บทที่ 5
การประยุกต์กับปัญหาค่าขอบ
เฉลยแบบฝึกหัด 5.1

สมการสั่นของเส้นลวดหรือสมการคลื่น

จากข้อ 1 ถึงข้อ 5 จงหาคำตอบ y ของสมการคลื่น $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ซึ่งสอดคล้องตามเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น ดังนี้

1. $y(0, t) = y(10, t) = y_t(x, 0) = 0$ และ

$$y(x, 0) = 3 \sin \frac{\pi x}{10}$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

สมมุติให้

$$Y(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \text{..........(1)}$$

แทนค่า $y(x, t)$ ในสมการคลื่น

$$X(x)\, T''(t) = a^2 X''(x)\, T(t)$$

ย้ายฟังก์ชันที่มีตัวแปรอิสระเหมือนกันไว้ทางเดียวกัน แล้วสมมุติให้เท่ากับค่าคงที่ค่าหนึ่ง $(-\lambda^2)$ ดังนั้น

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \text{..........(2)}$$

และ $T''(t) + \lambda^2 a^2 X(x) = 0$ ....(3)

จาก (2) จะได้คำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad \text{..........(4)}$$

จาก (3) จะได้คำตอบคือ

$$T(t) = c_3 \cos a\lambda t + c_4 \sin a\lambda t \quad \text{..........(5)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ ดังนั้น

$$X(0) = 0 = c_1(1) + c_2(0)$$

หรือ $c_1 = 0$

แทนค่า c_1 ใน (4)

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(10, t) = 0$ จะได้ $X(10) = 0$ ดังนั้น

$$X(10) = c_2 \sin 10\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 10\lambda = \sin n\pi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{10}$

ดังนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{10} \qquad \ldots\ldots\ldots(6)$$

จาก (5) หาอนุพันธ์ของ $T(t)$

$$T'(t) = -c_3 a\lambda \sin a\lambda t + c_4 a\lambda \cos a\lambda t \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $Y_t(x, 0) = 0$ จะได้ $T'(0) = 0$ ดังนั้น

$$T'(0) = -c_3 a\lambda(0) + c_4 a\lambda(1) = 0$$

แต่ $a \neq 0$ และ $\lambda \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$c_4 = 0$$

แทนค่า c_4 ใน (5)

$$T(t) = c_3 \cos a\lambda t$$

หรือ

$$T(t) = c_3 \cos \frac{an\pi t}{10} \quad ; \quad \lambda = \frac{n\pi}{10} \qquad \ldots\ldots\ldots(7)$$

แทนค่า (6) และ (7) ใน (1)

$$y(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{10} \cdot c_3 \cos \frac{an\pi t}{10}$$

$$= E \sin \frac{n\pi x}{10} \cos \frac{an\pi t}{10} \;;\; E = c_2c_3 \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0) = 3 \sin \dfrac{\pi x}{10}$ ใน (8) โดยแทนค่า $t = 0$ จะได้

$$y(x, 0) = E \sin \frac{n\pi x}{10} \cdot (1) = 3 \sin \frac{\pi x}{10}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ จะได้

$$E = 3 \quad \text{และ} \quad n = 1$$

ดังนั้น คำตอบของสมการคลื่นคือ

$$y(x, t) = 3 \sin \frac{\pi x}{10} \cos \frac{a\pi t}{10}$$

2. $y(0, t) = y(10, t) = y_t(x, 0) = 0$ และ

$$y(x, 0) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\pi x}{10}$$

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ข้อนี้มีเงื่อนไขขอบเหมือนข้อ 1 แต่มีเงื่อนไขเริ่มต้นต่างกันเท่านั้น เพราะว่าเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x,0) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{10}$ เพราะฉะนั้น จะต้องสมมุติให้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{10}$$

ดังนั้น แทนค่า λ จะได้

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{10}$$

$$T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{10}$$

และ $$y_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{10}\cdot\cos\frac{an\pi t}{10}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, y_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}\cos\frac{an\pi t}{10}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x,0) = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{10}$ ดังนั้น

$$\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{10} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ เพราะฉะนั้นใช้สูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{2}{10}\int_0^{10}\left(\frac{1}{2}\sin^2\frac{\pi x}{10}\right)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^{10}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi x}{10}\right)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx$$

$$= \frac{1}{20}\left[\int_0^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx - \int_0^{10}\cos\frac{2\pi x}{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx\right] \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = \frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\Bigg|_0^{10}$$

$$= -\frac{10}{n\pi}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$= \frac{10}{n\pi}\{1-(-1)^n\} \qquad \text{..........(2)}$$

และ $\int_0^{10} \cos\frac{2\pi x}{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{10}\left\{\sin(n+2)\frac{\pi x}{10} + \sin(n-2)\frac{\pi x}{10}\right\}dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(n+2)\frac{\pi x}{10}}{\frac{(n+2)\pi}{10}} - \frac{\cos(n-2)\frac{\pi x}{10}}{\frac{(n-2)\pi}{10}}\right]\Bigg|_0^{10}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\cos(n+2)\pi - 1}{\frac{(n+2)\pi}{10}}\right\} + \left\{\frac{\cos(n-2)\pi - 1}{\frac{(n-2)\pi}{10}}\right\}\right]$$

เพราะว่า

$$\cos(n+2)\pi = \cos(n\pi+2\pi) = \cos(2\pi+n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

และ $\cos(n-2)\pi = \cos(n\pi-2\pi) = \cos(2\pi-n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{10}\cos\frac{2\pi x}{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n-1}{\frac{(n+2)\pi}{10}} + \frac{(-1)^n-1}{\frac{(n-2)\pi}{10}}\right]$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2}\left[\frac{10}{(n+2)\pi} + \frac{10}{(n-2)\pi}\right]$$

$$= \frac{5}{\pi}\{1-(-1)^n\}\left[\frac{n-2+n+2}{n^2-4}\right]$$

$$= \frac{10n[1-(-1)^n]}{\pi(n^2-4)} \qquad \text{..........(3)}$$

ดังนั้น แทนค่า (2) และ (3) ใน (1)

$$b_n = \frac{1}{20}\left[\frac{10}{n\pi}\{1-(-1)^n\} - \frac{10n\{1-(-1)^n\}}{\pi(n^2-4)}\right]$$

$$= \frac{\{1-(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{1}{n} - \frac{n}{n^2-4}\right]$$

$$= \frac{\{1-(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{n^2-4-n^2}{n(n^2-4)}\right]$$

$$= \frac{2\{(-1)^n-1\}}{\pi n(n^2-4)} \quad ; \quad n \neq 2$$

คำตอบของโจทย์ข้อนี้ คือ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\{(-1)^n-1\}}{\pi n(n^2-4)} \sin\frac{n\pi x}{10} \cos\frac{an\pi t}{10}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{1(-3)}\sin\frac{\pi x}{10}\cos\frac{a\pi t}{10} + 0 - \frac{2}{3(5)}\sin\frac{3\pi x}{10}\cos\frac{3a\pi t}{10}\right.$$

$$\left. + 0 - \frac{2}{5(21)}\sin\frac{5\pi x}{10}\cos\frac{5a\pi t}{10} + \ldots\right]$$

$$= -\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1(-3)}\sin\frac{\pi x}{10}\cos\frac{a\pi t}{10} + \frac{1}{3\cdot5}\sin\frac{3\pi x}{10}\cos\frac{3a\pi t}{10}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5(21)}\sin\frac{5\pi x}{10}\cos\frac{5a\pi t}{10} + \ldots\right]$$

ดังนั้น

$$y(x,t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)(4n^2-4n-3)}\right]\sin(2n-1)\frac{\pi x}{10}\cos(2n-1)\frac{\pi at}{10}$$

3. $y(0,t) = y(10,t) = y_t(x,0) = 0$ และ

$$y(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x}{20} & \text{สำหรับ } 0 \leqslant x \leqslant 5 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{x}{20} & \text{สำหรับ } 5 \leqslant x \leqslant 10 \end{cases}$$

วิธีทำ เนื่องจากโจทย์ข้อนี้มีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น $y_t(x, 0) = 0$ ซึ่งเหมือนกับโจทย์ข้อ 1 ต่างกันตรงเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0)$ ดังนั้น

จาก $\qquad \lambda = \dfrac{n\pi}{10} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

สมมุติให้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{10} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่า λ ในคำตอบ $X(x)$ และ $T(t)$ จะได้

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{10}$$

$$T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{10}$$

เพราะฉะนั้น

$$y_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t) = \sin\frac{n\pi x}{10}\cos\frac{an\pi t}{10}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}\cos\frac{an\pi t}{10}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{10}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น สูตรหา b_n คือ

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2}{10}\int_0^{10} y(x, 0)\ \sin\frac{n\pi x}{10}\,dx \\
&= \frac{2}{10}\left[\int_0^{5}\left(\frac{x}{20}\right)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx + \int_5^{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{20}\right)\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx\right] \\
&= \frac{2}{10}\left[\frac{1}{20}\int_0^{5} x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\int_5^{10}\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx - \frac{1}{20}\int_5^{10} x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx\right] \qquad \text{..........(1)}
\end{aligned}
$$

อินทิเกรตทีละส่วนอินทิกรัลพจน์ที่หนึ่งและสามจะได้

$$
\begin{aligned}
\int_0^{5} x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx &= x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right)\Bigg|_0^5 + \int_0^5 + \frac{\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\,dx \\
&= \frac{-50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{10}\Bigg|_0^5 \\
&= \frac{-50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right] \\
&= \frac{-50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \text{..........(2)}
\end{aligned}
$$

$$\int_5^{10} \sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = \frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\Big|_5^{10}$$

$$= \frac{-10}{n\pi}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{10}{n\pi}(-1)^n \quad \text{..........(3)}$$

และ $$\int_5^{10} x\sin\frac{n\pi x}{10}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\right)\Big|_5^{10} + \int_5^{10}\frac{\cos\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}}\,dx$$

$$= \frac{-10}{n\pi}\left[10\cos n\pi - 5\cos\frac{n\pi}{2}\right] + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{10}\Big|_5^{10}$$

$$= \frac{50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{100}{n\pi}(-1)^n$$

$$+ \frac{100}{n^2\pi^2}\left[\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{100}{n\pi}(-1)^n - \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \quad \text{..........(4)}$$

แทนค่า (2), (3) และ (4) ใน (1)

$$b_n = \frac{2}{10}\left[\frac{1}{20}\left\{\frac{-50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{10}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right.\right.$$

$$\left. - \frac{10}{n\pi}(-1)^n\right\} - \frac{1}{20}\left\{\frac{50}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{100}{n\pi}(-1)^n\right.$$

$$\left.\left. - \frac{100}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{10}\left[\frac{-5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} + \frac{5\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} + \frac{5\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} - \frac{5(-1)^n}{n\pi}\right.$$

$$\left. - \frac{5\cos\frac{n\pi}{2}}{2n\pi} + \frac{5(-1)^n}{n\pi} + \frac{5\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}\right]$$

$$= \frac{2}{10}\left[\frac{10}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่า b_n ในคำตอบ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{10}\cos\frac{an\pi t}{10}$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{10}\cos\frac{a\pi t}{10} + 0 - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{10}\cos\frac{3a\pi t}{10}\right.$$

$$\left. + 0 + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{10}\cos\frac{5a\pi t}{10} + 0 - \ldots\right]$$

หรือ $$y(x,t) = \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{10}\cos\frac{(2n-1)a\pi t}{10}$$

4. $y(0,t) = y(2\pi,t) = y(x,0) = 0$

และ $$y_t(x,0) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x = 0, \pi, 2\pi \\ 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < \pi \\ -1 & \text{เมื่อ } \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$$y(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

แทนค่า $y(x,t)$ ในสมการคลื่น จะได้

$$X(x)\,T''(t) = a^2X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$

แล้วสมมุติให้แต่ละด้านเท่ากับ $-\lambda^2$ ดังนั้น

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1\cos\lambda x + c_2\sin\lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3\cos a\lambda t + c_4\sin a\lambda t \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(0,t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$
แทนค่า $x = 0$ ลงใน (1)

$$X(0) = 0 = c_1 + 0$$

หรือ $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $y(2\pi, 0) = 0$ จะได้ $X(2\pi) = 0$
แทนค่า $x = 2\pi$ ลงใน (3)

$$X(2\pi) = c_2 \sin 2\pi\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$

เพราะฉะนั้น

$$\sin 2\pi\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ใช้เงื่อนไข $y(x, 0) = 0$ จะได้ $T(0) = 0$
แทนค่า $t = 0$ ใน (2)

$$T(0) = c_3(1) + c_4(0) = 0$$

หรือ $c_3 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$T(t) = c_4 \sin a\lambda t \qquad \text{..........(4)}$$

สมมุติให้

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่า λ ใน (3) และ (4) จะได้

$$X_n(x) = \sin \frac{nx}{2}$$

$$T_n(t) = \sin \frac{ant}{2}$$

ดังนั้น

$$y_n(x, t) = X_n(x)\, T_n(t)$$

$$= \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{ant}{2}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, y_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2} \sin \frac{ant}{2} \qquad \text{..........(5)}$$

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{nx}{2} \left(\frac{an}{2} \cos \frac{ant}{2} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{an}{2} \right) \sin \frac{nx}{2} \cos \frac{ant}{2} \qquad \text{..........(6)}$$

ใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0)$ โดยแทนค่า $t = 0$ ใน (6)

$$y_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{an}{2} \right) \sin \frac{nx}{2}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น

$$b_n \frac{an}{2} = \frac{2}{2\pi} \int_0^{2\pi} y_t(x, 0) \sin \frac{nx}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} (1) \sin \frac{nx}{2}\, dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-1) \sin \frac{nx}{2}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-\cos \frac{nx}{2}}{\frac{n}{2}} \Big|_0^{\pi} + \frac{\cos \frac{nx}{2}}{\frac{n}{2}} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{2}{n} \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right\} + \frac{2}{n} \left\{ \cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[-\cos \frac{n\pi}{2} + 1 + (-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

หรือ

$$b_n = \frac{4}{\pi a n^2} \left[1 + (-1)^n - 2 \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

แทนค่า b_n ใน (5)

$$Y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi a n^2}\left[1 + (-1)^n \quad 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{ant}{2}$$

$$= \frac{4}{\pi a}\left[0 + \frac{4}{2^2}\sin\frac{2x}{2}\sin\frac{2at}{2} + 0 + 0 + 0\right.$$

$$\left. + \frac{4}{6^2}\sin\frac{6x}{2}\sin\frac{6at}{2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi a}\left[\frac{1}{1^2}\sin x\sin at + \frac{1}{3^2}\sin 3x\sin 3at + \frac{1}{5^2}\sin 5x\sin 5at + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}\right]\sin(2n-1)x\sin(2n-1)at$$

5. $y(0,t) = y(10,t) = y(x,0) = 0$

เมื่อ $y_t(x,0) = \frac{1}{5}\sin\frac{\pi x}{10}$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $y(x,t) = X(x)\,T(t)$

แทนค่าในสมการคลื่นจะได้

$$X(x)\,T''(t) = a^2X''(x)\,T(t)$$

หรือ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{a^2}\dfrac{T''(t)}{T(t)}$ ให้ $= -\lambda^2$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์

$$X''(x) + \lambda^2X(x) = 0$$

$$T''(t) + a^2\lambda^2\,T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1\cos Ax + c_2\sin Ax \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

$$T(t) = c_3\cos a\lambda t + c_4\sin a\lambda t \qquad \ldots\ldots\ldots(2$$

ใช้เงื่อนไข $y(0,t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$

unufii $x = 0$ ใน (I)

$$X(0) = c_1 + 0 = 0$$

หรือ $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(10, t) = 0$ จะได้ $X(10) = 0$

แทนค่า $x = 10$ ใน (3)

$$X(10) = c_2 \sin 10\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 10\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{10} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ใช้เงื่อนไข $y(x, 0) = 0$ จะได้ $T(0) = 0$

แทนค่า $t = 0$ ใน (2)

$$T(0) = c_3 + 0 = 0$$

นั่นคือ $c_3 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$T(t) = c_4 \sin a\lambda t$$

ดังนั้น

$$y(x, t) = c_2 \sin \lambda x (c_4 \sin a\lambda t)$$

$$= E \sin \frac{n\pi x}{10} \sin \frac{an\pi t}{10} \quad \text{เมื่อ } E = c_2 \cdot c_4 \qquad \text{..........(4)}$$

หรือ $y_t(x, t) = E \sin \frac{n\pi x}{10} \left(\frac{an\pi}{10} \cos \frac{an\pi t}{10} \right)$ ....(5)

ใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0) = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi x}{10}$ นั่นคือ แทนค่า $t = 0$ ใน (5)

$$y_t(x, 0) = \frac{1}{5} \sin \frac{\pi x}{10} = E \sin \frac{n\pi x}{10} \left(\frac{an\pi}{10} \right)$$

เทียบสัมประสิทธิ์สมการนี้จะเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

$$E \frac{an\pi}{10} = \frac{1}{5} \quad \text{และ } n = 1$$

หรือ $E = \frac{2}{\pi a}$

แทนค่า E ใน (4)

$$y(x, t) = \frac{2}{\pi a} \sin \frac{\pi x}{10} \sin \frac{a\pi t}{10}$$

6. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$y(0, t) = 0, \ y(2, t) = 0$$

และเงื่อนไขเริ่มต้น

$$y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $y(x, t) = X(x)\,T(t)$

แทนค่า $y(x, t)$ ในสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 9\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$X(x)\,T''(t) = 9X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{9}\,\frac{T''(t)}{T(t)} \quad \text{ให้} = -\lambda^2$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ 2 สมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T''(t) + 9\lambda^2\,T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \cos 3\lambda t + c_4 \sin 3\lambda t \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

$$X(0) = c_1 + 0 = 0$$

หรือ $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(2, t) = 0$ จะได้ $X(2) = 0$

แทนค่า $x = 2$ ใน (3)

$$X(2) = c_2 \sin 2\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 2\lambda = 0 = \sin n\pi$$

หรือ

$$\lambda = \frac{n\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0) = 0$ จะได้ $T'(0) = 0$
ดิฟเฟอเรนซิเอท (2) เทียบกับ t จะได้

$$T'(t) = -3c_3\lambda \sin 3\lambda t + 3c_4\lambda \cos 3\lambda t$$

แทนค่า $t = 0$

$$T'(0) = 0 + 3c_4\lambda = 0$$

แต่ $\lambda \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$c_4 = 0$$

และ

$$T(t) = c_3 \cos 3\lambda t$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} y(x, t) &= X(x)\, T(t) \\ &= c_2 \sin \lambda x\, c_3 \cos 3\lambda t \\ &= E \sin \frac{n\pi x}{2} \cos \frac{3n\pi t}{2} \end{aligned}$$

เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x$ ซึ่งมีไซน์อยู่ 2 พจน์ ดังนั้น จะต้องสร้างคำตอบใหม่โดยวิธีวางซ้อน นั่นคือ สมมุติให้

$$y(x, t) = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{2} \cos \frac{3n_2\pi t}{2} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{2} \cos \frac{3n_2\pi t}{2}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $y(x, 0)$ จะได้

$$y(x, 0) = 20 \sin 2\pi x - 10 \sin 5\pi x = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{2} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{2}$$

เทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E_1 = 20 \quad , \quad E_2 = -10$$

$$n_1 = 4 \quad , \quad n_2 = 10$$

ดังนั้น

$$y(x, t) = 20 \sin 2\pi x \cos 6\pi t - 10 \sin 5\pi x \cos 15\pi t$$

8. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < \pi , t > 0$$

$$y(0, t) = 0 \quad , \quad y(\pi, t) = 0$$

$$y(x, 0) = 0.1 \sin x + 0.01 \sin 4x \quad \text{และ} \quad y_t(x, 0) = 0$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $\quad y(x, t) = X(x)\, T(t)$

แทนค่า $y(x, t)$ ในสมการคลื่น

$$X(x)\, T''(t) = 4\, X''(x)\, T(t)$$

หรือ $\quad \dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{4} \dfrac{T''(t)}{T(t)}$ ให้ $= -\lambda^2$

จะได้คำตอบ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \cos 2\lambda t + c_4 \sin 2\lambda t \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$
แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

$$X(0) = c_1 + 0 = 0$$

หรือ
$$c_1 = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(\pi, t) = 0$ จะได้ $X(\pi) = 0$
แทนค่า $x = \pi$ ใน (3)

$$X(\pi) = c_2 \sin \lambda\pi = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin \lambda\pi = 0 = \sin n\pi$$
$$\lambda = n \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0) = 0$ จะได้ $T'(0) = 0$
ดิฟเฟอเรนซิเอท (2) เทียบกับ t แล้วแทนค่า $t = 0$ จะได้

$$T'(t) = -2\lambda c_3 \sin 2\lambda t + 2\lambda c_4 \cos 2\lambda t$$
$$T'(0) = 0 + 2\lambda c_4 = 0$$

แต่ $\lambda = n \neq 0$ เพราะว่า $n = 1, 2, 3, \ldots$
เพราะฉะนั้น

$$c_4 = 0$$

และ
$$T(t) = c_3 \cos 2\lambda t \qquad \text{..........(4)}$$

ดังนั้น

$$y(x, t) = c_2 \sin \lambda x (c_3 \cos 2\lambda t)$$
$$= E \sin nx \cos 2nt \quad ; \quad E = c_2 \cdot c_3$$

เนื่องจากเงื่อนไข $y(x, 0)$ มีฟังก์ชันไซน์ 2 พจน์ เพราะฉะนั้นจะต้องสร้างคำตอบใหม่โดยวิธีวางซ้อนให้

$$y(x, t) = E_1 \sin n_1 x \cos 2n_1 t + E_2 \sin n_2 x \cos 2n_2 t$$

แทนค่า $t = 0$

$$y(x, 0) = 0.1 \sin x + 0.01 \sin 4x = E_1 \sin n_1 x + E_2 \sin n_2 x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E_1 = 0.1 \quad , \quad E_2 = 0.01$$

$$n_1 = 1 \quad , \quad n_2 = 4$$

ดังนั้นคำตอบคือ

$$y(x, t) = 0.1 \sin x \cos 2t + 0.01 \sin 4x \cos 8t$$

9. จากตัวอย่างที่ 5.6 เงื่อนไขขอบคงเดิม ให้เปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นใหม่ นั่นคือกำหนดให้

$$y(x, 0) = 0 \text{ และ } y_t(x, 0) = 0.05x(2 - x)$$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 5.4 คำตอบคือ

$$X(x) = B \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = C \cos 3\lambda t + D \sin 3\lambda t \qquad \text{..........(2)}$$

ดังนั้น

$$y(x, t) = B \sin \lambda x (C \cos 3\lambda t + D \sin 3\lambda t) \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(x, 0) = 0$ จะได้ $T(0) = 0$
แทนค่า $t = 0$ ใน (3)

$$T(0) = C + 0 = 0$$

หรือ $C = 0$

เพราะฉะนั้น

$$T(t) = D \sin 3\lambda t \qquad \text{..........(4)}$$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n\pi}{2}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

แทนค่า λ ใน (1) และ (4) จะได้

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$T_n(t) = \sin\frac{3n\pi t}{2}$$

ดังนั้น

$$y_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$$
$$= \sin\frac{n\pi x}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, y_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2} \quad \text{..........(5)}$$

ดิฟเฟอเรนซิเอท (5) เทียบกับ t

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\left(\frac{3n\pi}{2}\cos\frac{3n\pi t}{2}\right)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $y_t(x,0) = 0.05x\,(2-x)$

$$y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n\pi}{2}b_n\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น

$$\frac{3n\pi}{2}b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 y_t(x,0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$= \int_0^2 0.05x\,(2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$
$$= 0.1\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx - 0.05\int_0^2 x^2\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx \quad \text{..........(6)}$$

พิจารณา

$$\int_0^2 x \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = x\left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \left(\frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right) dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\cos n\pi + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n^2\pi^2}[0]$$

$$= \frac{-4(-1)^n}{n\pi} \qquad \text{..........(7)}$$

$$\int_0^2 x^2 \sin \frac{n\pi x}{2}\, dx = x^2\left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 + \int_0^2 \left(\frac{\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right) 2x\,dx$$

$$= \frac{-8}{n\pi}\cos n\pi + \frac{4}{n\pi}\int_0^2 x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[x\left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right) dx\right]$$

$$= \frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[0 + \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \cos \frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right]$$

$$= \frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{16}{n^3\pi^3}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{16}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad \text{..........(8)}$$

แทนค่า (7) และ (8) ใน (6)

$$\frac{3n\pi}{2} b_n = 0.1\left[\frac{-4(-1)^n}{n\pi}\right] - 0.05\left[\frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{16}{n^3\pi^3}\{(-1)^n - 1\}\right]$$

$$= \frac{-0.4(-1)^n}{n\pi} + \frac{0.4(-1)^n}{n\pi} \frac{0.8}{n^3\pi^3}\{(-1)^n - 1\}$$

$$= \frac{0.8}{n^3\pi^3}[1-(-1)^n]$$

หรือ $b_n = \frac{1.6}{3\pi^4 n^4}[1-(-1)^n]$

แทนค่า b_n ใน (5) จะได้คำตอบ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1.6}{3\pi^4 n^4}[1-(-1)^n]\sin\frac{n\pi x}{2}\sin\frac{3n\pi t}{2}$$

$$\frac{1.6}{3\pi^4}\Big[\frac{2}{1^4}\sin\frac{\pi x}{2}\sin\frac{3\pi t}{2} + 0 + \frac{2}{3^4}\sin\frac{3\pi x}{2}\sin\frac{9\pi t}{2}$$

$$+ 0 + \frac{2}{5^4}\sin\frac{5\pi x}{2}\sin\frac{15\pi t}{2} + \Big]\ldots$$

$$= \frac{3.2}{3\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^4}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2}\sin\frac{3(2n-1)\pi t}{2}$$

11. ขึงลวดเส้นหนึ่ง โดยตรึงจุดปลายทั้งสองที่ $x = 0$ และ $x = \ell$ ที่เวลา $t = 0$ จุดกึ่งกลางของเส้นลวด ถูกดึงให้สูงขึ้นมาเป็นระยะ h จากแนวราบ แล้วปล่อยเส้นลวด จงหาระยะขจัดที่เวลา t ใด ๆ $(t > 0)$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $y(x,t) = X(x)\,T(t)$

แทนค่า $y(x,t)$ ในสมการคลื่น

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

$$X(x)\,T''(t) = a^2\,X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}$$ ให้ $= -\lambda^2$

จะได้คำตอบ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \cos a\lambda t + c_4 \sin a\lambda t \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

$$X(0) = c_1 + 0 = 0$$

หรือ $c_1 = 0$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $y(\ell, t) = 0$ จะได้ $X(\ell) = 0$

แทนค่า $x = \ell$ ใน (3)

$$X(\ell) = c_2 \sin \lambda\ell = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin \lambda\ell = 0 = \sin n\pi$$

หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{\ell}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ใช้เงื่อนไข $y_t(x, 0) = 0$ จะได้ $T'(0) = 0$

ดิฟเฟอเรนชิเอท (2) เทียบกับ t

$$T'(t) = -c_3 a\lambda \sin a\lambda t + c_4 a\lambda \cos a\lambda t$$

แทนค่า $t = 0$

$$T'(0) = 0 + c_4 a\lambda$$

แต่ $a \neq 0$ และ $\lambda \neq 0$ เพราะฉะนั้น $c_4 = 0$

ดังนั้น

$$T(t) = c_3 \cos a\lambda t$$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n\pi}{\ell}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

จะได้ $X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{\ell}$

และ $T_n(t) = \cos\frac{an\pi t}{\ell}$

เพราะฉะนั้น

$$y_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t)$$

$$= \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{an\pi t}{\ell}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, y_n(x,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{an\pi t}{\ell}$$

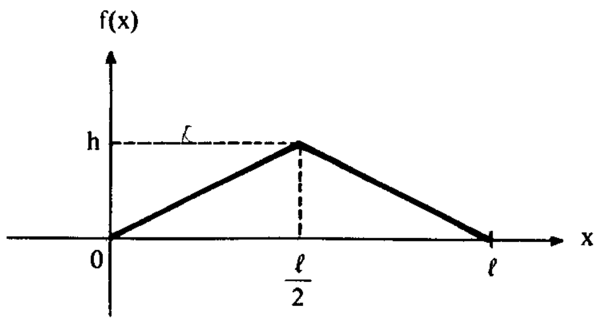
แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $y(x, 0)$ จะได้

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

และ $$y(x,0) = f(x) = \begin{cases} \dfrac{2h}{\ell}x & ; 0 < x < \dfrac{\ell}{2} \\ 2h - \dfrac{2hx}{\ell} & ; \dfrac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

ดูรูปประกอบ



หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} y(x,0)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\int_0^{\ell/2}\left(\frac{2h}{\ell}x\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right.$$

$$\left.+\int_{\ell/2}^{\ell}\left(2h-\frac{2hx}{\ell}\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\frac{2h}{\ell}\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + 2h\int_{\ell/2}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right.$$

$$\left.-\frac{2h}{\ell}\int_{\ell/2}^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right] \qquad \text{..........(4)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{\ell/2} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right)\Bigg|_0^{\ell/2} + \int_0^{\ell/2}\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\,dx$$

$$= \frac{-\ell}{n\pi}\,\frac{\ell}{2}\cos\frac{n\pi}{2} + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_0^{\ell/2}$$

$$= \frac{-\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\left\{\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\}$$

$$= \frac{-\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \text{..........(5)}$$

$$\int_{\ell/2}^{\ell}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = \frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Bigg|_{\ell/2}^{\ell}$$

$$= \frac{-\ell}{n\pi}\left\{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\ell}{n\pi}(-1)^n \qquad \text{..........(6)}$$

$$\int_{\ell/2}^{\ell} x\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\right)\Bigg|_{\ell/2}^{\ell} + \int_{\ell/2}^{\ell}\frac{\cos\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\,dx$$

$$= \frac{-\ell}{n\pi}\left\{\ell\cos n\pi - \frac{\ell}{2}\cos\frac{n\pi}{2}\right\} + \left(\frac{\ell}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{\ell}\Bigg|_{\ell/2}^{\ell}$$

$$= \frac{\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\ell^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\left\{\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\ell^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} \qquad \text{..........(7)}$$

แทนค่า (5), (6) และ (7) ลงใน (4) จะได้

$$b_n = \frac{2}{\ell}\left[\frac{2h}{\ell}\left\{\frac{-\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\right.$$

$$+ 2h\left\{\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\ell}{n\pi}(-1)^n\right\} - \frac{2h}{\ell}\left\{\frac{\ell^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\ell^2}{n\pi}(-1)^n - \frac{\ell^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\frac{-h\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2h\ell}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{2h\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{2h\ell}{n\pi}(-1)^n\right.$$

$$\left. - \frac{h\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{2h\ell}{n\pi}(-1)^n + \frac{2h\ell}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\ell}\left[\frac{4h\ell}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่า b_n จะได้คำตอบ

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right]\sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{an\pi t}{\ell}$$

$$= \frac{8h}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos\frac{a\pi t}{\ell} + 0 - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{\ell}\cos\frac{3a\pi t}{\ell}\right.$$

$$\left. + 0 + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{\ell}\cos\frac{5a\pi t}{\ell} - \ldots\right]$$

หรือ $$y(x, t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\right]\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}\cos\frac{(2n-1)a\pi t}{\ell}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 5.2

สมการความร้อน (Heat equation)

1. ที่หน้าตัด $x = 0$ และ $x = c$ ของแท่งเล็ก ๆ แท่งหนึ่ง มีอุณหภูมิเป็น $0°C$ และอุณหภูมิเริ่มต้น- $f(x)$ คือ $\sin \frac{\pi x}{c}$ จงหาสูตรอุณหภูมิ

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < c, t > 0$$

$$X(x)\, T'(t) = k\, X''(x)\, T(t)$$

หรือ $$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)}$$ ให้ $= -\lambda^2$

จะได้สมการเชิงเอกพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + k\lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-k\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไข $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

$$X(0) = c_1 + 0 = 0$$

หรือ $$c_1 = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $u(c, t) = 0$ จะได้ $X(c) = 0$

แทนค่า $x = c$ ใน (3)

$$X(c) = c_2 \sin \lambda c = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin \lambda c = 0 = \sin n\pi$$

หรือ
$$\lambda = \frac{n\pi}{c}$$

แทนค่า λ ใน (3) และ (2) จะได้

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{c}$$

และ
$$T(t) = c_3 \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2 t}{c^2}\right)$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} u(x, t) &= X(x)\, T(t) \\ &= c_2 \sin \frac{n\pi x}{c}\, c_3 \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2 t}{c^2}\right) \\ &= E \sin \frac{n\pi x}{c} \exp\left(-\frac{kn^2\pi^2 t}{c^2}\right) ;\ E = c_2 \cdot c_3 \end{aligned}$$

เนื่องจากโจทย์ข้อนี้ กำหนดให้อุณหภูมิเริ่มต้น $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{c}$ ซึ่งอยู่ในรูปฟังก์ชันไซน์ล้วน เพราะฉะนั้น ไม่ต้องสร้างคำตอบใหม่โดยวิธีวางซ้อน ให้หาคำตอบโดยการเทียบสัมประสิทธิ์

แทนค่า $t = 0$ ใน $u(x, t)$ แล้วใช้เงื่อนไข $u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{c}$ จะได้

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{c} = E \sin \frac{n\pi x}{c} \cdot (1)$$

เทียบสัมประสิทธิ์ สมการนี้จะเป็นจริงเมื่อ

$$E = 1 \text{ และ } n = 1$$

ดังนั้น คำตอบคือ

$$u(x, t) = \sin \frac{\pi x}{c} \exp\left(-\frac{k\pi^2 t}{c^2}\right)$$

2. จากปัญหาข้อ 1 ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} A & \text{เมื่อ } 0 < x < \frac{c}{2} \\ 0 & \text{เมื่อ } \frac{c}{2} < x < c \end{cases}$$

จงแสดงว่า

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2kt}{c^2}\right) \sin\frac{n\pi x}{c}$$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้เหมือนกับข้อ 1 ต่างกันตรงอุณหภูมิเริ่มแรกเปลี่ยนไป ดังนั้นจากคำตอบข้อ 1 ให้ $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{c}$ จะได้

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{c}$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2kt}{c^2}\right)$$

เพราะว่า

$$u_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$u_n(x, t) = \sin\frac{n\pi x}{c} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2kt}{c^2}\right)$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2kt}{c^2}\right)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้ว ใช้เงื่อนไข เริ่มต้น $u(x, 0)$ ดังนั้น

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{c}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{c}\int_0^c u(x, 0)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \frac{2}{c}\left[\int_0^{c/2} A\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx + \int_{c/2}^{c} (0)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{c}\left[A\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\right)\Bigg|_0^{c/2} + 0\right]$$

$$= \frac{-2A}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

เพราะว่า $\cos\frac{n\pi}{2} = \cos\left\{2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right\} = 1 - 2\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$

เพราะฉะนั้น

$$b_n = \frac{-2A}{n\pi}\left|1 - 2\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right) - 1\right|$$

$$= \frac{4A}{n\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

แทนค่า b_n จะได้คำตอบเป็น

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4A}{n\pi}\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right]\sin\frac{n\pi x}{c}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2kt}{c^2}\right)$$

$$= \frac{4A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{n}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2kt}{c^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{c}$$

3. จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$ ในแท่งแก้ว ซึ่งมีความยาว 50 ซม. $k = 5$ กำหนดให้เงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(0,t) = u(50,t) = 0°C$$

และ $u(x, 0) = 20°C$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $u(x, t) = X(x)\,T(t)$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\ ;\ k = 5$$

จะได้ $X(x)\,T'(t) = 5X''(x)\,T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{5}\frac{T'(t)}{T(t)} \quad \text{ให้} = -\lambda^2$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + 5\lambda^2 T(t) = 0$$

คำตอบของสมการเชิงอนุพันธ์สามัญทั้งสองคือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = C\exp(-5\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$

แทนค่า $x = 0$ ใน (1)

$$X(0) = A(1) + 0 = 0$$

หรือ $$A = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$X(x) = B\sin\lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(50, t) = 0$ จะได้ $X(50) = 0$

แทนค่า $x = 50$ ใน (3)

$$X(50) = B\sin 50\lambda = 0$$

แต่ $B \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 50\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{50} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ให้ $$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{50} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่า λ ใน (2) และ (3) จะได้

$$X_n(x) = B\sin\frac{n\pi x}{50}$$

$$T_n(t) = C\exp\left(\frac{-5n^2\pi^2 t}{(50)^2}\right)$$

ดังนั้น

$$u_n(x, t) = X_n(x)\ T_n(t)$$

$$= \sin\frac{n\pi x}{50}\ \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{500}\right)$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{50}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{500}\right) \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 20$

$$u(x, 0) = 20 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{50}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} (20) \sin \frac{n\pi x}{50}\, dx$$

$$= \frac{4}{5} \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{50}}{\frac{n\pi}{50}} \right) \Big|_0^{50}$$

$$= \frac{-40}{n\pi} \left[\cos n\pi - 1 \right]$$

$$= \frac{40}{n\pi} \left[1 - (-1)^n \right]$$

แทนค่า b_n จะได้คำตอบ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin \frac{n\pi x}{50} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{500} \right)$$

$$= \frac{40}{\pi} \left[\frac{2}{1} \sin \frac{\pi x}{50} \exp\left(\frac{-\pi^2 t}{500} \right) + 0 + \frac{2}{3} \sin \frac{3\pi x}{50} \exp\left(\frac{-9\pi^2 t}{500} \right) \right.$$

$$\left. + 0 + \frac{2}{5} \sin \frac{5\pi x}{50} \exp\left(\frac{-25\pi^2 t}{500} \right) + \ldots \right]$$

$$= \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{50} \exp \frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{500}$$

4. จากปัญหาข้อ 3 จงหาอุณหภูมิที่จุดกึ่งกลางของแท่งแก้ว เมื่อเวลาผ่านไป 5 นาที

วิธีทำ เวลาผ่านไปนาน 5 นาที = 5 × 60 = 300วินาที และจุดกึ่งกลางแท่งแก้ว คือ 25 ดังนั้น แทนค่า $x = 25$ และ $t = 300$ ในคำตอบข้อ 3 จะได้

$$u(25, 300) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} \right] \exp\left[\frac{-(2n-1)^2\pi^2(300)}{500} \right] \sin \frac{(2n-1)25\pi}{50}$$

$$= \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2n-1} \right] \exp\left[\frac{-(2n-1)^2 3\pi^2}{5} \right] \sin \frac{(2n-1)\pi}{2}$$

$$= \frac{80}{\pi} \left[\exp\left(\frac{-3\pi^2}{5} \right)(1) + \frac{1}{3} \exp\left(\frac{-27\pi^2}{5} \right)(-1) \right.$$

$$+ \frac{1}{5} \exp(-15\pi^2)(1) + \frac{1}{7} \exp\left(\frac{-147\pi^2}{5}\right) + \ldots \Big]$$

$$= \frac{80}{\pi} \left[0.0026804713 - 0 + 0 - 0 + \ldots\right]$$

$$= \frac{80}{\pi} (0.0026804713)$$

$$\simeq 0.068 \text{ °C}$$

5. จากปัญหาข้อ 3 จงหาอุณหภูมิที่จุด $x = 10$ จากปลายด้านซ้าย เมื่อเวลาผ่านไปนาน 1 ชั่วโมง

วิธีทำ เวลาผ่านไปนาน 1 ชั่วโมง = 3600 วินาที นั่นคือ แทนค่า $t = 3600$ และ $x = 10$ ในคำตอบข้อ 3 จะได้

$$u(10, 3600) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{2n-1}\right| \exp\left[\frac{-(2n-1)^2\pi^2(3600)}{500}\right] \sin \frac{(2n-1)10\pi}{50}$$

$$= \frac{80}{\pi} \Big[\exp\left(\frac{-36\pi^2}{5}\right) \sin \frac{\pi}{5} + \frac{1}{3} \exp\left(\frac{-324\pi^2}{5}\right) \sin \frac{3\pi}{5}$$

$$+ \frac{1}{5} \exp(-180\pi^2) \sin \pi + \frac{1}{7} \exp\left(\frac{-1764\pi^2}{5}\right) \sin \frac{7\pi}{5} + \ldots\Big]$$

$$= \frac{80}{\pi} \left[1.3757323 \times 10^{-3} (0.5877852) + 0 + 0 + \ldots\right]$$

$$= \frac{80}{\pi} (0.8086351 \times 10^{-31})$$

$$= 20.591723 \times 10^{-31}$$

$$\simeq 2.1 \times 10^{-30} \text{ °C}$$

6. สำหรับแท่งซึ่งยาว 10 ซม. $k = 2$ $u(x, 0) = 10x$ ที่เวลาเริ่มต้น $(t = 0)$ ปลายทั้งสองมีฉนวนหุ้ม (ไม่มีความร้อนไหลผ่านจุดทั้งสอง) เพราะฉะนั้นเงื่อนไขขอบคือ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=10} = 0$ จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร

ให้ $u(x, t) = X(x)\, T(t)$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน เมื่อ $k = 2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$