บทที่ 4
อินทิกรัลฟูเรียร์
(Fourier integral)

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ (The Fourier integral formula)

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos [\alpha(u - x)]\, du\, d\alpha$$

ในเมื่อ $-\infty < x < \infty$

หรือเขียนใหม่เป็น

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cos \alpha u \cos \alpha x\, du + \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \sin \alpha u \sin \alpha x\, du \right] d\alpha$$

ในกรณีที่ $f(x)$ นิยามเพียงครึ่งช่วง $0 < x < \infty$ จะได้สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์สองสูตรคือ

1. สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ (Fourier cosine integral formula)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} f(u) \cos \alpha u\, du \right] \cos \alpha x\, d\alpha$$

2. สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ (Fourier sine integral formula)

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \left[\int_{0}^{\infty} f(u) \sin \alpha u\, du \right] \sin \alpha x\, d\alpha$$

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (Fourier integral formula in exponential form)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \to \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{-i\alpha x} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{i\alpha u}\, du\, d\alpha$$

เฉลยแบบฝึกหัด 4.1

กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } |x| < 1 \\ 0 & \text{เมื่อ } |x| > 1 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 1 \text{ และ } x = -1 \end{cases}$$

ดังนั้น จงแสดงว่า สำหรับทุกค่า x $(-\infty < x < \infty)$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin[\alpha(1-x)] + \sin[\alpha(1+x)]}{\alpha}\, d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin \alpha \cos ax}{\alpha}\, d\alpha$$

วิธีทำ จากสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) \cos \alpha(u-x)\, du\, da \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณาอินทิกรัล

$$\int_{-\infty}^\infty f(u) \cos \alpha(u-x)\, du = \int_{-\infty}^{-1} (0) \cos \alpha(u-x)\, du + \int_{-1}^1 (1) \cos \alpha(u-x)\, du$$

$$+ \int_1^\infty (0) \cos \alpha(u-x)\, du$$

$$= \int_{-1}^1 \cos \alpha(u-x)\, du$$

$$= \frac{\sin \alpha(u-x)}{\alpha}\Bigg|_{-1}^1$$

$$= \frac{\sin \alpha(1-x) - \sin \alpha(-1-x)}{a}$$

$$= \frac{\sin a(1-x) + \sin a(1+x)}{a} \qquad \text{..........(2)}$$

แทนค่า (2) ใน (1) จะได้

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin \alpha(1-x) + \sin \alpha(1+x)}{\alpha}\, d\alpha \qquad \text{..........(3)}$$

เพราะว่า $2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

เพราะฉะนั้น

$$\sin \alpha(1 + x) + \sin \alpha(1 - x) = 2 \sin \alpha \cos \alpha x$$

ดังนั้น(3) เขียนใหม่จะกลายเป็น

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha \cos \alpha x \, d\alpha$$

2. จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{เมื่อ } k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{เมื่อ } k < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } k = 0 \end{cases}$$

โดยใช้สูตรการอินทิเกรต (4.27)

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

กรณี $k > 0$

$x = kt$ จะได้ $dx = k\,dt$ ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^\infty \frac{\sin kt}{kt}(k dt)$$

$$= \int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} dt$$

แต่ $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t} dt = \frac{\pi}{2} \qquad \text{..........(1)}$$

กรณี $k < 0$

ให้ $x = -kt$ จะได้ $dx = \quad k dt$ ดังนั้น

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin(-kt)}{(-kt)}(-kdt)$$

$$= -\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\,dt$$

หรือ $\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\,dt = -\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = -\frac{\pi}{2}$ .... (2)

กรณี k = 0

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\,dt = \int_0^\infty \frac{(0)}{t}\,dt = 0$$ ....(3)

จาก (1), (2) และ (3) สรุปได้ว่า

$$\int_0^\infty \frac{\sin kt}{t}\,dt = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{เมื่อ } k > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{เมื่อ } k < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } k = 0 \end{cases}$$ ≠

3. ถ้า $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x < 0 \\ e^{-x} & \text{เมื่อ } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า f สอดคล้องทุกเงื่อนไขในทฤษฎีบทอินทิกรัลฟูเรียร์ และเพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละค่าของ x

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x + \alpha \sin \alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha\,; \quad -\infty < x < \infty$$

วิธีทำ จากสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(u-x)\,du\right] d\alpha$$ ....(1)

พิจารณา

$$\int_{-\infty}^\infty f(u)\cos\alpha(u-x)\,du = \int_{-\infty}^0 (0)\cos\alpha(u-x)\,du + \int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u-x)\,du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u-x)\,du$$ ....(2)

อินทิเกรตทีละส่วน

ให้ $u = \cos\alpha(u - x)$; $dv = e^{-u}$

$du = -a \sin \alpha(u - x)\, du$; $v = -e^{-u}$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du = \cos\alpha(u - x)(-e^{-u})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \alpha e^{-u}\sin\alpha(u - x)\,du$$

$$= (0 + \cos\alpha(0 - x)\} - \alpha\int_0^\infty e^{-u}\sin\alpha(u - x)\,du$$

$$= \cos ax - a\int_0^\infty e^{-u}\sin\alpha(u - x)\,du \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

พิจารณาอินทิกรัลพจน์ที่สอง อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = \sin\alpha(u - x)$; $dv = e^{-u}\,du$

$du = a\cos\alpha(u\ \ x)\,du$; $v = -e^{-u}$

แทนค่าจะได้

$$\int_0^\infty e^{-u}\sin\alpha(u - x)\,dx = \sin\alpha(u - x)(-e^{-u})\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du$$

$$= \{0 + \sin a(0 - x)\} + a\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du$$

$$= -\sin\alpha x + a\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

แทนค่า *(4)* ใน *(3)*

$$\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du = \cos ax - a\left[-\sin ax + a\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u\ \ x)\,du\right]$$

$$= \cos ax + a\sin ax - \alpha^2\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du$$

$$(1 + \alpha^2)\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du = \cos ax + a\sin ax$$

หรือ $$\int_0^\infty e^{-u}\cos\alpha(u - x)\,du = \frac{\cos ax + a\sin ax}{1 + \alpha^2} \qquad \ldots\ldots\ldots(5)$$

ดังนั้น แทนค่า *(5)* ใน *(2)* แล้วแทนค่า *(2)* ใน (1) จะได้

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x + \alpha\sin\alpha x}{1 + \alpha^2}\,d\alpha$$

4. จงพิสูจน์ว่า

$$\exp(-|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos\alpha x}{1 + \alpha^2}\,d\alpha \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \exp(-|x|)$

แทนค่า $x = -x$ **ดังนั้น**

$$f(-x) = \exp(-|-x|) = \exp(-|x|) = f(x)$$

นั่นคือ $f(x) = \exp(-|x|)$ **เป็นฟังก์ชันคู่**

สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(u)\cos\alpha u\,du\right]\cos\alpha x\,d\alpha$$

พิจารณา

$$\int_0^{\infty} f(u)\cos au\,du = \int_0^{\infty} e^{-|u|}\cos au\,du$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u}\cos au\,du$$

พิจารณา

$$\int_0^{\infty} e^{-u}\cos au\,du = \cos\alpha u\,(-e^{-u})\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-u}(a\sin au\,du)$$

$$= -(0-1) - \alpha\int_0^{\infty} e^{-u}\sin\alpha u\,du$$

$$= 1 - \alpha\left[\sin\alpha u\,(-e^{-u})\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-u}(\alpha\cos\alpha u\,du)\right]$$

$$= 1 - a\left[-\{0-0\} + a\int_0^{\infty} e^{-u}\cos au\,du\right]$$

$$= 1 - \alpha^2\int_0^{\infty} e^{-u}\cos\alpha u\,du$$

$$(1+\alpha^2)\int_0^{\infty} e^{-u}\cos au\,du = 1$$

หรือ $$\int_0^{\infty} e^{-u}\cos au\,du = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\frac{1}{1+\alpha^2}\right]\cos\alpha x\,d\alpha$$

หรือ $$\exp(-|x|) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\alpha x}{1+\alpha^2}\,d\alpha$$ #

5. **ถ้ากำหนดให้**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } x \leqslant 0 \text{ และ } x \geqslant \pi \\ \sin x & \text{เมื่อ } 0 \leqslant x \leqslant \pi \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \alpha x + \cos [\alpha(\pi - x)]}{1 - \alpha^2} d\alpha ; \ -\infty < x < \infty$$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง เมื่อเลือก $x = \frac{\pi}{2}$ จงแสดงว่า

$$\int_0^\infty \frac{\cos \frac{\pi\alpha}{2}}{1 - \alpha^2} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$

วิธีทำ สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(u) \cos \alpha(u - x)\, du \right] d\alpha$$

พิจารณา

$$\int_{-\infty}^\infty f(u) \cos \alpha(u - x)\, du = \int_{-\infty}^0 (0) \cos \alpha(u - x)\, du + \int_0^\pi \sin u \cos \alpha(u - x)\, du$$

$$+ \int_\pi^\infty (0) \cos \alpha(u - x)\, du$$

$$= \int_0^\pi \left[\frac{\sin (u + \alpha u - \alpha x) + \sin (u - \alpha u + \alpha x)}{2} \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{-\cos (u + \alpha u - \alpha x)}{1 + \alpha} - \frac{\cos (u - \alpha u + \alpha x)}{1 - \alpha} \right]_0^\pi$$

$$= -\frac{1}{2} \left[\left\{ \frac{\cos (\pi + \alpha\pi - \alpha x) - \cos (-\alpha x)}{1 + \alpha} \right\} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\cos (\pi - \alpha\pi + \alpha x) - \cos (\alpha x)}{1 - \alpha} \right\} \right]$$

เพราะว่า

$$\cos (\pi + \alpha\pi - \alpha x) = \cos [\pi + (\alpha\pi - \alpha x)]$$

$$= -\cos (\alpha\pi - \alpha x)$$

$$= -\cos \alpha(\pi - x)$$

$$\cos (\pi - \alpha\pi + \alpha x) = \cos [\pi - \alpha(\pi - x)]$$

$$= -\cos \alpha(\pi - x)$$

และ $\cos (-\alpha x) = \cos \alpha x$

ดังนั้น แทนค่าจะได้

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(u-x)\,du = -\frac{1}{2}\left[\left\{\frac{-\cos\alpha(\pi-x)-\cos ax}{1+\alpha}\right\}\right.$$

$$\left.+\left\{\frac{-\cos\alpha(\pi-x)-\cos\alpha x}{1-\alpha}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left|\left\{\cos\alpha(\pi-x)+\cos\alpha x\right\}\left\{\frac{1}{1+\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\right\}\right]$$

$$= \frac{\cos ax+\cos\alpha(\pi\quad x)}{2}\left[\frac{2}{1-\alpha^2}\right]$$

$$= \frac{\cos\alpha x+\cos\alpha(\pi-x)}{1-\alpha^2}$$

แทนค่าในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos ax+\cos\alpha(\pi-x)}{1-\alpha^2}\,d\alpha\ ; \qquad \infty < x < \infty$$

ถ้าแทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\cos\alpha\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\alpha^2}\,d\alpha$$

$$1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}+\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{1-\alpha^2}\,d\alpha$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{1-\alpha^2}\,d\alpha$$

หรือ $\int_0^{\infty}\frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{1-\alpha^2}\,d\alpha = \frac{\pi}{2}$ #

6. ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 0 < x < k \\ 0 & \text{เมื่อ } x > k \\ \frac{1}{2} & \text{เมื่อ } x = k \end{cases}$$

จงแสดงว่า สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ประยุกต์ใช้กับ f เขียนแทนในรูป

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos k\alpha}{\alpha}\sin \alpha x\, d\alpha \quad ; \quad x > 0$$

วิธีทำ จากสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)\sin \alpha u\, du\right]\sin \alpha x\, d\alpha$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty f(u)\sin au\, du = \int_0^k (1)\sin au\, du + \int_k^\infty (0)\sin au\, du$$

$$= \frac{-\cos \alpha u}{\alpha}\Big|_0^k$$

$$= \frac{-(\cos ka - 1)}{a}$$

$$= \frac{1-\cos ka}{a}$$

แทนค่าในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1-\cos k\alpha}{\alpha}\sin ax\, da$$

7. ใช้บทแทรกทฤษฎีบท 4.1 และสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์ แสดงว่า

$$e^{-x}\cos x = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^3\sin \alpha x}{\alpha^4+4}\, d\alpha \quad ; \quad x > 0$$

วิธีทำ สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u)\sin au\, du\right]\sin ax\, da$$

พิจารณา

$$\int_0^\infty f(u)\sin au\, du = \int_0^\infty e^{-u}\cos u \sin au\, du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u}\left[\frac{\sin(1+\alpha)u - \sin(1-\alpha)u}{2}\right]du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+\alpha)u\, du - \int_0^\infty e^{-u}\sin(1-\alpha)u\, du\right]$$

จากอินทิกรัลพจน์แรกทางขวามือ

ให้ $U = \sin(1+\alpha)u$; $dV = e^{-u}du$

$dU = (1+a)\cos(1+\alpha)u\,du$; $V = -e^{-u}$

แทนในสูตรอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+\alpha)u\,du = \sin(1+\alpha)u\,(-e^{-u})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-e^{-u})(1+\alpha)\cos(1+\alpha)u\,du$$

$$= -\{0\} + (1+\alpha)\int_0^\infty e^{-u}\cos(1+\alpha)u\,du$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้งหนึ่ง

$$= (1+\alpha)\Big[\cos(1+\alpha)u\,(-e^{-u})\Big|_0^\infty - \int_0^\infty e^{-u}(1+a)\sin(1+a)u\,du \quad 1$$

$$= (1+a)\Big[-\{0-1\} - (1+a)\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+a)u\,du\Big]$$

$$= (1+a) - (1+\alpha)^2\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+a)u\,du$$

ดังนั้น

$$\Big[1+(1+\alpha)^2\Big]\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+\alpha)u\,du = I + a$$

หรือ $$\int_0^\infty e^{-u}\sin(1+a)u\,du = \frac{1+\alpha}{1+(1+\alpha)^2}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\int_0^\infty e^{-u}\sin(1-a)u\,du = \frac{I-a}{1+(1-\alpha)^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\infty f(u)\sin au\,du = \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\alpha}{1+(1+\alpha)^2} - \frac{1-\alpha}{1+(1-\alpha)^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\alpha}{2+2\alpha+\alpha^2} - \frac{1-\alpha}{2-2\alpha+\alpha^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{1+\alpha}{(2+\alpha^2)+2a} - \frac{1-\alpha}{(2+\alpha^2)-2a}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{(1+a)(2-2\alpha+\alpha^2)-(1-a)(2+2a+a')}{(2+\alpha)^2-4\alpha^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{2-\alpha^2+\alpha^3-2+\alpha^2+\alpha^3}{4+4\alpha^2+\alpha^4-4\alpha^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\frac{2\alpha^3}{\alpha^4+4}\Big]$$

$$= \frac{\alpha^3}{\alpha^4 + 4}$$

แทนค่าในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{\alpha^4 + 4} \sin \alpha x \, d\alpha$$

หรือ $$e^{-x} \cos x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^3}{\alpha^4 + 4} \sin \alpha x \, d\alpha$$

8. ใช้สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ และจงพิสูจน์ว่า

$$e^{-x} \cos x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\alpha^2 + 2}{\alpha^4 + 4} \cos \alpha x \, d\alpha \quad ; \quad x \geqslant 0$$

วิธีทำ สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\int_0^\infty f(u) \cos \alpha u \, du \right] \cos \alpha x \, d\alpha$$

ให้ $f(x) = e^{-x} \cos x$

พิจารณา

$$\int_0^\infty f(u) \cos au \, du = \int_0^\infty e^{-u} \cos u \cos au \, du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \left[\frac{\cos (1 + \alpha)u + \cos (1 - \alpha)u}{2} \right] du$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^\infty e^{-u} \cos (1 + \alpha)u \, du + \int_0^\infty e^{-u} \cos (1 - \alpha)u \, du \right]$$

พิจารณาอินทิกรัลขวามือพจน์แรก ให้

$$U = \cos (1 + \alpha)u \quad ; \quad dV = e^{-u} du$$

$$dU = -(1 + a) \sin (1 + \alpha)u \, du \quad ; \quad v = -e^{-u}$$

แทนค่าในสูตรการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^\infty e^{-u} \cos (1 + \alpha)u \, du = \cos (1 + \alpha)u \, (-e^{-u}) \Big|_0^\infty - (1 + a) \int_0^\infty e^{-u} \sin (1 + \alpha)u \, du$$

$$= 1 - (1 + a) \left[\sin (1 + \alpha)u \, (-e^{-u}) \Big|_0^\infty \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty e^{-u} (1 + a) \cos (1 + \alpha)u \, du \right]$$

$$= 1 - (1 + \alpha) \left[0 + (1 + a) \int_0^\infty e^{-u} \cos (1 + \alpha)u \, du \right]$$

$$= 1 - (1+\alpha)^2 \int_0^\infty e^{-u} \cos(1+\alpha)u\, du$$

$$\left[1 + (1+\alpha)^2\right] \int_0^\infty e^{-u} \cos(1+\alpha)u\, du = 1$$

หรือ $$\int_0^\infty e^{-u} \cos(1+a)u\, du = \frac{1}{1+(1+\alpha)^2}$$

ในทำนองเดียวกัน

$$\int_0^\infty e^{-u} \cos(1-\alpha)u\, du = \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}$$

ดังนั้น

$$\int_0^\infty f(u) \cos au\, du = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1+(1+\alpha)^2} + \frac{1}{1+(1-\alpha)^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+(1-\alpha)^2 + 1 + (1+\alpha)^2}{\alpha^4 + 4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1+1-2\alpha+\alpha^2+1+1+2\alpha+\alpha^2}{\alpha^4+4}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4+2\alpha^2}{\alpha^4+4}\right]$$

$$\frac{\alpha^2+2}{\alpha^4+4}$$

แทนค่าในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\alpha^2+2}{\alpha^4+4} \cos \alpha x\, d\alpha \quad ; \quad x \geqslant 0 \qquad \#$$

9. ใช้หัวข้อ 4.4 กับฟังก์ชัน e^{-kx} ในเมื่อ k เป็นค่าคงที่บวก จงแสดงว่า การแปลงฟูเรียร์ไซน์ของฟังก์ชันคือ $\alpha(\alpha^2 + k^2)^{-1}$ เพราะฉะนั้น จะได้

$$e^{-kx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + k^2} d\alpha$$

วิธีทำ สูตรการแปลงฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$F_s(\alpha) = \int_0^\infty f(u) \sin au\, du \quad ; \quad \alpha > 0$$

ดังนั้น

$$F_s(a) = \int_0^\infty e^{-ku} \sin au\, du$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้

$$U = \sin \alpha u \quad ; \quad dV = e^{-ku}\, du$$

$$dU = \alpha \cos \text{ au } du \quad ; \quad V = \frac{-e^{-ku}}{k}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^\infty e^{-ku} \sin \alpha u\, du = \sin \alpha u \left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right) \alpha \cos \alpha u\, du$$

$$= -\frac{1}{k}\{0 - o\} + \frac{\alpha}{k}\int_0^\infty e^{-ku} \cos \alpha u\, du$$

$$= \frac{\alpha}{k}\left[\cos \alpha u \left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)(-\alpha \sin \alpha u\, du)\right]$$

$$= \frac{\alpha}{k}\left[\frac{1}{k} - \frac{\alpha}{k}\int_0^\infty e^{-ku} \sin \alpha u\, du\right]$$

$$= \frac{\alpha}{k^2} - \frac{\alpha^2}{k^2}\int_0^\infty e^{-ku} \sin \alpha u\, du$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right)\int_0^\infty e^{-ku} \sin \alpha u\, du = \frac{\alpha}{k^2}$$

$$\int_0^\infty e^{-ku} \sin \alpha u\, du = \frac{\alpha}{k^2}\left(\frac{k^2}{\alpha^2 + k^2}\right) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$$

หรือ $\quad F_s(\alpha) = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + k^2}$

แทนค่า $F_s(\alpha)$ ในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์ไซน์

จาก $\quad f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty F_s(\alpha) \sin \alpha x\, d\alpha \quad ; \quad x > 0$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha^2 + k^2} \sin \alpha x\, d\alpha$$

หรือ $\quad e^{-kx} = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \frac{\alpha \sin \alpha x}{\alpha^2 + k^2}\, d\alpha \quad ; \quad \alpha > 0$ #

10. ใช้หัวข้อ 4.4 จงพิสูจน์ว่าการแปลงฟูเรียร์โคไซน์ e^{-kx} ในเมื่อ k เป็นค่าคงที่ คือ $k(\alpha^2 + k^2)^{-1}$ เพราะฉะนั้น จงแสดงว่า

$$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi}\int_0^\infty \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + k^2}\, d\alpha \quad ; \quad x \geqslant 0, k > 0$$

วิธีทำ สูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์คือ

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_c(\alpha)\cos ax\ d\alpha$$

ในเมื่อ $F,(a) = \int_0^{\infty} f(u)\cos au\ du$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ku}\cos \alpha u\, du$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้

$u = \cos \alpha u \quad ; \quad dV = e^{-ku}\,du$

$dU = -a \sin au\ du \quad ; \quad V = \frac{-e^{-ku}}{k}$

ดังนั้น

$$\int_0^{\infty} e^{-ku}\cos \alpha u\, du = \cos \alpha u\left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)\Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty}\left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)(-\alpha \sin \alpha u\, du)$$

$$= -\frac{1}{k}\{0-1\} - \frac{\alpha}{k}\int_0^{\infty} e^{-ku}\sin \alpha u\, du$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

$$= \frac{1}{k} - \frac{\alpha}{k}\Big[\sin \alpha u\left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$- \int_0^{\infty}\left(\frac{-e^{-ku}}{k}\right)(\alpha \cos \alpha u\, du)\Big]$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\alpha}{k}\left[-\frac{1}{k}\{0-0\} + \frac{\alpha}{k}\int_0^{\infty} e^{-ku}\cos \alpha u\, du\right]$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{\alpha^2}{k^2}\int_0^{\infty} e^{-ku}\cos au\ du$$

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{k^2}\right)\int_0^{\infty} e^{-ku}\cos \alpha u\, du = \frac{1}{k}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ku}\cos\ \alpha u\ du = \frac{1}{k}\left(\frac{k^2}{\alpha^2 + k^2}\right) = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$$

หรือ $F_c(\alpha) = \frac{k}{\alpha^2 + k^2}$

แทนค่า $F_c(\alpha)$ ในสูตรอินทิกรัลฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{k}{\alpha^2 + k^2} \cos \alpha x \, d\alpha$$

หรือ $$e^{-kx} = \frac{2k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\alpha^2 + k^2} \, d\alpha$$ #