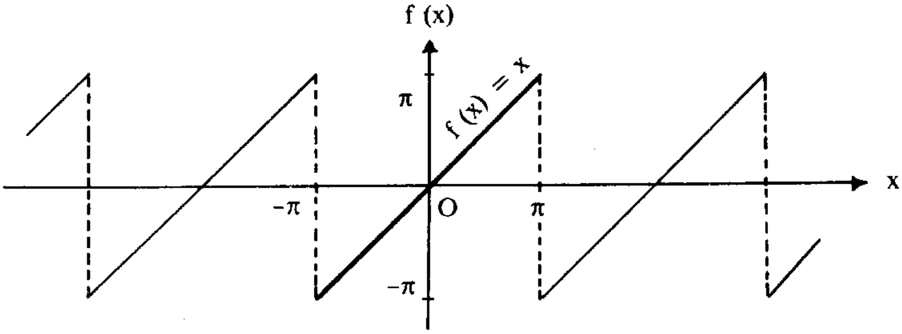
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx = \pi b_n$$

หรือ

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx} \qquad \ldots\ldots.(2.15)$$

เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่างที่ 2.1 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x) = x \; ; -\pi < x < \pi$



รูป 2.1

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่าของ a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx\, dx \end{aligned}$$

เพราะว่า $x \cos nx$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น ถ้าใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่จะได้

$$a_n = 0 \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\, dx \end{aligned}$$

ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts) จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-x\cdot\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi - \pi\cos(-n\pi)}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2\pi(-1)^n}{n} + 0\right]$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \quad ; \cos n\pi = (-1)^n$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตร ดังนั้น

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

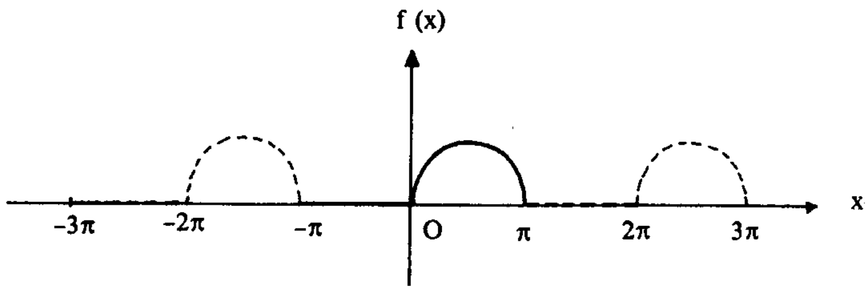
หรือ

$$x = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} \ldots\right)$$

ตัวอย่างที่ 2.2 จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์



รูป 2.2

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (0)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (0)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\{\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\}\,dx\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\cos(1+n)\pi - 1}{1+n}\right\} + \left\{\frac{\cos(1-n)\pi - 1}{1-n}\right\}\right]$$

เพราะว่า $\cos(1+n)\pi = \cos(\pi+n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

และ $\cos(1-n)\pi = \cos(\pi-n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

ดังนั้น

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{-(-1)^n - 1}{1+n}\right\} + \left\{\frac{-(-1)^n - 1}{1-n}\right\}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n + 1}{2\pi}\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n + 1}{\pi(1-n^2)} \quad ; \quad n \neq 1$$

เพราะว่า $n \neq 1$ ดังนั้น จะต้องหาค่า a_1 อีกครั้ง โดยแทนค่า $n = 1$ ในสูตรของ a_n จะได้

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (0)\cos x\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin x\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0$$

หาค่า b_n โดยสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (0) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} \sin x \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left\{\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\right\} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 \; ; \; n \neq 1$$

เพราะว่า $n \neq 1$ ดังนั้น จะต้องหาค่า b_1 อีกครั้งหนึ่งโดยแทนค่า $n = 1$ ลงในสูตรของ b_n จะได้

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (0) \sin x \, dx + \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}$$

แทนค่าลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ จะได้

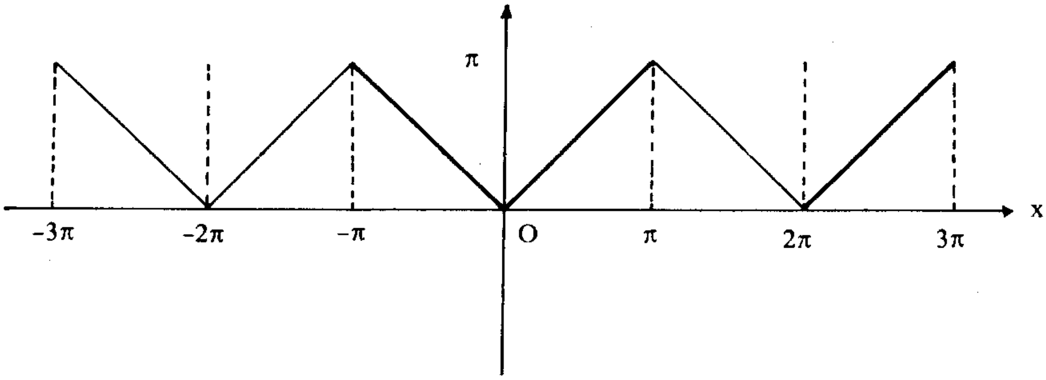
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{(-1)^n + 1\}}{\pi(1-n^2)} \cos nx\right] + \frac{1}{2} \sin x$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{3} + \frac{\cos 4x}{15} + \frac{\cos 6x}{35} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{\sin x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(4n^2-1)}$$

ตัวอย่างที่ 2.3 กำหนดให้ $f(x) = |x|$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$ จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$



รูป 2.3

วิธีทำ เพราะว่า $f(x) = |x|$

แทนค่า x ด้วย $-x$ จะได้

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

นั่นคือ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\,dx$$

เพราะว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\, 2\int_{0}^{\pi} |x|\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{\pi}$$

$$= \pi$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\cos nx\,dx$$

เพราะว่า $|x|\cos nx$ เป็นฟังก์ชันคู่ ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น

$$a_n = \frac{1}{\pi}.2\int_{0}^{\pi} |x|\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|\sin nx\,dx$$

เพราะว่า $|x|\cdot\sin nx$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$b_n = 0$$

แทนค่าลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{-2\cos x}{1^2} + 0 - \frac{2\cos 3x}{3^2} + 0 - \frac{2\cos 5x}{5^2} + 0\ldots\right)$$

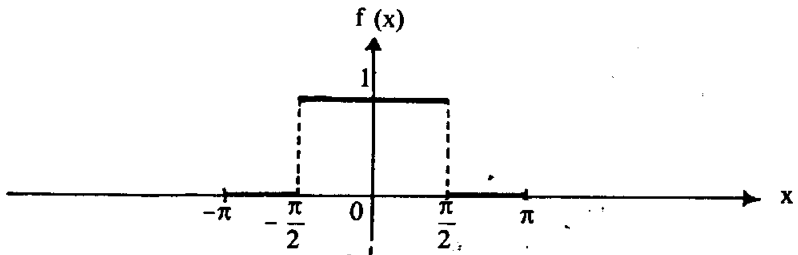
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

หรือ $$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 2.4 จงกระจายฟังก์ชันคลื่นสี่เหลี่ยม กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } -\pi \le x < -\frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{เมื่อ } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{\pi}{2} < x \le \pi \end{cases}$$

และ $f(-\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$, $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์



รูป 2.4

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}(0)\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(0)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})\right] = 1$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (0)\cos nx\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1)\cos nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (0)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(n\pi/2) - \sin(-n\pi/2)}{n}\right]$$

เพราะว่า $\sin\frac{n\pi}{2} = 1$ เมื่อ $n = 1, 5, 9, \ldots$

$\sin\frac{n\pi}{2} = -1$ เมื่อ $n = 3, 7, 11, \ldots$

$\sin\frac{n\pi}{2} = 0$ เมื่อ n เป็นเลขจำนวนเต็มคู่

และ $\sin(-n\pi/2) = -\sin(n\pi/2)$ ดังนั้น

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{n\pi} & \text{เมื่อ } n = 3, 7, 11, \ldots \\ \dfrac{2}{n\pi} & \text{เมื่อ } n = 1, 5, 9, \ldots \\ 0 & \text{เมื่อ } n = 2, 4, 6, \ldots \end{cases}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} (0)\sin nx\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1)\sin nx\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (0)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n\pi/2) - \cos(-n\pi/2)}{n}\right]$$

เพราะว่า $\cos\alpha = \cos(-\alpha)$ สำหรับทุกค่าของ α เพราะฉะนั้น จะได้

$$b_n = 0$$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}(1) + \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{3\pi}\cos 3x + \frac{2}{5\pi}\cos 5x - \frac{2}{7\pi}\cos 7x + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1} - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \frac{\cos 7x}{7} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)}$$

ข้อสังเกต เพราะว่า $|x| = x$ เมื่อ $x > 0$ ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ทั้งสองของตัวอย่าง 2.1 และตัวอย่างที่ 2.3 จะลู่เข้าสู่ฟังก์ชัน x เหมือนกัน เมื่อ $0 \leq x < \pi$ อนุกรมจากตัวอย่างที่ 2.1 เรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine series) ของ x และอนุกรมจากตัวอย่างที่ 2.3 เรียกว่า อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine series) ของ x

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } 0 < x < \pi \end{cases}$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

2. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 \quad \text{เมื่อ } |x| < \pi$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

3. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งนิยามให้

$$f(x) = e^x \quad \text{สำหรับ } -\pi < x < \pi$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

4. ฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามเป็น $f(x) = \pi$ สำหรับ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $f(x) = 0$ ที่อื่น ๆ ในช่วง $(-\pi, \pi)$ จงหาอนุกรมฟูเรียร์ พร้อมทั้งเขียนรูป

5. จงแสดงว่าสำหรับ $-\pi < x < \pi$

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

ในเมื่อ α ไม่ใช่จำนวนเต็ม จงแสดงเหตุผลสรุปว่า

$$\cot \pi\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}\right)$$

6. ให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\delta} & \text{สำหรับ } |x| < \delta \\ 0 & \text{ที่อื่น ๆ ในช่วง } (-\pi, \pi) \end{cases}$$

ในเมื่อ δ เป็นค่าคงที่บวกซึ่งมีค่าน้อย จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\delta}{n\delta} \cos nx$$

จงเขียนกราฟผลรวมของอนุกรม และอธิบายพฤติกรรมของสมการเมื่อ $\delta \to 0$

จงหาอนุกรมฟูเรียร์ โดยการกระจายฟังก์ชันมีคาบต่อไปนี้ ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบเป็น

7. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$

8. $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

9. $f(x) = \pi^2 - x^2$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

10. $f(x) = \begin{cases} 0 & ; -\pi < x < 0 \\ x^2 & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

11. $f(x) = \begin{cases} -1 & ; -\pi < x < -1 \\ x & ; -1 < x < 1 \\ 1 & ; 1 < x < \pi \end{cases}$

12. $f(x) = \begin{cases} x & ; -\pi < x < 0 \\ \pi - x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

13. $f(x) = \sin^2 x \quad ; -\pi < x < \pi$

14. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & ; -\pi < x < 0 \\ \pi - x & ; 0 < x < \pi \end{cases}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.1

1. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) x}{(2n-1)}$

2. $\frac{1}{3} \pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$

3. $\frac{2 \sin h (\pi)}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx \right]$

4. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n} \cos nx + \frac{1 - \cos \frac{n\pi}{2}}{n} \sin nx \right]$

7. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n (-1)^{n+1}}{(4n^2 - 1)} \sin nx$

8. $\frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} \cos nx - \frac{(-1)^n}{n} \sin nx \right]$

9. $a_0 = \frac{4\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{4 (-1)^{n+1}}{n^2}$; $n \neq 0$, $b_n = 0$

10. $a_0 = \frac{\pi^2}{3}$, $a_n = \frac{2 (-1)^n}{n^2}$, $b_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^3} \right] + \frac{\pi (-1)^n}{n}$

11. $\frac{2}{\pi} \left[\left\{ 1 + \sin (\pi-1) \right\} \sin x - \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \sin 2 (\pi-1) \right\} \sin 2x \right.$
$\left. + \frac{1}{3} \left\{ 1 + \frac{1}{3} \sin 3 (\pi-1) \right\} \sin 3x - \ldots \right]$

12. $a_0 = 0$, $a_n = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} \right]$; $n \neq 0$
$b_n = \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n} \right]$

13. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$

14. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1) x}{(2n-1)^2}$

2.3 อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier cosine series, and Fourier sine series)

สำหรับฟังก์ชันใด ๆ ที่นิยามไว้เพียงครึ่งช่วง คือ $0 < x < \pi$ และคุณสมบัติครบตามเงื่อนไขดีริคเลต (Dirichlet condition) เราสามารถหาการกระจายของฟังก์ชันชนิดนี้ในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ หรือ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ได้ในช่วง $0 < x < \pi$

การหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ ในกรณีที่กำหนดช่วงเพียงครึ่งช่วง $0 < x < \pi$ สามารถหาได้ โดยการขยายช่วงของฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อ $-\pi < x < 0$ ซึ่งจะทำให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ

ให้ $F(x) = f(x)$ เมื่อ $0 < x < \pi$

และ $F(x) = f(|x|)$ เมื่อ $-\pi < x < 0$

อนุกรมฟูเรียร์ของ $F(x)$ จะประกอบด้วยพจน์ โคไซน์ล้วน ๆ เพราะว่า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ (ดูตัวอย่างที่ 2.3) และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ จะมีสูตรเป็น

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\,2\int_{0}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} F(x)\cos nx\,dx
\end{aligned}
$$

หรือ

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{.......(2.16)}$$

และ

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\,[\,0\,] \quad \text{เพราะว่า } F(x)\sin nx \text{ เป็นฟังก์ชันคี่} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น สูตรของอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \qquad ....(2.17)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ การหาอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ สามารถหาได้ โดยการขยายช่วง f (x) เมื่อ $-\pi < x < 0$ ซึ่งทำให้ f (x) เป็นฟังก์ชันคี่ กล่าวคือ ให้

$$F(x) = f(x) \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < x < \pi$$

และ

$$F(x) = -f(|x|) \qquad \text{เมื่อ} \quad -\pi < x < 0$$

อนุกรมฟูเรียร์ของ F (x) จะประกอบด้วยพจน์ไซน์ล้วน ๆ เพราะว่า F (x) เป็นฟังก์ชันคี่ และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์มีสูตรเป็น

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \, 2 \int_{0}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$$

เพราะว่า F (x) sin nx เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx$$

หรือ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \quad ....(2.18)$$

และ

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} [\, 0 \,] \quad \text{เพราะว่า } F(x) \cos nx \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

$$= 0$$

ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx} \qquad \text{.......(2.19)}$$

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า f (x) นิยามในช่วง $-\pi < x < \pi$ และเป็นฟังก์ชันคู่ อนุกรมฟูเรียร์จะเป็นพจน์โคไซน์ล้วน ๆ และมีสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์เป็น

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$
$$b_n = 0$$

ถ้า f (x) เป็นฟังก์ชันคี่ อนุกรมจะมีพจน์ไซน์ล้วน ๆ และสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ คือ

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$
$$a_n = 0$$

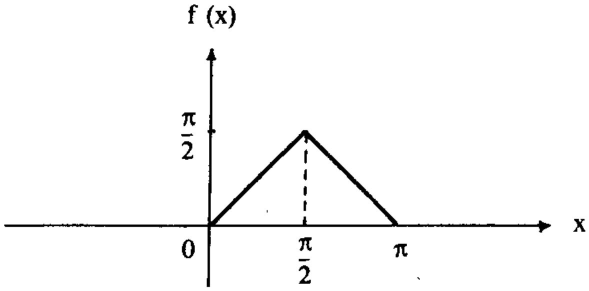
พิสูจน์ ให้ดูตัวอย่างที่ 2.1 และตัวอย่างที่ 2.3 ประกอบ แล้วใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ช่วยในการพิสูจน์

จากสมการ (2.17) เรียกว่า "อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine series)" ของ f (x) ใช้ตัวย่อเป็น F.C.S. เมื่อ $0 \le x \le \pi$ และเรียก (2.19) ว่า "อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine series)" ของ f (x) ใช้ตัวย่อเป็น F.S.S. เมื่อ $0 \le x \le \pi$ และเรียกการกำหนดช่วงแบบนี้ว่า "การกำหนดแบบครึ่งช่วง (half-range)"

ตัวอย่างที่ 2.5 จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{เมื่อ } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์



รูป 2.5

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (x)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\, dx \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \Big|_0^{\pi/2} + \pi x \Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{x^2}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{8} \right] \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{4} \right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\, dx \\
&= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (x) \cos nx\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cos nx\, dx \right]
\end{aligned}$$

พิจารณาอินทิกรัลพจน์แรก ใช้การอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx = x\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}\left(\sin\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2}$$

พิจารณาอินทิกรัลพจน์ที่สอง แยกเป็นสองอินทิกรัล แล้วใช้การอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx = \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi}x\cos nx\,dx$$

$$= \pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \left[x\frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,dx\right]$$

$$= \pi\left(\frac{\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right) - \left[\frac{\pi\sin n\pi - \frac{\pi}{2}\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right.$$

$$\left. + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

เพราะว่า $\sin n\pi = 0$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots.$ เพราะฉะนั้น

$$\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi-x)\cos nx\,dx = -\frac{\pi}{n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} - \left(\frac{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}}{n^2}\right)$$

$$= -\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n}{n^2}$$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n^2} - \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\right]\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n}{n^2}\right]\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{4}{2^2}\cos 2x + 0 + 0 + 0 - \frac{4}{6^2}\cos 6x + 0 + 0\right.$$

$$\left. + 0 - \frac{4}{(10)^2}\cos 10x + \dots\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \dots\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

2.4 **การขยายช่วงของฟังก์ชัน** (The extension of the interval)

จากหัวข้อ 2.1 กำหนดให้ $f(x)$ นิยามเฉพาะในช่วง $(-\pi, \pi)$ เท่านั้น แต่ปัญหาในทางฟิสิกส์ที่พบ $f(x)$ มักจะอยู่ในช่วงซึ่งกว้างกว่าหรือแคบกว่าช่วง $(-\pi, \pi)$ ได้ ดังนั้น จึงต้องหาสูตรอนุกรมฟูเรียร์ใหม่ เพื่อใช้อธิบายปัญหาได้มากยิ่งขึ้น ซึ่งการกระจายฟังก์ชัน $f(x)$ ในช่วงต่าง ๆ เช่นที่กล่าวมานี้ สามารถทำได้ดังนี้

เพื่อจะหาการกระจายของ $f(x)$ เมื่อ x อยู่ในช่วง $(-\ell, \ell)$ ขั้นแรกให้เปลี่ยนตัวแปร $x = \frac{\ell z}{\pi}$ ถ้า $f(x)$ มีคุณสมบัติครบตามทฤษฎีของดีริคเลต ในช่วง $(-\ell, \ell)$ ดังนั้น ฟังก์ชัน $f(\frac{\ell z}{\pi})$ สามารถกระจายเป็นอนุกรมฟูเรียร์ของ z คือ

$$f\left(\frac{\ell z}{\pi}\right) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nz + b_n \sin nz) \qquad \dots\dots(2.20)$$

เมื่อ $-\pi < z < \pi$ เพราะว่า $z = \frac{\pi x}{\ell}$ ดังนั้นอนุกรมข้างต้นสามารถเปลี่ยนเป็น

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)} \qquad \text{.......(2.21)}$$

จากสมการ (2.20) เมื่อ $-\pi < z < \pi$ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell z}{\pi}\right) \cos nz \, dz$$

เปลี่ยนตัวแปร z ไปเป็นตัวแปร x โดยสมการ $z = \frac{\pi x}{\ell}$ ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, d\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} \, dx} \qquad \text{.......(2.22)}$$

เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

โดยวิธีเดียวกันนี้ จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{\ell z}{\pi}\right) \sin nz \, dz$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, d\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx} \qquad \text{.......(2.23)}$$

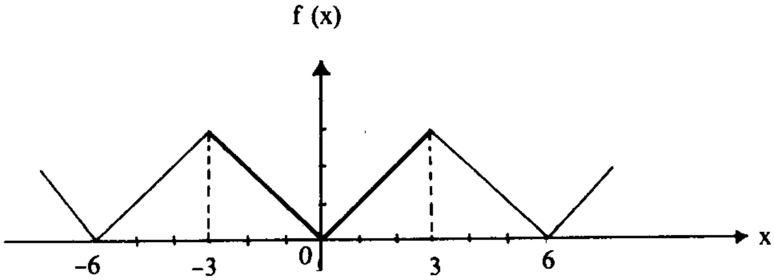
เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

สมการ (2.21) คือสูตรอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) เมื่อ $-\ell < x < \ell$ (ℓ เป็นจำนวนจริงใด ๆ) และสมการ (2.22), (2.23) คือสูตรสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ (2.21)

ตัวอย่างที่ 2.6 จงหาการกระจายของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{เมื่อ } -3 < x < 0 \\ x & \text{เมื่อ } 0 < x < 3 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์



รูป 2.6

วิธีทำ พิจารณาจากรูปพบว่า f (x) เป็นฟังก์ชันคู่ และมีคาบ 6 หน่วย ดังนั้น

$$2\ell = 6$$

$$\ell = 3$$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) เมื่อ $-3 < x < 3$ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x)\, dx$$

แต่ f (x) เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้น

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_{0}^{3} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{0}^{3} x\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{3}$$

$$= 3$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx$$

เพราะว่า f (x) เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้น $f(x) \cos \frac{n\pi x}{3}$ เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ

จะได้ว่า

$$a_n = \frac{2}{3} \int_{0}^{3} f(x) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_{0}^{3} x \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[x \cdot \frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \Big|_{0}^{3} - \int_{0}^{3} \frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{3} \left[0 + \frac{9}{(n\pi)^2} \cos \frac{n\pi x}{3} \Big|_{0}^{3} \right]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2} (\cos n\pi - 1)$$

$$a_n = \frac{6}{n^2\pi^2} \left[(-1)^n - 1 \right] \; ; \; n \neq 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x) \sin \frac{n\pi x}{3} \, dx$$

เพราะว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้น $f(x) \sin \frac{n\pi x}{3}$ เป็นฟังก์ชันคี่ ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ดังนั้น

$$b_n = 0$$

แทนค่าในสูตร จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}(3) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6}{n^2\pi^2} \left\{ (-1)^n - 1 \right\} \cos \frac{n\pi x}{3} + 0 \right]$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi^2} \left(-\frac{2}{1^2} \cos \frac{\pi x}{3} + 0 - \frac{2}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{3} + 0 - \frac{2}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{3} + 0 \ldots \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \left(\frac{\cos \frac{\pi x}{3}}{1^2} + \frac{\cos \frac{3\pi x}{3}}{3^2} + \frac{\cos \frac{5\pi x}{3}}{5^2} + \ldots \right)$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{8} \frac{\cos (2n-1) \pi x/3}{(2n-1)^2}$$

จากการขยายช่วงที่ฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามให้กว้างหรือแคบกว่าช่วง $(-\pi, \pi)$ ทำให้สูตรอนุกรมฟูเรียร์ของ $f(x)$ เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม โดยหลักการเดียวกันนี้ ถ้า $f(x)$ นิยามแบบครึ่งช่วง (จากเดิม 0 ถึง π เปลี่ยนเป็น 0 ถึง ℓ) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ หรือสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ย่อมเปลี่ยนแปลงไปจากเดิมเช่นเดียวกัน ดังนั้น จึงขอสรุปสูตรและการเลือกใช้สูตรอนุกรมฟูเรียร์ ดังนี้

1. สูตรทั่วไป (General form) ของอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad \ldots\ldots.(2.24)$$

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, dx \qquad ....(2.25)$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \; ; \; n = 0, 1, 2, \ldots \qquad ....(2.26)$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad ....(2.27)$$

สูตรนี้ จะใช้เมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชัน f (x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ และมีคาบเป็น 2ℓ

ข้อสังเกต จากสูตรทั่วไป ถ้าแทนค่า $\ell = \pi$ สูตรนี้ก็จะกลับไปเป็นสูตรเริ่มแรก นั่นคือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad ....(2.28)$$

1.1 สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ (แบบทั่วไป)

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} \qquad ....(2.29)$$

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x)\, dx \qquad ....(2.30)$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad ....(2.31)$$

สูตรนี้จะใช้เมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชัน f (x) นิยามเพียงครึ่งช่วง $(0, \ell)$

1.2 สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ (แบบทั่วไป)

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \qquad ....(2.32)$$

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_{0}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots \qquad ....(2.33)$$

สูตรนี้จะใช้เมื่อโจทย์กำหนดฟังก์ชัน f (x) นิยามเพียงครึ่งช่วง $(0, \ell)$

2. ในกรณีที่ฟังก์ชัน f (x) นิยามในช่วงอื่น ๆ นอกเหนือจากที่กล่าวมาแล้วในข้อ 1 สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad \text{.......(2.34)}$$

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{.......(2.35)}$$

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{.......(2.36)}$$

โดยที่ c คือจำนวนจริงใด ๆ ซึ่งมีค่าเท่ากับค่าต่ำสุดของช่วงที่โจทย์กำหนดให้

ข้อสังเกต

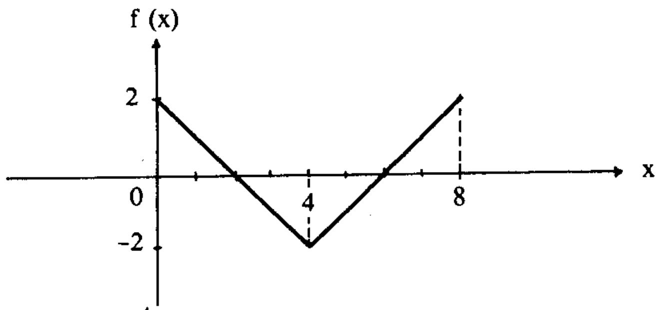
1. ถ้าฟังก์ชัน f (x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ หรือ $(-\pi, \pi)$ สูตรที่ใช้ในการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ สามารถเลือกใช้ได้ทั้งสองสูตร

2. ถ้าฟังก์ชัน f (x) นิยามในช่วงอื่น ๆ ไม่ใช่ในช่วง $(-\ell, \ell)$ หรือ $(-\pi, \pi)$ สูตรที่ใช้ในการกระจายอนุกรมฟูเรียร์ ต้องใช้สูตรที่สองเท่านั้น (สูตรที่หนึ่งใช้ไม่ได้)

ตัวอย่างที่ 2.7 จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & ; \quad 0 < x < 4 \\ x-6 & ; \quad 4 < x < 8 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์



รูป 2.7

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ f (x) นิยามในช่วง (0, 8) มีคาบยาว 8 หน่วย สูตรที่ใช้ในการกระจายอนุกรมฟูเรียร์คือสูตรที่สอง ดังนั้น

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

เลือกแทนค่า c = 0 เพราะว่าค่าต่ำสุดของช่วง คือ 0 และ 1 คาบเท่ากับ $2\ell = 8$ จะได้ $\ell = 4$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{0+8} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^4 (2-x)\, dx + \int_4^8 (x-6)\, dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[2x \Big|_0^4 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^4 + \frac{x^2}{2} \Big|_4^8 - 6x \Big|_4^8 \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[8 - 8 + 24 - 24 \right] \\
a_0 &= 0
\end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{0+8} f(x) \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx \\
&= \frac{1}{4} \left[\int_0^4 (2-x) \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx + \int_4^8 (x-6) \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[2 \frac{\sin \frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \Big|_0^4 - \int_0^4 x \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx \right. \\
&\qquad \left. + \int_4^8 x \cos \frac{n\pi x}{4}\, dx - 6 \frac{\sin \frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}} \Big|_4^8 \right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left[0 - \int_0^4 x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx + \int_4^8 x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx - 0 \right]$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^4 x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx = x\,\frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\Bigg|_0^4 - \int_0^4 \frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\,dx$$

$$= 0 + \frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2}\Bigg|_0^4$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$\int_4^8 x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx = x\,\frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\Bigg|_4^8 - \int_4^8 \frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\,dx$$

$$= 0 + \frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2}\Bigg|_4^8$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left[\cos 2n\pi - \cos n\pi\right]$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

แทนค่าอินทิกรัลทั้งสองจะได้

$$a_n = \frac{1}{4}\left[-\frac{16}{n^2\pi^2}\left\{(-1)^n - 1\right\} + \frac{16}{n^2\pi^2}\left\{1 - (-1)^n\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{32}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{32}{n^2\pi^2}\right]$$

$$a_n = \frac{8}{n^2\pi^2}\left[1 - (-1)^n\right]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{c}^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{0}^{0+8} f(x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_{0}^{4}(2-x)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx + \int_{4}^{8}(x-6)\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2\left(-\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)\Big|_{0}^{4} - \int_{0}^{4} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{4}^{8} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx - 6\left(-\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)\Big|_{4}^{8}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{8}{n\pi}(1-\cos n\pi) - \int_{0}^{4} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{4}^{8} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx + \frac{24}{n\pi}(\cos 2n\pi - \cos n\pi)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{32}{n\pi}\left\{1-(-1)^n\right\} - \int_{0}^{4} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{4}^{8} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx\right]$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_{0}^{4} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = x\left(-\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)\Big|_{0}^{4} + \int_{0}^{4}\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\,dx$$

$$= -\frac{16}{n\pi}(-1)^n + \frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2}\Big|_{0}^{4}$$

$$= -\frac{16(-1)^n}{n\pi}$$

$$\int_{4}^{8} x\sin\frac{n\pi x}{4}\,dx = x\left(-\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)\Big|_{4}^{8} + \int_{4}^{8}\frac{\cos\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\,dx$$

$$= \frac{16(-1)^n - 32}{n\pi} + \left. \frac{\sin \frac{n\pi x}{4}}{\left(\frac{n\pi}{4}\right)^2} \right|_4^8$$

$$= \frac{16(-1)^n}{n\pi} - \frac{32}{n\pi}$$

แทนค่าจะได้

$$b_n = \frac{1}{4} \left[\frac{32}{n\pi} \left\{ 1 - (-1)^n \right\} - \left\{ -\frac{16(-1)^n}{n\pi} \right\} + \left\{ \frac{16(-1)^n}{n\pi} - \frac{32}{n\pi} \right\} \right]$$

$$= 0$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^2\pi^2} \left\{ 1 - (-1)^n \right\} \cos \frac{n\pi x}{4}$$

$$= \frac{8}{\pi^2} \left(\frac{2}{1^2} \cos \frac{\pi x}{4} + 0 + \frac{2}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{4} + 0 + \frac{2}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{4} + \ldots \right)$$

$$= \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1) \pi x/4}{(2n-1)^2}$$

ตัวอย่างที่ 2.8 จงหาการกระจายแบบครึ่งช่วงของฟังก์ชัน

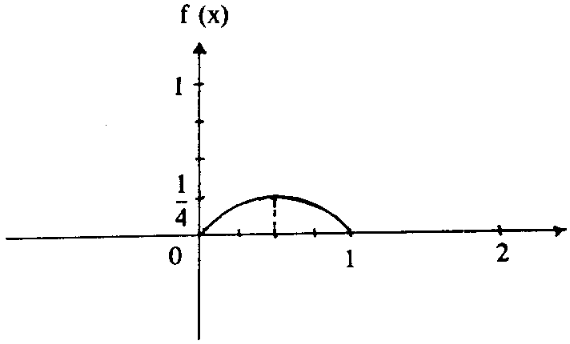
$$f(x) = x - x^2 \; ; \; 0 < x < 1$$

ในรูปของ

(ก) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

(ข) อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

วิธีทำ



รูป 2.8

(ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า a_0 โดยสูตร

$$a_n \quad = \quad \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \quad \frac{2}{1} \int_0^{1} f(x)\, dx$$

$$= \quad 2 \int_0^{1} (x - x^2)\, dx$$

$$= \quad 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1$$

$$= \quad 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right)$$

$$= \quad 2\left(\frac{1}{6} \right)$$

$$= \quad \frac{1}{3}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n \quad = \quad \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{1} \int_0^1 f(x) \cos \frac{n\pi x}{1} \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 (x - x^2) \cos n\pi x \, dx$$

$$= 2 \left[\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx - \int_0^1 x^2 \cos n\pi x \, dx \right]$$

อินทิเกรตอินทิกรัลทางขวามือ โดยการอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_0^1 x \cos n\pi x \, dx = x \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \, dx$$

$$= 0 + \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{(n\pi)^2}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} \quad ; \quad n \neq 0$$

และ $$\int_0^1 x^2 \cos n\pi x \, dx = x^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \Big|_0^1 - 2 \int_0^1 x \frac{\sin n\pi x}{n\pi} \, dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n\pi} \left[x \left(- \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi} \, dx \right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2} - \frac{2}{(n\pi)^3} \sin n\pi x \Big|_0^1$$

$$= \frac{2(-1)^n}{(n\pi)^2}$$

ดังนั้น

$$a_n = 2 \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2\pi^2} \right]$$

$$= \frac{-2\left[1 + (-1)^n \right]}{n^2\pi^2} \quad ; n \neq 0$$

แทนค่า a_0, a_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2\,[\,1+(-1)^n\,]}{n^2\pi^2} \cos n\pi x \\
&= \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2}\left(0 + \frac{2\cos 2\pi x}{2^2} + 0 + \frac{2\cos 4\pi x}{4^2} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{2^2} + \frac{\cos 4\pi x}{4^2} + \frac{\cos 6\pi x}{6^2} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi x}{(1\times 2)^2} + \frac{\cos 4\pi x}{(2\times 2)^2} + \frac{\cos 6\pi x}{(2\times 3)^2} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\cos 2\pi x}{1^2} + \frac{\cos 4\pi x}{2^2} + \frac{\cos 6\pi x}{3^2} + \dots\right) \\
x - x^2 &= \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2}
\end{aligned}
$$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\
&= \frac{2}{1} \int_0^{1} f(x) \sin \frac{n\pi x}{1}\, dx \\
&= 2 \int_0^{1} (x - x^2) \sin n\pi x\, dx \\
&= 2 \left[\int_0^1 x \sin n\pi x\, dx - \int_0^1 x^2 \sin n\pi x\, dx \right]
\end{aligned}
$$

อินทิเกรต อินทิกรัลทางขวามือ โดยอินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = x\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\, dx$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi}$$

และ $$\int_0^1 x^2 \sin n\pi x \, dx = x^2\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 + 2\int_0^1 x \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\, dx$$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\, dx\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[0 + \frac{\cos n\pi x}{(n\pi)^2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{(n\pi)^3}$$

ดังนั้น

$$b_n = 2\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} - \frac{2\left\{(-1)^n - 1\right\}}{(n\pi)^3}\right]$$

$$= \frac{4[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3}$$

แทนค่า b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^3} \sin n\pi x$$

$$= \frac{4}{\pi^3}\left(\frac{2 \sin \pi x}{1^3} + 0 + \frac{2 \sin 3\pi x}{3^3} + 0 + \frac{2 \sin 5\pi x}{5^3} + \dots\right)$$

$$= \frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\sin \pi x}{1^3} + \frac{\sin 3\pi x}{3^3} + \frac{\sin 5\pi x}{5^3} + \dots\right)$$

หรือ $$x - x^2 = \frac{8}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)\pi x}{(2n-1)^3}$$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 8 - x & 4 < x < 8 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูป

(ก) อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

(ข) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

2. จงกระจาย

$$f(x) = \cos x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

3. ใช้สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ บนช่วง (0, 1) จงแสดงว่า

$$\cos \pi x = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2 - 1} \sin 2n\pi x$$

4. ถ้า $f(x) = \frac{1}{4} c - x$ เมื่อ $0 \leq x \leq \frac{c}{2}$ และ $f(x) = x - \frac{3}{4} c$ เมื่อ $\frac{c}{2} \leq x \leq c$ ใช้สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์บนช่วง (o, c) จงแสดงว่า

$$f(x) = \frac{2c}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(4n-2)\pi x}{c}$$

จากข้อ 5 ถึงข้อ 10 จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ หรืออนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เมื่อกำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง

5. $f(x) = 1 \qquad 0 < x < 1$

6. $f(x) = e^x \qquad 0 < x < 1$

7. $f(x) = \cos x \qquad 0 < x < 2\pi$

8. $f(x) = \sin x \qquad 0 < x < 2\pi$

9. $$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 2 \\ 6-2x & 2 < x < 3 \end{cases}$$

10. $$f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 < x < 1 \\ 2-x & 1 < x < 2 \end{cases}$$

11. จงแทนค่าฟังก์ชันต่อไปนี้ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ และให้เขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย

(ก) $f(x) = x \qquad 0 < x < \pi$

(ข) $f(x) = \sin \dfrac{\pi x}{\ell} \qquad 0 < x < \ell$

12. จงแทนค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ และให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วย

$f(x) = \pi - x \qquad 0 < x < \pi$

13. จงหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi x & 0 < x < \frac{1}{2}\pi \\ \frac{1}{4}\pi x(\pi - x) & \frac{1}{2}\pi < x < \pi \end{cases}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.2

1. $2 - \frac{64}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{4}$

2. $\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2-1} \sin 2nx$

5. $a_0 = 2,\ a_n = 0,\ b_n = \frac{2}{n\pi} [\, 1 - (-1)^n \,]$

6. $a_n = \frac{2\,[\,(-1)^n e - 1]}{1+n^2\pi^2}$, $b_n = \frac{2n\pi\,[\,1 - (-1)^n e\,]}{1+n^2\pi^2}$

7. $a_n = 0$; $n = 0, 1, 2, \ldots,$ $b_n = \frac{2n\,[\,1 - (-1)^n\,]}{\pi\,(n^2-4)}$

8. $a_n = 0$ เมื่อ n เป็นเลขคู่

$= \frac{-8}{\pi\,(n^2-4)}$ เมื่อ n เป็นเลขคี่

$b_n = 0$ เมื่อ $n \neq 2,\ b_2 = 1$

9. $a_0 = 2$

$a_n = \frac{6}{(n\pi)^2} \left[\, 3 \cos \frac{2n\pi}{3} - 2\,(-1)^n - 1 \,\right]$

$b_n = 0$

10. $a_0 = \frac{5}{6}$, $a_n = \begin{cases} -\frac{16}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^2\pi^2} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ -\frac{16}{n^2\pi^2} & n = 2, 6, 10, \ldots \\ \frac{16}{n^3\pi^3} + \frac{4}{n^2\pi^2} & n = 3, 7, 11, \ldots \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$

11. (ก) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos (2n-1)\,x$

(ข) $\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left[\frac{1}{1\cdot 3} \cos \frac{2\pi x}{\ell} + \frac{1}{3\cdot 5} \cos \frac{4\pi x}{\ell} + \frac{1}{5\cdot 7} \cos \frac{6\pi x}{\ell} + \ldots \right]$

12. $2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$

13. $\frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sin(2n-1)\,x$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = |x| \qquad -1 < x < 1$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

2. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = 1$ บน $(0, 2)$ และ $f(x) = -1$ บน $(-2, 0)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

3. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \cos \pi x \qquad -1 < x < 1$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

4. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \le x < 3 \\ 0 & ; \quad -3 < x < 0 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

5. ถ้า $f(x+2\ell) = f(x)$ สำหรับทุกค่า x และ $f(x) = -1$ ในเมื่อ $-\ell < x < 0$, $f(x) = 1$ เมื่อ $0 < x < \ell$ และ $f(0) = f(c)$ จงแสดงว่า สำหรับทุกค่า x $(-\infty < x < \infty)$ มันจะเป็นจริงว่า

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{\ell}$$

6. ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

และ $f(1) = f(2) = \frac{1}{2}$ จงแสดงว่าในเมื่อ $-2 \le x \le 2$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{n\pi x}{2} + \left(\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right) \sin \frac{n\pi x}{2} \right]$$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาอนุกรมฟูเรียร์ โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ในเมื่อสามารถใช้ได้

7. $$f(x) = \begin{cases} -x & -4 \leq x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \cos x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

9. $$f(x) = \begin{cases} 0 & -3 < x < -1 \\ 1 + \cos \pi x & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 3 \end{cases}$$

10. $$f(x) = x - x^3 \qquad -1 < x < 1$$

11. $$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ 1 & -1 < x < 0 \\ -1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

12. $$f(x) = \begin{cases} 0 & -2 < x < -1 \\ 1 + x & -1 < x < 0 \\ 1 - x & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3

1. $\frac{1}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2n-1)^2} \cos (2n-1) \pi x$

2. $\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin (2n-1) (\pi/2) x}{(2n-1)}$

3. $\cos \pi x$

4. $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{6 (\cos n\pi - 1)}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{3} - \frac{6 \cos n\pi}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{3} \right]$

7. $2 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{4}$

8. $\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nx$

9. $\frac{1}{3} + \frac{18}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (9-n^2)} \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{n\pi x}{3}$

10. $-\frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin n\pi x$

11. $\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \sin \frac{n\pi x}{2}$

12. $\frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right) \cos \frac{n\pi x}{2}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงแสดงว่าถ้า $f(x) = x$ สำหรับ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ และ $f(x) = \pi - x$ สำหรับ $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ ดังนั้น

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \ldots\right)$$

จากข้อ 2 ถึงข้อ 9 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งมีคาบเป็น T ในเมื่อหนึ่งคาบนิยามเป็น

2. $f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < 3,\ T = 3$

3. $f(x) = x^2 \quad ; \quad 0 < x < 2;\ T = 2$

4. $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2,\ T = 2 \end{cases}$

5. $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < 1 \\ x-1 & 1 < x < 2;\ T = 2 \end{cases}$

6. $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 1 & 1 < x < 2,\ T = 2 \end{cases}$

7. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x & 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} & \frac{1}{2} < x < 1,\ T = 1 \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} 8 & 0 < x < 2 \\ -8 & 2 < x < 4,\ T = 4 \end{cases}$

9. $f(x) = 4x \qquad 0 < x < 10$

10. จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

11. จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $0 \leq x \leq \pi$

(ก) $x(\pi-x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$

(ข) $x(\pi-x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$

12. ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} 2 \; ; & 0 < x < \frac{2\pi}{3} \\ 1 \; ; & \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \\ 0 \; ; & \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \end{cases}$$

จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน $f(x)$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4

2. $\frac{3}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi x}{3}$

3. $\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi x}{n^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$

4. $\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)\pi x}{2n-1}$

5. $\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$

6. $\frac{3}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos (2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$

7. $\frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$

8. $\frac{32}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2}$

9. $20 - \frac{40}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{n}$

10. $\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^n}{n^2-1} \cos nx + \frac{1-(-1)^n}{n^2-1} n \sin nx\right] + \frac{1}{2} (\cos x + \sin x)$

12. $1 + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin \frac{2n\pi}{3} + \sin \frac{4n\pi}{3}\right) \cos nx + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(2 - \cos \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{4n\pi}{3}\right) \sin nx$

2.5 **การหาค่าของอนุกรม** (Evaluation of series)

การหาค่าของอนุกรมที่น่าสนใจ โดยใช้ผลจากการกระจายฟังก์ชัน $f(x)$ ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ สามารถทำได้ 3 วิธี ดังนี้

1. แทนค่า x ที่เป็นจุดต่อเนื่อง ลงในอนุกรมฟูเรียร์
2. แทนค่า x ที่เป็นจุดไม่ต่อเนื่อง ลงในอนุกรมฟูเรียร์ โดยใช้เงื่อนไขดีริคเลต (Dirichlet's conditions) เข้าช่วย
3. ใช้สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล (Parseval's identity formula)

เงื่อนไขดีริคเลต (Dirichlet's conditions) กล่าวว่า

ถ้ากำหนดให้

1. $f(x)$ เป็นฟังก์ชันมีคาบครบรอบ 2ℓ
2. ฟังก์ชัน $f(x)$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนนับได้ถ้วน และมีค่าสูงสุดและต่ำสุดเป็นจำนวนนับได้ถ้วน ในคาบ 2ℓ
3. ฟังก์ชัน $f(x)$ เป็น absolutely integrable ภายในคาบ 2ℓ นั่นคือ

$$\int_{-\ell}^{\ell} |f(x)|\, dx < \infty$$

ดังนั้นอนุกรม

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

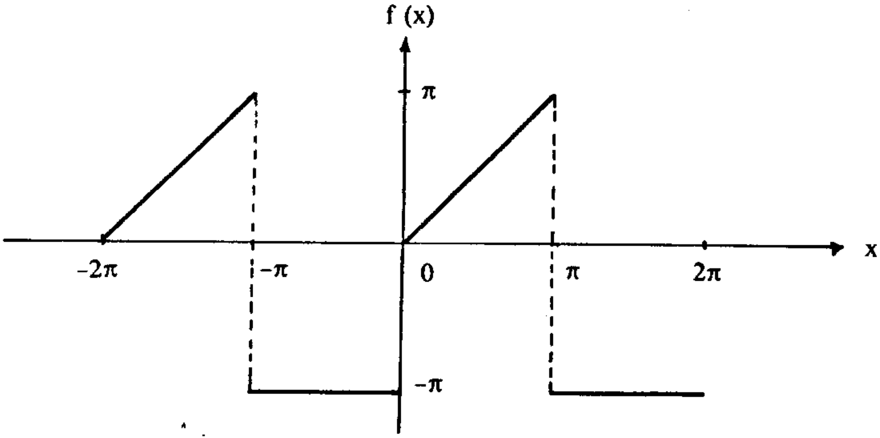
จะลู่เข้าสู่

(ก) $f(x)$ ถ้า x เป็นจุดที่ต่อเนื่อง (continuous points)

(ข) $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$ ถ้า x เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่อง (discontinuous points)

ตัวอย่างที่ 2.9 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันมีคาบซึ่งนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$



รูป 2.9

สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi}(x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\pi x\,\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^2}{2}\,\Big|_{0}^{\pi}\right] \\ &= -\pi + \frac{\pi}{2} \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi) \cos nx \, dx + \int_{0}^{\pi} (x) \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\pi \frac{\sin nx}{n} \Big|_{-\pi}^{0} + \left\{ x \left(\frac{\sin nx}{n} \right) \Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi} \frac{\sin nx}{n} dx \right\} \right]$$

$$= \frac{\cos nx}{n^2 \pi} \Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right] \quad ; n \neq 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} (-\pi) \sin nx \, dx + \int_{0}^{\pi} (x) \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\pi \frac{\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{0} + \left\{ x \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi} \frac{\cos nx}{n} dx \right\} \right]$$

$$= \frac{1 - \cos n\pi}{n} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_{0}^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{1 - 2(-1)^n}{n}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตร จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \left\{ \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \right\} \cos nx + \frac{1}{n} \left\{ 1 - 2(-1)^n \right\} \sin nx \right]$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$+ \left(3 \frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{3 \sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \dots \right)$$

จากอนุกรมฟูเรียร์ที่หาได้นี้ ถ้าแทนค่า x ที่เป็นจุดต่อเนื่องจะได้อนุกรมที่น่าสนใจหนึ่งอนุกรม และถ้าแทนค่า x ที่เป็นจุดไม่ต่อเนื่องก็จะได้อนุกรมที่น่าสนใจอีกอนุกรมหนึ่ง ตัวอย่างเช่น

แทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นจุดต่อเนื่องจะได้

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(0+0+0+\ldots\right) + \left(\frac{3}{1} - 0 - \frac{3}{3} - 0 + \frac{3}{5}\ \ldots\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} + 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

$$\frac{3\pi}{4} = 3\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right)$$

หรือ $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \frac{\pi}{4}$

จากรูปพบว่า จุด $x = 0$, $x = -\pi$ และ $x = \pi$ เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่อง เลือกแทนค่าใดค่าหนึ่ง $x = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขดีริคเลต อนุกรมทางขวามือจะลู่เข้าสู่ค่า $\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2}$ $= \frac{0 + (-\pi)}{2} = -\frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$-\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

$$-\frac{\pi}{4} = -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

หรือ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$

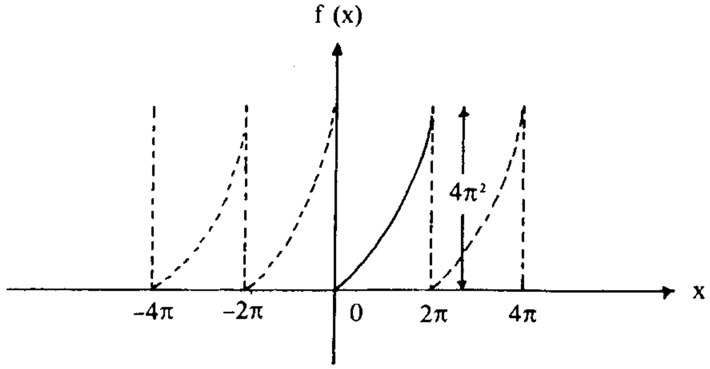
ข้อสังเกต การเลือกแทนค่า x ที่เป็นจุดไม่ต่อเนื่อง ไม่ว่าจะเลือก $x = -\pi$ หรือ $x = \pi$ ผลที่ได้จะเหมือนกับเลือกแทนค่า $x = 0$

ตัวอย่างที่ 2.10 จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 \;;\; 0 < x < 2\pi$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

วิธีทำ เขียนรูปจากโจทย์



รูป 2.10

โจทย์ข้อนี้มีคาบ $= 2\ell = 2\pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \pi$ เนื่องจาก f (x) นิยามในช่วง $(0, 2\pi)$ ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ (2.34) และเลือกแทนค่า $c = 0$ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{2\pi} \\
&= \frac{8\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos \frac{n\pi x}{\pi}\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx
\end{aligned}$$