บทที่ 2
อนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

สูตรอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series formulas)

สูตรอนุกรมฟูเรียร์แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

1. **ในรูปฟังก์ชันตรีโกณมิติ** (trigonometric form) ซึ่งแบ่งเป็น 3 ลักษณะดังนี้

1.1 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.2 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

1.3 เมื่อ f(x) นิยามนอกเหนือจากข้อ (1.1) และ (1.2) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

ในเมื่อ

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{c}^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ $$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

c คือ ค่าคงที่ตามใจชอบ ซึ่งจะแทนด้วยค่าต่ำสุดในช่วงที่ f(x) นิยาม

2. ในรูปเชิงซ้อน (complex form)

2.1 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx$$

2.2 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\, dx$$

2.3 เมื่อ f(x) นิยามในช่วงอื่น ๆ นอกเหนือจากช่วง $(-\pi, \pi)$ หรือ $(-\ell, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\frac{in\pi x}{\ell}}$$

และ $$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{c}^{c+2\ell} f(x)\, e^{-\frac{in\pi x}{\ell}}\, dx$$

ข้อสังเกต การกำหนดช่วงในหัวข้อ 1 และ 2 เป็นแบบเต็มช่วง (full-range)

ดังนั้น ในกรณีที่โจทย์กำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง (half-range) จะได้สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ 2 ลักษณะคือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ f(x) นิยามในช่วง $(0, \pi)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

ในเมื่อ $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\ ;\ n = 0, 1, 2, \ldots$

และสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

ในเมื่อ $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วง $(0, \ell)$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

ในเมื่อ $a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\frac{dx}{\ell};\ n = 0, 1, 2, \ldots$

และสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

ในเมื่อ $b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล (Parserval's Identity formulas)

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล เมื่อกำหนดช่วงแบบเต็มช่วง แบ่งออกได้ 3 ลักษณะคือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาลคือ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วง $(-\ell, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

ลักษณะที่ 3 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วงอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ $(-\pi, \pi)$ หรือ $(-\ell, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\frac{1}{\ell}\int_{c}^{c+2\ell}\{f(x)\}^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล เมื่อกำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง แบ่งออกได้ 2 ลักษณะคือ

ลักษณะที่ 1 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วง $(0, \pi)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\{ f(x) \}^2\, dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

ลักษณะที่ 2 เมื่อ $f(x)$ นิยามในช่วง $(0, \ell)$ สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\{ f(x) \}^2\, dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

สูตรแปลงสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (exponential form) **หรือรูปเชิงซ้อน** (complex form) **ให้อยู่ในรูปฟังก์ชันตรีโกณ**

ความสัมพันธ์ระหว่างสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปชี้กำลัง (exponential form) กับสัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ในรูปตรีโกณมิติ

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

$$c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

และ

$$a_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n})$$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } -\pi < x < 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } 0 < x < \pi \end{cases}$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน $f(x)$ นิยามบนช่วง $(-\pi, \pi)$ ดังนั้นสูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1)\,dx + \int_{0}^{\pi}(0)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[x\Big|_{-\pi}^{0}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}[0-(-\pi)] \\ &= 1 \end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,; \quad n = 1, 2, 3, \ldots \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}\right] \\ &= \frac{1}{\pi}[\sin 0 - \sin n\pi] \\ &= \frac{1}{\pi}(0) \end{aligned}$$

$= \quad 0$ เพราะว่า $\sin 0 = 0$ และ $\sin n\pi = 0$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\ ;\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(1)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}(0)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{0}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left\{\frac{\cos 0 - \cos n(-\pi)}{n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1 + \cos n\pi}{n}\right] \text{ เพราะว่า } \cos(-n\pi) = \cos n\pi$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n\pi} \text{ เพราะว่า } \cos n\pi = (-1)^n$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos nx + \frac{\{(-1)^n - 1\}}{n\pi}\sin nx\right]$$

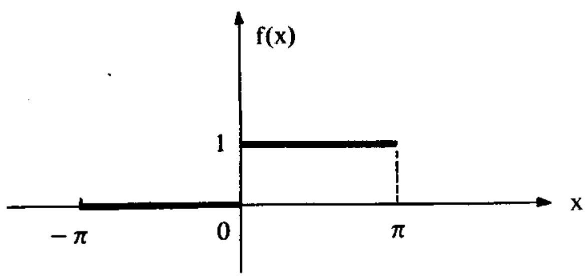
$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}\sin nx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\left(-\frac{2}{1}\sin x + 0 - \frac{2}{3}\sin 3x + 0 - \frac{2}{5}\sin 5x + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

เขียนรูป



2. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = x^2 \text{ เมื่อ } |x| < \pi$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

วิธีทำ เพราะว่า $|x| < \pi$ มีความหมายเหมือนกับ $-\pi < x < \pi$ นั่นคือ โจทย์ข้อนี้บอกให้ทราบว่า $f(x)$ นิยามบนช่วง $(-\pi, \pi)$ ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ที่ใช้คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{R}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{3\pi}[(\pi)^3 - (-\pi)^3]$$

$$= \frac{1}{3\pi}[2\pi^3]$$

$$= \frac{2\pi^2}{3}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a, = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad ; n = 1, 2, 3, .$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2)\cos nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts) ให้

$u = x^2$ และ $dv = \cos nxdx$

$du = 2x\,dx$ และ $v = \frac{\sin nx}{n}$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left| x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)2x\,dx \right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx\right]$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = x$ และ $dv = \sin nx\,dx$

$du = dx$ $\quad v = \dfrac{-\cos nx}{n}$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{-2}{n\pi}\left| x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx \right|$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[-\left\{\frac{\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos(-n\pi)}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[-\left\{\frac{2\pi\cos n\pi}{n}\right\} + 0\right]$$

$$= \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx\,dx$$

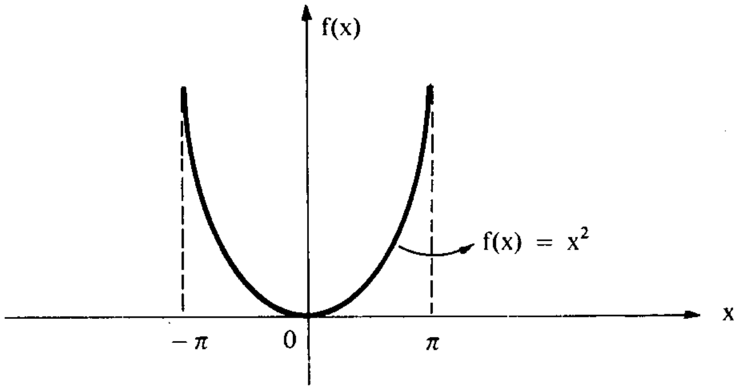
เพราะว่า $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้นจะได้

$$b_n = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

หรือ $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx$



3. จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f(x) ซึ่งนิยามให้

$$f(x) = e^x \text{ สำหรับ } -\pi < x < \pi$$

พร้อมทั้งเขียนรูป

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} e^x \Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}[e^{\pi} - e^{-\pi}]$$

$$= \frac{2\sin h(\pi)}{\pi} \text{ เพราะว่า } \sin h(\pi) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$$

พิจารณา $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$ อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = e^x$ และ $dv = \cos nx\,dx$ ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = e^x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)e^x\,dx$$

$$= 0 - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx$$

พิจารณา $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx$ อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง ให้ $u = e^x$ และ $dv = \sin nx\,dx$ ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = -\frac{1}{n}\left[e^x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)e^x\,dx\right]$$

$$= -\frac{1}{n}\left[-\left\{\frac{e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n(-\pi)}{n}\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n\pi}{n^2} - \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$$

เพราะว่า $\cos n(-\pi) = \cos(-n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$ ดังนั้น

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = \frac{(-1)^n}{n^2}\left[e^{\pi} - e^{-\pi}\right] = \frac{2(-1)^n \sin h(\pi)}{n^2}$$

หรือ
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx = \frac{2(-1)^n \sin h(\pi)}{n^2}\cdot\frac{n^2}{1+n^2}$$

$$= \frac{2(-1)^n \sin h\,(\pi)}{1+n^2}$$

แทนค่าในสูตร a_n จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{2(-1)^n \sin h(\pi)}{1+n^2}\right]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx$$

พิจารณา $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx$ อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = e^x$ และ $dv = \sin nx\,dx$ จะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx = e^x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)e^x\,dx$$

$$= -\left[\frac{e^{\pi}\cos n\pi - e^{-\pi}\cos n(-\pi)}{n}\right] + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$$

พิจารณา $\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx\,dx$ จากข้างบนจะได้

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nxdx = \frac{2(-1)\text{”} \sin h(n)}{1 + n^2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx\,dx = \frac{-\cos n\pi}{n}[e^{\pi} - e^{-\pi}] + \frac{1}{n}\left[\frac{2(-1)^n \sin h(\pi)}{1 + n^?}\right]$$

$$\frac{-2(-1)\text{”} \sin h(n)}{n} + \frac{2(-1)\text{”} \sin h(n)}{n(1 + n)^2}$$

$$= \frac{-2(-1)\text{”} \sin h(n)}{n}\left[1 - \frac{1}{1 + n^2}\right]$$

$$= \frac{2(--1)\text{”} \sin h(n)}{n}\left(\frac{n^2}{1 + n^2}\right)$$

$$= \frac{-2n(-1)\text{”} \sin h(n)}{1 + n^2}$$

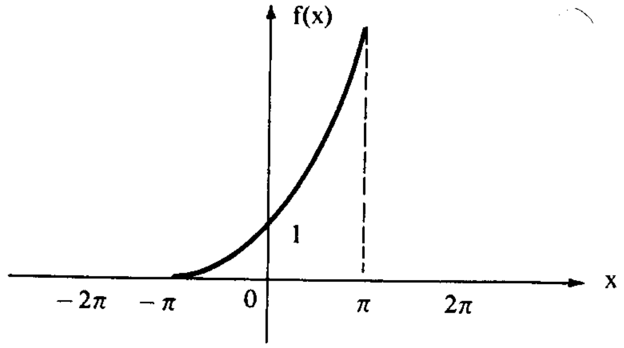
แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin h(\pi)}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2(-1)^n \sin h(\pi)}{1 + n^2}\right\}\cos nx\right.$$

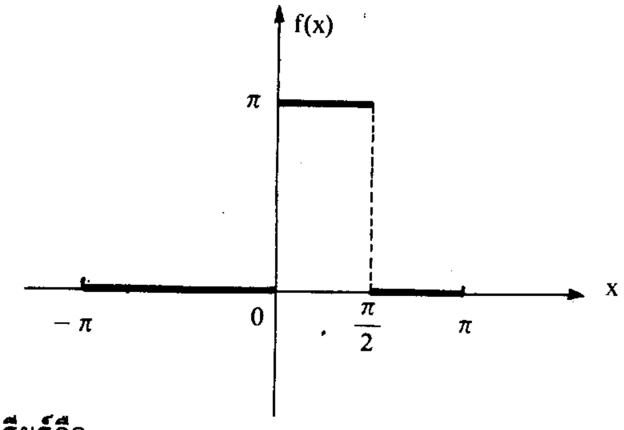
$$\left. + \frac{1}{\pi}\left\{\frac{-2n(-1)^n \sin h(\pi)}{1 + n^2}\right\}\sin nx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{2\sin h(\pi)}{\pi} + \frac{2\sin h(n)}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1 + n^2}(\cos nx - n\sin nx)$$

หรือ $e^x = \frac{2\sinh(\pi)}{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}(\cos nx - n\sin nx)\right]$



4. **ฟังก์ชัน** f(x) **นิยามเป็น** $f(x) = \pi$ **สำหรับ** $0 < x < \frac{\pi}{2}$ **และ** $f(x) = 0$ **ที่อื่น ๆ ในช่วง** $(-\pi, \pi)$ **จงหาอนุกรมฟูเรียร์ พร้อมทั้งเขียนรูป**



วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

จากสูตร $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{\pi/2}\pi\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(0)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \pi x\Big|_0^{\pi/2} + 0\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

จากสูตร $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi/2}(\pi)\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi/2} + 0\right]$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0}{n}$$

$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \quad ; \quad \sin 0 = 0$$

จากสูตร $b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi/2}(\pi)\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(0)\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \pi\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi/2} + 0\right]$$

$$= -\left[\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{n}\right]$$

$$= \frac{1 - \cos\frac{n\pi}{2}}{n}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx + \left\{\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\right\}\sin nx\right]$$

5. จงแสดงว่าสำหรับ $-\pi < x < \pi$

$$\cos\alpha x = \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2\alpha\sin\pi\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}\cos nx$$

ในเมื่อ α ไม่ใช่จำนวนเต็ม จงแสดงเหตุผลสรุปว่า

$$\cot \pi\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2}\right)$$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

จากสูตร $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\alpha\pi}[\sin \pi\alpha - \sin(-\pi)\alpha]$$

$= \frac{1}{\pi\alpha}(2\sin \pi\alpha)$ เพราะว่า $\sin(-\pi\alpha) = -\sin \pi\alpha$

จากสูตร $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \cos nx\,dx$$

เพราะว่า

$$\cos A \cos B = \frac{\cos(A + B) + \cos(A - B)}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos \alpha x \cos nx = \frac{\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x}{2}$$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [\cos(\alpha + n)x + \cos(\alpha - n)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(a+n)x}{(\alpha+n)} + \frac{\sin(a-n)x}{\alpha-n}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\sin(a+n)\pi - \sin(a+n)(-\pi)}{a+n}\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{\sin(\alpha-n)\pi - \sin(\alpha-n)(-n)}{\alpha-n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin(a+n)\pi}{a+n} + \frac{2\sin(a-n)\pi}{a-n}\right]$$

เพราะว่า

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin(a+n)\pi = \sin a\pi\cos n\pi + \cos \alpha\pi\sin n\pi$$

แต่ $\cos n\pi = (-1)^n$ และ $\sin n\pi = 0$ ดังนั้น

$$\sin(a+n)\pi = \sin a\pi\,(-1)^n$$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin(a+n)\pi = \sin a\pi\cos n\pi - \cos a\pi\sin n\pi$$

$$= (-1)^n\sin\alpha\pi$$

แทนค่าใน a_n จะได้

$$a_n = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{a+n} + \frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{a-n}\right]$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n}\right]$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi(-1)^n}{n}\left[\frac{2a}{\alpha^2-n^2}\right]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos \alpha x \sin nx\,dx$$

เพราะว่า $\cos \alpha x$ เป็นฟังก์ชันคู่ เมื่อเทียบกับ α เพราะฉะนั้น $\cos \alpha x \sin nx$ เป็นฟังก์ชันคี่ ดังนั้นจะได้

$$b_n = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \alpha\pi(-1)^n 2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx$$

หรือ

$$\cos \alpha x = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos nx \qquad \#$$

แทนค่า $x = \pi$ จะได้

$$\cos \pi\alpha = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2\alpha \sin \pi\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)} \cos n\pi$$

$$= \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha} + \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha(-1)^n \cdot (-1)^n}{\alpha^2 - n^2}$$

เอา $\sin \pi\alpha$ หารตลอดสมการ

$$\cot \pi\alpha = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}$$

หรือ

$$\cot \pi\alpha = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\right) \qquad \#$$

6. ให้

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\delta} & \text{สำหรับ } |x| < \delta \\ 0 & \text{ที่อื่น ๆ ในช่วง } (-\pi, \pi) \end{cases}$$

ในเมื่อ δ เป็นค่าคงที่บวกซึ่งมีค่าน้อย จงแสดงว่าอนุกรมฟูเรียร์

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\delta}{n\delta} \cos nx$$

วิธีทำ โจทย์กำหนดให้ $f(x) = \frac{1}{2\delta}$ สำหรับ $|x| < \delta$ หมายความว่า $f(x) = \frac{1}{2\delta}$

สำหรับ $-\delta < x < \delta$ และ $f(x) = 0$ ที่อื่น ๆ ในช่วง $(-\pi, \pi)$ หมายความว่า $f(x) = 0$ สำหรับ x ใด ๆ ในช่วง $(-\pi, \pi)$ ยกเว้นบนช่วง $-\delta < x < \delta$ ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\delta}(0)\,dx + \int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{1}{2\delta}\right)dx + \int_{\delta}^{\pi}(0)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{2\delta}\,x\Big|_{-\delta}^{\delta} + 0\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\delta - (-\delta)}{2\delta}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2\delta}{2\delta}\right] = \frac{1}{\pi}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-\delta}(0)\cos nx\,dx + \int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{1}{2\delta}\right)\cos nx\,dx + \int_{\delta}^{\pi}(0)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left| 0 + \frac{1}{2\delta}\ \frac{\sin nx}{n}\ \Big|_{-\delta}^{\delta} + 0 \right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left| \frac{1}{2\delta}\left\{ \frac{\sin n\delta - \sin n(-\delta)}{n} \right\}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left| \frac{2\sin n\delta}{2\delta n} \right|$$

$$= \frac{\sin n\delta}{\pi n\delta}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left| \int_{-\pi}^{-\delta}(0)\sin nx\, dx + \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2\delta}\sin nx\, dx + \int_{-\delta}^{\pi}(0)\sin nx\, dx \right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 + \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}\sin nx\, dx + 0 \right]$$

เพราะว่า $\sin nx$ เป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น $\int_{-\delta}^{\delta}\sin nx\, dx = 0$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{\pi}[0] = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\delta}{\pi n\delta}\cos nx$$

เอา π คูณตลอดสมการ

$$\pi f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\delta}{n\delta}\cos nx \qquad \#$$

จงหาอนุกรมฟูเรียร์ โดยการกระจายฟังก์ชันมีคาบต่อไปนี้ ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบเป็น

7. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$ สำหรับ $-\pi < x < \pi$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

เพราะว่า $\sin \frac{x}{2}$ เป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ $a_0 = 0$ และ $a_n = 0$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin \frac{x}{2} \sin nx \, dx$$

เพราะว่า $\sin A \sin B = \frac{\cos(A - B) - \cos(A + B)}{2}$

เพราะฉะนั้น

$$\sin \frac{x}{2} \sin nx = \frac{\cos\left(\frac{1}{2} - n\right)x - \cos\left(\frac{1}{2} + n\right)x}{2}$$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos\left(\frac{1}{2} - n\right)x - \cos\left(\frac{1}{2} + n\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(\frac{1}{2} - n\right)x}{\left(\frac{1}{2} - n\right)} - \frac{\sin\left(\frac{1}{2} + n\right)x}{\left(\frac{1}{2} + n\right)}\right]\Bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2} - n\right)\pi - \sin\left(\frac{1}{2} - n\right)}{\frac{1}{2} - n}\right\} - \left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi - \sin\left(\frac{1}{2} + n\right)(-\pi)}{\frac{1}{2} + n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\sin\left(\frac{1}{2} - n\right)\pi}{\frac{1 - 2n}{2}} - \frac{2\sin\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi}{\frac{1 + 2n}{2}}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right)}{1 - 2n} - \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\right)}{1 + 2n} \right|$$

เพราะว่า

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - A\right) = \cos A$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)^n$$

และเพราะว่า

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + A\right) = \cos A$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)^n$$

แทนค่าใน b_n จะได้

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left| \frac{(-1)^n}{1 - 2n} - \frac{(-1)^n}{1 + 2n} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}(-1)^n \left| \frac{1}{1 - 2n} - \frac{1}{1 + 2n} \right|$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi} \left| \frac{4n}{1 - 4n^2} \right|$$

$$= \frac{8n(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left| (0)\cos nx + \frac{8n(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)} \sin nx \right|$$

หรือ $\sin\frac{x}{2} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{4n^2 - 1} \sin nx$

8. $f(x) = \begin{cases} 0 \ ; & -\pi < x < 0 \\ x \ ; & 0 < x < \pi \end{cases}$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + bn \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right|$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้ $u = x$ และ $do = \cos nx\,dx$ จะได้ $du = dx$ และ $v = \dfrac{\sin nx}{n}$

ดังนั้น

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

$$= \left\{\frac{\pi\sin n\pi - 0}{n}\right\} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2} \quad \text{เพราะว่า } \sin n\pi = 0$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

แทนค่าใน a_n จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(0)\sin nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้

$$u = x \quad ; \quad dv = \sin nx\,dx$$

$$du = dx \quad ; \quad v = -\frac{\cos nx}{n}$$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left\{\frac{\pi\cos n\pi - 0}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \left\{\frac{\sin n\pi - \sin 0}{n^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n} \quad \text{เพราะว่า } \sin n\pi = \sin 0 = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}\cos nx - \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right]$$

9. $f(x) = \pi^2 - x^2$ เมื่อ $-\pi < x < \pi$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2\{\pi - (-\pi)\} - \frac{1}{3}\{\pi^3 - (-\pi)^3\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[2\pi^3 - \frac{2}{3}\pi^3\right]$$

$$= \frac{4\pi^2}{3}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\pi^2 - x^2)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,dx - \int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\pi^2\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos nx\,dx\right]$$

พิจารณา

$$\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin n\pi - \sin n(-\pi)}{n} = \frac{2\sin n\pi}{n} = 0$$

และอินทิกรัล $\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos nx\,dx$ อินทิเกรตทีละส่วนให้

$$u = x^2 \quad ; \quad dv = \cos nx\,dx$$

$$du = 2x\,dx \quad ; \quad v = \frac{\sin nx}{n}$$

ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nx}{n}(2x\,dx)$$

$$= 0 - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx$$

พิจารณาอินทิกรัลทางขวามือ อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง ให้

$$u = x \quad ; \quad dv = \sin nx\,dx$$

$$du = dx \quad ; \quad v = -\frac{\cos nx}{n}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx\,dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx$$

$$= -\left\{\frac{\pi\cos n\pi - (-\pi)\cos n(-\pi)}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{-2\pi\cos n\pi}{n} + 0$$

$$= \frac{-2\pi(-1)^n}{n}$$

ดังนั้น

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx\,dx = -\frac{2}{n}\left[\frac{-2\pi(-1)^n}{n}\right] = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2}$$

แทนค่าใน a_n จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-4(-1)^n\pi}{n^2}\right] = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2} \; ; \; n \neq 0$$

เพราะว่า $f(x) = \pi^2 - x^2$

แทนค่า $x = -x$ จะได้

$$f(-x) = \pi^2 - (-x)^2 = \pi^2 - x^2 = f(x)$$

แสดงว่า $f(x) = \pi^2 - x^2$ เป็นฟังก์ชันคู่

เพราะฉะนั้น

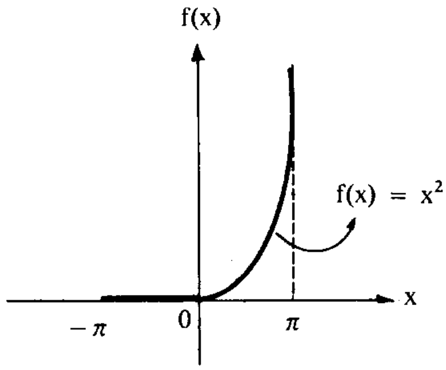
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\sin nx\,dx = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx + (0)\sin nx\right]$$

หรือ
$$\pi^2 - x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx$$

10. $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x^2 & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$



วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{\pi}x^2\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{\pi^2}{3}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\cos nx\,dx + \int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้ง จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}(2x\,dx)\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left\{\frac{\pi^2\sin n\pi - 0}{n}\right\} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\frac{-\pi\cos n\pi - 0}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n} + 0\right];\ \sin n\pi = \sin 0 = 0$$

$$= \frac{2(-1)^n}{n^2}\ ;\ n \neq 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(0)\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}x^2\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\sin nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้ง จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\left(\frac{\cos nx}{n}\right)2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2\cos n\pi - 0}{n} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left\{0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right\}\right]$$

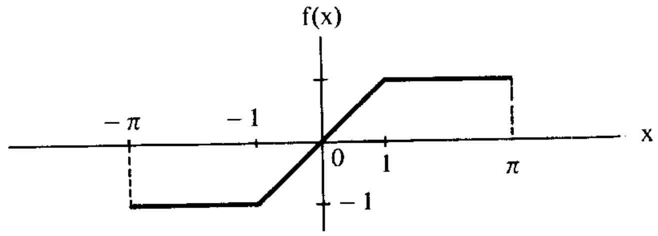
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}\left\{\cos n\pi - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\right]$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2(-1)^n}{n^2}\cos nx + \left\{\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{2}{\pi}\cdot\frac{(-1)^n - 1}{n^3}\right\}\sin nx\right]$$

11. $$f(x) = \begin{cases} -1 & ; \quad -\pi < x < -1 \\ x & ; \quad -1 < x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x < \pi \end{cases}$$



วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-1}(-1)\,dx + \int_{-1}^{1}(x)\,dx + \int_{1}^{\pi}(1)\,dx\right]$$

เพราะว่า x เป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น $\int_{-1}^{1}(x)\,dx = 0$

ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[-x\Big|_{-\pi}^{-1} + x\Big|^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\{(-1)-(-\pi)\} + \{\pi - 1\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[1 - \pi + \pi - 1]$$

$$= 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-1}(-1)\cos nx\,dx + \int_{-1}^{1} x\cos nx\,dx + \int_{1}^{\pi}(1)\cos nx\,dx\right]$$

เพราะว่า x cox nx เป็นฟังก์ชันคี่ เพราะฉะนั้น

$$\int_{-1}^{1} x\cos nx\,dx = 0$$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{-1} + 0 + \frac{\sin nx}{n}\Big|_{1}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\left\{\frac{\sin(-n) - \sin(-n\pi)}{n}\right\} + \left\{\frac{\sin n\pi - \sin n}{n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin n}{n} - \frac{\sin n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin n}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[0]$$

$$= 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{-1}(-1)\sin nx\,dx + \int_{-1}^{1} x\sin nx\,dx + \int_{1}^{\pi}(1)\sin nx\,dx \right]$$

เพราะว่า $x \sin x$ เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้น

$$\int_{-1}^{1} x\sin nx\,dx = 2\int_{0}^{1} x\sin nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$\int_{-1}^{1} x\sin x\,dx = 2\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx \right]$$

$$= 2\left[-\left\{\frac{(1)\cos n - 0}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^1 \right]$$

$$= 2\left[\frac{-\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2} \right]$$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{-1} + 2\left\{-\frac{\cos n}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right\} - \frac{\cos nx}{n}\Big|_1^{\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(-n) - \cos(-n\pi)}{n} - \frac{2\cos n}{n} + \frac{2\sin n}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n}{n} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos n}{n} - \frac{\cos n\pi}{n} - \frac{2\cos n}{n} + \frac{2\sin n}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\cos n}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin n}{n^2} - \frac{\cos n\pi}{n} \right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin n}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n}\right] = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right]$$

แทน a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{\sin n}{n^2}\right]\sin nx$$

เพราะว่า

$$\sin (A - B) = \sin A \cos B - \cos A \sin B$$

เพราะฉะนั้น

$$\sin n(\pi - 1) = \sin n\pi \cos n - \cos n\pi \sin n$$

แต่ $\sin n\pi = 0$ และ $\cos n\pi = (-1)^n$

ดังนั้น

$$\sin n(\pi - 1) = (0) \cos n - (-1)^n \sin n$$

หรือ $\sin n = (-1)^{n+1} \sin n(\pi - 1)$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ จะได้

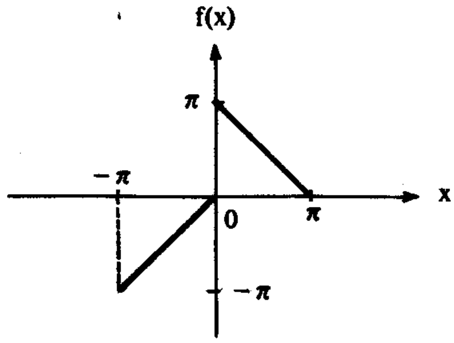
$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{(-1)^{n+1}\sin n(\pi-1)}{n^2}\right]\sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left[1 + \frac{\sin n(\pi-1)}{n}\right]\sin nx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left\{1 + \sin(\pi - 1)\right\}\sin x - \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\sin 2(\pi-1)}{2}\right\}\sin 2x\right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{1}{3}\sin 3(\pi - 1)\right\}\sin 3x - \ldots\right]$$

12. $f(x) = \begin{cases} x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ \pi - x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$



วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (x)\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \pi x\Big|_{0}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{2} + \pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}[0] = 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (x)\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x\cos nx\,dx + \pi\int_{0}^{\pi} \cos nx dx - \int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

พิจารณา

$$\int x\cos nx dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - j\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\pi}^{0} x\,conn\,x\,dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

$$= \left\{\frac{0 - \sin(-n\pi)}{n}\right\} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$= \{0\} + \left\{\frac{1 - \cos(-n\pi)}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{1 - (-1)^n}{n^2}$$

และ $\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$

$$= \left\{\frac{\pi \sin n\pi - 0}{n}\right\} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 + \left\{\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

และ $\int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{\sin n\pi - \sin 0}{n} = 0$

แทนค่าอินทิกรัลเหล่านี้ใน a_n จะได้

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} + \pi(0) - \left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2} + \left\{\frac{1 - (-1)^n}{n^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1 - (-1)^n}{n^2}\right] \quad ; \quad n \neq 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (x) \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} x \sin nx \, dx + \pi\int_0^{\pi} \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx\right]$$

พิจารณา

$$\int x \sin nx \, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) - \int\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_{-\pi}^{0} x \sin nx\, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{-\pi}^{0} + \int_{-\pi}^{0} \frac{\cos nx}{n}\, dx$$

$$= -\left\{\frac{0 + \pi \cos n(-\pi)}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0}$$

$$= \frac{-\pi \cos n\pi}{n} + \left\{\frac{\sin 0 - \sin(-n\pi)}{n^2}\right\}$$

$$= \frac{-\pi(-1)^n}{n}$$

และ $\int_{0}^{\pi} x \sin nx\, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx$

$$= -\left\{\frac{\pi \cos n\pi - 0}{n}\right\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi \cos n\pi}{n} + 0$$

$$= \frac{-\pi(-1)^n}{n}$$

และ $\int_{0}^{\pi} \sin nx\, dx = \frac{-\cos nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} = -\left\{\frac{\cos n\pi - 1}{n}\right\}$

$$= \frac{1-(-1)^n}{n}$$

แทนค่าอินทิกรัลเหล่านี้ลงใน b_n จะได้

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left|\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \pi\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\} - \left\{\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right\}\right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\left|\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \pi\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\} + \frac{\pi(-1)^n}{n}\right|$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{n}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}\cos nx + \left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}\sin nx\right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\}\sin nx$$

ข้อสังเกต

$$1-(-1)^n = \begin{cases} 2 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคี่} \\ 0 & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่} \end{cases}$$

ดังนั้น ถ้าเรากระจายอนุกรมทางขวามือ โดยแทนค่า $n = 1, 2, 3, \ldots$ จะได้

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1^2}\cos x + 0 + \frac{2}{3^2}\cos 3x + 0 + \frac{2}{5^2}\cos 5x + 0 + \ldots\right]$$

$$+ \left[\frac{2}{1}\sin x + 0 + \frac{2}{3}\sin 3x + 0 + \frac{2}{5}\sin 5x + 0 \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right]$$

$$+ 2\left[\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$$

13. $f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad -\pi < x < \pi$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx \quad \text{เพราะว่า } \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\{\pi - (-\pi)\} - \left\{\frac{\sin 2\pi - \sin(-2\pi)}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}[2\pi - 0]$$

$$= 1$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\cos nx\,dx$$

เพราะว่า

$$\cos A\cos B = \frac{\cos(A+B)+\cos(A-B)}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\cos 2x\cos nx = \frac{\cos(2+n)x + \cos(2-n)x}{2}$$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{\cos(2+n)x + \cos(2-n)x}{2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin n\pi - \sin(-n\pi)}{n}\right\} - \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin(2+n)x}{2+n} + \frac{\sin(2-n)x}{2-n}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= 0 - \frac{1}{4\pi}[0];\ n \neq 2$$

หาค่า a_2 ใหม่ จากสูตร

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\cos 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x\,dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$= 0 - \frac{1}{4\pi}\left[x + \frac{\sin 4x}{4}\right]\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\left[\{\pi-(-\pi)\} + \left\{\frac{\sin 4\pi - \sin(-4\pi)}{4}\right\}\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi}[2\pi + 0]$$

$$= -\frac{1}{2}$$

เพราะว่า $f(x) = \sin^2 x$

เพราะฉะนั้น

$$f(-x) = \{\sin(-x)\}^2 = \{-\sin x\}^2 = \sin^2 x = f(x)$$

นั่นคือ $f(x) = \sin^2 x$ **เป็นฟังก์ชันคู่**

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (\sin^2 x)\sin nx\,dx = 0$$

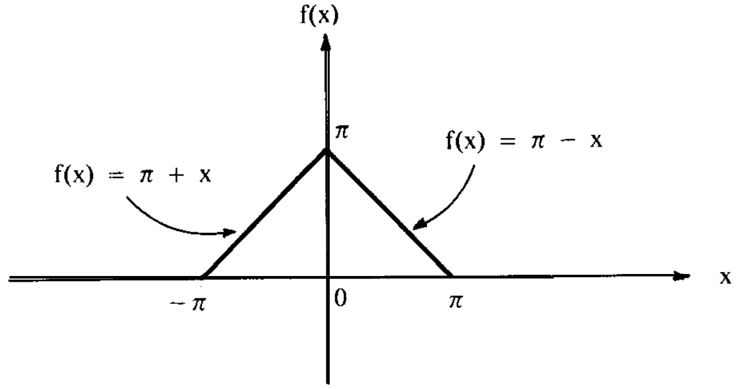
แทนค่า a_0, a_n, a_2 **และ** b_n **ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์**

$$f(x) = \frac{1}{2}(1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x$$

หรือ $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$

14. $f(x) = \begin{cases} \pi + x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ \text{R-X} & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x)



จากรูป จะพบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $b_n = 0$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| \pi x \Big|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\left| \pi^2 - \frac{\pi^2}{2} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2}\right)$$

$$= \pi$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a, = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\,;$$ เพราะว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\,\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\left\{\frac{\sin n\pi - 0}{n}\right\} - \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi(0) - \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้ $u = x$ **และ** $dv = \cos nx\,dx$ **จะได้**

$$\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

$$= \frac{\pi\sin n\pi - 0}{n} + \frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2}$$

แทนค่าใน a_n

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[-\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\}\right]$$

หรือ $a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right] \quad ; \quad n \neq 0$

แทนค่า a_0, a_n **และ** b_n **ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์**

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right]\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1^2}\cos x + 0 + \frac{2}{3^2}\cos 3x + 0 + \frac{2}{5^2}\cos 5x + 0 + \dots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.2

1. จงกระจายฟังก์ชัน

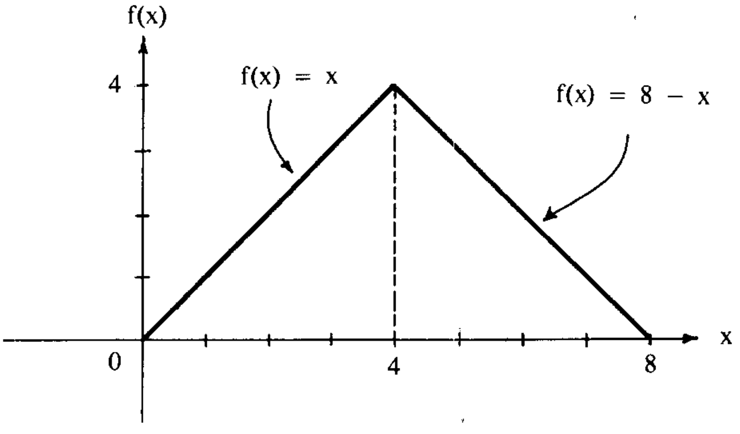
$$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 4 \\ 8 - x & ; \quad 4 < x < 8 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูป

(ก) อนุกรมฟูเรียร์ไซน์

(ข) อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x)



(ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2(8)$

เพราะฉะนั้น $\ell = 8$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$b_n = \frac{2}{8}\int_0^{8} f(x) \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^{4} (x) \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx + \int_4^{8} (8 - x) \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^4 x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx + 8 \int_4^8 \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx - \int_4^8 x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx \right]$$

อินทิเกรตทีละส่วน อินทิกรัล $\int x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx$ จะได้

$$\int x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx = x \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) - \int \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) dx$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^4 x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx = x \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) \Big|_0^4 - \int_0^4 \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) dx$$

$$= \frac{-8}{n\pi} \left\{ 4 \cos \frac{n\pi}{2} - 0 \right\} + \left(\frac{8}{n\pi} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{8} \Big|_0^4$$

$$= \frac{-32}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{64}{n^2\pi^2} \left\{ \sin \frac{n\pi}{2} - 0 \right\}$$

$$= \frac{-32}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{64}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

และ $$\int_4^8 x \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx = x \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) \Big|_4^8 - \int_4^8 - \left(\frac{\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) dx$$

$$= \frac{-8}{n\pi} \left(8 \cos n\pi - 4 \cos \frac{n\pi}{2} \right) + \frac{64}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{8} \Big|_4^8$$

$$= \frac{-64(-1)^n}{n\pi} + \frac{32}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{64}{n^2\pi^2} \left(\sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{-64(-1)^n}{n\pi} + \frac{32}{n\pi} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{64}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

และ $$\int_4^8 \sin \frac{n\pi x}{8}\, dx = -\left(\frac{\cos \frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}} \right) \Big|_4^8$$

$$= \frac{-8}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่าอินทิกรัลเหล่านี้ใน b_n

$$b_n = \frac{1}{4}\Big[\frac{-32}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{64}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$+ 8\Big\{\frac{-8(-1)^n}{n\pi} + \frac{8}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\Big\} - \Big\{\frac{-64(-1)^n}{n\pi} + \frac{32}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$- \frac{64}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\frac{128}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big]$$

$$= \frac{32}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่า b_n **ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{32}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin\frac{n\pi x}{8}$$

$$= \frac{32}{\pi^2}\Big[\frac{(1)}{1^2}\sin\frac{\pi x}{8} + 0 + \frac{(-1)}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{8} + 0$$

$$+ \frac{(1)}{5^2}\sin\frac{5\pi x}{8} + 0 + \frac{(-1)}{7^2}\sin\frac{7\pi x}{8} + 0 + \ldots\Big]$$

$$= \frac{32}{\pi^2}\left[\frac{\sin\frac{\pi x}{8}}{1^2} - \frac{\sin\frac{3\pi x}{8}}{3^2} + \frac{\sin\frac{5\pi x}{8}}{5^2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{32}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x/8}{(2n-1)^2}$$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{8}\int_0^{8} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^4 (x)\,dx + \int_4^8 (8-x)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 + 8x\Big|_4^8 - \frac{x^2}{2}\Big|_4^8\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[8 + 8(8-4) - \frac{1}{2}(64-16)\right]$$

$$= \frac{1}{4}[8 + 32 - 24]$$

$$= \frac{1}{4}(16) = 4$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{8}\left[\int_0^4 (x)\cos\frac{n\pi x}{8}\,dx + \int_4^8 (8-x)\cos\frac{n\pi x}{8}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\int_0^4 x\cos\frac{n\pi x}{8}\,dx + 8\int_4^8 \cos\frac{n\pi x}{8}\,dx\right.$$

$$\left. - \int_4^8 x\cos\frac{n\pi x}{8}\,dx\right]$$

อินทิเกรตทีละส่วน อินทิกรัลพจน์แรกและพจน์ที่สามทางขวามือจะได้

$$a_n = \frac{1}{4}\left[\left\{x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}}\right)\Big|_0^4 - \int_0^4 \frac{\sin\frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}}\,dx\right\}\right.$$

$$\left. + 8\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}}\right)\Big|_4^8 - \left\{x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}}\right)\Big|_4^8 - \int_4^8 \frac{\sin\frac{n\pi x}{8}}{\frac{n\pi}{8}}\,dx\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left\{\frac{32}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\} + \frac{64}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{8}\Big|_0^4\right.$$

$$+ \frac{64}{n\pi}\left\{\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right\} - \frac{8}{n\pi}\left\{8\sin n\pi - 4\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$\left.\frac{-64}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{8}\Big|_4^8\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{32}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{64}{n^2\pi^2}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right\} - \frac{64}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{32}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{64}{n^2\pi^2}\left\{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{64}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{64}{n^2\pi^2} - \frac{64}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{64}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{16}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1\right]$$

แทนค่า a_0 และ a_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}(4) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^2\pi^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n - 1\right]\cos\frac{n\pi x}{8}$$

$$= 2 + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{(0)}{1^2}\cos\frac{\pi x}{8} + \frac{(-4)}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{8} + \frac{(0)}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{8}\right.$$

$$+ \frac{(0)}{4^2}\cos\frac{4\pi x}{8} + \frac{(0)}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{8} + \frac{(-4)}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{8}$$

$$\left. + \frac{(0)}{7^2}\cos\frac{7\pi x}{8} + \frac{(0)}{8^2}\cos\frac{8\pi x}{8} + \ldots\right]$$

$$= 2 + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{(-4)}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{8} + \frac{(-4)}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{8} + \ldots\right]$$

$$= 2 - \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi x}{4} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{4} + \ldots\right]$$

$$= 2 - \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x/4}{(2n-1)^2}$$

2. จงกระจาย

$$f(x) = \cos x \;;\quad 0 < x < \pi$$

ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\Big[\sin(1+n)x - \sin(1-n)x\Big]dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right]\Bigg|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(1+n)\pi - 1}{1+n} - \frac{\cos(1-n)\pi - 1}{1-n}\right]$$

เพราะว่า

$$\cos(1+n)\pi = \cos(\pi + n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$$

และ

$$\cos(1-n)\pi = \cos(\pi - n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$$

เพราะฉะนั้น

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{-(-1)^n - 1}{1+n} - \left\{\frac{-(-1)^n - 1}{1-n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\Big[(-1)^n + 1\Big]\left[\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= -\frac{2n}{\pi}\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right] \;;\; n \neq 1$$

หาค่า b_1 ใหม่ จากสูตร

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin x\,dx \quad \text{แทนค่า } n = 1$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos x \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x\,dx \quad \text{เพราะว่า } \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{\cos 2x}{2}\Big|_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}[\cos 2\pi - 1] = -\frac{1}{2\pi}[1 - 1] = 0$$

แทนค่า b_1 และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = b_1 \sin x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$= (0)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{-2n}{\pi}\left[\frac{1 + (-1)^n}{1 - n^2}\right]\sin nx$$

$$= \frac{-2}{\pi}\left[\frac{2(2)}{-3}\sin 2x + \frac{3(0)}{-8}\sin 3x + \frac{4(2)}{-15}\sin 4x + \ldots\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{3}\sin 2x + \frac{2}{15}\sin 4x + \frac{3}{35}\sin 6x + \ldots\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{1\times 3}\sin 2x + \frac{2}{3\times 5}\sin 4x + \frac{3}{5\times 7}\sin 6x + \ldots\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{(2n-1)(2n+1)}$$

หรือ $\cos x = \dfrac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n\sin 2nx}{4n^2 - 1}$

3. ใช้สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ บนช่วง (0, 1) จงแสดงว่า

$$\cos \pi x = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2 - 1}\sin 2n\pi x$$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

เพราะว่า

1 คาบ $= 2\ell = 2$

เพราะฉะนั้น $\ell = 1$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 \cos \pi x \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \int_0^1 \left[\sin (1+n)\pi x - \sin (1-n)\pi x \right] dx$$

$$= \left[\frac{-\cos (1+n)\pi x}{1+n} + \frac{\cos (1-n)\pi x}{1-n} \right]\Bigg|_0^1$$

$$= -\left\{ \frac{\cos (1+n)\pi - 1}{1+n} \right\} + \left\{ \frac{\cos (1-n)\pi - 1}{1-n} \right\}$$

เพราะว่า $\cos (1+n)\pi = \cos (\pi + n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

และ $\cos (1-n)\pi = \cos (\pi - n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$b_n = -\left\{ \frac{-(-1)^n - 1}{1+n} \right\} + \left\{ \frac{-(-1)^n - 1}{1-n} \right\}$$

$$= \left\{ (-1)^n + 1 \right\}\left[\frac{1}{1+n} - \frac{1}{1-n} \right]$$

$$= \left\{ 1 + (-1)^n \right\}\left[\frac{-2n}{1-n^2} \right]$$

$$= -2n\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2} \right];\ n \neq 1$$

หาค่า b_1 ใหม่ จากสูตร

$$b_1 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 \cos\pi x\sin\pi x\,dx$$

$$= \int_0^1 \sin 2\pi x\,dx$$

$$= -\frac{\cos 2\pi x}{2\pi}\Big|_0^1$$

$$= -\left\{\frac{\cos 2\pi - 1}{2\pi}\right\}$$

$$= -\left\{\frac{1-1}{2\pi}\right\} = 0$$

แทนค่า b_1 และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = b_1\sin\pi x + \sum_{n=2}^{\infty} b_n\sin n\pi x$$

$$= (0)\sin\pi x + \sum_{n=2}^{\infty} -2n\left[\frac{1+(-1)^n}{1-n^2}\right]\sin n\pi x$$

$$= -2\left[2\,\frac{(2)}{-3}\sin 2\pi x + 0 + 4\,\frac{(2)}{-15}\sin 4\pi x + 0\right.$$

$$\left. + \,6\,\frac{(2)}{-35}\sin 6\pi x + 0 + \ldots\right]$$

$$= 8\left[\frac{\sin 2\pi x}{3} + \frac{2\sin 4\pi x}{15} + \frac{3\sin 6\pi x}{35} + \ldots\right]$$

$$= 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2n\pi x}{(4n^2-1)}$$

4. ถ้า $f(x) = \frac{1}{4}c - x$ เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant \frac{c}{2}$

และ $f(x) = x - \frac{3}{4}c$ เมื่อ $\frac{c}{2} \leqslant x \leqslant c$

ใช้สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์บนช่วง (0, c) จงแสดงว่า

$$f(x) = \frac{2c}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(4n-2)\pi x}{c}$$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2c$

เพราะฉะนั้น $\ell = c$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{c} \int_0^{c} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{c} \left[\int_0^{c/2} \left(\frac{1}{4} c - x\right) dx + \int_{c/2}^{c} \left(x - \frac{3}{4} c\right) dx \right]$$

$$= \frac{2}{c} \left[\frac{1}{4} c x \Big|_0^{c/2} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{c/2} + \frac{x^2}{2} \Big|_{c/2}^{c} - \frac{3}{4} c x \Big|_{c/2}^{c} \right]$$

$$= \frac{2}{c} \left[\frac{1}{4} c \left\{ \frac{c}{2} - 0 \right\} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{c^2}{4} - 0 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ c^2 - \frac{c^2}{4} \right\} \right.$$

$$\left. - \frac{3}{4} c \left\{ c - \frac{c}{2} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{c} \left[\frac{c^2}{8} - \frac{c^2}{8} + \frac{3c^2}{8} - \frac{3c^2}{8} \right]$$

$$= 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{c} \int_0^{c} f(x) \cos \frac{n\pi x}{c}\,dx$$

$$= \frac{2}{c} \left[\int_0^{c/2} \left(\frac{1}{4} c - x\right) \cos \frac{n\pi x}{c}\,dx + \int_{c/2}^{c} \left(x - \frac{3}{4} c\right) \cos \frac{n\pi x}{c}\,dx \right]$$

$$= \frac{2}{c}\left[\frac{1}{4}c\int_0^{c/2}\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx - \int_0^{c/2} x\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\right.$$

$$\left. + \int_{c/2}^{c} x\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx - \frac{3}{4}c\int_{c/2}^{c}\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx\right]$$

พิจารณา

$$\int_0^{c/2}\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = \frac{\sin\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\Bigg|_0^{c/2} = \frac{c}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right]$$

$$= \frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน

$$\int_0^{c/2} x\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\right)\Bigg|_0^{c/2} - \int_0^{c/2}\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\right)dx$$

$$= \frac{c}{n\pi}\left\{\frac{c}{2}\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\} + \left(\frac{c}{n\pi}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{c}\Bigg|_0^{c/2}$$

$$= \frac{c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

และ $$\int_{c/2}^{c} x\cos\frac{n\pi x}{c}\,dx = x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\right)\Bigg|_{c/2}^{c} - \int_{c/2}^{c}\left(\frac{\sin\frac{n\pi c}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\right)dx$$

$$= \frac{c}{n\pi}\left\{c\sin n\pi - \frac{c}{2}\sin\frac{n\pi}{2}\right\} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{c}\Bigg|_{c/2}^{c}$$

$$= \frac{-c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

และ $$\int_{c/2}^{c}\cos\frac{n\pi x}{c}\,d = \frac{\sin\frac{n\pi x}{c}}{\frac{n\pi}{c}}\Bigg|_{c/2}^{c}$$

$$= \frac{c}{n\pi}\left\{\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{-c}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่าเหล่านี้ใน a_n จะได้

$$a_n = \frac{2}{c}\left[\frac{1}{4}c\left(\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right] - \left\{\frac{c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right\}\right.$$

$$+ \left\{\frac{-c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{c^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right\}$$

$$\left. - \frac{3}{4}c\left(-\frac{c}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{c}\left[\frac{c^2}{4n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{c^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$+ \frac{c^2}{n^2\pi^2} - \frac{c^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{c^2}{2n\pi}(-1)^n - \frac{c^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$\left. + \frac{3c^2}{4n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{c}\ \frac{c^2}{n^2\pi^2}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

แทนค่า a_0 และ a_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2c}{n^2\pi^2}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]\cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$= \frac{2c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[1 + (-1)^n - 2\cos\frac{n\pi}{2}\right]\cos\frac{n\pi x}{c}$$

$$= \frac{2c}{\pi^2}\left[0 + \frac{4}{2^2}\cos\frac{2\pi x}{c} + 0 + 0 + 0 + \frac{4}{6^2}\cos\frac{6\pi x}{c}\right.$$

$$\left. + 0 + 0 + 0 + \frac{4}{(10)^2}\cos\frac{10\pi x}{c} + \dots\right]$$

$$= \frac{2c}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{6\pi x}{c} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{10\pi x}{c} + \dots\right]$$

$$= \frac{2c}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(n-1)\pi x/c}{(2n-1)^2}$$