จะได้ $X(x)\,T'(t) = 2\,X''(x)\,T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2}\,\frac{T'(t)}{T(t)} \text{ ให้ } = -\lambda^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + 2\lambda^2\,T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = C\exp(-2\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0$ จะได้ $X'(0) = 0$

ดิฟเฟอเรนซิเอท (1) เทียบกับ x

$$X'(x) = -A\lambda\sin\lambda x + B\lambda\cos\lambda x$$

แทนค่า $x = 0$ แล้วใช้เงื่อนไข $X'(0) = 0$

$$X'(0) = 0 + B\lambda(1) = 0$$

นั่นคือ $B = 0$ หรือ $\lambda = 0$

เพราะฉะนั้น จาก (1)

$$X(x) = A\cos\lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=10} = 0$ จะได้ $X'(10) = 0$

ดิฟเฟอเรนซิเอท (3) เทียบกับ x

$$X'(x) = -A\lambda\sin\lambda x$$

แทนค่า $x = 10$

$$X'(10) = -A\lambda\sin 10\lambda$$

แต่ $A \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lambda = 0 \text{ หรือ } \sin 10\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{10}\ ;\ n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ให้ $\lambda = \lambda n = \frac{n\pi}{10}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$

ดังนั้น

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{10}$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{100} \right)$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยหลักการวางซ้อน

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{10} \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{100} \right)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{10} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{50} \right)$$

$$= \frac{1}{2} a0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{10} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{50} \right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

ในเมื่อ $A_0 = \frac{1}{2} a_0$ และ $A, = a_n$

แทนค่า t = 0 ลงใน (4) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 10x$

$$u(x, 0) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{10}$$

หรือ

$$10x = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{10}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ ดังนั้นหาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{10} \int_0^{10} (10x)\, dx$$

$$= 2 \int_0^{10} x\, dx$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2} \right)\Big|_0^{10} = 100$$

HIfil a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{10} \int_0^{10} (10x) \cos \frac{n\pi x}{10}\, dx$$

$$= 2 \int_0^{10} x \cos \frac{n\pi x}{10}\, dx$$

$$= 2\left[x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}} \right)\Big|_0^{10} - \int_0^{10}\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{10}}{\frac{n\pi}{10}} \right)dx \right]$$

$$= 2\left[\frac{100}{n\pi}\sin n\pi + \left(\frac{10}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi x}{10}\Big|_0^{10} \right]$$

$$= 2\left[0 + \frac{100}{n^2\pi^2}\{\cos n\pi - 1\} \right]$$

$$= \frac{200}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\}$$

แทนค่า a_0 และ a_n ลงใน (4) จะได้คำตอบเป็น

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(100) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{200}{n^2\pi^2}\{(-1)^n - 1\}\cos\frac{n\pi x}{10}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{50}\right)$$

$$= 50 + \frac{200}{\pi^2}\left[\frac{-2}{1^2}\cos\frac{\pi x}{10}\exp\left(\frac{-\pi^2 t}{50}\right) + 0 \right.$$

$$+ \frac{(-2)}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{10}\exp\left(\frac{-9\pi^2 t}{50}\right) + 0$$

$$\left. + \frac{(-2)}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{10}\exp\left(\frac{-25\pi^2 t}{50}\right) + 0 + \ldots \right]$$

$$= 50 - \frac{400}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{10}\exp\left[\frac{(2n-1)^2\pi^2 t}{50}\right]$$

7. สำหรับแท่งซึ่งยาว 60 cm $k = 1$ $u(x, 0) = x^2$ ปลายทั้งสองมีอุณหภูมิเป็น 0°C จงหาอุณหภูมิ $u(x, t)$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$$u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$X(x)\,T'(t) = X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = c_1 = 0$$

ดังนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(60, t) = 0$ จะได้ $X(60) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(60) = c_2 \sin 60\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ ดังนั้น

$$\sin 60\lambda = 0 = \sin n\pi$$

หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{60}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n\pi}{60}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{60}$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{3600} \right)$$

สร้างคำตอบใหม่โดยวิธีวางซ้อน

$$u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) \cdot T_n(t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{60} \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{3600} \right) \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = x^2$ โดยแทนค่า $t = 0$ ใน (3) จะได้

$$u(x, 0) = x^2 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{60}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ค่าของ b_n หาได้จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{60} \int_0^{60} x^2 \sin \frac{n\pi x}{60}\, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนสองครั้งจะได้

$$b_n = \frac{2}{60} \left[x^2 \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{60}}{\frac{n\pi}{60}} \right) \Big|_0^{60} - 2 \int_0^{60} \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{60}}{\frac{n\pi}{60}} \right) x\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{60} \left[\frac{-(60)^3}{n\pi} (-1)^n + \frac{120}{n\pi} \left\{ x \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{60}}{\frac{n\pi}{60}} \right) \Big|_0^{60} - \int_0^{60} \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{60}}{\frac{n\pi}{60}} \right) dx \right\} \right]$$

$$= \frac{-7200(-1)^n}{n\pi} + \frac{4}{n\pi} \left\{ 0 + \frac{3600}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{60} \Big|_0^{60} \right\}$$

$$= \frac{-7200(-1)^n}{n\pi} + \frac{14400}{n^3\pi^3} \left\{ (-1)^n - 1 \right\}$$

หรือ

$$b_n = 7200 \left[\frac{1}{n\pi} - \frac{4}{n^3\pi^3} \right]$$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคี่

และ $$= 7200 \left[\frac{1}{n\pi} \right]$$ สำหรับ n ที่เป็นเลขคู่

ดังนั้น คำตอบคือ

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{60} \exp \left(\frac{-n^2\pi^2 t}{3600} \right)$$

ในเมื่อ

$$b_n = 7200\left(\frac{1}{n\pi} - \frac{4}{n^3\pi^3}\right) \quad \text{เมื่อ n เป็นเลขคี่}$$

$$= 7200\left(\frac{1}{n\pi}\right) \quad \text{เมื่อ n เป็นเลขคู่}$$

8. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(0, t) = 0 \ , \ u(5, t) = 0$$

และ $u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

จะได้

$$X(x)\,T'(x) = 2\,X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2}\,\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + 2\lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \quad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-2\lambda^2 t) \quad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = c_1 = 0$$

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(5, t) = 0$ จะได้ $X(5) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(5) = c_2 \sin 5\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 5\lambda = 0 = \sin n\pi \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $$\lambda = \frac{n\pi}{5} \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

แทนค่า λ ใน (3) และ (2) จะได้

$$X(x) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{5}$$

$$T(t) = c_3 \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{25} \right)$$

ดังนั้น

$$u(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{5} \cdot c_3 \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{25} \right)$$

$$= E \sin \frac{n\pi x}{5} \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{25} \right) \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

ในเมื่อ $E = c_2 \cdot c_3$
ใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x$
แทนค่า $t = 0$ ใน (4) จะได้

$$u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x = E \sin \frac{n\pi x}{5}$$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E = 10 \quad \text{และ } n = 20$$

แทนค่า E และ n ใน (4) จะได้คำตอบ

$$u(x, t) = 10 \sin 4\pi x \cdot \exp(-32\pi^2 t)$$

9. จากปัญหาข้อ 8 ถ้าเปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x$$

จงหาคำตอบของสมการความร้อน

วิธีทำ จากข้อ 8 คำตอบทั่วไปคือ

$$u(x, t) = E \sin \frac{n\pi x}{5} \exp\left(\frac{-2n^2\pi^2 t}{25}\right)$$

สร้างคำตอบใหม่ เนื่องจากเงื่อนไขเริ่มต้นเปลี่ยนไป และมีสองพจน์ ดังนั้น จะต้องสร้างคำตอบใหม่ให้มี 2 พจน์เหมือนเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$u(x, t) = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{5} \exp\left(\frac{-2n_1^2\pi^2 t}{25}\right) + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{5} \exp\left(\frac{-2n_2^2\pi^2 t}{25}\right)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = 10 \sin 4\pi x - 5 \sin 6\pi x = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{5} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{5}$$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E_1 = 10 \quad , \quad n_1 = 20$$
$$E_2 = -5 \quad , \quad n_2 = 30$$

แทนค่า จะได้คำตอบเป็น

$$u(x, t) = 10 \sin 4\pi x \cdot \exp(-32\pi^2 t) - 5 \sin 6\pi x \cdot \exp(-72\pi^2 t)$$

10. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 6, t > 0$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$u(0, t) = 0 \quad , \quad u(6, t) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$u_n(x, t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right) \sin \frac{n\pi x}{6}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(x, t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right) \sin \frac{n\pi x}{6} \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 3 \\ 0 & ; \quad 3 < x < 6 \end{cases}$

ดังนั้น

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{6}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

$$= \frac{2}{6} \int_0^{6} f(x) \sin \frac{n\pi x}{6} \, dx$$

$$= \frac{2}{6} \left[\int_0^{3} (1) \sin \frac{n\pi x}{6} \, dx + \int_3^{6} (0) \sin \frac{n\pi x}{6} \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{6} \left[\frac{-\cos \frac{n\pi x}{6}}{\frac{n\pi}{6}} \right] \Bigg|_0^3$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \left[\cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right]$$

แทนค่า b_n ใน (4) จะได้คำตอบเป็น

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left[1 - \cos \frac{n\pi}{2} \right] \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36} \right) \sin \frac{n\pi x}{6}$$

11. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

และ $\quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 3 \\ 0 & ; \quad 3 < x < 6 \end{cases}$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

จะได้ $X(x)\, T'(t) = X''(x)\, T(t)$

หรือ $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = c_1 = 0$$

ดังนั้น

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(6, t) = 0$ จะได้ $X(6) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(6) = c_2 \sin 6\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 6\lambda = 0 = \sin n\pi \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $\lambda = \dfrac{n\pi}{6}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \dfrac{n\pi}{6}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

แทนค่า λ ใน (2) และ (3) จะได้

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{6}$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36} \right)$$

ซึ่งมีเงื่อนไข

$$u_x(0, t) = 0, \; u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$$

ถ้า

(ก) $u(x, 0) = 30 \cos 5x$

(ข) $u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปรให้

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

จะได้ $X(x)\, T'(t) = 3X''(x)\, T(t)$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{3} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + 3\lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบของสมการคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-3\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u_x(0, t) = 0$ จะได้ $X'(0) = 0$ เพราะฉะนั้นดิฟเฟอเรนซิเอท (1) แล้วแทนค่า $x = 0$ จะได้

$$X'(x) = -c_1 \lambda \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x$$

$$X'(0) = c_2 \lambda = 0$$

นั่นคือ

$$c_2 = 0 \text{ หรือ } \lambda = 0$$

แทนค่า c_2 ใน (1)

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = 0$ จะได้ $X\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X\left(\frac{\pi}{2}\right) = c_1 \cos \frac{\pi}{2} \lambda = 0$$

แต่ $c_1 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\cos \frac{\pi}{2} \lambda = 0 = \cos \frac{(2n-1)\pi}{2} \quad ; \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $\lambda = (2n - 1) \; ; \; n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

เพราะว่า

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$u(x, t) = c_1 \cos \lambda x \cdot c_3 \exp(-3\lambda^2 t)$$

$$= E \exp[-3(2n-1)^2 t] \cos(2n-1)x \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 30 \cos 5x$
ดังนั้น

$$u(x, 0) = 30 \cos 5x = E \cos(2n-1)x$$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E = 30 \text{ และ } n = 3$$

แทนค่า E และ n ใน (4) คำตอบคือ

$$u(x, t) = 30 \exp(-75t) \cos 5x$$

(ข) เปลี่ยนเงื่อนไขเริ่มต้นเป็น

$$u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x \qquad \ldots\ldots\ldots.(5)$$

จากคำตอบใน (4) สร้างคำตอบใหม่

$$u(x, t) = E_1 \exp[-3(2n_1 - 1)^2 t] \cos(2n_1 - 1)x$$

$$+ E_2 \exp[-3(2n_2 - 1)^2 t] \cos(2n_2 - 1)x \qquad \ldots\ldots\ldots.(6)$$

แทนค่า $t = 0$ แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น (5)

$$u(x, 0) = 20 \cos 3x - 5 \cos 9x = E_1 \cos(2n_1 - 1)x + E_2 \cos(2n_2 - 1)x$$

เทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E_1 = 20 \quad ; \quad n_1 = 2$$
$$E_2 = -5 \quad ; \quad n_2 = 5$$

แทนค่าเหล่านี้ใน (6) คำตอบคือ

$$u(x, t) = 20\, e^{-27t} \cos 3x - 5e^{-243t} \cos 9x$$

1.2 จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \; ; \; 0 < x < 4 \; ; \; t > 0$$

$$u(0, t) = 0 \quad ; \quad u(4, t) = 0$$
$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x - 2 \sin 5\pi x$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(x, t) = X(x) \; T(t)$$

แทนค่า $u(x, t)$ ในสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

จะได้
$$X(x)\, T'(t) = 2\, X''(x)\, T(t)$$

หรือ
$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{2}\, \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์สองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$
$$T'(t) + 2\lambda^2 T(t) = 0$$

และคำตอบคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$
$$T(t) = c_3 \exp(-2\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = c_1 = 0$$

ดังนั้น จาก (1)

$$X(x) = c_2 \sin \lambda x$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(4, t) = 0$ จะได้ $X(4) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(4) = c_2 \sin 4\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin 4\lambda = 0 = \sin n\pi \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $$\lambda = \frac{n\pi}{4} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

เพราะว่า

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

เพราะฉะนั้น

$$u(x, t) = c_2 \sin \frac{n\pi x}{4}\, c_3 \exp\left(-2\, \frac{n^2\pi^2}{16}\, t \right)$$

$$= E \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{8} \right) \sin \frac{n\pi x}{4} \; ; \; E = c_2 \cdot c_3$$

สร้างคำตอบใหม่ให้สอดคล้องกับเงื่อนไขเริ่มต้น จะได้

$$u(x, t) = E_1 \exp\left(\frac{-n_1^2\pi^2 t}{8} \right) \sin \frac{n_1\pi x}{4} + E_2 \exp\left(\frac{-n_2^2\pi^2 t}{8} \right) \sin \frac{n_2\pi x}{4} \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

แทนค่า $t = 0$ ใน (4) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x - 2 \sin 5\pi x$$

ดังนั้น

$$u(x, 0) = 3 \sin \pi x - 2 \sin 5\pi x = E_1 \sin \frac{n_1\pi x}{4} + E_2 \sin \frac{n_2\pi x}{4}$$

โดยวิธีเทียบสัมประสิทธิ์ สมการจะเป็นจริงเมื่อ

$$E_1 = 3 \quad ; \quad n_1 = 4$$
$$E_2 = -2 \quad ; \quad n_2 = 20$$

แทนค่าเหล่านี้ใน (4) คำตอบคือ

$$u(x, t) = 3 \exp(-2\pi^2 t) \sin \pi x - 2 \exp(-50\pi^2 t) \sin 5\pi x$$

หรือ $$u(x, t) = 3e^{2\pi^2 t} \sin \pi x - 2e^{50\pi^2 t} \sin 5\pi x$$

13. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad ; \quad 0 < x < 6, t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0 \ , \ u_x(6, t) = 0$$

$$u(x, 0) = 2x$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร สมมุติให้

$$u(x, t) = X(x)\, T(t)$$

ทำเหมือนข้อ (10) จะได้คำตอบของฟังก์ชันไม่รู้ค่า (unknow functions) คือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x \qquad \text{..........(1)}$$

และ $$T(t) = c_3 \exp(-\lambda^2 t) \qquad \text{..........(2)}$$

เงื่อนไขขอบ $u_x(0, t) = 0$ จะได้ $X'(x) = 0$ เพราะฉะนั้น

จาก (1) ดิฟเฟอเรนชิเอทเทียบกับ x จะได้

$$X'(x) = -c_1 \lambda \sin \lambda x + c_2 \lambda \cos \lambda x \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า $x = 0$

$$X'(0) = c_2 \lambda = 0$$

ดังนั้น

$$c_2 = 0 \text{ หรือ } \lambda = 0$$

แทนค่า c_2 ใน (3)

$$X'(x) = -c_1 \lambda \sin \lambda x \qquad \text{..........(4)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u_x(6, t) = 0$ จะได้ $X'(6) = 0$ เพราะฉะนั้นแทนค่า $x = 6$ ใน (4)

$$X'(6) = -c_1 \lambda \sin 6\lambda = 0$$

แต่ $c_1 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\lambda = 0 \text{ หรือ } \sin 6\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = \frac{n\pi}{6} \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

นั่นคือ

$$\lambda = \frac{n\pi}{6} \ ; \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

ให้ $\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{6}$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น

$$X_n(x) = \cos\frac{n\pi x}{6}$$

$$T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)$$

และ $u_n(x, t) = X_n(x)\,T_n(t) = \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$

สร้างคำตอบใหม่โดยวิธีวางซ้อน

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n(x, t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6} \qquad \ldots\ldots\ldots.(5)$$

ในเมื่อ $A_0 = \frac{1}{2}a_0$ และ $A_n = a_n$

แทนค่า $t = 0$ ใน (5) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น $u(x, 0) = 2x$

ดังนั้น

$$u(x, 0) = 2x = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{6}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{6}\int_0^{6}(2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}x^2\Big|_0^6$$

$$= 12$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{6}\int_0^6 (2x)\cos\frac{n\pi x}{6}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{6}}{\frac{n\pi}{6}}\right)\Big|_0^6 - \int_0^6\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{6}}{\frac{n\pi}{6}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[0 + \frac{36}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi x}{6}\right)\Big|_0^6\right]$$

$$= \frac{24}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

แทนค่า a_0 และ a_n ใน (5) จะได้คำตอบคือ

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(12) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{24}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$$

$$= 6 + \frac{24}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n - 1]}{n^2}\exp\left(\frac{-n^2\pi^2 t}{36}\right)\cos\frac{n\pi x}{6}$$

14. จงแก้ปัญหาค่าขอบของสมการความร้อน

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \ ; \ 0 < x < \pi, \ t > 0$$

$$u(0,t) = 1 \ , \ u(\pi,t) = 3 \ , \ u(x,0) = 2$$

วิธีทำ เนื่องจากเงื่อนไขขอบของโจทย์ข้อนี้ ไม่เป็นเอกพันธ์ ดังนั้นการแก้ปัญหาข้อนี้ จะใช้วิธีเปลี่ยนตัวแปร $u(x,t)$ ไปเป็นตัวแปร $v(x,t)$ โดยสมการ

$$v(x,t) = u(x,t) - g(x) \qquad \text{..........(1)}$$

ในเมื่อ

$$g(x) = A + \frac{(B-A)}{\ell}x \qquad \text{.........(2)}$$

เพราะว่า $A = 1, B = 3$ และ $\ell = \pi$ เพราะฉะนั้น

$$g(x) = 1 + \frac{2x}{\pi} \qquad \text{..........(3)}$$

และ

$$v(x,t) = u(x,t) - 1 - \frac{2x}{\pi} \qquad \text{..........(4)}$$

เขียนสมการชุดใหม่ในรูปตัวแปร $v(x,t)$ และมีเงื่อนไขขอบแบบเอกพันธ์ นั่นคือ

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ ; \ 0 < x < \pi, \ t > 0 \qquad \text{..........(5)}$$

$v(0, t) = 0$ และ $v(\pi, t) = 0$

$$v(x, 0) = f(x) - g(x) = 2 - (1 + \frac{2x}{\pi}) = 1 - \frac{2x}{\pi}$$

หาคำตอบของสมการชุดใหม่ โดยวิธีแยกตัวแปรให้

$$v(x, t) = X(x) . T(t)$$

แทนค่า $v(x, t)$ ใน (5)

$$X(x)\ T'(x) = X''(x)\ T(t)$$

จะได้

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} - \lambda^2$$

สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการคือ

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

$$T'(t) + \lambda^2 T(t) = 0$$

คำตอบของสมการคือ

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin lx \quad \text{..........(6)}$$

$$T(t) = c_3 \exp(-\lambda^2 t) \quad \text{..........(7)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $v(0, t) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น แทนค่า $x = 0$ ใน (6)

$$X(0) = c_1 = 0$$

ดังนั้น $X(x) = c_2 \sin \lambda x$ ....(8)

ใช้เงื่อนไขขอบ $v(\pi, t) = 0$ จะได้ $X(n) = 0$ เพราะฉะนั้นแทนค่า $x = \pi$ ใน (6)

$$X(\pi) = c_2 \sin \pi\lambda = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin \pi\lambda = 0 = \sin n\pi$$

$$\lambda = n \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ให้ $\lambda = I_n = n \ ; \ n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น

$$X.(x) = \sin nx$$

$$T_n(t) = \exp(-n^2 t)$$

และ $$v_n(x, t) = \exp(-n^2 t) \sin nx$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp(-n^2 t) \sin nx \qquad \text{..........(9)}$$

แทนค่า $t = 0$ ใน (9) แล้วใช้เงื่อนไขเริ่มต้น

$$v(x, 0) = 1 - \frac{2x}{\pi}$$

ดังนั้น

$$v(x, 0) = 1 - \frac{2x}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ หาค่า b_n โดยสูตร

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2x}{\pi}\right) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin nx \, dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos nx}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \left\{ x \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n} \, dx \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1 - \cos n\pi}{n} - \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{-\pi \cos n\pi}{n} - \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} - \frac{(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^n]$$

แทนค่า b_n ใน (9) จะได้

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} [1 + (-1)^n] \exp(-n^2 t) \sin nx$$

แต่ $v(x, t) = u(x, t) - g(x)$

เพราะฉะนั้น

$$u(x, t) = v(x, t) + g(x)$$

หรือ $$u(x, t) = 1 + \frac{2x}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[1 + (-1)^n]}{n}\exp(-n^2 t)\sin nx$$

15. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{สำหรับ } 0 < x < a, 0 < y < b$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบและเงื่อนไขเริ่มต้น

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0$$

และ $$u(x, 0) = f(x)$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(x, y) = X(x)\ Y(y)$$

แทนค่า $u(x, y)$ ในสมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

จะได้

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0$$

หรือ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2$$

จากนี้จะได้สมการเชิงอนุพันธ์สามัญสองสมการ

$$X''(x) + k^2X(x) = 0$$

$$Y''(y) \quad k^2Y(y) = 0$$

และคำตอบของสองสมการนี้คือ

$$X(x) = c_1\cos kx + c_2\sin kx \qquad \text{..........}(1)$$

$$Y(y) = c_3e^{ky} + c_4e^{-ky} \qquad \text{..........}(2)$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(0, y) = 0$ จะได้ $X(0) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(0) = c_1 = 0$$

ดังนั้น

$$X(x) = c_2 \sin kx \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(a, y) = 0$ จะได้ $X(a) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$X(a) = c_2 \sin ka = 0$$

แต่ $c_2 \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin ka = 0 = \sin n\pi \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

หรือ $$k = \frac{n\pi}{a} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ใช้เงื่อนไขขอบ $u(x, b) = 0$ จะได้ $Y(b) = 0$ เพราะฉะนั้น

$$Y(b) = c_3 e^{kb} + c_4 e^{-kb} = 0$$

หรือ $$c_4 = \frac{-c_3 e^{kb}}{e^{-kb}}$$

แทนค่า c_4 ใน (2)

$$\begin{aligned}
Y(y) &= c_3 e^{ky} - \left[\frac{c_3 e^{kb}}{e^{-kb}} \right] e^{-ky} \\
&= c_3 \left[\frac{e^{ky} e^{-kb} - e^{kb} e^{-ky}}{e^{-kb}} \right] \\
&= c_3 e^{kb} \left[e^{-k(b-y)} - e^{k(b-y)} \right] \\
&= -2c_3 e^{kb} \left[\frac{e^{k(b-y)} - e^{-k(b-y)}}{2} \right] \\
&= -2c_3 e^{kb} \sin h \left[k(b - y) \right].
\end{aligned}$$

ให้ $$k = k_n = \frac{n\pi}{a} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้น

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$Y_n(y) = \sin h \left[\frac{n\pi(b - y)}{a} \right]$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน จะได้

$$u(x,\ y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \left| \frac{n\pi(b-y)}{a} \right| \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad \ldots(4)$$

ใช้เงื่อนไข $u(x, 0) = f(x)$ โดยแทนค่า $y = 0$ ใน (4)

$$u(x,\ 0) \;=\; f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad \ldots(5)$$

ดังนั้น (5) คือ อนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน $f(x)$ บนช่วง $(0, a)$

กำหนดให้

$$b_n \;=\; A_n \sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right) \text{ ในเมื่อ}$$

$$b_n \;=\; \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx$$

ดังนั้น สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ใน (4) $A_n = \dfrac{b_n}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}$ แทนค่า A_n ใน (4) จะได้คำตอบ-

$$u(x,\ y) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sinh [\, n\pi (b-y)/a \,]}{\sinh \left(\frac{n\pi b}{a} \right)} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

ในเมื่อ $\qquad b_n = \dfrac{2}{a} \displaystyle\int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx$

16. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \;=\; 0 \qquad \text{สำหรับ } 0 < x < a,\ 0 < y < \infty$$

และ $\qquad u(x, y) \to 0$ เมื่อ $y \to \infty$, $u(0, y) = 0,\ u(a, y) = 0$

และ $\qquad u(x,\ 0) = x(a - x)$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(x, y) \;=\; X(x)\ Y(y)$$

ทำเหมือนข้อ 15 จะได้คำตอบ

$$X(x) \;=\; c_1 \cos kx + c_2 \sin kx \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$Y(y) \;=\; c_3 e^{ky} + c_4 e^{-ky} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

ใช้เงื่อนไข $X(0) = 0$ และ $X(a) = 0$ จะได้

$$X(x) = c_2 \sin kx$$

และ $$k = \frac{n\pi}{a} \; ; \; n = 1, 2, 3,$$

ใช้เงื่อนไข $u(x, \infty) = 0$ จะได้ $Y(\infty) = 0$ เพราะฉะนั้นแทนค่า $y \rightarrow \infty$ ใน (2)

$$Y(\infty) = 0 = c_3 e^{k(\infty)}$$

แต่ $$e^{k(\infty)} \neq 0$$ เพราะฉะนั้น

$$c_3 = 0$$

$$Y(y) = c_4 e^{-ky}$$

ถ้าให้ $$k = k_n = \frac{n\pi}{a} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

ดังนั้น

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}$$

$$Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}}$$

และ $$u_n(x, y) = X_n(x) \cdot Y_n(y) = e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \qquad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

แทนค่า $y = 0$ ใน (3) แล้วใช้เงื่อนไข $u(x, 0) = x(a - x)$

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

หรือ $$x(a - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{a}$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ดังนั้น ส.ป.ส.ของอนุกรมนี้หาได้โดยสูตร

$$b_n = \frac{2}{a} \int_0^a x(a - x) \sin \frac{n\pi x}{a} \, dx$$

$$= 2\int_0^a x \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx - \frac{2}{a}\int_0^a x^2 \sin\frac{n\pi x}{a}\,dx \qquad \dots\dots\dots\dots(4)$$

พิจารณา

$$\int_0^a x\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)\Big|_0^a - \int_0^a\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)dx$$

$$= \frac{-a^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a$$

$$= \frac{-a^2}{n\pi}(-1)^n + \frac{a^2}{n^2\pi^2}\{0-0\}$$

$$\frac{-a^2}{n\pi}(-1)^n \qquad \dots\dots\dots\dots(5)$$

$$\int_0^a x^2\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx = x^2\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)\Big|_0^a - \int_0^a\left(\frac{-\cos\frac{nnx}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)2x\,dx$$

$$= \frac{-a^3}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2a}{n\pi}\int_0^a x\cos\frac{n\pi x}{a}\,dx$$

$$= \frac{-a^3(-1)^n}{n\pi} + \frac{2a}{n\pi}\left[x\left(\frac{\sin\frac{nnx}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)\Big|_0^a - \int_0^a\left(\frac{\frac{nnx}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{a^3(-1)^n}{n\pi} + \frac{2a}{n\pi}\left[0 + \left(\frac{a}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a\right]$$

$$= \frac{-a^3(-1)^n}{n\pi} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3}\left[(-1)^n - 1\right] \qquad \dots\dots\dots\dots(6)$$

แทนค่า (5) และ (6) ลงใน (4)

$$b_n = 2\left[\frac{-a^2(-1)^n}{n\pi}\right] - \frac{2}{a}\left[\frac{-a^3(-1)^n}{n\pi} + \frac{2a^3}{n^3\pi^3}\{(-1)^n - 1\}\right]$$

$$= \frac{-2a^2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2a^2(-1)^n}{n\pi} - \frac{4a^2}{g}\{(-1)^n - 1\}$$

$$= \frac{4a^2}{n^3\pi^3}\{1-(-1)^n\}$$

แทนค่า b_n ใน (3) จะได้คำตอบ

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a^2}{n^3\pi^3}\{1 - (-1)^n\} e^{-\frac{n\pi y}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

หรือ $$u(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-(2n-1)\pi y/a}}{(2n-1)^3} \sin \frac{(2n-1)\pi x}{a}$$

17. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{สำหรับ } \rho < 1, 0 < \phi < \pi$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u(\rho, 0) = u(\rho, \pi) = 0 \text{ และ } u(1, \phi) = \phi(\pi - \phi)$$

วิธีทำ โดยวิธีแยกตัวแปร ให้

$$u(\rho, \phi) = R(\rho)\, \Phi(\phi)$$

แทนค่า $u(\rho, \phi)$ ในสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยจะได้

$$R''(\rho)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho} R'(\rho)\,\Phi(\phi) + \frac{1}{\rho^2} R(\rho)\,\Phi''(\phi) = 0$$

หรือ

$$\rho^2 R''(\rho)\,\Phi(\phi) + \rho R'(\rho)\,\Phi(\phi) + R(\rho)\,\Phi''(\phi) = 0$$

เอา $R(\rho)\,\Phi(\phi)$ หารตลอดสมการ แล้วแยกตัวแปร

$$\rho^2 \frac{R''(\rho)}{R(\rho)} + \rho \frac{R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\phi)}{\Phi(\phi)} = k^2$$

ดังนั้น จะได้สมการสองสมการคือ

$$\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho) - k^2 R(\rho) = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\Phi''(\phi) + k^2 \Phi(\phi) = 0 \qquad \text{..........(2)}$$

คำตอบทั่วไปของ (2) คือ

$$\Phi(\phi) = A\cos k\phi + B\sin k\phi \qquad (3)$$

เพื่อจะหาคำตอบ (1) เราจะแปลง

$$\rho = e^s$$

หรือ $$s = \ln \rho$$

และ $\dfrac{ds}{d\rho} = \dfrac{1}{\rho}$

เพราะฉะนั้น

$$R'(\rho) = \frac{dR}{d\rho} = \frac{dR}{ds} \cdot \frac{ds}{d\rho} = \frac{1}{\rho}\frac{dR}{ds}$$

$$R''(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d^2R}{ds^2} - \frac{1}{\rho^2}\frac{dR}{ds}$$

ดังนั้น (1) สามารถเขียนลดรูปเป็น

$$\frac{d^2R}{ds^2} - k^2R = 0$$

คำตอบทั่วไปของสมการนี้ คือ

$$R(\rho) = Ce^{ks} + De^{-ks}$$

เพราะว่า $e^s = \rho$ เพราะฉะนั้น

$$R(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k} \qquad \text{..........(4)}$$

จากเงื่อนไขขอบ $u(\rho, 0) = 0$ และ $u(\rho, \pi) = 0$ จะได้

$$\Phi(0) = \Phi(\pi) = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$\Phi(0) = A = 0$$

$$\Phi(\phi) = B \sin k\phi$$

และ $\Phi(\pi) = B \sin k\pi = 0$

แต่ $B \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\sin k\pi = 0 = \sin n\pi$$

$$k\pi = n\pi$$

หรือ $k = n \;;\; n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น จะได้คำตอบ

$$\Phi(\phi) = \Phi_n(\phi) = \sin n\phi \;;\; n = 1, 2, 3, \ldots$$

จาก (4) พบว่าเมื่อ $\rho \to 0$ พจน์ $\rho^{-k} \to \infty$ (เพราะว่า $k = n > 0$)
เพราะว่า $\rho = 0$ จะได้ $R(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $D = 0$

ดังนั้น

$$R(\rho) = R_n(\rho) = \rho^n \quad ; \quad n = 1, 2, 3,$$

เพราะฉะนั้น

$$u_n(\rho, \phi) = R_n(\rho)\, \Phi_n(\phi) = \rho^n \sin n\phi \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(\rho, \phi)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^n \sin n\phi \qquad \ldots\ldots..(5)$$

ใช้เงื่อนไข $u(1, \phi) = \Phi(\pi - \phi)$ โดยแทนค่า $\rho = 1$ ใน (5)

$$u(1, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\phi$$

หรือ $\phi(\pi - \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\phi$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ ค่าสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ b_n หาได้จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(\pi - \phi) \sin n\phi \, d\phi$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} \phi \sin n\phi \, d\phi - \int_0^{\pi} (\phi)^2 \sin n\phi \, d\phi \right] \qquad \ldots\ldots\ldots.(6)$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi} \phi \sin n\phi \, d\phi = \phi \left(\frac{-\cos n\phi}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{-\cos n\phi}{n} \right) d\phi$$

$$= \frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \frac{1}{n^2} \sin n\phi \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi(-1)^n}{n} \qquad \ldots\ldots\ldots.(7)$$

$$\int_0^{\pi} (\phi)^2 \sin n\phi \, d\phi = (\phi)^2 \left(\frac{-\cos n\phi}{n} \right) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{-\cos n\phi}{n} \right) 2\phi \, d\phi$$

$$= \frac{-\pi^2 \cos n\phi}{n} + \frac{2}{n} \int_0^{\pi} \phi \cos \phi \, d\phi$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left[\phi\left(\frac{\sin n\phi}{n}\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi\left(\frac{\sin n\phi}{n}\right)d\phi\right]$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left[0 + \frac{\cos n\phi}{n^2}\Big|_0^\pi\right.$$

$$\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\{(-1)^n - 1\} \qquad \ldots\ldots\ldots(8)$$

แทนค่า (7) และ (8) ใน (6)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\left\{\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right\} - \left\{\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\{(-1)^n - 1\}\right\}\right]$$

$$= \frac{-2\pi(-1)^n}{n} + \frac{2\pi(-1)^n}{n} \quad \frac{4}{\pi n^3}\{(-1)^n - 1\}$$

$$= \frac{4}{\pi n^3}\{1 - (-1)^n\}$$

แทนค่า b_n ใน (5) จะได้คำตอบเป็น

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi n^3}\{1 - (-1)^n\}\rho^n \sin n\phi$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho^{(2n-1)}}{(2n-1)^3} \sin (2n-1)\phi$$

18. จงแก้สมการ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0 \quad \text{สำหรับ } \rho < 1, 0 < \phi < \frac{\pi}{2}$$

ซึ่งมีเงื่อนไขขอบ

$$u(\rho, 0) = 0, \ \frac{\partial u}{\partial \phi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0 \text{ และ } u(1, \phi) = \phi$$

วิธีทำ โจทย์ข้อนี้ทำเหมือนข้อ 17 เพราะฉะนั้นจะยกคำตอบทั่วไปสองสมการคือ

$$\Phi(\phi) = A\cos k\phi + B\sin k\phi \qquad \ldots\ldots\ldots(1)$$

และ $$R(\rho) = C\rho^k + D\rho^{-k} \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ใช้เงื่อนไข $u(\rho, 0) = 0$ จะได้ $\Phi(0) = 0$ เพราะฉะนั้น แทนค่า $\phi = 0$ ใน (1)

$$\Phi(0) = A = 0$$

ดังนั้น

$$\Phi(\phi) = B\sin k\phi \qquad \text{..........(3)}$$

ใช้เงื่อนไข $\frac{\partial u}{\partial \phi}\left(\rho, \frac{\pi}{2}\right) = 0$ จะได้ $\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ เพราะฉะนั้นแทนค่า $\phi = \frac{\pi}{2}$ ใน $\Phi'(\phi)$

เพราะว่า $\Phi'(\phi) = -Bk\cos k\phi$

เพราะฉะนั้น $\Phi'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -Bk\cos\frac{k\pi}{2} = 0$

แต่ $B \neq 0$ และ $k \neq 0$ เพราะฉะนั้น

$$\cos\frac{k\pi}{2} = 0 = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2}$$

หรือ $k = 2n - 1 \;;\; n = 1, 2, \ldots$

ให้ $k = k_n = 2n - 1 \;;\; n = 1, 2, \ldots$

ดังนั้น จะได้คำตอบ

$$\Phi(\phi) = \Phi_n(\phi) = \sin(2n-1)\phi$$

จาก (2) เมื่อ $\rho \to 0$ พจน์ $\rho^{-k} \to \infty$ เพราะว่า $\rho = 0$ จะได้ $R(0) = 0$ เพราะฉะนั้น $D = 0$

ดังนั้น

$$R(\rho) = R_n(\rho) = \rho^{(2n-1)} \;;\; n = 1, 2, \ldots$$

เพราะฉะนั้น

$$u_n(\rho, \phi) = \Phi_n(\phi)\,R_n(\rho) = \rho^{(2n-1)}\sin(2n-1)\phi$$

สร้างคำตอบใหม่ โดยวิธีวางซ้อน

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n u_n(\rho, \phi)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \rho^{2n-1}\sin(2n-1)\phi \qquad \text{..........(4)}$$

ใช้เงื่อนไข $u(1, \phi) = \phi$ โดยแทนค่า $\rho = 1$ ใน (4)

$$u(1, \phi) = \phi = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2n-1)\phi$$

ซึ่งอยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชัน ϕ และ $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$ ดังนั้นสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ b_n หาได้จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = \frac{\pi}{2}$ และ $x = \phi$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{\pi/2}\phi\sin\frac{(2n-1)\pi\phi}{\left(\frac{\pi}{2}\right)}\,d\phi \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\phi\sin 2(2n-1)\phi\,d\phi \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\phi\left(\frac{-\cos 2(2n-1)\phi}{2(2n-1)}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{-\cos 2(2n-1)\phi}{2(2n-1)}\right)d\phi\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi\cos(2n-1)\pi}{4(2n-1)} + \frac{\sin 2(2n-1)\phi}{4(2n-1)^2}\Big|_0^{\pi/2}\right] \\
&= \frac{4}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)}{4(2n-1)} + \frac{\sin(2n-1)\pi - 0}{4(2n-1)^2}\right] \\
&= \frac{1}{2n-1}\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

แทนค่า b_n ใน (4) จะได้คำตอบ

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\rho^{2n-1}\sin(2n-1)\phi$$