อินทิเกรตทีละส่วน สองครั้ง จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} - 2\int_0^{2\pi} x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{2}{n}\left\{x\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\frac{\cos nx}{n}dx\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2(2\pi)\cos 2n\pi}{n^2} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{4\pi}{n^2}(1) + 0\right]$$

$$= \frac{4}{n^2} \; ; \; n \neq 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi} x\cos nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2\cos 2n\pi}{n} + \frac{2}{n}\left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\frac{\sin nx}{n}dx\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{4\pi^2(1)}{n} + \frac{2}{n}\left\{0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{2\pi}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-4\pi^2}{n} + \frac{2}{n}\{0\}\right]$$

$$= -\frac{4\pi}{n}$$

แทนค่าลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{8\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2}\cos nx - \frac{4\pi}{n}\sin nx\right)$$

เพราะว่า จุด $x=0$ และจุด $x = 2\pi$ เป็นจุดไม่ต่อเนื่อง อาศัยเงื่อนไขดีริคเลต อนุกรมฟูเรียร์ทางขวามือจะลู่เข้าสู่ค่า $\frac{f(0+0) + f(0-0)}{2} = \frac{1}{2}(0 + 4\pi^2) = 2\pi^2$

ดังนั้น

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

หรือ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล (Parseval's Identity)

กำหนดให้อนุกรมฟูเรียร์สมนัยกับ f (x) นั่นคือ อนุกรมฟูเรียร์ลู่เข้าสู่ f (x) แบบสม่ำเสมอ (Uniform convergence) ในช่วง $(-\ell, \ell)$

ดังนั้น อนุกรมฟูเรียร์ของ f (x)

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right) \qquad \ldots\ldots.(2.37)$$

เอา (2.37) × f (x) แล้วอินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\ell$ ถึง $x = \ell$ จะได้

$$\int_{-\ell}^{\ell}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_n\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + b_n\int_{-\ell}^{\ell}f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0(a_0\ell) + \sum_{n=1}^{\infty}\{a_n(a_n\ell) + b_n(b_n\ell)\}$$

$$= \frac{1}{2}a_0^2\ell + \ell\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

หรือ

$$\boxed{\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)} \qquad \ldots\ldots.(2.38)$$

โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้ากำหนดให้อนุกรมฟูเรียร์ สมนัยกับ f (x) เมื่อ f (x) นิยามในช่วงอื่น ที่มิใช่ $(-\ell, \ell)$ จะได้เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาลเป็น

$$\frac{1}{\ell}\int_{c}^{c+2\ell}\{f(x)\}^{2}\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \qquad \text{.......(2.39)}$$

ในกรณีที่กำหนดช่วงของฟังก์ชัน f(x) แบบครึ่งช่วง (o, ℓ) สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}[f(x)]^{2}\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

และสูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$\frac{2}{\ell}\int_{0}^{\ell}[f(x)]^{2}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

ตัวอย่างที่ 2.11

(ก) จงเขียนเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ ของ

$f(x) = x \; ; \; 0 < x < 2$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) จงหาผลรวม S ของอนุกรม $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$

วิธีทำ (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\,dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\Big|_0^2$$

$$= 2$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$a_n = x\cdot\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

แทนค่า a_0, a_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\cos\frac{n\pi x}{2}$$

หรือ $$x = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)^2}$$

(ข) ใช้เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ซึ่งสมนัยกับอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

เพราะว่า $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]$ และ $b_n = 0$ แทนค่าในสูตร จะได้

$$\frac{2}{2}\int_0^2\{x\}^2\,dx = \frac{1}{2}(2)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n - 1)\right\}^2\right]$$

$$\frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 2 + \frac{16}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n - 1]^2}{n^4}$$

$$\frac{8}{3} = 2 + \frac{16}{\pi^4}\left(\frac{4}{1^4} + \frac{4}{3^4} + \frac{4}{5^4} + \dots\right)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{64}{\pi^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right)$$

หรือ $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ ....(2.40)

จากโจทย์ กำหนดให้

$$S = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

$$= \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots\right) + \left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{6^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{2^4}\left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{96} + \frac{1}{16}S$$

$$\left(1 - \frac{1}{16}\right)S = \frac{\pi^4}{96}$$

$$S = \frac{\pi^4}{96} \times \frac{16}{15} = \frac{\pi^4}{90}$$

หรือ $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \dots = \frac{\pi^4}{90}$ ....(2.41)

ตัวอย่างที่ 2.12 ใช้ผลลัพธ์จากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 9 จงแสดงว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ข้อนี้กำหนดให้ f (x) นิยามในช่วง (0, 10) ดังนั้นสูตรปาร์เซอวาล คือ (2.39) นั่นคือ

$$\frac{1}{\ell} \int_{c}^{c+2\ell} [\, f(x) \,]^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

ในเมื่อ $\ell = 5 \quad , \quad f(x) = 4x$

$$a_0 = 40 \quad , \quad b_n = -\frac{40}{n\pi} \; , \; a_n = 0$$

แทนค่าเหล่านี้ในสูตรปาร์เซอวาล จะได้

$$\frac{1}{5} \int_{0}^{10} (4x)^2 \, dx = \frac{1}{2} (40)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{40}{n\pi} \right)^2$$

$$\frac{16}{5} \frac{x^3}{3} \Big|_{0}^{10} = \frac{1600}{2} + \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$1600 \left(\frac{2}{3} \right) = 1600 \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

เอา 1600 หารตลอดสมการ แล้วย้ายพจน์คงที่ไว้ข้างเดียวกัน

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

หรือ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

ตัวอย่างที่ 2.13 ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 3 จงแสดงว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{กำหนดให้} \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ข้อนี้กำหนดให้ $f(x)$ นิยามในช่วง $(0, 2)$ ดังนั้น สูตรปาร์เซอวาลที่ใช้คือ (2.39) นั่นคือ

$$\frac{1}{\ell} \int_{c}^{c+2\ell} [f(x)]^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

เพราะว่า $\ell = 1$, $f(x) = x^2$

$$a_0 = \frac{8}{3} \quad , \quad a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}$$

และ $b_n = -\dfrac{4}{n\pi}$

แทนค่าในสูตรจะได้

$$\frac{1}{1} \int_{0}^{2} (x^2)^2 \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{4}{n^2\pi^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{n\pi}\right)^2 \right]$$

$$\left.\frac{x^5}{5}\right|_{0}^{2} = \frac{64}{18} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{32}{5} = \frac{64}{18} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{16}{\pi^2} \left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\frac{32}{5} - \frac{64}{18} - \frac{16}{6} = \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{576 - 320 - 240}{90} = \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

$$\frac{16}{90} = \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

หรือ $\displaystyle \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

แบบฝึกหัด2.5

1. ใช้อนุกรมจากแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 2 จงแสดงว่า

(ก) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(ข) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}$

(ค) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$

2. จากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

(ค) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

(ง) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \ldots = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$

ใช้เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล (Parserval's identity)

3. ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 และเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

4. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

[แนะนำ : ใช้อนุกรม $\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\cos n\pi)}{n^2-1} \cos nx$]

5. จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

2.6 อนุกรมฟูเรียร์รูปเชิงซ้อน (The complex form of Fourier series)

จากสูตรอนุกรมฟูเรียร์ เมื่อ f (x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{.......(2.42)}$$

เพราะว่า $\cos nx = \dfrac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$

และ $\sin nx = \dfrac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right) + b_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{inx} + \left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-inx}\right] \\ &= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - ib_n}{2}\right)e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n + ib_n}{2}\right)e^{-inx} \end{aligned} \qquad \text{.......(2.43)}$$

สมมุติให้

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

และ $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$

จาก (2.43) สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}} \qquad \text{.......(2.44)}$$

สมการ (2.44) สามารถเขียนแทน (2.42) ได้ และเรียก (2.44) ว่า "อนุกรมฟูเรียร์รูปเชิงซ้อน (complex form of Fourier series) ของ f (x)"

จาก (2.44) c_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน ซึ่งเราทราบว่า

$$\begin{aligned} c_o &= \frac{1}{2} a_0 \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx \qquad \text{.......(2.45)} \end{aligned}$$

และ

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - ib_n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx - \frac{i}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{ \cos nx - i \sin nx \right\} dx \right] \end{aligned}$$

เพราะว่า $e^{-inx} = \cos nx - i \sin nx$

ดังนั้น

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx} \qquad \text{.......(2.46)}$$

ข้อสังเกต (2.45) และ (2.46) คือสูตรเดียวกันเมื่อแทนค่า $n = 0$ ลงใน (2.46)
โดยวิธีเดียวกันนี้ ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ อนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

สามารถเขียนในรูปเชิงซ้อน คือ

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\frac{in\pi x}{\ell}}} \qquad \text{.......(2.47)}$$

เมื่อ

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}\, dx} \qquad ....(2.48)$$

และฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามในช่วงอื่น ๆ มิใช่ช่วง $(-\pi, \pi)$ หรือ $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{\frac{in\pi x}{\ell}}} \qquad ....(2.49)$$

เมื่อ

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{c}^{c+2\ell} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}\, dx} \qquad ....(2.50)$$

ตัวอย่างที่ 2.13 จงกระจาย $e^{\alpha x}$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน

วิธีทำ เพราะว่า $f(x)$ นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน คือ (2.44)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{inx}$$

และ

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\alpha x}\cdot e^{-inx}\, dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(\alpha-in)x}\, dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{e^{(\alpha-in)x}}{(\alpha-in)} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{(\alpha-in)\pi} - e^{-(\alpha-in)\pi}}{\alpha - in} \right]$$

เพราะว่า $e^{(\alpha-in)\pi} = e^{\alpha\pi} \cdot e^{-in\pi}$

$$= e^{\alpha\pi} (\cos n\pi - i \sin n\pi)$$

แต่ $\cos n\pi = (-1)^n$ และ $\sin n\pi = 0$ ดังนั้น

$$e^{(\alpha-in)\pi} = e^{\alpha\pi} (-1)^n$$

และ $e^{-(\alpha-in)\pi} = e^{-\alpha\pi} \cdot e^{in\pi}$

$$= e^{-\alpha\pi} (\cos n\pi + i \sin n\pi)$$

$$= e^{-\alpha\pi} (-1)^n$$

แทนค่า จะได้

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{\alpha\pi} (-1)^n - e^{-\alpha\pi} (-1)^n}{\alpha - in} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi (\alpha - in)} \left[\frac{e^{\alpha\pi} - e^{-\alpha\pi}}{2} \right]$$

$$= \frac{(-1)^n \sinh (\alpha\pi)}{\pi (\alpha - in)}$$

เอา $(\alpha + in)$ คูณทั้งเศษและส่วนใน c_n นั่นคือ

$$c_n = \frac{(-1)^n (\alpha + in) \sinh (\alpha\pi)}{\pi (\alpha^2 + n^2)}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha + in) \sinh(\alpha\pi)}{\pi (\alpha^2 + n^2)} e^{inx}$$

หรือ $$e^{\alpha x} = \frac{\sinh (\alpha\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (\alpha + in)}{(\alpha^2 + n^2)} e^{inx} \qquad ....(2.51)$$

ข้อสังเกต ผลจากตัวอย่างที่ 2.13 ถ้าแทนค่า $\alpha = \pm i\beta$ แล้วนำเอาอนุกรมทั้งสองที่ได้จากการแทนค่ามารวมกันแล้วหารด้วย 2 ก็จะได้อนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อนของฟังก์ชัน $\cos \beta x$ แต่ถ้าเอาสองอนุกรมที่ได้จากการแทนค่ามาลบกันแล้วหารด้วย $2i$ ก็จะได้อนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อนของฟังก์ชัน $\sin \beta x$

แทนค่า $\alpha = i\beta$ ลงใน (2.51)

$$e^{i\beta x} = \frac{\sinh(i\beta\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (i\beta + in)}{(-\beta^2 + n^2)} e^{inx}$$

แต่ $\sinh(i\beta\pi)$

$$= \frac{e^{i\beta\pi} - e^{-i\beta\pi}}{2}$$

$$= i\left(\frac{e^{i\beta\pi} - e^{-i\beta\pi}}{2i}\right)$$

$$= i \sin \beta\pi$$

ดังนั้น

$$e^{i\beta x} = \frac{i \sin \beta\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n (\beta + n)}{-(\beta^2 - n^2)} e^{inx}$$

$$= \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\beta - n} e^{inx} \qquad \text{.......(2.52)}$$

แทนค่า $\alpha = -i\beta$ ลงใน (2.51)

$$e^{-i\beta x} = \frac{\sinh(-i\beta\pi)}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n (-i\beta + in)}{(-\beta^2 + n^2)} e^{inx}$$

แต่ $\sinh(-i\beta\pi)$

$$= \frac{e^{-i\beta\pi} - e^{i\beta\pi}}{2}$$

$$= -i\left(\frac{e^{i\beta\pi} - e^{-i\beta\pi}}{2i}\right)$$

ดังนั้น

$$e^{-i\beta x} = \frac{-i \sin \beta\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-i)(-1)^n (\beta - n)}{-(\beta^2 - n^2)} e^{inx}$$

$$= \frac{\sin \beta\pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\beta + n)} e^{inx}$$

$$\frac{(2.52)+(2.53)}{2} \; ; \; \frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2} = \frac{\sin\beta\pi}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{\beta-n}+\frac{1}{\beta+n}\right\}e^{inx}$$

$$\cos\beta x = \frac{\sin\beta\pi}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\beta}{\beta^2-n^2}\; e^{inx}$$

หรือ $$\cos\beta x = \frac{\sin\beta\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{\beta(-1)^n}{\beta^2-n^2}\; e^{inx}$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้าเอา $\frac{(2.52)-(2.53)}{2i}$ จะได้

$$\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} = \frac{\sin\beta\pi}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n\left\{\frac{1}{\beta-n}-\frac{1}{\beta+n}\right\}e^{inx}$$

$$\sin\beta x = \frac{\sin\beta\pi}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n}{\beta^2-n^2}\; e^{inx},$$

หรือ $$\sin\beta x = \frac{-i\sin\beta\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{\beta^2-n^2}\; e^{inx}$$

ตัวอย่างที่ 2.14 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน ของฟังก์ชัน

$$f(x) = e^{-x} \; ; \; -1 < x < 1$$

วิธีทำ เพราะว่า หนึ่งคาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ เนื่องจากโจทย์กำหนดให้ $f(x)$ นิยามในช่วง $(-1, 1)$ ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

และ
$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}\, dx \\
&= \frac{1}{2(1)}\int_{-1}^{1} e^{-x}\cdot e^{-in\pi x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{-(1+in\pi)x}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-(1+in\pi)x}}{1+in\pi}\right]\Big|_{-1}^{1} \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{-(1+in\pi)}-e^{(1+in\pi)}}{(1+in\pi)}\right] \\
&= \frac{e^{(1+in\pi)}-e^{-(1+in\pi)}}{2(1+in\pi)}
\end{aligned}$$

แต่ $e^{(1+in\pi)} = e^{1} \cdot e^{in\pi} = e^{1}(\cos n\pi + i \sin n\pi)$

$$= e^{1}(-1)^{n}$$

และ $e^{-(1+in\pi)} = e^{-1} \cdot e^{-in\pi} = e^{-1}(\cos n\pi - i \sin n\pi)$

$$= e^{-1}(-1)^{n}$$

ดังนั้น

$$c_n = \frac{e^{1}(-1)^{n} - e^{-1}(-1)^{n}}{2(1+in\pi)}$$

$$= \frac{(-1)^{n}}{(1+in\pi)}\left[\frac{e^{1}-e^{-1}}{2}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n}\sinh(1)}{1+in\pi}$$

หรือ $c_n = \dfrac{(-1)^{n}(1-in\pi)\sinh(1)}{1+n^2\pi^2}$,

แทนค่า c_n ลงในสูตรกระจายอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน จะได้

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(1-in\pi)\sinh(1)}{(1+n^2\pi^2)} e^{in\pi x}$$

หรือ $e^{-x} = \sinh(1) \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n}(1-in\pi)}{(1+n^2\pi^2)} e^{in\pi x}$

จาก (2.42) และ (2.44) คือ อนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f (x) ตัวเดียวกัน ต่างกันเพียง (2.42) เป็นอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ ส่วน (2.44) เป็นอนุกรมฟูเรียร์ของ f (x) ในรูปเชิงซ้อน จากหัวข้อ 2.6 เรากำหนดให้ c_0, c_n, c_{-n}, a_0, a_n และ b_n สัมพันธ์กันดังนี้

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0 \qquad ....(2.54)$$

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \qquad ....(2.55)$$

และ $c_{-n} = \dfrac{a_n + ib_n}{2}$ ....(2.56)

นั่นคือ ถ้ามีอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณมิติ เราสามารถเปลี่ยนอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณมิติ เป็นอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อนได้ โดยใช้สูตร (2.54), (2.55) และ (2.56) ในทางกลับกัน ถ้าทราบอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน เราสามารถเปลี่ยนให้กลับไปอยู่ในรูปตรีโกณมิติได้เช่นเดียวกัน โดยใช้สูตรดังนี้

$$a_0 = 2c_0 \qquad \text{.......(2.57)}$$

(2.55) + (2.56) ; $$a_n = c_n + c_{-n} \qquad \text{.......(2.58)}$$

(2.55) − (2.56) ; $$-ib_n = c_n - c_{-n}$$

หรือ $$b_n = i(c_n - c_{-n}) \qquad \text{.......(2.59)}$$

ตัวอย่างที่ 2.15 (ก) จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน ของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามเป็น

$$f(x) = A\sin \pi x \ ; \ 0 < x < 1$$

(ข) แปลงรูปผลจากข้อ (ก) ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์แบบตรีโกณมิติ

วิธีทำ (ก) โจทย์กำหนดให้ f(x) นิยามในช่วง (0, 1) ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ (2.49)

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{\ell}}\, dx$$

เพราะว่าหนึ่งคาบ = $2\ell = 1$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{1}{2}$ เลือกค่า c = 0 ดังนั้น

$$c_n = \frac{1}{2(\frac{1}{2})}\int_0^{0+2(\frac{1}{2})} A\sin \pi x\, e^{-2in\pi x}\, dx$$

$$= A\int_0^1 e^{-2in\pi x}\sin \pi x\, dx \qquad \text{.......(2.60)}$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = e^{-2in\pi x}$; $dv = \sin \pi x\, dx$

$du = -2in\pi\, e^{-2in\pi x}\, dx$; $v = -\frac{\cos \pi x}{\pi}$

ดังนั้น

$$\int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx = e^{-2in\pi x}\left(-\frac{\cos \pi x}{\pi}\right)\Big|_0^1 - 2in\pi \int_0^1 e^{-2in\pi x} \frac{\cos \pi x}{\pi} dx$$

$$= \frac{e^{-2in\pi} + 1}{\pi} - 2in \int_0^1 e^{-2in\pi x} \cos \pi x \, dx \quad ....(2.61)$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = e^{-2in\pi x}$; $dv = \cos \pi x \, dx$

$du = -2in\pi \, e^{-2in\pi x} dx$; $v = \frac{\sin \pi x}{\pi}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 e^{-2in\pi x} \cos \pi x \, dx = e^{-2in\pi x}\left(\frac{\sin \pi x}{\pi}\right)\Big|_0^1 + 2in \int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx$$

$$= 2in \int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx \quad ....(2.62)$$

แทนค่า (2.62) ลงใน (2.61) จะได้

$$\int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x dx = \frac{e^{-2in\pi} + 1}{\pi} - 2in \left\{ 2in \int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx \right\} \quad ....(2.67)$$

แต่ $e^{-2in\pi} = \cos 2n\pi - i \sin 2n\pi$

$= 1 - 0$

$= 1$

แทนใน (2.63)

$$\int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx = \frac{1+1}{\pi} + 4n^2 \int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx$$

$$(1 - 4n^2) \int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi}$$

หรือ $$\int_0^1 e^{-2in\pi x} \sin \pi x \, dx = \frac{2}{\pi} \frac{1}{(1 - 4n^2)} \quad ....(2.64)$$

แทนค่า (2.64) ลงใน (2.60) จะได้

$$c_n = \frac{2A}{\pi (1 - 4n^2)} \quad ....(2.65)$$

ดังนั้น แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ ในรูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2A}{\pi(1-4n^2)} e^{2in\pi x}$$

(ข) จาก (2.57)

$$a_0 = 2c_0$$

แทนค่า $n = 0$ ใน (2.65) จะได้

$$a_0 = 2\left[\frac{2A}{\pi(1-4n^2)}\right]_{n=0} = \frac{4A}{\pi} \qquad \text{.......(2.66)}$$

จาก (2.58)

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

เพราะว่า $c_n = \dfrac{2A}{\pi(1-4n^2)}$

แทนค่า $n = -n$ จะได้

$$c_{-n} = \frac{2A}{\pi(1-4n^2)} = c_n \qquad \text{.......(2.67)}$$

ดังนั้น

$$a_n = 2c_n = \frac{4A}{\pi(1-4n^2)} \qquad \text{.......(2.68)}$$

และจาก (2.59)

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

แต่ $c_n = c_{-n}$ ตาม (2.67) เพราะฉะนั้น

$$b_n = 0 \qquad \text{.......(2.69)}$$

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้กำหนดให้ $f(x)$ นิยามในช่วง (0, 1) ดังนั้นสูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปตรีโกณมิติ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{4A}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4A}{\pi\,(1 - 4n^2)} \cos\frac{n\pi x}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{(4n^2 - 1)}$$

$$= \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2\pi x + \frac{1}{15}\cos 4\pi x + \frac{1}{35}\cos 6\pi x + \dots\right)$$

แบบฝึกหัด 2.6

จากข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อนของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบ คือ

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ 0 & 1 < x < 2 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < 1 \\ -1 & 1 < x < 2 \end{cases}$

3. $f(x) = x \qquad 0 < x < 1$

4. $f(x) = x \qquad -1 < x < 1$

5. $f(x) = \cos x \quad ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

6. $f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x < \pi$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.6

1. $c_n = \dfrac{1}{2n\pi i}\,(1 - e^{-in\pi})$

2. $c_n = \dfrac{i}{n\pi}\,[(-1)^n - 1]$

3. $c_n = \dfrac{i}{2n\pi}$

4. $c_n = \dfrac{i(-1)^n}{n\pi}$

5. $c_n = \dfrac{2(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)}$

6. $c_n = \dfrac{2}{\pi(1 - 4n^2)}$