บทที่ 3
คุณสมบัติอื่น ๆ ของอนุกรมฟูเรียร์

เฉลยแบบฝึกหัด 3.1

การหาอนุพันธ์และการอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์

1. จงอินทิเกรตอนุกรมฟูเรียร์ของ $x(\pi - x)(\pi + x)$

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx$$

จาก $-\pi$ ถึง x แล้ว จงแสดงว่า

$$\frac{1}{48}(x^2 - \pi^2)^2 = \frac{\pi^4}{96} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$$

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้

$$x(\pi - x)(\pi + x) = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin nx$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง x

$$\int_{-\pi}^{x} x(\pi^2 - x^2)\,dx = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \int_{-\pi}^{x} \sin nx\,dx$$

$$\pi^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-\pi}^{x} - \frac{x^4}{4} \Big|_{-\pi}^{x} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) \Big|_{-\pi}^{x}$$

$$\frac{\pi^2}{2} [x^2 - (-\pi)^2] - \frac{1}{4}[x^4 - (-\pi)^4] = -12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} [\cos nx - \cos n(-\pi)]$$

$$\frac{\pi^2 x^2}{2} - \frac{\pi^4}{2} - \frac{x^4}{4} + \frac{\pi^4}{4} = -12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos nx + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos n\pi$$

$$-\frac{x^4}{4} + \frac{x^2\pi^2}{2} - \frac{\pi^4}{4} = 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx - 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} (-1)^n$$

เอา -12 หารตลอดสมการ

$$-\frac{1}{4}(x^4 - 2x^2\pi^2 + \pi^4) = -12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^4} + 12 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$$

$$\frac{1}{48}(x^2 - \pi^2)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$$

หรือ $$\frac{1}{48}(x^2 - \pi^2)^2 = C - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} \cos nx$$

หาค่า C

เพราะว่า C $= \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{48}(x^2-\pi^2)^2dx\right]$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi}(x^4 - 2x^2\pi^2 + \pi^4)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\frac{x^5}{5} - 2\pi^2\frac{x^3}{3} + \pi^4 x\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\frac{1}{5}\{\pi^5 - (-\pi)^5\} - \frac{2\pi^2}{3}\{\pi^3 - (-\pi)^3\} + \pi^4\{\pi - (-\pi)\}\right]$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\frac{2\pi^5}{5} - \frac{4\pi^5}{3} + 2\pi^5\right]$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\left(\frac{6-20+30}{15}\right)\pi^5\right]$$

$$= \frac{1}{96\pi}\left[\frac{16}{15}\pi^5\right]$$

$$= \frac{\pi^4}{90}$$

ดังนั้น แทนค่า C จะได้

$$\frac{1}{48}(x^2-\pi^2)^2 = \frac{\pi^4}{90} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx$$

2. จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi < x < \pi$

(ก) $x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x - \frac{3}{2\cdot 4}\sin 3x + \frac{4}{3\cdot 5}\sin 4x - \dots\right)$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) จงแสดงว่า สำหรับ $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$

$$x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \dots\right)$$

(ค) จงอินทิเกรตผลจากข้อ (ข) จาก $-\pi$ ถึง x แล้ว จงแสดงว่า

$$x(1+\cos x) = -2\pi + \frac{3}{2}\sin x - 2\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5} - \dots\right)$$

วิธีทำ (ก) เพราะว่า $f(x) = x \cos x$

แทนค่า x ด้วย $-x$ เพราะฉะนั้น

$$f(-x) = (-x)\cos(-x)$$
$$= -x \cos x$$
$$= -f(x)$$

สรุปได้ว่า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่ นั่นคือ $a_0 = 0$ และ $a_n = 0$

ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x\cos x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\left[\frac{\sin(1+n)x - \sin(1-n)x}{2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi} x\sin(1+n)x\,dx \quad \int_0^{\pi} x\sin(1-n)x\,dx\right] \qquad \ldots\ldots\ldots$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi} x\sin(1+n)x\,dx = x\left(\frac{-\cos(1+n)x}{1+n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos(1+n)x}{1+n}\right)dx$$

$$= \frac{-\pi\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{\sin(1+n)}{(1+n)^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi\cos(1+n)\pi}{1+n} + \frac{\sin(1+n)\pi - 0}{(1+n)^2}$$

เพราะว่า $\cos(1+n)\pi = \cos(\pi + nn) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

$\sin(1+n)\pi = \sin(\pi + nn) = -\sin n\pi = 0$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^{\pi} x\sin(1+n)x\,dx = \frac{-\pi[-(-1)^n]}{1+n} + 0$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{1+n} \qquad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$\int_0^{\pi} x \sin(1-n)x\,dx = x\left(\frac{-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos(1-n)x}{1-n}\right)dx$$

$$= \frac{-\pi\cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{\sin(1-n)x}{(1-n)^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi\cos(\pi-n\pi)}{1-n} + \frac{\sin(1-n)\pi - 0}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{-\pi[-\cos n\pi]}{1-n} + \frac{\sin(\pi-n\pi)}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{-\pi[-(-1)^n]}{1-n} + \frac{\sin n\pi}{(1-n)^2}$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{1-n} \quad ; \quad \sin n\pi = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

แทนค่า (2) และ (3) ใน (1) จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi(-1)^n}{1+n} - \frac{\pi(-1)^n}{1-n}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{-2n}{1-n^2}\right]$$

$$= \frac{2n(-1)^n}{n^2-1} \quad ; \quad n \neq 1$$

หาค่า b_1 ใหม่จากสูตร b_n โดยแทนค่า $n = 1$ ดังนั้น

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos x\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos 2x}{2}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\{\pi\cos 2\pi\} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}(\pi) + \frac{1}{4}\{\sin 2\pi - 0\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2}+0\right]$$

$$\frac{1}{2}$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$$

$$-\frac{1}{2}\sin x + 2\left\{\frac{2}{3}\sin 2x - \frac{3}{8}\sin 3x + \frac{4}{15}\sin 4x - \ldots\right\}$$

หรือ $$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\left(\frac{2}{1\cdot 3}\sin 2x - \frac{3}{2\cdot 4}\sin 3x + \frac{4}{3\cdot 5}\sin 4x - \ldots\right)$$

(ข) ใช้ผลจากข้อ (ก) เพราะว่า

$$x\cos x = -\frac{1}{2}\sin x + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\sin nx$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง x จะได้

$$\int_{-\pi}^{x} x\cos x\,dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x}\sin x\,dx + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\int_{-\pi}^{x}\sin nx\,dx$$

$$x\sin x\Big|_{-\pi}^{x} - \int_{-\pi}^{x}\sin x\,dx = \frac{1}{2}\cos x\Big|_{-\pi}^{x} + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{x}$$

$$x\sin x + \pi\sin(-\pi) + \cos x\Big|_{-\pi}^{x} = \frac{1}{2}\{\cos x - \cos(-\pi)\}$$

$$-2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\{\cos nx - \cos n(-\pi)\}$$

เพราะว่า $\sin(-\pi) = -\sin\pi = 0$ และ $\cos(-\pi) = \cos\pi = -1$
เพราะฉะนั้น

$$x\sin x + \cos x - \cos(-\pi) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(-1) - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$$

$$+ 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2-1}$$

$$x\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \left[-\frac{1}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2-1}\right] - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx$$

$$= C - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1}\cos nx$$

ดังนั้น

$$C = \frac{1}{2}a_0 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x\sin x + \frac{1}{2}\cos x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos x\,dx\right]$$

พิจารณา

$$\int_{-\pi}^{\pi} x\sin x\,dx = x(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}(-\cos x)\,dx$$

$$= -\{\pi\cos\pi - (-\pi)\cos(-\pi)\} + \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\{\pi(-1) + \pi(-1)\} + \{\sin\pi - \sin(-\pi)\}$$

$$= -\{-2\pi + 0\}$$

$$= 2\pi$$

และ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \sin\pi - \sin(-\pi) = 0$

แทนค่าใน C จะได้

$$C = \frac{1}{2\pi}\left[2\pi + \frac{1}{2}(0)\right] = 1$$

ดังนั้น

$$x\sin x + \frac{1}{2}\cos x = 1 - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 - 1}\cos nx$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{3}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 3x + \frac{1}{15}\cos 4x \quad\right)$$

$$= 1 - 2\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x - \frac{1}{2\cdot 4}\cos 3x + \frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x \quad - \right)$$

หรือ $x\sin x = 1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3} - \frac{\cos 3x}{2\cdot 4} + \frac{\cos 4x}{3\cdot 5} - \dots\right)$

(ก) อินทิเกรตผลจากข้อ (ข) เทียบกับ x จาก $x = -\pi$ ถึง x

ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{x} x\sin x\,dx = \int_{-\pi}^{x}\left[1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2 - 1}\cos nx\right]dx$$

พิจารณา อินทิกรัลทางซ้ายมือ

$$\int_{-\pi}^{x} x \sin x \, dx = x(-\cos x)\Big|_{-\pi}^{x} - \int_{-\pi}^{x} (-\cos x)\, dx$$

$$= -\{x \cos x - (-\pi)\cos(-\pi)\} + \sin x \Big|_{-\pi}^{x}$$

$$= [x\cos x + \pi \cos \pi\} + \{\sin x - \sin(-\pi)\}$$

$$= -\{x \cos x + \pi(-1)\} + \{\sin x + \sin \pi\}$$

$$= -x\cos x + \pi + \sin x \;; \quad \sin \pi = 0$$

พิจารณา อินทิกรัลทางขวามือ

$$\int_{-\pi}^{x} \Big[1 - \frac{1}{2}\cos x - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}\cos nx\Big] dx$$

$$= \int_{-\pi}^{x} (1)\, dx - \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{x} \cos x\, dx - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\int_{-\pi}^{x} \cos nx\, dx$$

$$= x\Big|_{-\pi}^{x} - \frac{1}{2}\sin x\Big|_{-\pi}^{x} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{x}$$

$$= \{x - (-\pi)\} - \frac{1}{2}\{\sin x - \sin(-\pi)\} - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\left\{\frac{\sin nx - \sin n(-\pi)}{n}\right\}$$

$$= x + \pi - \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}\left\{\frac{\sin nx + \sin n\pi}{n}\right\}$$

$$= x + \pi - \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2-1)}\sin nx \;; \quad \sin n\pi = 0$$

แทนค่าจะได้

$$-x\cos x + \pi + \sin x = x + \pi - \frac{1}{2}\sin x - 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n^2-1)}\sin nx$$

$$-x\cos x - x = -\frac{3}{2}\sin x - 2\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right)$$

เอา -1 คูณตลอด

$$x(1 + \cos x) = \frac{3}{2}\sin x + 2\left(\frac{\sin 2x}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{\sin 3x}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{\sin 4x}{3\cdot 4\cdot 5} - \ldots\right)$$

3. โดยการหาอนุพันธ์ผลลัพธ์ของแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ข) จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right)$$

วิธีทำ จากผลลัพธ์ของแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ข)

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

หาอนุพันธ์ของอนุกรมนี้เทียบกับ x จะได้

$$\frac{d}{dx}[x(\pi - x)] = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}\frac{d}{dx}[\sin(2n-1)x]$$

$$x(-1) + (\pi - x)(1) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}(2n-1)\cos(2n-1)x$$

$$-x + \pi - x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

$$-2x = -\pi + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$

เอา -2 หารตลอดสมการ

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right)$$