บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้น
(Introduction)

1.1 ฟังก์ชันมีคาบ (Periodic function)

ฟังก์ชัน f (x) ใด ๆ เรียกว่า ฟังก์ชันมีคาบ (periodic function) ถ้ามีค่าคงที่ 2P และมีคุณสมบัติว่า

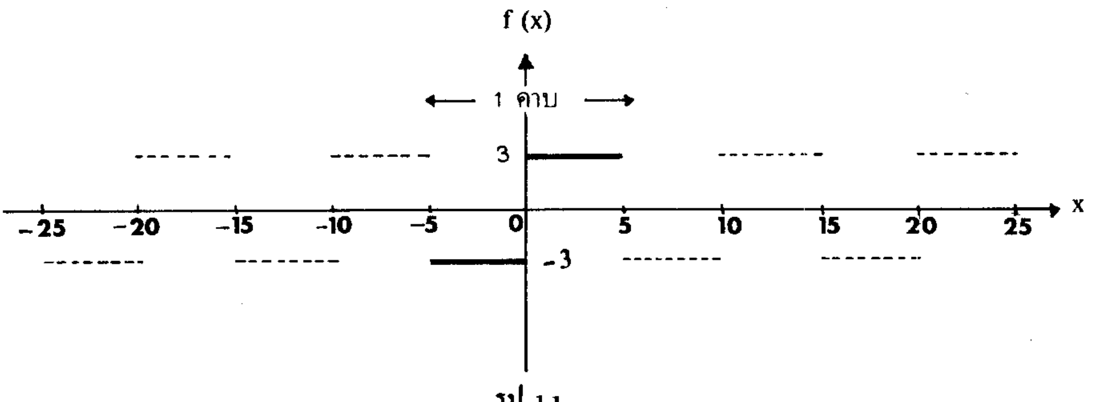
$$f(x+2P) = f(x) \quad \text{สำหรับทุกค่าของ } x \qquad ....(1.1)$$

เมื่อ 2P เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ (1.1) เป็นจริง (แต่ $2P > 0$) ดังนั้น 2P คือ คาบ (period) ของฟังก์ชัน f (x)

ลักษณะกราฟของฟังก์ชันมีคาบ ตัวอย่างเช่น

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 3 & ; \quad 0 < x < 5 \\ -3 & ; \quad -5 < x < 0 \end{cases}$$

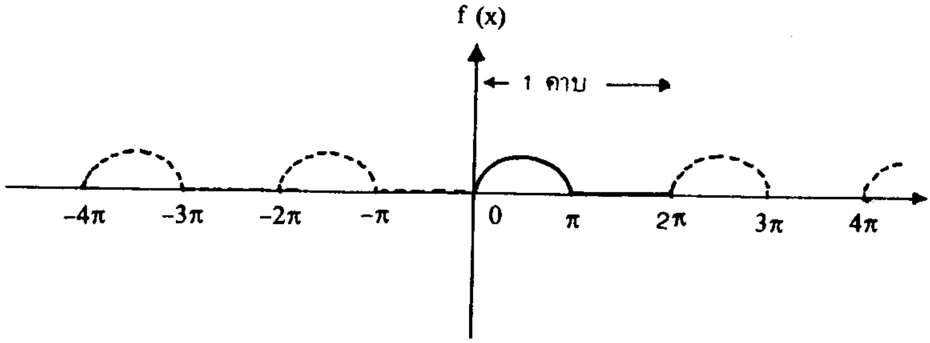


รูป 1.1

1 คาบ = 2P = 10

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & ; \quad \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

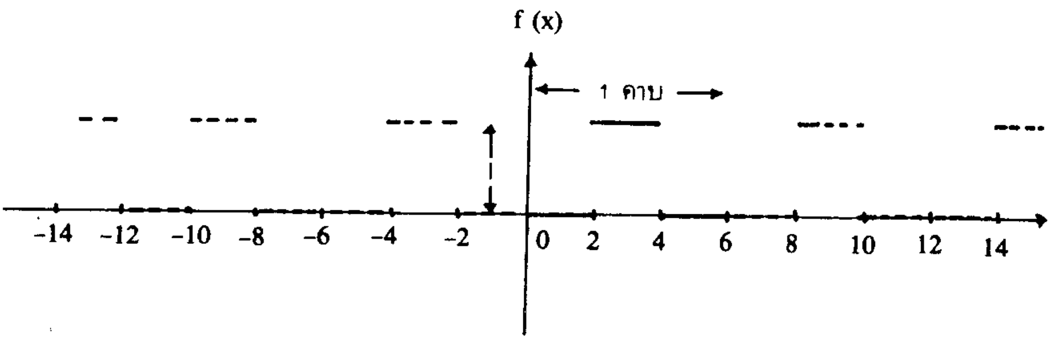


รูป 1.2

1 คาบ $= 2P = 2\pi$

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \le x < 2 \\ 1 & ; \quad 2 \le x < 4 \\ 0 & ; \quad 4 \le x < 6 \end{cases}$$



รูป 1.3

1 คาบ $= 2P = 6$

จากนิยามฟังก์ชันมีคาบ สามารถนำไปหาค่าของฟังก์ชัน f (x) ได้ ถึงแม้ว่าค่า x ที่นำมาใช้ จะอยู่นอกช่วงที่โจทย์กำหนดให้ ตัวอย่างเช่น อนุกรม

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad \text{.......(1.2)}$$

ซึ่งแต่ละพจน์ของอนุกรม (1.2) มีคาบเป็น 2π ดังนั้น ถ้า f (x) แทนผลรวมของอนุกรม f (x) จะมีคาบเป็น 2π ด้วย เมื่อใดก็ตามที่เราพิจารณาอนุกรม เช่น (1.2) เราจะกำหนดว่า f (x) นิยามสำหรับ $-\pi < x < \pi$ และภายนอกช่วงนี้ f (x) สามารถหาได้โดยเงื่อนไขภาวะเป็นคาบ (periodicity condition)

$$f(x+2\pi) = f(x)$$

ข้อสังเกต ฟังก์ชัน cos x, sin x มีคาบเป็น 2π

1.2 ฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (Even and odd function)

นิยาม : ฟังก์ชัน f (x) เรียกว่า ฟังก์ชันคู่ (even function) เมื่อสอดคล้องตามสมการ

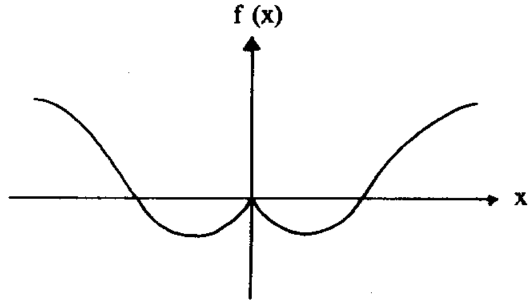
$$f(-x) = f(x) \qquad \text{.......(1.3)}$$

และเรียกว่า ฟังก์ชันคี่ (odd function) เมื่อสอดคล้องตามสมการ

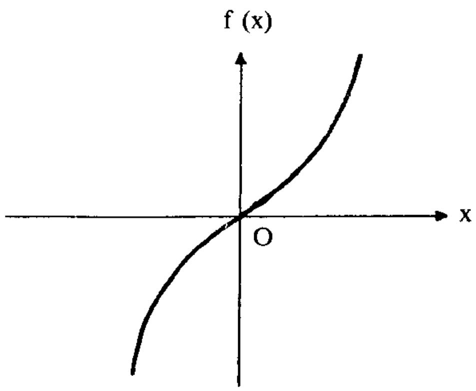
$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{.......(1.4)}$$

ตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน x^2, cos x จะเป็นฟังก์ชันคู่ และ x, sin x จะเป็นฟังก์ชันคี่

ข้อสังเกต กราฟของฟังก์ชันคู่จะมีลักษณะสมมาตร (symmetry) รอบแกน y ดูรูป 1.4 และกราฟของฟังก์ชันคี่ จะมีลักษณะเสมือนสมมาตร (skew symmetric) ดูรูป 1.5



รูป 1.4 ลักษณะกราฟฟังก์ชันคู่



รูป 1.5 ลักษณะกราฟของฟังก์ชันคี่

ตัวอย่างที่ 1.1 จงแสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่

(ก) $x^2 \cos x$

(ข) $x \sin x$

(ค) $\sin x \cdot \cos x$

วิธีทำ (ก) สมมติให้ $f_1(x) = x^2 \cos x$

แล้วแทนค่า x ด้วย $-x$ จะได้

$$f_1(-x) = (-x)^2 \cos(-x)$$
$$= x^2 \cdot \cos x$$
$$= f_1(x)$$

ซึ่งสอดคล้องตาม (1.3) สรุปได้ว่า $f_1(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ $x^2 \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

(ข) สมมติให้ $f_2(x) = x \sin x$

แทนค่า x ด้วย $-x$

$$f_2(-x) = (-x) \cdot \sin(-x)$$
$$= -x(-\sin x)$$
$$= x \cdot \sin x$$
$$= f_2(x)$$

ซึ่งสอดคล้องตาม (1.3) สรุปได้ว่า $f_2(x)$ **เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ** $x \cdot \sin x$ **เป็นฟังก์ชันคู่**

(ค) สมมติให้ $f_3(x) = \cos x \cdot \sin x$

แทนค่า x ด้วย -x

$$\begin{aligned} f_3(-x) &= \cos(-x) \cdot \sin(-x) \\ &= \cos x\,(-\sin x) \\ &= -\cos x \cdot \sin x \\ &= -f_3(x) \end{aligned}$$

ซึ่งสอดคล้องตาม (1.4) สรุปได้ว่า $f_3(x)$ **เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ** $\cos x \cdot \sin x$ **เป็นฟังก์ชันคี่**

ข้อสังเกต มีบางฟังก์ชันไม่เข้านิยามของฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่ เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า "**ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (neither even nor odd function)**

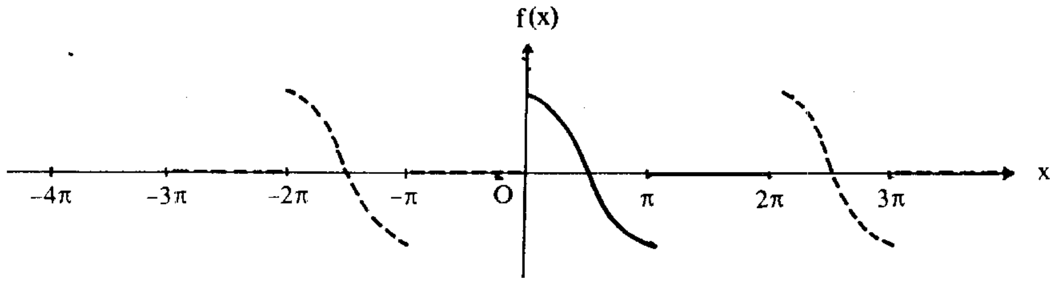
ตัวอย่างที่ 1.2 จงแสดงว่า $f(x) = x - x^2$ **เป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่**

วิธีทำ แทนค่า x ด้วย -x

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) - (-x)^2 \\ &= -x - x^2 \end{aligned}$$

ซึ่งจะพบว่า ทางขวามือของสมการ ไม่สามารถจัดให้อยู่ในรูป $x - x^2$ หรือ $-(x-x^2)$ ได้นั่นคือ ไม่สอดคล้องตาม (1.3) และ (1.4) **ดังนั้น** $f(x)$ เรียกว่า **ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่ และฟังก์ชันคี่**

ลักษณะกราฟของฟังก์ชันที่ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่



รูป 1.6 กราฟของฟังก์ชันที่ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

(ฟังก์ชันคู่) $\times$ (ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่ ....(1.5)

(ฟังก์ชันคี่) $\times$ (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่ ....(1.6)

(ฟังก์ชันคู่) $\times$ (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่ ....(1.7)

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ เมื่อ } f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันคู่} \qquad ....(1.8)$$

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \text{ เมื่อ } f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันคี่} \qquad ....(1.9)$$

สำหรับคุณสมบัติ (1.5) (1.6) และ (1.7) ให้ดูจากตัวอย่างที่ 1.1 (ก) (ข) และ (ค) ตามลำดับ ส่วน (1.8) และ (1.9) ให้ดูจากตัวอย่างต่อไปนี้

เพราะว่า $$\int_{-a}^{a} \cos x\,dx = \sin x \Big|_{-a}^{a} = 2\sin a \qquad ....(1.10)$$

และ $$2\int_{0}^{a} \cos x\,dx = 2\sin x \Big|_{0}^{a} = 2\sin a \qquad ....(1.11)$$

เพราะฉะนั้น (1.10) = (1.11) นั่นคือ

$$\int_{-a}^{a} \cos x\,dx = 2\int_{0}^{a} \cos x\,dx \text{ ; } \cos x \text{ เป็นฟังก์ชันคู่}$$

แต่ $$\int_{-a}^{a} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_{-a}^{a} = -(\cos a - \cos(-a))$$

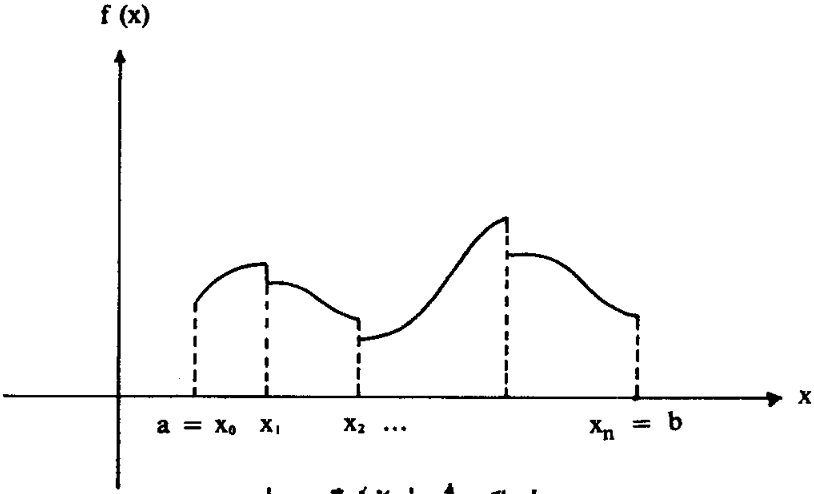
$$= 0 \text{ ; } \sin x \text{ เป็นฟังก์ชันคี่}$$

1.3 ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (Piecewise continuous function)

นิยาม : ฟังก์ชัน $f(x)$ เรียกว่า มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ บน $[a, b]$ ถ้า

1. สามารถแบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย ๆ ซึ่งสามารถนับจำนวนได้ถ้วน (finite) โดยที่ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ และ f มีความต่อเนื่องในทุกช่วงย่อย ตามรูป 1.7

2. สามารถหาลิมิตข้างเดียว (one side limit) ของ $f(x)$ ได้ เมื่อ x มีค่าเข้าสู่จุดปลายทั้งสองของแต่ละช่วงย่อย



รูป 1.7 ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ

จากรูป 1.7 มีจุด x_1, x_2, ... เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่อง (discontinuous points) ดังนั้นลิมิตของ f (x) สองค่า เมื่อ x เข้าใกล้ x_1 ทางขวาและทางซ้าย สามารถหาค่าได้ แต่มีค่าไม่เท่ากัน นั่นคือ

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f(x_1 + \varepsilon) \neq \lim_{\varepsilon \to 0} f(x_1 - \varepsilon) \quad ; \; \varepsilon > 0 \qquad ....(1.12)$$

เพื่อความสะดวก ลิมิตทางขวา (right hand side limit) และลิมิตทางซ้าย (left hand side limit) จะเขียนแทนด้วย $f(x_1+)$ และ $f(x_1-)$ ตามลำดับ ดังนั้น (1.12) เขียนใหม่ได้เป็น

$$f(x_1+) \neq f(x_1-) \qquad ....(1.13)$$

1.4 การลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ (Uniform convergence)

กำหนดให้ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ เป็นอนุกรมอนันต์ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad ....(1.14)$$

เรียกว่า ลู่เข้าในช่วง [a, b] ถ้าผลรวมย่อยของซีเควันซ์ $\{S_n(x)\}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ โดยที่

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

ลู่เข้าในช่วง [a, b]

ในกรณีนี้สามารถเขียนใหม่ได้เป็น

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$$

และเรียก $S(x)$ ว่า ผลรวมของอนุกรม

นิยาม 1.1 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ลู่เข้าสู่ $S(x)$ บนช่วง [a, b] สำหรับแต่ละค่าของ $\varepsilon > 0$ และแต่ละ x บนช่วง [a, b] เราจะสามารถหาค่า $N > 0$ ซึ่ง $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุกค่าของ $n > N$ เมื่อ N ขึ้นกับ ε แต่ไม่ขึ้นกับ x อนุกรมนี้จะเรียกว่า ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ (Uniformly convergent) บนช่วง [a, b]

ตัวอย่างที่ 1.3 จงใช้นิยาม 1.1 อธิบายว่า อนุกรมอนันต์

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอหรือไม่

วิธีทำ เพราะว่า ผลรวมย่อย

$$S_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{4}{5}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1}$$

ซึ่งจะพบว่าเมื่อแทนค่า n มากขึ้นเรื่อย ๆ ค่าของ S_n จะเข้าใกล้ 1 นั่นคือ สามารถเขียนได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

$$= 1$$

เพราะว่า $|S_n - S| = |S - S_n|$

$$= \left| 1 - \frac{n}{n+1} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{n+1} \right| < \varepsilon \quad ; \quad \varepsilon > 0$$

หรือ $n+1 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

เพราะฉะนั้น ถ้าเลือกให้ $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ จะพบว่า N ขึ้นกับ ε เพียงตัวเดียวเท่านั้น นั่นคือ

ถ้าเลือก $\varepsilon = 0.1$ จะได้ $N = 9$

$\varepsilon = 0.01$ จะได้ $N = 99$

$\varepsilon = 0.001$ จะได้ $N = 999$

ดังนั้น อนุกรมอนันต์ชุดนี้ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

วิธีที่ใช้ทดสอบว่าอนุกรมลู่เข้าแบบสม่ำเสมอหรือไม่ สำหรับหนังสือเล่มนี้ จะกล่าวถึงเฉพาะ "การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass' M-test)" เท่านั้น ซึ่งต่อไปจะเรียกย่อ ๆ ว่า การทดสอบเอ็ม (M-test)

การทดสอบเอ็ม กล่าวว่า ถ้าซีเควันซ์ของค่าคงที่บวก (positive constant) M_1, M_2, ... สามารถหาค่าได้ในบางช่วง นั่นคือ

(1) $|u_n(x)| \leq M_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

และ (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น สรุปได้ว่า อนุกรมอนันต์ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ บนช่วง [a, b] แต่ถ้ามีข้อหนึ่งข้อใดไม่จริง จะสรุปแบบข้างต้นไม่ได้

การทดสอบว่า อนุกรมใดลู่เข้าหรือลู่ออก มีอยู่ด้วยกันหลายการทดสอบ วิธีหนึ่งที่ใช้คือ เปรียบเทียบกับอนุกรมที่เป็นมาตรฐาน ตัวอย่างเช่น

อนุกรมพี (P-series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

สำหรับอนุกรมพี แบ่งการพิจารณาเป็น 2 กรณี คือ

(ก) ถ้า $P > 1$ อนุกรมจะลู่เข้า เช่น

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots \text{ เมื่อ } P = 2$$

(ข) ถ้า $P \leq 1$ อนุกรมจะลู่ออก เช่น

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \quad \text{เมื่อ } P = \frac{1}{2}$$

และ $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \text{ เมื่อ } P = 1$$

มีชื่อเรียกเฉพาะเมื่อ $P = 1$ ว่า "อนุกรมฮาร์โมนิค (Harmonic series)"

ตัวอย่างที่ 1.4 จงทดสอบว่า อนุกรมอนันต์ต่อไปนี้ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอหรือไม่

(ก) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$

(ข) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$

วิธีทำ (ก) ใช้การทดสอบเอ็ม (M-test)

เพราะว่า $u_n(x) = \frac{\cos nx}{n^4}$

เพราะฉะนั้น $|u_n(x)| = \left|\frac{\cos nx}{n^4}\right| \leq \frac{1}{n^4} = M_n$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ซึ่งเป็นอนุกรมพี (P-series) เมื่อ P = 4 นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ลู่เข้า

ดังนั้น สรุปได้ว่า อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^4}$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

(ข) เพราะว่า $u_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$

เพราะฉะนั้น $|u_n(x)| = \left|\frac{1}{n^2 + x^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} = M_n$ สำหรับทุกค่าของ x

และ $\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ซึ่งเป็นอนุกรมพี เมื่อ P = 2 นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

ดังนั้น สรุปได้ว่า อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

ข้อสังเกต $|\cos nx| \leq 1$

ทฤษฎีบทที่เกี่ยวกับการลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

ทฤษฎีบท 1.1 กล่าวว่า ถ้า $\{u_n(x)\}$ n = 1, 2, 3, ... ต่างก็เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [a, b] และถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอบนช่วง [a, b] ดังนั้นผลรวมของอนุกรม S (x) จะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องของ x บนช่วง [a, b] ด้วย และอนุกรมนี้ สามารถอินทิเกรตทีละพจน์ได้ นั่นคือ

$$\int_a^b S(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

หรือ $$\int_a^b \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x)\,dx$$

ทฤษฎีบท 1.2 กล่าวว่า ถ้า $\{u_n(x)\}$ n = 1, 2, 3, ... ต่างก็เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ลู่เข้าสู่ S (x) ขณะที่ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอบนช่วง [a, b] นั่นคือ

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

หรือ $$\frac{d}{dx}\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\,u_n(x)}{dx}$$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบททั้งสองทฤษฎี จะไม่เป็นจริง ถ้าอนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ ไม่ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาคาบของฟังก์ชันต่อไปนี้

   (ก) $\cos 2x$

   (ข) $\sin \pi x$

   (ค) $\cos \frac{2n\pi x}{T}$

   (ง) $\sin 2k\pi x$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันคงที่เป็นฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งมีคาบเป็น $2T > 0$

3. กำหนดว่า $f(x)$ มีคาบเป็น $2T$ จงหาคาบของ $f(\frac{ax}{b})$

4. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

   (ก) e^{-x}

   (ข) $e^{\cos x}$

   (ค) $g(x^2)$

   (ง) $xg(x^2)$

   (จ) $\log(\frac{1+x}{1-x})$

   (ฉ) $x^3 \sin x \cos x$

   (ช) $x^2 - 3x^3 + 4x^4$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.1

1. (ก) π , (ข) 2 , (ค) $\frac{T}{n}$, (ง) $\frac{1}{k}$, 3. $\frac{2bT}{a}$

4. (ก) ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (ข) ฟังก์ชันคู่ (ค) ฟังก์ชันคู่
(ง) ฟังก์ชันคี่ (จ) ฟังก์ชันคี่ (ฉ) ฟังก์ชันคู่ (ช) ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

แบบฝึกหัด 1.2

1. โดยการเปรียบเทียบกับอนุกรมฮาร์โมนิค จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่ออก

(ก) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$

(ข) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$

(ค) $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \dots$

2. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ ว่าลู่เข้าหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบกับอนุกรมพี $\Sigma\left(\frac{1}{n^p}\right)$

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n}}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n}+1}$

(ค) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(2n+1)^2}$

(ง) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2}$

(จ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3}$

(ฉ) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{n^2}$

(ช) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+3}$

(ซ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

3. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ เพื่อว่าอนุกรมลู่เข้าแบบสม่ำเสมอ

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

(ค) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

(ง) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$

(จ) $\sum_{n=1}^{\infty} n(\sin x)^n$

(ฉ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n}}$

คำตอบแบบฝึกหัด 1.2

2. (ก) ลู่ออก

   (ข) ลู่เข้า

   (ค) ลู่เข้า

   (ง) ลู่ออก

   (จ) ลู่เข้า

   (ฉ) ลู่เข้า

   (ช) ลู่เข้า

   (ซ) ลู่เข้า

3. (ก) $|x| \leq c < \infty$

   (ข) $|x| < c < 1$

   (ค) $|x| \leq 1$

   (ง) $|x| < \infty$

   (จ) $|2x - n\pi| \geq c > 0$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มลบใกล้ $\frac{2x}{\pi}$

   (ฉ) $1 < c \leq |x| < \infty$

1.5 เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน (Orthogonal sets of functions)

กำหนดให้ $f_1(x)$ และ $f_2(x)$ เป็นฟังก์ชันสองฟังก์ชัน ซึ่งนิยมในช่วง $a \leq x \leq b$ และกำหนดว่า อินทิกรัล

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)\, f_2(x)\, dx \qquad \text{.......(1.14)}$$

หาค่าได้ (exist) เราจะได้ว่าฟังก์ชัน f_1 และ f_2 เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก (orthogonal function) บนช่วง $a \leq x \leq b$ ถ้าอินทิกรัล (1.14) มีค่าเป็นศูนย์ นั่นคือ

$$(f_1, f_2) = 0 \qquad \text{.......(1.15)}$$

ซึ่งเหมือนกับเงื่อนไขของเวคเตอร์ที่ว่า "ถ้าเวคเตอร์สองเวคเตอร์ตั้งฉากซึ่งกันและกัน ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของเวคเตอร์ทั้งสอง จะมีค่าเป็นศูนย์"

เซตของฟังก์ชัน $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ นิยามบนช่วง $a \leq x \leq b$ เรียกว่า เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน (orthogonal sets of functions) บนช่วง $a \leq x \leq b$ ถ้าแต่ละอินทิกรัล

$$(f_n, f_m) = \int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx \qquad \text{.......(1.16)}$$

หาค่าได้ และ

$$(f_n, f_m) = 0 \quad \text{เมื่อ } n \neq m$$
$$\neq 0 \quad \text{เมื่อ } n = m \qquad \text{.......(1.17)}$$

เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน $\{f_n(x)\}$ เรียกว่า เซตเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal sets of function) บนช่วง $a \leq x \leq b$ ถ้าหากว่า

$$(f_n, f_m) = \int_a^b f_n(x)\, f_m(x)\, dx$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } n \neq m \\ 1 & \text{เมื่อ } n = m \end{cases} \qquad \text{.......(1.18)}$$

กำหนดให้ รากที่สองของอินทิกรัล

$$(f_n, f_n) = \int_a^b f_n^2(x)\, dx \qquad \text{.......(1.19)}$$

เรียกว่า ค่าประจำ (norm) ของฟังก์ชัน $f(x)$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\| f_n \|$ นั่นคือ

$$\| f_n \| = \sqrt{(f_n, f_n)} = \left[\int_a^b f_n^2(x)\, dx \right]^{1/2} \qquad \text{.......(1.20)}$$

ตัวอย่างที่ 1.5 จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f_n(x) = \sin nx$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ เป็น เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันบนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

วิธีทำ ถ้า $\{ f_n(x) = \sin nx \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน นั่นคือ

$$(f_n, f_m) = 0 \quad \text{เมื่อ } n \neq m$$
$$\neq 0 \quad \text{เมื่อ } n = m$$

เพราะว่า $(f_n, f_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin mx \ dx$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \cos (m-n)x - \cos (m+n)x \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin (m-n)x}{m-n} - \frac{\sin (m+n)x}{m+n} \right\} \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \quad \text{เมื่อ } m \neq n \qquad \ldots\ldots.(1.21)$$

และถ้า $m = n$

$$(f_n, f_m) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nx \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx) \ dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \pi \neq 0 \qquad \ldots\ldots.(1.22)$$

จาก (1.21) และ (1.22) สรุปได้ว่า $\{ f_n(x) = \sin nx \}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันบนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

กำหนดให้เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชันใด ๆ $\{f_n(x)\}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ซึ่งค่าประจำ (norm) ของมันไม่เป็นศูนย์ ดังนั้นเราสามารถสร้างเซตเชิงตั้งฉากปกติของฟังก์ชัน $\{g_n(x)\}$ ได้โดยนิยาม

$$\boxed{g_n(x) = \frac{f_n(x)}{\| f_n \|}} \ ; \ a \leq x \leq b \qquad \ldots\ldots.(1.23)$$

พิสูจน์ เพราะว่า

$$(g_n, g_m) = \int_a^b \frac{f_n(x)}{\| f_n \|} \frac{f_m(x)}{\| f_m \|} \ dx$$

$$= \frac{1}{\| f_n \| \, \| f_m \|} \int_a^b f_n(x) f_m(x) \ dx$$

$$= \frac{1}{\| f_n \| \, \| f_m \|} (f_n, f_m) \qquad \ldots\ldots.(1.24)$$

แต่โจทย์กำหนดว่า $\{ f_n(x) \}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน ดังนั้น อินทิกรัล (1.24) จะมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $m \neq n$ และเมื่อ $m = n$ อินทิกรัล (1.24) เขียนใหม่เป็น

$$(g_n, g_n) = \frac{1}{\| f_n \|^2} (f_n, f_n) \qquad ....(1.25)$$

จาก (1.20) เพราะว่า

$$\| f_n \| = \sqrt{(f_n, f_n)}$$

เพราะฉะนั้น

$$\| f_n \|^2 = (f_n, f_n) \qquad ....(1.26)$$

แทนค่า (1.26) ลงใน (1.25) จะได้

$$(g_n, g_n) = \frac{1}{\| f_n \|^2} \| f_n \|^2 = 1 \quad ; m = n \qquad ....(1.27)$$

นั่นคือ $\{g_n(x)\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ซึ่งนิยามตาม (1.23) เพราะว่า สอดคล้องตาม (1.18)

ตัวอย่างที่ 1.6 จงแสดงว่าฟังก์ชัน

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$$

เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติของฟังก์ชัน บนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

วิธีทำ พิจารณากรณีที่ $m \neq n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin x}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0 \qquad ....(1.28)$$

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} dx &= \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \left(-\frac{\cos nx}{n}\right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{-1}{\pi\sqrt{2}} \left[\frac{\cos n\pi - \cos n(-\pi)}{n}\right] \\ &= 0 \qquad ....(1.29)\end{aligned}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m-n) x + \cos (m+n) x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin (m-n) x}{(m-n)} + \frac{\sin (m+n) x}{(m+n)} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \qquad (1.30)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos (m-n) x - \cos (m+n) x]\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin (m-n) x}{(m-n)} - \frac{\sin (m+n) x}{(m+n)} \right] \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \qquad ....(1.31)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin px}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos qx}{\sqrt{\pi}}\, dx = 0 \; ; \; p \neq q \qquad ....(1.32)$$

ใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ แต่ถ้า $p = q$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin px}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\cos px}{\sqrt{\pi}}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2px\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(- \frac{\cos 2px}{2p} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 \qquad ....(1.33)$$

พิจารณากรณี $m = n$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} (\alpha) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1 \qquad ....(1.34)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(x + \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right)$$

$$= 1 \qquad ....(1.35)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2nx)\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(x - \frac{\sin 2nx}{2n} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 1 \qquad ....(1.36)$$

จาก (1.28) ถึง (1.36) สอดคล้องตามนิยามของ (1.18) เพราะฉะนั้น

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots$$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ ของฟังก์ชัน บนช่วง $-\pi \leq x \leq \pi$

ถ้าให้ $\{\phi_n(x)\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติของฟังก์ชัน บนช่วง (a, b) และกำหนดว่า สำหรับฟังก์ชัน f (x) ใด ๆ สามารถเขียนอยู่ในรูป

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x) + \ldots + c_n\phi_n(x) + \ldots \qquad \ldots\ldots.(1.37)$$

จงหาค่าสัมประสิทธิ์ c_n

วิธีทำ เอา $\phi_n(x)$ คูณ (1.37) ตลอดสมการ แล้วอินทิเกรตเทียบกับ x จาก a ถึง b จะได้

$$\int_a^b f(x)\,\phi_n(x)\,dx = \int_a^b c_1\phi_1(x)\,\phi_n(x)\,dx + \int_a^b c_2\phi_2(x)\,\phi_n(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_a^b c_n\,\phi_n(x)\,\phi_n(x)\,dx + \ldots \qquad \ldots\ldots.(1.38)$$

ซึ่งจะพบว่า อินทิกรัลพจน์อื่น ๆ เป็นศูนย์หมด เหลือเพียงอินทิกรัล

$$\int_a^b \phi_n(x)\,\phi_n(x)\,dx = 1$$

ดังนั้น (1.38) เขียนใหม่เป็น

$$\int_a^b f(x)\,\phi_n(x)\,dx = c_n \qquad \ldots\ldots.(1.39)$$

ข้อสังเกต สำหรับหนังสือบางเล่มอาจนิยามเซตเชิงตั้งฉากปกติของฟังก์ชันเป็น

$$\int_a^b f_n(x)\,f_m(x)\,dx = \delta_{mn} \qquad \ldots\ldots.(1.40)$$

δ_{mn} เรียกว่า "สัญลักษณ์โครเนกเกอร์ (Kronecker symbol)" ซึ่งมีคุณสมบัติเป็น

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 1.3

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงแสดงว่า แต่ละเซตของฟังก์ชันที่กำหนดให้ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาเซตเชิงตั้งฉากปกติ ซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉาก

1. $\{\cos nx\}, n = 0, 1, 2, \ldots;$ $\quad 0 \le x \le 2\pi$

2. $\{\sin \frac{n\pi x}{T}\}, n = 1, 2, 3, \ldots;$ $\quad -T \le x \le T$

3. $\{\cos \frac{2n\pi x}{T}\}, n = 0, 1, 2, \ldots;$ $\quad 0 < x < T$

4. $\{\sin 2nx\}, n = 1, 2, 3, \ldots;$ $\quad 0 \le x \le \pi$

5. $\{\cos 2nx\}, n = 0, 1, 2, \ldots;$ $\quad 0 \le x \le \pi$

6. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f_1(x) = 1$ และ $f_2(x) = x$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากบนช่วง $(-1, 1)$ จงหาค่าคงที่ A และ B เพื่อว่า ฟังก์ชัน $f_3(x) = 1 + Ax + Bx^2$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกับ f_1 และ f_2 บนช่วง $(-1, 1)$

7. กำหนดฟังก์ชัน a_0, $a_1 + a_2x$, $a_3 + a_4x + a_5x^2$ เมื่อ $a_0, a_1, \ldots, a_5$ คือค่าคงที่ จงหาค่าคงที่เพื่อว่าฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากปกติใน $(-1, 1)$

8. ถ้า $\{\phi_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติบนช่วง $(0, 1)$ ถ้า $a > 0$ จงแสดงว่า เซตของฟังก์ชัน $\psi_n(x) = \dfrac{\phi_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ บนช่วง $(0, a)$

9. สูตรหาระยะทางระหว่างสองฟังก์ชัน นิยามโดยสมการ

$$d(f, g) = \left\{ \int_a^b [f(x) - g(x)]^2\, dx \right\}^{1/2}$$

จงแสดงว่าระยะทางระหว่างสองจำนวนใด ๆ ที่ต่างกันของเซตเชิงตั้งฉากปกติคือ $\sqrt{2}$ (กำหนดว่า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากปกติ บน (a, b))

10. ถ้า $f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x)$ ในเมื่อ c_k เป็นค่าคงที่ และ $\{\phi_k\}$ คือเซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) จงแสดงว่า

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

11. ถ้า $\{\phi_n\}$ คือเซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) และ

$$k_n(x, y) = \phi_1(x)\phi_1(y) + \phi_2(x)\phi_2(y) + \ldots + \phi_n(x)\phi_n(y)$$

จงแสดงว่าสมการ

$$\int_a^b k_n(x, y) f(y)\, dy = f(x)$$

จะเป็นจริง สำหรับทุกฟังก์ชัน ซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

12. จงแสดงว่า ถ้า c_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ f(x) เทียบกับเซตเชิงตั้งฉากปกติ $\{\phi_n(x)\}$ บน (a, b) ดังนั้น

$$\int_a^b [f(x)]^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

สมการนี้คือ "เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล"

คำตอบแบบฝึกหัด 1.3

1. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots$
2. $\frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{\pi x}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{2\pi x}{T}, \frac{1}{\sqrt{T}} \sin \frac{3\pi x}{T}, \ldots$
3. $\frac{1}{\sqrt{T}}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{\pi x}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi x}{T}, \ldots$
4. $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 4x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 6x, \ldots$
5. $\sqrt{\frac{1}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2x, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 4x, \ldots$
6. $A = 0,\ B = -3$
7. $a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_1 = 0, a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}, a_3 = \sqrt{\frac{5}{8}}, a_4 = 0, a_5 = -3\sqrt{\frac{5}{8}}$