$$\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right) dx$$

$$= \frac{-\cos n\pi}{n\pi} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}(\sin n\pi - 0)$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} \qquad \text{..........(2)}$$

และ $\int_0^1 x^3 \sin n\pi x \, dx = x^3\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right) 3x^2 \, dx$

$$= -\frac{\cos n\pi}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\int_0^1 x^2 \cos n\pi x \, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\left[\left(x\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right) 2x dx\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{3}{n\pi}\left[0 - \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} - \frac{6}{n^2\pi^2}\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx$$

แต่ $\int_0^1 x \sin n\pi x \, dx = \frac{-(-1)^n}{n\pi}$

เพราะว่า 1 คาบ = 2ℓ = 4 เพราะฉะนั้น ℓ = 2

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(0) \, dx + \int_{-1}^{0}(1) \, dx + \int_0^1 (-1) \, dx + \int_1^2 (0) \, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + x\Big|_{-1}^{0} - x\Big|_{0}^{1} + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - 1\right]$$

$$= 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{IS}_{-2}^{-1}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{0}(1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{1}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$+ \int_{1}^{2}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_{-1}^{0} - \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_{0}^{1} + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\left\{0 - \sin\left(\frac{-n\pi}{2}\right)\right\} - \frac{2}{n\pi}\left\{\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

ดังนั้น

$$\int_{0}^{1} x^3 \sin n\pi x\,dx = \frac{-(-1)^n}{n\pi}\;\frac{6}{2\_2\,n^{-}\pi}\left[-\;\frac{-(-1)^n}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{6(-1)^n}{n^3\pi^3} \qquad \ldots\ldots(3)$$

แทนค่า (2) และ (3) ใน (1) จะได้

$$b_n = 2\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi}\right] - 2\left[\frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{6(-1)^n}{n^3\pi^3}\right]$$

$$= \frac{-2(-1)^n}{n\pi} + \frac{2(-1)^n}{n\pi} - \frac{12(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

$$= \frac{-12(-1)^n}{n^3\pi^3}$$

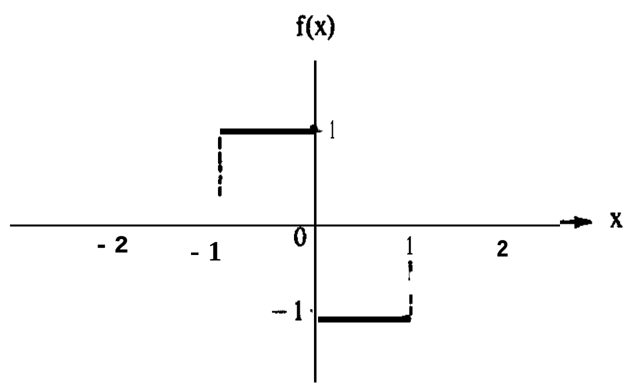
ดังนั้น แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-12(-1)^n}{n^3\pi^3} \sin n\pi x$$

หรือ $x - x^3 = \frac{12}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin n\pi x$

11. $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x < -1 \\ 1 & ; \quad -1 < x < 0 \\ -1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

วิธีทำ เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x)



สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{-1}(0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{-1}^{0}(1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{1}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2}(0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 - \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_{0}^{1} + 0\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\left\{1 - \cos\left(\frac{-n\pi}{2}\right)\right\} + \frac{2}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n\pi}\right)\left[-1 + \cos\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 2\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

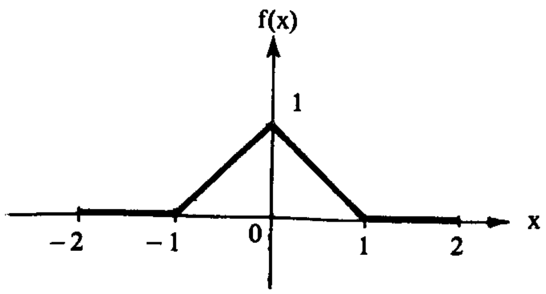
แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right\}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

12. $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x < -1 \\ 1 + x & ; \quad -1 < x < 0 \\ 1 - x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

วิธีทำ เขียนกราฟ



เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell = 4$ เพราะฉะนั้น $\ell = 2$

จากกราฟพบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ นั่นคือ $b_n = 0$

ดังนั้น สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx \\
&= \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)\,dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (0)\,dx \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 + 0 \\
&= 1 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \int_0^1 (1-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \int_0^1 \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx - \int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + 0 \\
&= \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_0^1 - \left\{x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)dx\right\} \\
&= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \left\{\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^1\right\}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left(1 - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{2}$$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.4

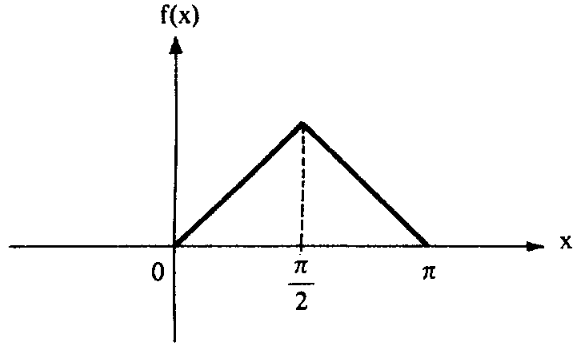
1. จงแสดงว่า ถ้า

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{สำหรับ } 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \text{สำหรับ } \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \ldots\right)$$

วิธีทำ เขียนกราฟของ f(x)



สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = \pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{\pi}{2}$ เลือกค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{0+2(\frac{\pi}{2})} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(x)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi/2} + \pi x\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \pi\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3\pi^2}{8}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{0+2(\frac{\pi}{2})} f(x)\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}(x)\cos 2nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\cos 2nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\cos 2nx\,dx + \pi\int_{\pi/2}^{\pi}\cos 2nx\,dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x\cos 2nx\,dx\right]$$

..........(1)

พิจารณา

$$\int_0^{\pi/2} x\cos 2nx\,dx = x\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)dx$$

$$= 0 + \frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{-4n^{2.2}}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\ 2nx\ dx = \frac{\sin 2nx}{2n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2n}(\sin 2n\pi - \sin n\pi)$$

$$= \frac{1}{2n}(0)\ ; \quad \sin 2n\pi = \sin n\pi = 0$$

$$= 0 \qquad \text{..........(3)}$$

และ $\int_{\pi/2}^{\pi} x \cos 2nx\ dx = x\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\sin 2nx}{2n}\right)dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\pi \sin 2n\pi - \frac{\pi}{2}\sin n\pi\right] + \frac{\cos 2nx}{4n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}(0) + \frac{1}{4n^2}\left[\cos 2n\pi - \cos n\pi\right]$$

$$= \frac{1}{4n^2} - \frac{(-1)^n}{4n^2} \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า (2), (3) และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{4n^2} - \frac{1}{4n^2} + \pi(0) - \frac{1}{4n^2} + \frac{(-1)^n}{4n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2n^2} - \frac{1}{2n^2}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = \frac{\pi}{2}$ และ $c = 0$ จะได้

$$b_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin 2nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} (x) \sin 2nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \sin 2nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} x \sin 2nx \, dx + \pi \int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2nx \, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin 2nx \, dx \right] \qquad \text{..........(5)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi/2} x \sin 2nx \, dx = x\left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2n}\left\{\frac{\pi}{2} \cos n\pi\right\} + \frac{\sin 2nx}{4n^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-\pi}{4n}(-1)^n + \frac{1}{4n^2}\{\sin n\pi - 0\}$$

$$= \frac{-\pi}{4n}(-1)^n \qquad \text{..........(6)}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin 2nx \, dx = \frac{-\cos 2nx}{2n}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{-1}{2n}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}$$

$$= \frac{-1}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n} \quad ; \quad \cos 2n\pi = 1 \qquad \text{..........(7)}$$

และ

$$\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin 2nx \, dx = x\left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{-\cos 2nx}{2n}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2n}\left\{\pi \cos 2n\pi - \frac{\pi}{2} \cos n\pi\right\} + \frac{\sin 2nx}{4n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi}{2n} + \frac{\pi}{4n}(-1)^n + \frac{1}{4n^2}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}$$

$$= \frac{-\pi}{2n} + \frac{\pi(-1)^n}{4n} \qquad \text{.........(8)}$$

แทนค่า (6), (7) และ (6) ลงใน (5) จะได้

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{4n} + \pi\left\{\frac{-1}{2n} + \frac{(-1)^n}{2n}\right\} - \left\{\frac{-\pi}{2n} + \frac{\pi(-1)^n}{4n}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-n(-1)"}{4n} - \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi(-1)^n}{2n} + \frac{\pi}{2n} - \frac{\pi(-1)^n}{4n}\right]$$

$$= 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{(-1)^n - 1\}}{\pi n^2}\cos 2nx + (0)\sin 2nx\right]$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{1^2}\cos 2x + 0 + \frac{(-2)}{3^2}\cos 6x + 0 + \ldots\right]$$

$$= \frac{n}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \ldots\right)$$

จากข้อ 2 ถึงข้อ 9 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชัน f(x) ซึ่งมีคาบเป็น T ในเมื่อหนึ่งคาบนิยามเป็น

2. $f(x) = x \ ; 0 < x < 3, \ T = 3$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{nnx}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 3$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{3}{2}$ หาค่า a_0

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือก c = 0 ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^{0+2(\frac{3}{2})} (x)\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 x\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3$$

$$= 3$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{3}{2}}\int_0^3 (x)\cos\frac{n\pi x}{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 x\cos\frac{2n\pi x}{3}\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน

$$= \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{\sin\frac{2n\pi x}{3}}{\frac{2n\pi}{3}}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3\left(\frac{\sin\frac{2n\pi x}{3}}{\frac{2n\pi}{3}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{3}{2n\pi}\left\{3\sin 2n\pi - 0\right\} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[0 + \frac{9}{4n^2\pi^2}\left\{\cos 2n\pi - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{9}{4n^2\pi^2}\left\{1 - 1\right\}\right]$$

$$= 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{2n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[x\left(\frac{-\cos\frac{2n\pi x}{3}}{\frac{2n\pi}{3}} \right)\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(\frac{-\cos\frac{2n\pi x}{3}}{\frac{2n\pi}{3}} \right) dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{-3}{2n\pi}\{3\cos 2n\pi - 1\} + \frac{9}{4n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi x}{3}\Big|_0^3 \right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(3) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\frac{2n\pi x}{3} + \left(\frac{-2}{n\pi}\right)\sin\frac{2n\pi x}{3} \right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{2n\pi x}{3}$$

3. $f(x) = x^2$; $0 < x < 2$; $T = 2$

วิธีทำ เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือกค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} x^2dx$$

$$= \int_0^2 x^2dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{8}{3}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} (x^2)\cos n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2 \cos n\pi x\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนสองครั้ง จะได้

$$\int_0^2 x^2\cos n\pi x\,dx = x^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)2x\,dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\sin 2n\pi) - \frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\sin n\pi x\,dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n\pi}\left[x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)dx\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left[\left\{\frac{-2}{n\pi}\cos 2n\pi\right\} + \frac{1}{n^2\pi^2}\sin n\pi x\Big|_0^2\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(1) - \frac{2}{n^3\pi^3}\{\sin 2n\pi - 0\}$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2} \quad ; \quad \sin 2n\pi = 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} (x^2)\sin n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^2 x^2\sin n\pi x\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วนสองครั้ง จะได้

$$b_n = x^2\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)2x\,dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\cos 2n\pi + \frac{2}{n\pi}\int_0^2 x\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{-4}{n\pi}(1) + \frac{2}{n\pi}\left[x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\right]$$

$$= \frac{-4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n\pi}\{\sin 2n\pi - 0\} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x \Big|_0^2\right]$$

$$= \frac{-4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\{\cos 2n\pi - 1\}\right]$$

$$= \frac{-4}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}[0] \quad ; \quad \cos 2n\pi = 1$$

$$= \frac{-4}{n\pi}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{4}{n\pi}\sin n\pi x\right]$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi x}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$$

4. $f(x) = \begin{cases} 0 \; ; & 0 < x < 1 \\ 1 \; ; & 1 < x < 2 \; ; \quad T = 2 \end{cases}$

วิธีทำ เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือก $c = 0$ จะได้

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^{0+2(1)} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (0)\,dx + \int_1^2 (1)\,dx$$

$$= x\Big|_1^2$$

$$= 1$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \int_0^1 (0)\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{n\pi}[\sin 2n\pi - \sin n\pi]$$

$$= \frac{1}{n\pi}[0] \quad ; \quad \sin 2n\pi = \sin n\pi = 0$$

$$= 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\sin n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^1 (0)\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\sin n\pi x\,dx$$

$$= 0 + \left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}[\cos 2n\pi - \cos n\pi]$$

$$= \frac{-1}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\{1-(-1)^n\}\sin n\pi x\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{1}\sin\pi x + 0 + \frac{2}{3}\sin 3\pi x + 0 + \frac{2}{5}\sin 5\pi x + \dots\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\left[\sin \pi x + \frac{1}{3}\sin 3\pi x + \frac{1}{5}\sin 5\pi x + \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x}{2n-1}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 < x < 1 \\ x - 1 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases} \quad ; \quad T = 2$$

วิธีทำ เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือกค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (0)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx$$

$$= 0 = \frac{x^2}{2}\Big|_1^2 - x\Big|_1^2$$

$$= \frac{3}{2} - 1$$

$$= \frac{1}{2}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\cos n\pi x\, dx$$

$$= \int_0^1 (0)\cos n\pi x\, dx + \int_1^2 (x-1)\cos n\pi x\, dx$$

$$= 0 + \int_1^2 x\cos n\pi x\, dx - \int_1^2 \cos n\pi x\, dx$$

$$= \left[x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)dx\right] - \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{n\pi}\{2\sin 2n\pi - \sin n\pi\} + \frac{1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_1^2$$

$$- \frac{1}{n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}$$

$$= \frac{1}{n\pi}(0) + \frac{1}{n^2\pi^2}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\} - \frac{1}{n\pi}(0)$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}[1-(-1)^n]$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\sin n\pi x\, dx$$

$$= \int_0^1 (0)\sin n\pi x\, dx + \int_1^2 (x-1)\sin n\pi x\, dx$$

$$= \int_1^2 x\sin n\pi x\, dx - \int_1^2 \sin n\pi x\, dx$$

$$= x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_1^2 - \int_1^2\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)dx + \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\{2\cos 2n\pi - \cos n\pi\} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_1^2 + \frac{1}{n\pi}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\} + \frac{1}{n\pi} - \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$= \frac{-1}{n\pi} \quad ; \quad \sin 2n\pi = \sin n\pi = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{1-(-1)^n\}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]$$

6. $$f(x) = \begin{cases} x & ; \quad 0 < x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x < 2 \quad , \quad T = 2 \end{cases}$$

วิธีทำ เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือกค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\,dx \\ &= \int_0^1 (x)\,dx + \int_1^2 (1)\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + x\Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\ &= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\cos n\pi x\,dx \\ &= \int_0^1 (x)\cos n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\cos n\pi x\,dx \\ &= x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)dx + \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_1^2 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{n\pi}\{\sin n\pi - 0\} + \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2\pi^2}\{\cos n\pi - 1\} + 0$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]$$

หาค่า b จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi n}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_0^{0+2(1)} f(x)\sin n\pi x\,dx$$

$$= \int_0^1 x\sin n\pi x\,dx + \int_1^2 (1)\sin n\pi x\,dx$$

$$= x\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1\left(\frac{-\cos n\pi x}{n\pi}\right)dx - \frac{\cos n\pi x}{n\pi}\Big|_1^2$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\{\cos n\pi - 0\} + \frac{\sin n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1 - \frac{1}{n\pi}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2}\{\sin n\pi - 0\} - \frac{1}{n\pi}\{1 - (-1)^n\}$$

$$= \frac{-(-1)^n}{n\pi} + 0 - \frac{1}{n\pi} + \frac{(-1)^n}{n\pi}$$

$$= \frac{-1}{n\pi}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi^2}\cos n\pi x - \frac{1}{n\pi}\sin n\pi x\right]$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(-1)^n - 1\}}{n^2}\cos n\pi x - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-2}{1^2}\cos\pi x + 0 - \frac{2}{3^2}\cos 3\pi x + 0 - \frac{2}{5^2}\cos 5\pi x + \ldots\right]$$

$$- \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi x}{n}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi x}{n}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} - x & ; \quad 0 < x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{3}{4} & ; \quad \frac{1}{2} < x < 1 \quad ; \quad T = 1 \end{cases}$$

วิธีทำ เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell = 1$ **เพราะฉะนั้น** $\ell = \frac{1}{2}$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, dx$$

เลือกค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^{0+2(\frac{1}{2})} f(x)\, dx$$

$$= 2 \int_0^1 f(x)\, dx$$

$$= 2 \left[\int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - x\right) dx + \int_{1/2}^1 \left(x - \frac{3}{4}\right) dx \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}x \Big|_0^{1/2} - \frac{x^2}{2} \Big|_0^{1/2} + \frac{x^2}{2} \Big|_{1/2}^1 - \frac{3}{4}x \Big|_{1/2}^1 \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{3}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$= 2 \left[\frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8} \right]$$

$$= 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^{0+2(\frac{1}{2})} f(x)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 f(x)\cos 2n\pi x\,dx$$

$$= 2\left[\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4}-x\right)\cos 2n\pi x\,dx + \int_{1/2}^1\left(x-\frac{3}{4}\right)\cos 2n\pi x\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx - \int_0^{1/2} x\cos 2n\pi x\,dx + \int_{1/2}^1 x\cos 2n\pi x\,dx - \frac{3}{4}\int_{1/2}^1\cos 2n\pi x\,dx\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

พิจารณา

$$\int_0^{1/2}\cos 2n\pi x\,dx = \frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\{\sin n\pi - 0\}$$

$$= 0 \quad \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\int_0^{1/2} x\cos 2n\pi x\,dx = x\left(\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\left(\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left\{\frac{1}{2}\sin n\pi - 0\right\} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\Big|_0^{1/2}$$

$$= 0 + \frac{1}{4n^2\pi^2}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{4n^2\pi^2} \quad \ldots\ldots\ldots(3)$$

$$\int_{1/2}^1 x\cos 2n\pi x\,dx = x\left(\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)\Big|_{1/2}^1 - \int_{1/2}^1\left(\frac{\sin 2n\pi x}{2n\pi}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2n\pi}\left\{\sin 2n\pi - \frac{1}{2}\sin n\pi\right\} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\cos 2n\pi x\Big|_{1/2}^1$$

$$= 0 + \frac{1}{4n^2\pi^2}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{4n^2\pi^2} \quad \text{..........(4)}$$

และ $\int_{1/2}^{1} \cos 2n\pi x \, dx = \frac{\sin 2n\pi x}{2nn}\Big|_{1/2}^{1}$

$$= \frac{1}{2n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}$$

$$= 0 \quad \text{......(5)}$$

แทนค่า (2), (3), (4) และ (5) ลงใน (1) จะได้

$$a_n = 2\left[\frac{1}{4}(0) - \left\{\frac{(-1)^n - 1}{4n^2\pi^2}\right\} + \left\{\frac{1-(-1)^n}{4n^2\pi^2}\right\} - \frac{3}{4}(0)\right]$$

$$= 2\left[\left\{\frac{1-(-1)^n}{4n^2\pi^2}\right\} + \left\{\frac{1-(-1)^n}{4n^2\pi^2}\right\}\right]$$

$$\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_0^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^{0+2(\frac{1}{2})} f(x) \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= 2\int_0^1 f(x) \sin 2n\pi x \, dx$$

$$= 2\left[\int_0^{1/2}\left(\frac{1}{4} - x\right)\sin 2n\pi x \, dx + \int_{1/2}^{1}\left(x - \frac{3}{4}\right)\sin 2n\pi x \, dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{4}\int_0^{1/2} \sin 2nnx \, dx - \int_0^{1/2} x \text{ bin } 2n\pi x \, dx + \int_{1/2}^{1} x \sin 2n\pi x \, dx\right.$$

$$\left. - \frac{3}{4}\int_{1/2}^{1} \sin 2n\pi x \, dx\right] \quad \text{..........(6)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{1/2} \sin 2n\pi x\,dx = \frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2n\pi} \qquad \text{.........(7)}$$

$$\int_0^{1/2} x \sin 2n\pi x\,dx = x\left(\frac{\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right)\Big|_0^{1/2} - \int_0^{1/2}\left(\frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\left\{\frac{1}{2}\cos n\pi\right\} + \frac{\sin 2n\pi x}{4n^2\pi^2}\Big|_0^{1/2}$$

$$= \frac{-(-1)^n}{4n\pi} \qquad \text{..........(8)}$$

$$\int_{1/2}^{1} x \sin 2n\pi x\,dx = x\left(\frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right)\Big|_{1/2}^{1} - \int_{1/2}^{1}\left(\frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi}\right)dx$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\left\{\cos 2n\pi - \frac{1}{2}\cos n\pi\right\} + \frac{\sin 2n\pi x}{4n^2\pi^2}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\left\{1 - \frac{(-1)^n}{2}\right\} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}$$

$$= -\{2 - 4n\pi(-1)^n\} \qquad \text{.........(9)}$$

$$\int_{1/2}^{1} \sin 2n\pi x\,dx = \frac{-\cos 2n\pi x}{2n\pi}\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{-1}{2n\pi}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}$$

$$= \frac{-\{1-(-1)^n\}}{2n\pi} \qquad \text{..........(10)}$$

แทนค่า (7), (8), (9) และ (10) ใน (6) จะได้

$$b_n = 2\left[\frac{1}{4}\left\{\frac{1-(-1)^n}{2n\pi}\right\} - \left\{\frac{-(-1)^n}{4n\pi}\right\} - \left\{\frac{2-(-1)^n}{4n\pi}\right\} + \frac{3}{4}\left\{\frac{1-(-1)^n}{2n\pi}\right\}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1-(-1)^n}{2n\pi} + \frac{(-1)^n}{4n\pi} - \frac{1}{2n\pi} + \frac{(-1)^n}{4nn}\right]$$

$$= 2\left[\frac{1-(-1)^n}{2n\pi} - \left\{\frac{1-(-1)^n}{2n\pi}\right\}\right] = 0$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi^2}\right\}\cos 2n\pi x + (0)\sin 2n\pi x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{2}{1^2}\cos 2\pi x + 0 + \frac{2}{3^2}\cos 6\pi x + 0 + \frac{2}{5^2}\cos 10\pi x + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$$

8. $f(x) = \begin{cases} 8 & ; \quad 0 < x < 2 \\ -8 & ; \quad 2 < x < 4 \quad ; \quad T = 4 \end{cases}$

วิธีทำ เพราะว่า : คาบ = 2P = 4 เพราะฉะนั้น $\ell = 2$

สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือก $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_0^{0+2(2)} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 (8)\,dx + \int_2^4 (-8)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[8x\Big|_0^2 + 8x\Big|_2^4\right]$$

$$= 4[2-2]$$

$$= 0$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 (8)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_2^4 (-8)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[8\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^2 - 8\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_2^4\right]$$

$$= 4\left[\frac{2}{n\pi}\{\sin n\pi - 0\} - \frac{2}{n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin n\pi\}\right]$$

เพราะว่า $\sin 2n\pi = \sin n\pi = 0$ ดังนั้น

$$a_n = 4\,|\,0\,| = 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^2 (8)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_2^4 (-8)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= 4\left[\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_0^2 + \frac{\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_2^4\right]$$

$$= 4\left[\frac{-2}{n\pi}\{\cos n\pi - 1\} + \frac{2}{n\pi}\{\cos 2n\pi - \cos n\pi\}\right]$$

$$= \frac{-8}{n\pi}\left[(-1)^n - 1 - 1 + (-1)^n\right]$$

$$= \frac{16}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(0)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{16}{n\pi}\{1 - (-1)^n\}\sin\frac{n\pi x}{2} \right]$$

$$f(x) = \frac{16}{\pi}\left[\frac{2}{1}\sin\frac{\pi x}{2} + 0 + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + 0 + \frac{2}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{32}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{32}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)}$$

9. $f(x) = 4x \;;\; 0 < x < 10$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

เพราะว่า 1 คาบ = 2ℓ = 10 เพราะฉะนั้น $\ell = 5$ หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เลือก $c = 0$ ดังนั้น

$$= \frac{1}{5}\int_0^{0+2(5)} (4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{5}(2x^2)\Big|_0^{10}$$

$$= \frac{2}{5}(100) = 40$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{0+2(5)} (4x)\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{10} x\cos\frac{n\pi x}{5}\,dx$$

$$= \frac{4}{5}\left[x \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} \right) \Big|_0^{10} - \int_0^{10} \left(\frac{\sin \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} \right) dx \right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{5}{n\pi} \{ 10 \sin 2n\pi - 0 \} + \frac{25}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{5} \Big|_0^{10} \right]$$

$$= \frac{4}{5} \left[\frac{5}{n\pi} \{0\} + \frac{25}{n^2\pi^2} \{ \cos 2n\pi - 1 \} \right]$$

$$= \frac{20}{n^2\pi^2} [1 - 1]$$

$$= 0$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} dx$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{0+2(5)} (4x) \sin \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{4}{5} \int_0^{10} x \sin \frac{n\pi x}{5} dx$$

$$= \frac{4}{5}\left[x \left(\frac{-\cos \frac{n\pi x}{5}}{\frac{n\pi}{5}} \right) \Big|_0^{10} - \int_0^{10} \left(\frac{-\cos \frac{nnx}{5}}{\frac{nn}{3}} \right) dx \right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{-5}{n\pi} \{ 10 \cos 2n\pi - 0 \} + \frac{25}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{5} \Big|_0^{10} \right]$$

$$= \frac{4}{5} \left[\frac{-50}{n\pi} + \frac{25}{n^2\pi^2} \{ \sin 2n\pi - 0 \} \right]$$

$$= \frac{4}{5}\left[\frac{-50}{n\pi} + 0 \right] ; \sin 2n\pi = 0$$

$$= \frac{-40}{n\pi}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(40) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\frac{n\pi x}{5} + \left(\frac{-40}{n\pi}\right)\sin\frac{n\pi x}{5}\right]$$

$$= 20 - \frac{40}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x}{5}$$

10. จงกระจายอนุกรมฟูเรียร์ของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามเป็น

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & ; \quad -\pi < x < 0 \\ \sin x & \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos x\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\sin\Big|_{-\pi}^{0} + (-\cos x)\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\{0 - \sin(-\pi)\} - \{\cos\pi - 1\}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[0 - \{-1 - 1\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos x\cos nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\{\cos(1+n)x + \cos(1-n)x\}dx\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\{\sin(1+n)x + \sin(1-n)x\}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\sin(1+n)x}{1+n} + \frac{\sin(1-n)x}{1-n}\right\}\Big|_{-\pi}^{0}\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} - \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right\}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{0 - \sin(1+n)(-\pi)}{1+n}\right\} + \left\{\frac{0 - \sin(1-n)(-\pi)}{1-n}\right\}\right.$$

$$\left. - \left\{\frac{\cos(1+n)\pi - 1}{1+n}\right\} - \left\{\frac{\cos(1-n)\pi - 1}{1-n}\right\}\right]$$

เพราะว่า

$$\sin(1+n)\pi = \sin(\pi + n\pi) = -\sin n\pi = 0$$

$$\sin(1-n)\pi = \sin(\pi - n\pi) = \sin n\pi = 0$$

$$\cos(1+n)\pi = \cos(\pi + n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$$

$$\cos(1-n)\pi = \cos(\pi - n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\left[0 + 0 - \left\{\frac{-(-1)^n - 1}{1+n}\right\} - \left\{\frac{-(-1)^n - 1}{1-n}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{1 + (-1)^n\}\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{\{1 + (-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{2}{1-n^2}\right]$$

$$= \frac{\{1 + (-1)^n\}}{\pi(1-n^2)}\ ;\ n \neq 1$$

หาค่า a_1 ใหม่ จากสูตร a_n โดยแทนค่า $n = 1$ ดังนั้น

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos x\cos x\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\cos x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}(1+\cos 2x)\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\sin 2x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left(x+\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos 2x}{2}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\{0-(-\pi)\} + \frac{1}{2}\{0-\sin(-2\pi)\} - \frac{1}{2}\{\cos 2\pi - 1\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[(\pi) + \frac{1}{2}\{0\} - \frac{1}{2}\{1-1\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

Hlfil b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}\cos x\sin nx\,dx + \int_{0}^{\pi}\sin x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{0}\{\sin(1+n)x - \sin(1-n)x\}dx\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi}\{\cos(1-n)x - \cos(1+n)x\}dx\right]$$

$$\frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{-\cos(1+n)x}{1+n} + \frac{\cos(1-n)x}{1-n}\right\}\Big|_{-\pi}^{0}\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{\sin(1-n)x}{1-n} - \frac{\sin(1+n)x}{1+n}\right\}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\left\{\frac{1-\cos(1+n)\pi}{1+n}\right\} + \left\{\frac{1-\cos(1-n)\pi}{1-n}\right\}\right.$$

$$\left. + \left\{\frac{\sin(1-n)\pi - 0}{1-n}\right\} - \left\{\frac{\sin(1+n)\pi - 0}{1+n}\right\}\right]$$

แทนค่า $\cos(1+n)\pi = -(-1)^n$ $\quad \cos(1-n)\pi = -(-1)^n$

และ $\sin(1+n)\pi = 0$ $\quad \sin(1-n)\pi = 0$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[-\left\{\frac{1+(-1)^n}{1+n}\right\}+\left\{\frac{1+(-1)^n}{1-n}\right\}+0-0\right]$$

$$= \frac{\{1+(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{-1}{1+n}+\frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{\{1+(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{2n}{1-n^2}\right]$$

$$= \frac{n\{1+(-1)^n\}}{\pi(1-n^2)} \quad ; \quad n \neq 1$$

หาค่า b_1 จากสูตร b_n โดยแทนค่า $n = 1$ เพราะฉะนั้น

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \cos x \sin x dx + \int_{0}^{\pi} \sin x \sin x\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} \frac{\sin 2x}{2}dx + \int_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\{1-\cos(-2\pi)\}+\pi-0\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}(1-1)+\pi\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\cos x + \left(\frac{1}{2}\right)\sin x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{\{1+(-1)^n\}}{\pi(1-n^2)}\cos nx + \frac{n\{1+(-1)^n\}}{\pi(1-n^2)}\sin nx\right]$$

$$\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x) - \frac{1}{A}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\{1+(-1)^n\}}{(n^2-1)} \cos nx$$

$$\frac{i}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\{1+(-1)^n\}}{(n^2-1)} \sin nx$$

11. จงพิสูจน์ว่าสำหรับ $0 \leqslant x \leqslant \pi$

(ก) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \left(\frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \ldots\right)$

(ข) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right)$

วิธีทำ (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\int_0^{\pi} x\,dx - \int_0^{\pi} x^2\,dx\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\pi\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{6}\right] \\
&= \frac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx - \int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx \right] \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right) dx$$

$$= \frac{1}{n}\{\pi \sin n\pi - 0\} + \frac{1}{n^2} \cos nx \Big|_0^{\pi}$$

$$= 0 + \frac{1}{n^2}\{\cos n\pi - 1\}$$

$$= \frac{(-1)^n - 1}{n^2} \qquad \text{..........(2)}$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos nx \, dx = x^2\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right) 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{n}\{\pi^2 \sin n\pi - 0\} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx$$

$$= 0 - \frac{2}{n}\left[x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right) dx\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\left[\frac{-1}{n}\{\pi \cos n\pi - 0\} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= -\frac{2}{n}\left[\frac{-\pi(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\{\sin n\pi - 0\}\right]$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2} \qquad \text{..........(3)}$$

แทนค่า (3) ใน (1) จะได้

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\pi\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\} - \left\{\frac{2\pi(-1)^n}{n^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \pi \left\{\frac{(-1)^n}{n^2} - \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^n}{n^2}\right\}$$

$$= 2\left[\frac{-1}{n^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} \right]$$

$$= \frac{-2[1 + (-1)^n]}{n^2}$$

แทนค่า a_0, a_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2[1 + (-1)^n]}{n^2} \cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - 2\left[0 + \frac{2}{2^2} \cos 2x + 0 + \frac{2}{4^2} \cos 4x + 0 + \frac{2}{6^2} \cos 6x + \dots \right.$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \left[\frac{1}{1^2} \cos 2x + \frac{1}{2^2} \cos 4x + \frac{1}{3^2} \cos 6x + \dots \right.$$

$$= \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\pi \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx - \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx \right] \quad \dots (4)$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n} \right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n} \right) dx$$

$$= \frac{-1}{n}\{ \pi \cos n\pi \} + \frac{\sin nx}{n^2} \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi(\ \ 1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\{ \sin n\pi \quad 0$$

$$= \frac{-\pi(-1)^n}{n} \qquad \text{..........(5)}$$

และ $\int_0^{\pi} x^2 \sin nx\, dx = x^2\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)2x\, dx$

$$= \frac{-1}{n}\{\pi^2\cos n\pi - 0\} + \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x\cos nx\, dx$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx\right\}$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left\{\frac{1}{n}(\pi\sin n\pi - 0) + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n}\left\{0 + \frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\right\}$$

$$= \frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}[(-1)^n - 1] \qquad \text{..........(6)}$$

แทนค่า (5) และ (6) ใน (4)

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left[\pi\left\{\frac{-\pi(-1)^n}{n}\right\} - \left\{\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{2}{n^3}((-1)^n - 1)\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{-\pi^2(-1)^n}{n} + \frac{\pi^2(-1)^n}{n} - \frac{2}{n^3}\{(-1)^n - 1\}\right]$$

$$= \frac{4\{1-(-1)^n\}}{\pi n^3}$$

แทนค่า b_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\{1-(-1)^n\}}{\pi n^3}\sin nx$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\frac{2}{1^3}\sin x + 0 + \frac{2}{3^3}\sin 3x + 0 + \frac{2}{5^3}\sin 5x\right]$$

$$= \frac{8}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right]$$

12. $f(x) = \begin{cases} 2 & ; \quad 0 < x < \frac{2\pi}{3} \\ 1 & ; \quad \frac{2\pi}{3} < x < \frac{4\pi}{3} \\ 0 & ; \quad \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi \end{cases}$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell} \right)$$

หาค่า a_0 จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2\pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \pi$
เลือกแทนค่า $c = 0$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{0+2(\pi)} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi/3} (2)\,dx + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1)\,dx + \int_{4\pi/3}^{2\pi} (0)\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[2x \Big|_0^{2\pi/3} + x \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[2\left(\frac{2\pi}{3} \right) + \left(\frac{4\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} (2\pi)$$

$$= 2$$

หาค่า a_n จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{0+2(\pi)} f(x) \cos nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\int_{0}^{2\pi/3} (2) \cos nx \, dx + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1) \cos nx \, dx + \int_{4\pi/3}^{2\pi} (0) \cos nx \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2 \sin nx}{n} \Big|_{0}^{2\pi/3} + \frac{\sin nx}{n} \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n} \left\{ \sin \frac{2n\pi}{3} - 0 \right\} + \frac{1}{n} \left\{ \sin \frac{4n\pi}{3} - \sin \frac{2n\pi}{3} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \frac{2}{n} \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{n} \sin \frac{4n\pi}{3} - \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{3} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{3} + \frac{1}{n} \sin \frac{4n\pi}{3} \right|$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left(\sin \frac{2n\pi}{3} + \sin \frac{4n\pi}{3} \right)$$

หาค่า b_n จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell} \int_{c}^{c+2\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{0+2(\pi)} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \left| \int_{0}^{2\pi/3} (2) \sin nx \, dx + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} (1) \sin nx \, dx + \int_{4\pi/3}^{2\pi} (0) \sin nx \, dx \right.$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2 \cos nx}{n} \Big|_{0}^{2\pi/3} - \frac{\cos nx}{n} \Big|_{2\pi/3}^{4\pi/3} + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2}{n} \left\{ \cos \frac{2n\pi}{3} - 1 \right\} - \frac{1}{n} \left\{ \cos \frac{4n\pi}{3} - \cos \frac{2n\pi}{3} \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{-2}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} \cos \frac{4n\pi}{3} + \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[\frac{2}{n} - \frac{1}{n} \cos \frac{2n\pi}{3} - \frac{1}{n} \cos \frac{4n\pi}{3} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi n} \left(2 - \cos \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{4n\pi}{3} \right)$$

แทนค่า a_0, a_n และ b_n ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{n\pi}\Big(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\Big)\cos nx$$

$$+ \frac{1}{n\pi}\Big(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\Big)\sin nx\Big]$$

$$= 1 + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(\sin\frac{2n\pi}{3} + \sin\frac{4n\pi}{3}\Big)\cos nx$$

$$+ \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big(2 - \cos\frac{2n\pi}{3} - \cos\frac{4n\pi}{3}\Big)\sin nx$$

เฉลยแบบฝึกหัด 2.5

1. ใช้อนุกรมจากแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 2 จงแสดงว่า

(ก) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(ข) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots = \frac{\pi^2}{12}$

(ค) $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8}$

วิธีทำ อนุกรมฟูเรียร์จากแบบฝึกหัด 2.1 ข้อ 2 คือ

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \qquad \ldots\ldots (1)$$

ในเมื่อ $f(x) = x^2 \ ; \ |x| < \pi$

(ก) เพราะว่า $f(x)$ นิยามในช่วง $(-\pi, \pi)$ เพราะฉะนั้น ถ้าแทนค่า $x = \pi$ ซึ่งเป็นจุดไม่ต่อเนื่องใน (1) แล้วใช้เงื่อนไขดีริคเลต จะได้ด้านซ้ายของสมการ

$$f(\pi) = \frac{f(\pi + 0) + f(\pi - 0)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2$$

ดังนั้น

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi$$

$$\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{เพราะว่า } (-1)^{2n} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

หรือ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$

(ข) แทนค่า $x = 0$ ลงใน (1) จะได้

$$f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (1)$$

แต่จุด $x = 0$ เป็นจุดต่อเนื่อง ดังนั้น $f(0) = (0)^2 = 0$ นั่นคือ

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$-\frac{\pi^2}{3} = 4\left(-\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots\right)$$

$$-\frac{\pi^2}{12} = -\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \dots$$

เอา -1 คูณตลอดสมการ จะได้

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$$ #

(ค) ใช้ผลจากข้อ (ข) เพราะว่า

$$\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \dots\right)$$

หรือ $$\frac{\pi^2}{12} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) - \frac{1}{2^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots\right)$$

แต่ $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$ ดังนั้น แทนค่าจะได้

$$\frac{\pi^2}{12} = \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{12} + \frac{\pi^2}{24}$$

$$= \pi^2\left(\frac{2+1}{24}\right)$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$ #

2. จากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$

(ค) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$

(ง) $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \ldots = \frac{3\pi^2\sqrt{2}}{108}$

วิธีทำ อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์จากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ก) คือ

$$f(x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

(ก) ถ้าแทนค่า $x = 0$ ซึ่งเป็นจุดที่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้น

$$f(0) = x(\pi - x)\Big|_{x=0} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1)}{n^2}$$

$$0 = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ #

(ข) เลือกแทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นจุดที่ต่อเนื่องของฟังก์ชัน $f(x)$ ดังนั้น

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = x(\pi - x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n^2}$$

$$\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

แต่ $(-1)^{n+1} = (-1)^n \cdot (-1) = -(-1)^n$

และ $(-1)^{n-1} = (-1)^n \cdot (-1)^{-1} = \frac{(-1)^n}{(-1)} = -(-1)^n$

นั่นคือ $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$ #

(ค) ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ข)

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

เลือกแทนค่า $x = \frac{\pi}{2}$ ซึ่งเป็นจุดต่อเนื่องของ f(x) ดังนั้น

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = x(\pi - x)\Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi/2}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\pi \quad \frac{\pi}{2}\right)}{(2n-1)^3}$$

เพราะว่า $\sin\left(n\pi \quad \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^n}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^3}$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$ เพราะว่า $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$

(ง) เลือกแทนค่า $x = \frac{\pi}{4}$ ซึ่งเป็นจุดต่อเนื่อง ดังนั้น

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = x(\pi - x)\Big|_{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{\pi}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{3\pi^2}{16}\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{4}}{(2n-1)^3}$$

$$\frac{3\pi^3}{128} = \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1^3} + \frac{\sin\frac{3\pi}{4}}{3^3} + \frac{\sin\frac{5\pi}{4}}{5^3} + \ldots$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1^3} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{3^3} + \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{5^3} + \frac{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{7^3} + \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots\right)$$

หรือ $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \ldots = \frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$ #

3. ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 และเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

วิธีทำ (ก) ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ก)

$$x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

$$a_0 = \frac{\pi^2}{3}, \; a_n = \frac{-2\{1 + (-1)^n\}}{n^2}$$

จากสูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล กรณี f(x) นิยามเพียงครึ่งช่วง $(0, \pi)$ คือ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |x(\pi - x)|^2\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left[\frac{-2\{1 + (-1)^n\}}{n^2}\right]^2\right.$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (x^2\pi^2 - 2\pi x^3 + x^4)\,dx = \frac{\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\{1 + (-1)^n\}^2}{n^4}$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\pi^2\frac{x^3}{3} - 2\pi\left(\frac{x^4}{4}\right) + \frac{x^5}{5}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{18} + \left[0 + \frac{16}{2^4} + 0 + \frac{16}{4^4} + 0 + \frac{16}{6^4} + \ldots\right]$$

$$\frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\right] = \frac{\pi^4}{18} + \left(\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \ldots\right)$$

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{10-15+6}{30}\right)\pi^5 = \frac{\pi^4}{18} + \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)$$

$$\frac{\pi^4}{15} - \frac{\pi^4}{18} = \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)$$

$$\left(\frac{6-5}{90}\right)\pi^4 = \left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\dots\right)$$

หรือ $\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\dots = \frac{\pi^4}{90}$

(ข) ผลจากแบบฝึกหัด 2.4 ข้อ 11 (ข)

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$$

$$b_n = \frac{8}{\pi(2n-1)^3}$$

ใช้สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล กรณี f(x) นิยามเพียงครึ่งช่วง $(0, \pi)$ ในเมื่อ $a_0 = 0$ และ $a_n = 0$ นั่นคือ

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

แทนค่า $f(x) = x(\pi - x)$ และ $b_n = \frac{8}{\pi(2n-1)^3}$ จะได้

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|x(\pi - x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{8}{\pi(2n-1)^3}\right]^2$$

ใช้ผลจากข้อ (ก) อินทิกรัลด้านซ้ายมือมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi^4}{15}$

ดังนั้น

$$\frac{\pi^4}{15} = \frac{64}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6}$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{15\times 64} = \frac{\pi^6}{960}$

กำหนดให้

$$S = \frac{1}{1^6}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{5^6}+\dots$$

$$= \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \ldots \right) + \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \ldots \right)$$

$$= \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{2^6} \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots \right)$$

$$= \frac{\pi^6}{960} + \frac{1}{64} S$$

$$\left(1 - \frac{1}{64}\right) S = \frac{\pi^6}{960}$$

$$S = \frac{\pi^6}{960} \left(\frac{64}{63} \right) = \frac{\pi^6}{945}$$

นั่นคือ

$$\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \cdots = \frac{\pi^6}{945}$$

หรือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$

4. จงแสดงว่า

$$\frac{1}{1^2 \cdot 3^2} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^2} + \frac{1}{5^2 \cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$$

แนะนำ : ใช้อนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ของฟังก์ชัน

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1 + \cos n\pi)}{n^2 - 1} \cos nx \ ; \ 0 < x < \pi$$

วิธีทำ อนุกรมนี้

$$a_0 = \frac{4}{\pi} \text{ และ } a_n = \frac{-2(1 + \cos n\pi)}{\pi(n^2 - 1)}$$

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล ในกรณีที่ $f(x)$ นิยามเพียงครึ่งช่วง $(0, \pi)$ คือ

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [\, f(x) \,]^2 \, dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\sin x)^2 \, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{-2(1 + (-1)^n)}{\pi(n^2 - 1)} \right]^2$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{16}{2\pi^2} + \frac{1}{\pi^2}\left[0 + \frac{16}{3^2} + 0 + \frac{16}{15^2} + 0 + \frac{16}{35^2} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^{\pi} = \frac{16}{2\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \ldots\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\pi - 0\right] = \frac{16}{2\pi^2} + \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \ldots\right]$$

$$1 - \frac{16}{2\pi^2} = \frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \ldots\right]$$

หรือ $\frac{1}{1^2\cdot 3^2} + \frac{1}{3^2\cdot 5^2} + \frac{1}{5^2\cdot 7^2} + \ldots = \frac{\pi^2 - 8}{16}$

5. จงแสดงว่า

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$

(ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$

วิธีทำ (ก) ใช้อนุกรมฟูเรียร์ จากตัวอย่างที่ 2.9 ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} -\pi & ; \quad -\pi < x < 0 \\ x & ; \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

ในเมื่อ $a_0 = -\frac{\pi}{2}$, $a_n = \frac{1}{\pi}\left\{\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\}$ และ

$b_n = \frac{1 - 2(-1)^n}{n}$

สูตรเอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล คือ

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0}(-\pi)^2\,dx + \int_0^{\pi}(x)^2\,dx\right] = \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{\frac{1}{\pi}\,\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right\}^2 + \left\{\frac{1 - 2(-1)^n}{n}\right\}^2\right]$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\pi^2 x\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\right] = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{(-1)^n - 1\}^2}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{1 - 2(-1)^n\}^2}{n^2}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\pi^3 + \frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{\pi^2}\left[\frac{4}{1^4} + 0 + \frac{4}{3^4} + 0 + \frac{4}{5^4} + \ldots\right]$$

$$+\left[\frac{9}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{9}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots\right]$$

$$\frac{4\pi^2}{3} - \frac{\pi^2}{8} = \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \ldots\right] + 9\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right]$$

$$+\left[\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \ldots\right]$$

$$\left(\frac{32-3}{24}\right)\pi^2 = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + 9\left(\frac{\pi^2}{8}\right)$$

$$+\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots\right]$$

$$\frac{29\pi^2}{24} = \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} + \frac{9\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$$

$$\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{29\pi^2}{24} - \frac{9\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{24}$$

$$= \frac{(29-27-1)\pi^4}{24}$$

$$\frac{\pi^4}{24}$$

หรือ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{24}\left(\frac{\pi^2}{4}\right) = \frac{\pi^6}{96}$$

หมายเหตุ มีการใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.5 ข้อ 1 (ก) และ (ค)

(ข) ใช้ผลจากแบบฝึกหัด 2.5 ข้อ 3 (ข)

กำหนดให้

$$S = \frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \ldots$$

$$= \left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{6^6} + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^6} + \frac{1}{2^6}\left(\frac{1}{1^6} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \ldots\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} + \frac{1}{64} S$$

$$\left(1 - \frac{1}{64}\right) S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6}$$

แต่ $S = \frac{\pi^6}{945}$ ดังนั้น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{63}{64}\left(\frac{\pi^6}{945}\right) = \frac{\pi^6}{960}$$ #

เฉลยแบบฝึกหัด 2.6

จากข้อ 1 ถึงข้อ 6 จงหาอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อนของฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งนิยามในหนึ่งคาบคือ

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

ในเมื่อ $c_n = \frac{1}{2\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{-in\pi x/\ell}\, dx$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $e = 1$ เลือก $c = 0$

ดังนั้น

$$C'' = \frac{1}{2(1)} \int_0^{0+2(1)} f(x)\, e^{-in\pi x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1)\, e^{-in\pi x}\, dx + \int_1^2 (0)\, e^{-in\pi x}\, dx \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi} \Big|_0^1 + 0 \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{in\pi}\left(e^{-in\pi} - 1 \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\left(1 - e^{-in\pi}\right)$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์รูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2in\pi}\left(1 - e^{-in\pi}\right) e^{in\pi x}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2n\pi}\left(e^{-in\pi} - 1\right) e^{in\pi x}$$

เพราะว่า $e^{-in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$ เพราะฉะนั้น

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2n\pi}\left\{(-1)^n - 1\right\} e^{in\pi x}$$

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 < x < 1 \\ -1 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

ในเมื่อ $c_n = \frac{1}{2\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{-in\pi x/\ell} dx$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ เลือก $c = 0$
ดังนั้น

$$c_n = \frac{1}{2(1)} \int_0^{0+2(1)} f(x)\, e^{-in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 (1)\, e^{-in\pi x} dx + \int_1^2 (-1)\, e^{-in\pi x} dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi}\Big|_0^1 + \frac{e^{-in\pi x}}{in\pi}\Big|_1^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{in\pi}\left\{e^{-in\pi} - 1\right\} + \frac{1}{in\pi}\left\{e^{-2in\pi} - e^{-in\pi}\right\}\right]$$

เพราะว่า $e^{-in\pi} = \cos n\pi - i \sin n\pi = \cos n\pi = (-1)^n$

และ $e^{-2in\pi} = \cos 2n\pi - i \sin 2n\pi = 1$

เพราะฉะนั้น แทนค่าจะได้

$$c_n = \frac{1}{2in\pi}\left[-\{(-1)^n - 1\} + \{1 - (-1)^n\}\right]$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\left[-\{(-1)^n - 1\} - \{(-1)^n - 1\}\right]$$

$$= \frac{1}{2in\pi}\left[-2\{(-1)^n - 1\}\right]$$

$$= \frac{i}{n\pi}\{(-1)^n - 1\}$$

แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์รูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{n\pi}\{(-1)^n - 1\} e^{in\pi x}$$

3. $f(x) = x \; ; \; 0 < x < 1$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \quad e^{in\pi x/\ell}$$

จากสูตร $c_n = \frac{1}{2\ell} \int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{-in\pi x/\ell}\, dx$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 1$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{1}{2}$ เลือกแทนค่า $c = 0$

ดังนั้น

$$C" = \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{0+2(\frac{1}{2})} (x)\, e^{-2in\pi x}\, dx$$

$$= \int_0^1 x\, e^{-2in\pi x}\, dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = x$ และ $dv = e^{-2in\pi x}$ จะได้

$$\int_0^1 x\, e^{-2in\pi x}\, dx = x\left(\frac{-e^{-2in\pi x}}{2in\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \left(\frac{-e^{-2in\pi x}}{2in\pi}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2in\pi}\left\{e^{-2in\pi}\right\} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\, e^{-2in\pi x}\Big|_0^1$$

$$= \frac{-e^{-2in\pi}}{2in\pi} + \frac{1}{4n^2\pi^2}\left(e^{-2in\pi} - 1\right)$$

ดังนั้น

$$c_n = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left(e^{-2in\pi} - 1\right) - \frac{e^{-2in\pi}}{2in\pi}$$

เพราะว่า $e^{-2in\pi} = \cos 2nn - i \sin 2n\pi = 1$

เพราะฉะนั้น

$$c_n = \frac{1}{4n^2\pi^2}\left\{1 - 1\right\} - \frac{1}{2in\pi}$$

$$= 0 + \frac{i}{2nn} \quad \text{เพราะว่า } -1 = i^2$$

$$\frac{i}{2nn}$$

แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i}{2n\pi} e^{2in\pi x}$$

หรือ $$x = \frac{i}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2in\pi x}}{n}$$

4. $f(x) = x \quad ; \quad -1 < x < 1$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

จากสูตร $$c_n = \frac{1}{2\ell} \int_{-\ell}^{\ell} f(x) e^{-in\pi x/\ell} dx$$

เพราะว่า 1 คาบ = 2 เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ แทนค่าใน c_n จะได้

$$c_n = \frac{1}{2(1)} \int_{-1}^{1} (x) e^{-in\pi x} dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi} \right)\Big|_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \left(\frac{-e^{-in\pi x}}{in\pi} \right) dx \right.$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{in\pi} \{ e^{-in\pi} + e^{in\pi} \} - \frac{e^{-in\pi x}}{(in\pi)^2} \Big|_{-1}^{1} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{in\pi} \{ (-1)^n + (-1)^n \} + \frac{1}{n^2\pi^2} \{ e^{-in\pi} - e^{in\pi} \} \right]$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{-2(-1)^n}{in\pi} + \frac{1}{n^2\pi^2} \{ (-1)^n - (-1)^n \} \right]$$

$$= \frac{-(-1)^n}{in\pi}$$

$$= \frac{i(-1)^n}{n\pi}$$

แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์รูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{i(-1)^n}{n\pi} e^{in\pi x}$$

5. $f(x) = \cos x \; ; \; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อนคือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

จากสูตร $c_n = \frac{1}{2\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\, e^{-in\pi/\ell}\, dx$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = \pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{\pi}{2}$ แทนค่าใน c_n จะได้

$$c_n = \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, e^{-2inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x\, e^{-2inx}\, dx$$

เพราะว่า $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ เพราะฉะนั้น

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)e^{-2inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{ix}\cdot e^{-2inx}\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-ix}\cdot e^{-2inx}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i(1-2n)x}\, dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i(1+2n)x}\, dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{i(1-2n)x}}{i(1-2n)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \frac{e^{-i(1+2n)x}}{i(1+2n)}\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{e^{i(1-2n)\pi/2} - e^{i(1-2n)(-\pi/2)}}{i(1-2n)}\right\} - \left\{\frac{e^{-i(1+2n)\pi/2} - e^{-i(1+2n)(-\pi/2)}}{i(1+2n)}\right\}\right] \quad \text{..........(1)}$$

เพราะว่า

$$e^{i(1-2n)\pi/2} = \cos(1-2n)\frac{\pi}{2} + i\sin(1-2n)\frac{\pi}{2}$$

และ $\cos(1 \quad 2n)\dfrac{\pi}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - n\pi\right) = \sin n\pi = 0$

$\sin(1 - 2n)\dfrac{\pi}{2} = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)''$

เพราะฉะนั้น

$$e^{i(1-2n)\pi/2} = 0 + i(-1)^n = i(-1)^n \qquad \ldots\ldots\ldots(2)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$e^{i(1-2n)(-\pi/2)} = e^{-i(i-2n)\pi/2}$$

$$= \cos(1 \quad 2n)\frac{\pi}{2} \quad i\sin(1 \quad 2n)\frac{\pi}{2}$$

$$= 0 - i(-1)''$$

$$= -i(-1)'' \qquad \ldots\ldots\ldots(3)$$

และ $e^{-i(1+2n)\pi/2} = \cos(1+2n)\dfrac{\pi}{2} - i\sin(1+2n)\dfrac{\pi}{2}$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$= -\sin n\pi - i\cos n n$$

$$= 0 - i(-1)''$$

$$= -i(-1)^n \qquad \ldots\ldots\ldots(4)$$

และ $e^{i(1+2n)(-n/Z,} = e^{i(1+2n)\pi/2}$

$$= \cos(1+2n)\frac{\pi}{2} + i\sin(1+2n)\frac{\pi}{2}$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)$$

$$= -\sin n\pi + i\cos n\pi$$

$$= -0 + i(-1)^n$$

$$= i(-1)^n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

แทนค่า (2), (3), (4) และ (5) ใน (1) จะได้

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{i(-1)^n + i(-1)^n}{i(1-2n)}\right\} - \left\{\frac{-i(-1)^n - i(-1)^n}{i(1+2n)}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2i(-1)^n}{i(1-2n)} + \frac{2i(-1)^n}{i(1+2n)}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{1-2n} + \frac{1}{1+2n}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{\pi}\left[\frac{2}{1-4n^2}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)}$$

แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ในรูปเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{2inx}$$

หรือ $$\cos x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1-4n^2} e^{2inx}$$

6. $f(x) = \sin x \;; \quad 0 < x < \pi$

วิธีทำ สูตรอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน คือ

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/\ell}$$

จากสูตร $$c_n = \frac{1}{2\ell}\int_c^{c+2\ell} f(x)\, e^{-in\pi x/\ell}\, dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = \pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{\pi}{2}$ เลือก $c = 0$ แทนค่าใน c_n จะได้

$$c_n = \frac{1}{2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\int_0^{0+2(\frac{\pi}{2})} \sin x\, e^{-2inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)e^{-2inx}\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} e^{ix}\cdot e^{-2inx}\,dx - \int_0^{\pi} e^{-ix}\cdot e^{-2inx}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\int_0^{\pi} e^{i(1-2n)x}\,dx - \int_0^{\pi} e^{-i(1+2n)x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{e^{i(1-2n)x}}{i(1-2n)}\Big|_0^{\pi} + \frac{e^{i(1+2n)x}}{i(1+2n)}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\left\{\frac{e^{i(1-2n)\pi}-1}{1-2n}\right\} + \left\{\frac{e^{i(1+2n)\pi}-1}{1+2n}\right\}\right]$$

เพราะว่า $e^{i(1\ \ 2n)\pi} = \cos(1-2n)\pi + i\sin(1-2n)n$

$= \cos(7\text{-}r -- 2nn) + i\sin(\pi - 2n\pi)$

$-\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi$

$= -(1) + 0$

-1

และ $e^{i(1+2n)\pi} = \cos(1+2n)\pi + i\sin(1+2n)\pi$

$= \cos(\pi + 2nn) + i\sin(a + 2n\pi)$

$-\cos 2n\pi \quad i\sin 2n\pi$

$= -(1) \quad i(0)$

$= -1$

เพราะฉะนั้น

$$c_n = \frac{-1}{2\pi}\left[\left\{\frac{-1-1}{1-2n}\right\} + \left\{\frac{-1-1}{1+2n}\right\}\right]$$

$$= \frac{-1}{2\pi}\left[\frac{-2}{1-2n} + \frac{-2}{1+2n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1+2n+1-2n}{1-4n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi(1-4n^2)}$$

แทนค่า c_n ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์แบบเชิงซ้อน

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{2}{\pi(1 - 4n^2)} e^{2inx}$$

หรือ $$\sin x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - 4n^2} e^{2inx}$$