จากข้อ 5 ถึงข้อ 10 จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ หรืออนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ เมื่อกำหนดช่วงแบบครึ่งช่วง

5. $f(x) = 1$ เมื่อ $0 < x < 1$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$

**เพราะฉะนั้น** $\ell = 1$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^{1} (1) \sin n\pi x\, dx$$

$$= 2\left(-\frac{\cos n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left\{\cos n\pi - 1\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1 - (-1)^n\right]$$

แทนค่า $b_n$ **ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์**

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[1 - (-1)^n]}{n} \sin n\pi x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1}\sin \pi x + 0 + \frac{2}{3}\sin 3\pi x + 0 + \frac{2}{5}\sin 5\pi x + \ldots\right]$$

**หรือ** $1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin (2n-1)\pi x}{2n-1}$

(ข) **สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ**

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 (1)\,dx = 2x\Big|_0^1 = 2$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 (1)\cos n\pi x\,dx$$

$$= 2\,\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\sin n\pi - 0\right\}$$

$$= 0 \quad ; \quad \sin n\pi = 0$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}(2) + \sum_{n=1}^{\infty}(0)\cos n\pi x$$

หรือ $f(x) = 1$

6. $f(x) = e^x$ เมื่อ $0 < x < 1$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 e^x \sin n\pi x\,dx \qquad \text{..........(1)}$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้

$$u = \sin n\pi x \quad ; \quad dv = e^x dx$$

$$du = n\pi \cos n\pi x \, dx \quad ; \quad v = e^x$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx = \sin n\pi x \, (e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (n\pi \cos n\pi x \, dx)$$

$$= [\sin n\pi \, (e^1) - 0\} - n\pi \int_0^1 e^x \cos n\pi x \, dx$$

$$= -n\pi \int_0^1 e^x \cos n\pi x \, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

อินทิเกรตทีละส่วนอีกครั้ง

ให้ $u = \cos n\pi x \quad ; \quad dv = e^x \, dx$

$$du = -n\pi \sin n\pi x \, dx \quad ; \quad v = e^x$$

ดังนั้น

$$\int_0^1 e^x \cos n\pi x \, dx = \cos n\pi x \, (e^x) \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x (-n\pi \sin n\pi x \, dx)$$

$$= \left\{ \cos n\pi \, (e^1) - (1)(1) \right\} + n\pi \int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

แทนค่า (3) ใน (2)

$$\int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx = -n\pi \left[ \left\{ e^1 (-1)^n - 1 \right\} + n\pi \int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx \right]$$

$$(1 + n^2\pi^2) \int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx = n\pi \, [1 - e(-1)^n]$$

หรือ
$$\int_0^1 e^x \sin n\pi x \, dx = \frac{n\pi \, [1 - (-1)^n e]}{1 + n^2\pi^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

แทนค่า (4) ใน (1) จะได้

$$b_n = \frac{2n\pi \, [1 - (-1)^n e]}{1 + n^2\pi^2}$$

ดังนั้น

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n\pi \, [1 - (-1)^n e]}{1 + n^2\pi^2} \sin n\pi x$$

หรือ
$$e^x = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \, [1 - (-1)^n e]}{1 + n^2\pi^2} \sin n\pi x$$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx = 2\int_0^1 e^x\,dx = 2e^x\Big|_0^1 = 2[e-1]$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{1}\int_0^1 e^x \cos n\pi x\,dx \qquad \text{..........(5)}$$

เพราะว่า $\int_0^1 e^x \cos n\pi x\,dx = [e(-1)^n - 1] + n\pi\int_0^1 e^x \sin n\pi x\,dx$

และ $\int_0^1 e^x \sin n\pi x\,dx = \frac{n\pi[1-(-1)^n e]}{1+n^2\pi^2}$

เพราะฉะนั้น

$$\int_0^1 e^x\cos n\pi x\,dx = -[1-(-1)^n e] + n\pi\left[\frac{n\pi\{1-(-1)^n e\}}{1+n^2\pi^2}\right]$$

$$= \{1-(-1)^n e\}\left[-1+\frac{n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}\right]$$

$$= \{1-(-1)^n e\}\left[\frac{-1-n^2\pi^2+n^2\pi^2}{1+n^2\pi^2}\right]$$

$$= \{1-(-1)^n e\}\left[\frac{-1}{1+n^2\pi^2}\right]$$

$$= \frac{[(-1)^n e - 1]}{1+n^2\pi^2} \qquad \text{..........(6)}$$

แทนค่า (6) ใน (5) จะได้

$$a_n = \frac{2[(-1)^n e - 1]}{1+n^2\pi^2}$$

แทนค่า $a_0$ และ $a_n$ ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}[2(e-1)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n e - 1]}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

หรือ $$e^x = e - 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(-1)^n e - 1]}{1 + n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

7. $f(x) = \cos x \quad ; \quad 0 < x < 2\pi$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 4\pi$

เพราะฉะนั้น $\ell = 2\pi$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin \frac{n\pi x}{2\pi}\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos x \sin \frac{nx}{2}\, dx$$

ใช้สูตร $\sin A \cos B = \dfrac{\sin(A+B) + \sin(A-B)}{2}$

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\sin\left(\frac{n}{2}+1\right)x + \sin\left(\frac{n}{2}-1\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)x}{\frac{n}{2}+1} - \frac{\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)x}{\frac{n}{2}-1}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)2\pi - 1}{\frac{n}{2}+1}\right\} + \left\{\frac{\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)2\pi - 1}{\frac{n}{2}-1}\right\}\right]$$

เพราะว่า

$$\cos\left(\frac{n}{2}+1\right)2\pi = \cos(2\pi + n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$$

และ $\cos\left(\frac{n}{2}-1\right)2\pi = \cos(n\pi - 2\pi) = \cos(2\pi - n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$b_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{(-1)^n - 1}{\frac{n}{2}+1}\right\} + \left\{\frac{(-1)^n - 1}{\frac{n}{2}-1}\right\}\right]$$

$$= \frac{\{1-(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$= \frac{\{1-(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{\frac{n}{2}-1+\frac{n}{2}+1}{\frac{n^2}{4}-1}\right]$$

$$= \frac{\{1-(-1)^n\}}{2\pi}\left[\frac{4n}{n^2-4}\right]$$

$$b_n = \frac{2n}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2-4}\right];\ n \neq 2$$

หาค่า $b_2$ ใหม่อีกครั้งจากสูตร

$$b_2 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{2\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = 2\pi$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{4\pi}[\cos 2\pi - 1]$$

$$= \frac{1}{4\pi}[1 - 1]$$

$$= 0$$

แทนค่า $b_2$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = b_1 \sin\frac{x}{2} + b_2 \sin x + \sum_{n=3}^{\infty} b_n \sin\frac{nx}{2}$$

เพราะว่า $b_1 = b_n \Big|_{\text{แทน } n=1} = \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{-3}\right] = -\frac{4}{3\pi}$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = -\frac{4}{3\pi}\sin\frac{x}{2} + (0)\sin x + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{2n}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^n}{n^2-4}\right]\sin\frac{nx}{2}$$

$$= -\frac{4}{3\pi}\sin\frac{x}{2} + \frac{2}{\pi}\left[3\left\{\frac{2}{5}\right\}\sin\frac{3x}{2} + 0 + 5\left\{\frac{2}{21}\right\}\sin\frac{5x}{2}\right.$$

$$\left. + 0 + 7\left\{\frac{2}{45}\right\}\sin\frac{7x}{2} + \ldots\right]$$

หรือ $\cos x = -\frac{4}{3\pi}\sin\frac{x}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{3}{5}\sin\frac{3x}{2} + \frac{5}{21}\sin\frac{5x}{2} + \frac{7}{45}\sin\frac{7x}{2} + \ldots\right]$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = 2\pi$ จะได้

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\cos\frac{nx}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(1+\frac{n}{2}\right)x + \cos\left(1-\frac{n}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)x}{1+\frac{n}{2}} + \frac{\sin\left(1-\frac{n}{2}\right)x}{1-\frac{n}{2}}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)2\pi - 0}{1+\frac{n}{2}}\right\} + \left\{\frac{\sin\left(1-\frac{n}{2}\right)2\pi - 0}{1-\frac{n}{2}}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2\pi + n\pi)}{1+\frac{n}{2}} + \frac{\sin(2\pi - n\pi)}{1-\frac{n}{2}}\right]$$

แต่ $\sin(2\pi + n\pi) = \sin n\pi = 0$

และ $\sin(2\pi - n\pi) = \sin n\pi = 0$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{1}{2\pi}[0] = 0; \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน $\cos x$ กระจายในรูปอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ไม่ได้

8. $f(x) = \sin x \quad ; \quad 0 < x < 2\pi$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = 2\pi$ ดังนั้น

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x \sin\frac{nx}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos\left(1-\frac{n}{2}\right)x - \cos\left(1+\frac{n}{2}\right)x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin\left(1-\frac{n}{2}\right)x}{1-\frac{n}{2}} - \frac{\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)x}{1+\frac{n}{2}}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\left\{\frac{\sin\left(1-\frac{n}{2}\right)2\pi - 0}{1-\frac{n}{2}}\right\} - \left\{\frac{\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)2\pi - 0}{1+\frac{n}{2}}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(2\pi - n\pi)}{1 - \frac{n}{2}} - \frac{\sin(2\pi + n\pi)}{1 + \frac{n}{2}}\right]; \quad n \neq 2$$

เพราะว่า $\sin(2\pi + n\pi) = \sin n\pi = 0$

และ $\sin(2\pi - n\pi) = -\sin n\pi = 0$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{0}{1 - \frac{n}{2}} - \frac{0}{1 + \frac{n}{2}}\right] = 0 \quad ; \quad n \neq 2$$

หาค่า $b_2$ ใหม่จากสูตร $b_n$ โดยแทนค่า $n = 2$ จะได้

$$b_2 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin x\,dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \sin x\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[2\pi - 0]$$

$$= 1$$

นั่นคือจะได้

$b_n = 0$ เมื่อ $n \neq 2$ และ $b_2 = 1$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$f(x) = (1)\sin x$

หรือ $\sin x = \sin x$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\,dx \quad ; \quad \ell = 2\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{\pi}[1-1]$$

$$= 0$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin x\cos\frac{nx}{2}\,dx \; ; \; \ell = 2\pi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{\sin\left(1+\frac{n}{2}\right)x + \sin\left(1-\frac{n}{2}\right)x}{2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos\left(1+\frac{n}{2}\right)x}{1+\frac{n}{2}} - \frac{\cos\left(1-\frac{n}{2}\right)x}{1-\frac{n}{2}}\right]\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\left\{\cos\left(1+\frac{n}{2}\right)2\pi - 1\right\}}{1+\frac{n}{2}} + \frac{\left\{\cos\left(1-\frac{n}{2}\right)2\pi - 1\right\}}{1-\frac{n}{2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\{\cos(2\pi+n\pi)-1\}}{1+\frac{n}{2}} + \frac{\{\cos(2\pi-n\pi)-1\}}{1-\frac{n}{2}}\right]$$

เพราะว่า $\cos(2\pi + n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$

และ $\cos(2\pi - n\pi) = \cos n\pi = (-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(-1)^n - 1}{1 + \frac{n}{2}} + \frac{(-1)^n - 1}{1 - \frac{n}{2}}\right]$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{1}{1+\frac{n}{2}} + \frac{1}{1-\frac{n}{2}}\right]$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{1-\frac{n}{2}+1+\frac{n}{2}}{1-\frac{n^2}{4}}\right]$$

$$= \frac{1-(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{2}{\frac{4-n^2}{4}}\right]$$

$$= \frac{4[1-(-1)^n]}{\pi(4-n^2)}$$

$$= \frac{4[(-1)^n - 1]}{\pi(n^2-4)} \ ; \ n \neq 2$$

หาค่า $a_2$ จากสูตร $a_n$ โดยแทนค่า $n = 2$ ดังนั้น

$$a_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin x \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin 2x \, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1-1}{2}\right]$$

$$= 0$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{nx}{2}$$

$$= \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{x}{2} + a_2\cos x + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{4\{(-1)^n - 1\}}{\pi(n^2-4)}\cos\frac{nx}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(0) + \left(\frac{8}{3\pi}\right)\cos\frac{x}{2} + (0)\cos x + \frac{4}{\pi}\left[-\frac{2}{5}\cos\frac{3x}{2}\right.$$

$$\left. + 0 - \frac{2}{21}\cos\frac{5x}{2} + 0 - \frac{2}{45}\cos\frac{7x}{2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{8}{3\pi}\cos\frac{x}{2} - \frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{5}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{21}\cos\frac{5x}{2} + \frac{1}{45}\cos\frac{7x}{2} + \ldots\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi}\left[\frac{1}{(-3)}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{3x}{2} + \frac{1}{21}\cos\frac{5x}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{45}\cos\frac{7x}{2} + \ldots\right]$$

$$= -\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x/2}{(4n^2-4n-3)}$$

**ข้อสังเกต**

เพราะว่า $a_n = \dfrac{4\{(-1)^n - 1\}}{\pi(n^2-4)}$

ดังนั้น

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ n เป็นเลขเต็มคู่} \\ \dfrac{-8}{\pi(n^2-4)} & \text{เมื่อ n เป็นเลขเต็มคี่} \end{cases}$$

แทนค่า $n = 2n - 1$ จะได้

$$a_{2n-1} = \frac{-8}{\pi[(2n-1)^2-4]} = \frac{-8}{\pi(4n^2-4n-3)} \; ; \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

9. $$f(x) = \begin{cases} x & ; \; 0 < x < 2 \\ 6 - 2x & ; \; 2 < x < 3 \end{cases}$$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell = 2(3)$ เพราะฉะนั้น $\ell = 3$

จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^{2}(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_2^{3}(6-2x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^{2}x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + 6\int_2^{3}\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right.$$

$$\left.-2\int_2^{3}x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx\right] \qquad \text{..........(1)}$$

อินทิเกรตทีละส่วนให้ $u = x$ และ $dv = \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$

ดังนั้น

$$\int_0^2 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Bigg|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx$$

$$= \frac{-6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_0^2$$

$$= \frac{-6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3} \qquad \text{..........} \quad (2)$$

และ $$\int_2^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx = x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Bigg|_2^3 - \int_2^3\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx$$

$$= \frac{-9}{n\pi}\cos n\pi + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Bigg|_2^3$$

$$= \frac{-9(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left\{\sin n\pi - \sin\frac{2n\pi}{3}\right\}$$

$$= \frac{-9(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3} \qquad \text{..........(3)}$$

และ $\int_2^3 \sin \frac{n\pi x}{3}\, dx = \frac{-\cos \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \Big|_2^3$

$$= -\frac{3}{n\pi}\left\{\cos n\pi - \cos \frac{2n\pi}{3}\right\}$$

$$= \frac{3}{n\pi} \cos \frac{2n\pi}{3} - \frac{3}{n\pi}(-1)^n \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

แทนค่า (2), (3) และ (4) ลงใน (1) จะได้

$$b_n = \frac{2}{3}\Big[\frac{-6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3} + 6\Big\{\frac{3}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$- \frac{3}{n\pi}(-1)^n\Big\} - 2\Big\{\frac{-9(-1)^n}{n\pi} + \frac{6}{n\pi}\cos\frac{2n\pi}{3}$$

$$- \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{2n\pi}{3}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{2}{3}[\,0\,]$$

$$= 0$$

ดังนั้น กระจายให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ไม่ได้

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\Big[\int_0^2 x\, dx + \int_2^3 (6 - 2x)\, dx\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\Big[\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + 6x\Big|_2^3 - x^2\Big|_2^3\Big]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\{4-0\} + 6\{3-2\} - \{9-4\}\right]$$

$$= \frac{2}{3}[2+6-5]$$

$$= 2$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^3 f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^2 (x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_2^3 (6-2x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + 6\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx - 2\int_2^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right] \quad .....(5)$$

พิจารณา

$$\int_0^2 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Big|_0^2 - \int_0^2\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx$$

$$= \frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^2$$

$$= \frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left\{\cos\frac{2n\pi}{3} - 1\right\} \quad ..........(6)$$

$$\int_2^3 \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = \frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\Big|_2^3$$

$$= \frac{3}{n\pi}\left\{\sin n\pi - \sin\frac{2n\pi}{3}\right\}$$

$$= -\frac{3}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} \quad ..........(7)$$

และ $\int_2^3 x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx = x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Big|_2^3 - \int_2^3\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx$

$$= \frac{3}{n\pi}\left\{3\sin n\pi - 2\sin\frac{2n\pi}{3}\right\} + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_2^3$$

$$= \frac{-6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\left\{\cos n\pi - \cos\frac{2n\pi}{3}\right\} \quad \text{..........(8)}$$

แทนค่า (6), (7) และ (8) ลงใน (5) จะได้

$$a_n = \frac{2}{3}\Big[\frac{6}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3} - \frac{9}{n^2\pi^2} - \frac{18}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3}$$

$$+ \frac{12}{n\pi}\sin\frac{2n\pi}{3} - \frac{18}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{18}{n^2\pi^2}\cos\frac{2n\pi}{3}\Big]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}\left[3\cos\frac{2n\pi}{3} - 2(-1)^n - 1\right]$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}(2) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2\pi^2}\left[3\cos\frac{2n\pi}{3} - 2(-1)^n - 1\right]\cos\frac{n\pi x}{3}$$

$$= 1 + \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[3\cos\frac{2n\pi}{3} - 2(-1)^n - 1\right]}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

10. $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; \quad 0 < x < 1 \\ 2 - x & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

เพราะว่า $\ell = 2$ เพราะฉะนั้น

$$b_n = \frac{2}{2}\int_0^2 f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

อินทิเกรตอินทิกรัลพจน์แรก โดยการอินทิเกรตทีละส่วน 2 ครั้งจะได้

$$\int_0^1 x^2 \sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = x^2\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_0^1 - 2\int_0^1 x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{-2}{n\pi}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 0\right\} + \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_0^1\right.$$

$$\left. - \int_0^1\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{4}{n\pi}\left[\frac{2}{n\pi}\left\{\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\}\right.$$

$$\left. + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\Bigg|_0^1\right]$$

$$= \frac{-2\cos\frac{n\pi}{2}}{n\pi} + \frac{8\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} + \frac{16}{n^3\pi^3}\left\{\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right\}$$

และ $\int_1^2 (2-x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx = 2\int_1^2 \sin\frac{n\pi x}{2}dx - \int_1^2 x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$

$$= \frac{-2\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Bigg|_1^2 - \left\{x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Bigg|_1^2\right.$$

$$-\int_1^2 \left( \frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) dx \Big\}$$

$$= \frac{-4}{n\pi}\left\{\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right\} + \frac{2}{n\pi}\left\{2\cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n\pi}(-1)^n - \frac{2}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2}$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2}\left\{\sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{2}\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi}{2}$$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{-2}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{16}{n^3\pi^3}\left\{\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right\}$$

$$+ \frac{2}{n\pi}\cos \frac{n\pi}{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{12}{n^2\pi^2}\sin \frac{n\pi}{2} + \frac{16}{n^3\pi^3}\left\{\cos \frac{n\pi}{2} - 1\right\}$$

หรือ $$b_n = \begin{cases} \frac{12}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^3\pi^3} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-32}{n^3\pi^3} & n = 2, 6, 10, \ldots \\ \frac{-12}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^3\pi^3} & n = 3, 7, 11, \ldots \\ 0 & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$

(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 2x\Big|_1^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + 2 - \frac{3}{2}$$

$$= \frac{2+12-9}{6}$$

$$= \frac{5}{6}$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{2}{2}\int_0^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_1^2 (2-x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

พิจารณา

$$\int_0^1 x^2\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx = x^2\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)dx$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left\{\sin\frac{n\pi}{2} - 0\right\} - \frac{4}{n\pi}\left[x\left(\frac{-\cos\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\right)\Big|_0^1\right.$$

$$- \int_0^1 \left( \frac{-\cos \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) dx \Big]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2} \left\{ \cos \frac{n\pi}{2} - 0 \right\}$$

$$- \frac{16}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi x}{2} \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{16}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2}$$

และ $\int_1^2 (2 - x) \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx = 2 \int_1^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx - \int_1^2 x \cos \frac{n\pi x}{2} \, dx$

$$= 2 \left( \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) \Big|_1^2 - \Big[ x \left( \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) \Big|_1^2$$

$$- \int_1^2 \left( \frac{\sin \frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \right) dx \Big]$$

$$= \frac{4}{n\pi} \left\{ \sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{2} \right\} - \frac{2}{n\pi} \left\{ 2 \sin n\pi - \sin \frac{n\pi}{2} \right\}$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2} \Big|_1^2$$

$$= \frac{-4}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} \left\{ \cos n\pi - \cos \frac{n\pi}{2} \right\}$$

$$= \frac{-2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{4}{n^2\pi^2} (-1)^n + \frac{4}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2}$$

ดังนั้น แทนค่าจะได้

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{16}{n^3\pi^3} \sin \frac{n\pi}{2} - \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$- \frac{4}{n^2\pi^2}(-1)^n + \frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}$$

$$= \frac{12}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{4(-1)^n}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^3\pi^3}\sin\frac{n\pi}{2}$$

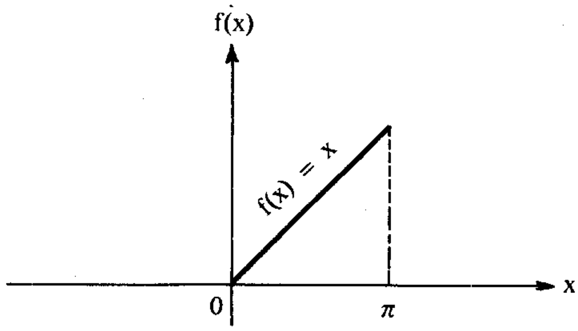
หรือ $$a_n = \begin{cases} \frac{4}{n^2\pi^2} - \frac{16}{n^3\pi^3} & n = 1, 5, 9, \ldots \\ \frac{-16}{n^2\pi^2} & n = 2, 6, 10, \ldots \\ \frac{4}{n^2\pi^2} + \frac{16}{n^3\pi^3} & n = 3, 7, 11, \ldots \\ \frac{8}{n^2\pi^2} & n = 4, 8, 12, \ldots \end{cases}$$

11. จงแทนฟังก์ชันต่อไปนี้ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ไซน์และให้เขียนกราฟของฟังก์ชันด้วย

(ก) $f(x) = x \quad ; \quad 0 < x < \pi$

(ข) $f(x) = \sin\frac{\pi x}{\ell} \quad ; \quad 0 < x < \ell$

(ก) เขียนกราฟ $f(x) = x \; ; \; 0 < x < \pi$




สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^\pi = \pi$$

จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nx\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน จะได้

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^\pi\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

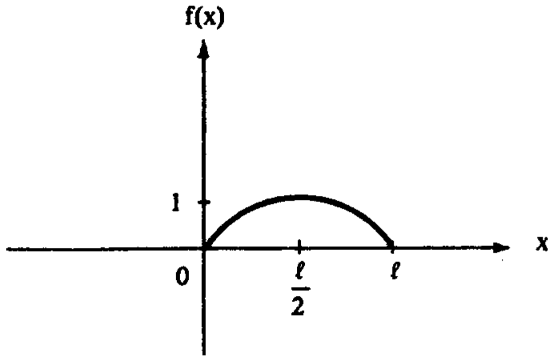
$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n - 1]}{\pi n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{-2}{1^2}\cos x + 0 - \frac{2}{3^2}\cos 3x + 0 - \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1^2}\cos x + \frac{1}{3^2}\cos 3x + \frac{1}{5^2}\cos 5x + \ldots\right]$$

หรือ $x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$

(ข) เขียนกราฟ $f(x) = \sin \frac{\pi x}{\ell}$ ; $0 < x < \ell$




สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{\ell} \left( \frac{-\cos \frac{\pi x}{\ell}}{\frac{\pi}{\ell}} \right) \Big|_0^{\ell}$$

$$= \frac{-2}{\pi} \left[ \cos \pi - 1 \right]$$

$$= \frac{4}{\pi}$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \sin \frac{\pi x}{\ell} \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\left[\sin(1+n)\frac{\pi x}{\ell} + \sin(1-n)\frac{\pi x}{\ell}\right]dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi x/\ell}{(1+n)\frac{\pi}{\ell}} - \frac{\cos(1-n)\pi x/\ell}{(1-n)\frac{\pi}{\ell}}\right]\Bigg|_0^{\ell}$$

$$= -\frac{1}{\ell}\left[\left\{\frac{\cos(1+n)\pi - 1}{(1+n)\frac{\pi}{\ell}}\right\} + \left\{\frac{\cos(1-n)\pi - 1}{(1-n)\frac{\pi}{\ell}}\right\}\right]$$

เพราะว่า $\cos(1+n)\pi = \cos(\pi + n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

และ $\cos(1-n)\pi = \cos(\pi - n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = -\frac{1}{\ell}\left[\left\{\frac{-(-1)^n - 1}{(1+n)\frac{\pi}{\ell}}\right\} + \left\{\frac{-(-1)^n - 1}{(1-n)\frac{\pi}{\ell}}\right\}\right]$$

$$= \frac{\{1+(-1)^n\}}{\ell}\left[\frac{1}{(1+n)\frac{\pi}{\ell}} + \frac{1}{(1-n)\frac{\pi}{\ell}}\right]$$

$$= \frac{\{1+(-1)^n\}}{\pi}\left[\frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{2\{1+(-1)^n\}}{\pi(1-n^2)} \quad ; \quad n \neq 1$$

หาค่า $a_1$ ใหม่ จากสูตร $a_n$ โดยแทนค่า $n = 1$ ดังนั้น

$$a_1 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{\pi x}{\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{2\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= -\frac{1}{\ell}\,\frac{\cos\frac{2\pi x}{\ell}}{\frac{2\pi}{\ell}}\Bigg|_0^{\ell}$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\left[\cos 2\pi - 1\right]$$

$= \quad 0 \qquad$ เพราะว่า $\cos 2\pi = 1$

แทนค่า $a_0$, $a_n$ ในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right) + (0)\cos\frac{\pi x}{\ell} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\{1+(-1)^n\}}{\pi(1-n^2)}\cos\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{-3}\cos\frac{2\pi x}{\ell} + 0 + \frac{2}{-15}\cos\frac{4\pi x}{\ell} + 0 + \frac{2}{-35}\cos\frac{6\pi x}{\ell} + \ldots\right]$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{1\times 3}\cos\frac{2\pi x}{\ell} + \frac{1}{3\times 5}\cos\frac{4\pi x}{\ell} + \frac{1}{5\times 7}\cos\frac{6\pi x}{\ell} + \ldots\right]$$

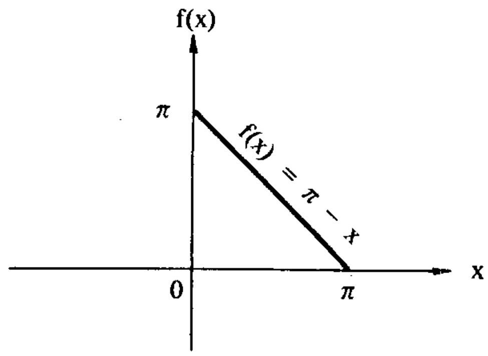
$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x/\ell}{(2n-1)(2n+1)}$$

หรือ $\sin\frac{\pi x}{\ell} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x/\ell}{(4n^2-1)}$

12. จงแทนค่าฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วยอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ และให้เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$ ด้วย

$$f(x) = \pi - x \quad ; \quad 0 < x < \pi$$

**วิธีทำ** เขียนกราฟของฟังก์ชัน $f(x)$




(ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

**หาค่า $a_0$ จากสูตร**

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi x \Big|_0^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right]$$

$$= \pi$$

**หาค่า $a_n$ จากสูตร**

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{n}\{\sin n\pi - 0\} - \left\{x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[0 - \left\{0 + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right\}\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{\cos n\pi - 1}{n^2}\right]$$

$$= \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2} \quad ; \quad n \neq 0$$

**แทนค่า $a_0$, $a_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์**

$$f(x) = \frac{1}{2}(\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2}\cos nx$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1^2}\cos x + 0 + \frac{2}{3^2}\cos 3x + 0 + \frac{2}{5^2}\cos 5x + \ldots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots\right]$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

**(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

**หาค่า $b_n$ จากสูตร**

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x\sin nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\pi\left\{\frac{\cos n\pi - 1}{n}\right\} - \left\{x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi}\right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_0^{\pi}\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)dx\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\pi\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\} + \frac{\pi\cos n\pi}{n} - \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= 2\left\{\frac{1-(-1)^n}{n}\right\} + \frac{2(-1)^n}{n} - 0$$

$$= \frac{2}{n} - \frac{2(-1)^n}{n} + \frac{2(-1)^n}{n}$$

$$= \frac{2}{n}$$

**แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx$$

**หรือ** $\pi - x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

13. จงหาอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์และไซน์ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\pi x & ; \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{4}\pi(\pi - x) & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

**วิธีทำ** (ก) สูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}\pi x\right)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{4}\pi(\pi - x)\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi^2}{4}(x)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{8}\left(\frac{\pi^2}{4}\right) + \frac{\pi^2}{4}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi^2}{8}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{32} + \frac{\pi^3}{8} - \frac{3\pi^3}{32}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{8}$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\left(\frac{1}{4}\pi x\right)\cos nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}\frac{1}{4}\pi(\pi - x)\cos nx\,dx\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx + \frac{\pi^2}{4}\int_{\pi/2}^{\pi}\cos nx\,dx - \frac{\pi}{4}\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos nx\,dx\right]$$

พิจารณา

$$\int_0^{\pi/2} x\cos nx\,dx = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right]$$

และ $\int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx\,dx \quad = \frac{\sin nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$

และ $\int_{\pi/2}^{\pi} x\cos nx\,dx \quad = x\left(\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi}\left(\frac{\sin nx}{n}\right)dx$

$$= \frac{-\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= \frac{-\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\left[(-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

แทนค่าลงใน $a_n$ จะได้

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{4}\left\{\frac{\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)\right\} + \frac{\pi^2}{4}\left(\frac{-1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{4}\left\{\frac{-\pi}{2n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\left((-1)^n - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{8n}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4n^2} - \frac{\pi^2}{4n}\sin\frac{n\pi}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{\pi^2}{8n}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4n^2}(-1)^n + \frac{\pi}{4n^2}\cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\pi}{2n^2}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4n^2} - \frac{\pi}{4n^2}(-1)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right]$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์โคไซน์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{8}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}\left[2\cos\frac{n\pi}{2} - 1 - (-1)^n\right]\cos nx$$

$$= \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2}\left[0 + \frac{(-4)}{2^2}\cos 2x + 0 + 0 + 0 + \frac{(-4)}{6^2}\cos 6x\right.$$

$$\left. + 0 + 0 + 0 + \frac{(-4)}{(10)^2}\cos 10x + \dots\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\left[ \frac{\cos 2x}{1^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \frac{\cos 10x}{5^2} + \dots \right]$$

$$= \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{(2n-1)^2}$$

**(ข) สูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์ คือ**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

**จากสูตร**

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{4}\pi x\right) \sin nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{4}\pi(\pi - x) \sin nx \, dx \right]$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[ \frac{\pi}{4} \int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx + \frac{\pi^2}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx \, dx \right.$$

$$\left. - \frac{\pi}{4} \int_{\pi/2}^{\pi} x \sin nx \, dx \right]$$

**พิจารณา**

$$\int_0^{\pi/2} x \sin nx \, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \left(\frac{-\cos nx}{n}\right) dx$$

$$= \frac{-\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{-\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{-\cos nx}{n}\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{1}{n}\left[\cos \frac{n\pi}{2} - (-1)^n\right]$$

และ $$\int_{\pi/2}^{\pi} x \sin nx \, dx = x\left(\frac{-\cos nx}{n}\right)\Big|_{\pi/2}^{\pi} - \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{-\cos nx}{n}\right) dx$$

$$= -\frac{1}{n}\left[\pi \cos n\pi - \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi}{2}\right] + \frac{\sin nx}{n^2}\Big|_{\pi/2}^{\pi}$$

$$= -\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\pi}{2n} \cos \frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2}$$

แทนค่าใน $b_n$ จะได้

$$b_n = \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\pi}{4}\Big\{\frac{-\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big\}$$

$$+ \frac{\pi^2}{4}\Big\{\frac{1}{n}\Big(\cos\frac{n\pi}{2} - (-1)^n\Big)\Big\} - \frac{\pi}{4}\Big\{\frac{-\pi}{n}(-1)^n$$

$$+ \frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{-\pi^2}{8n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4n^2}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4n}\cos\frac{n\pi}{2} - \frac{\pi^2}{4n}(-1)^n$$

$$+ \frac{\pi^2}{4n}(-1)^n - \frac{\pi^2}{8n}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big]$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\frac{\pi}{2n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\Big]$$

$$= \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์ไซน์

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\sin nx$$

$$= \frac{\sin x}{1^2} + 0 - \frac{\sin 3x}{3^2} + 0 + \frac{\sin 5x}{5^2} + 0 - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots$$

$$= \frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \frac{\sin 7x}{7^2} + \ldots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$$

## เฉลยแบบฝึกหัด 2.3

1. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = |x| \quad ; \quad -1 < x < 1$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ แทนค่า

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\,dx$$

$$= 2\int_0^1 |x|\,dx \quad \text{เพราะว่า } |x| \text{ เป็นฟังก์ชันคู่}$$

$$= 2\int_0^1 x\,dx$$

$$= x^2 \Big|_0^1$$

$$= 1$$

จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} |x|\cos n\pi x\,dx \quad \text{แทนค่า } \ell = 1$$

$$= 2\int_0^1 |x|\cos n\pi x\,dx$$

$$= 2\int_0^1 x\cos n\pi x\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน

$$a_n = 2\left[x\left(\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\,dx\right]$$

$$= 2\left[0 + \frac{\cos n\pi x}{n^2\pi^2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - 1\right]$$

$$= \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2}$$

และ $b_n = 0$ เพราะว่า $|x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2[(-1)^n - 1]}{n^2\pi^2} \cos n\pi x$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2}\left[\frac{-2}{1^2}\cos \pi x + 0 - \frac{2}{3^2}\cos 3\pi x + 0 - \ldots\right]$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos \pi x + \frac{1}{3^2}\cos 3\pi x + \frac{1}{5^2}\cos 5\pi x + \ldots\right]$$

หรือ $$|x| = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)\pi x}{(2n-1)^2}$$

2. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = 1$ บน $(0, 2)$ และ $f(x) = -1$ บน $(-2, 0)$ ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 4$ เพราะฉะนั้น $\ell = 2$

ดังนั้น แทนค่าจะได้

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{2}(1)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(-x)\Big|_{-2}^{0} + (x)\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[-2 + 2]$$

$$= 0$$

จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2}(1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_{-2}^{0} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}(0) + \frac{2}{n\pi}(0)\right]$$

$$= 0$$

**จากสูตร**

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{0}^{2}(1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\left\{1 - \cos(-n\pi)\right\} - \frac{2}{n\pi}\left\{\cos n\pi - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[1 - (-1)^n - (-1)^n + 1\right]$$

$$= \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi}$$

**แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์**

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\frac{n\pi x}{2} + \frac{2\{1 - (-1)^n\}}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\{1 - (-1)^n\}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1}\sin\frac{\pi x}{2} + 0 + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi x}{2} + 0 + \frac{2}{5}\frac{5\pi x}{2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)\pi x/2}{(2n-1)}$$

3. จงกระจายฟังก์ชัน $f(x) = \cos\pi x\ ;\ -1 < x < 1$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\cos\pi x\,dx$$

$$= \frac{\sin\pi x}{\pi}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\sin\pi - \sin(-\pi)\right\}$$

$$= 0$$

จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\cos\pi x\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\Big[\cos(1+n)\pi x + \cos(1-n)\pi x\Big]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(1+n)\pi x}{(1+n)\pi} + \frac{\sin(1-n)\pi x}{(1-n)\pi}\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\sin(1+n)\pi - \sin(1+n)(-\pi)}{(1+n)\pi}\right\} + \left\{\frac{\sin(1-n)\pi - \sin(1-n)(-\pi)}{(1-n)\pi}\right\}\right]$$

เพราะว่า $\sin(1+n)\pi = \sin(\pi + n\pi) = -\sin n\pi = 0$

$$\sin(1-n)\pi = \sin(\pi - n\pi) = \sin n\pi = 0$$

$$\sin(1+n)(-\pi) = -\sin(1+n)\pi = 0$$

$$\sin(1-n)(-\pi) = -\sin(1-n)\pi = 0$$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = \frac{1}{2}[0] = 0 \quad ; \quad n \neq 1$$

หาค่า $a_1$ ใหม่ จากสูตร $a_n$ โดยแทนค่า $n = 1$ ดังนั้น

$$a_1 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \cos \pi x \cos \pi x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \cos^2 \pi x \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left( \frac{1 + \cos 2\pi x}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[ x + \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right] \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[ \left\{ 1 - (-1) \right\} + \frac{1}{2\pi}\left\{ \sin 2\pi - \sin(-2\pi) \right\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[ 2 + \frac{1}{2\pi}\{0\} \right]$$

$$= 1$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x) \sin \frac{n\pi x}{\ell} \, dx$$

แทนค่า $\ell = 1$

$$b_n = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1} \cos \pi x \sin n\pi x \, dx$$

จากสูตร

$$\cos A \sin B = \frac{\sin(A+B) - \sin(A-B)}{2}$$

ดังนั้น

$$\cos \pi x \sin n\pi x = \frac{\sin(1+n)\pi x - \sin(1-n)\pi x}{2}$$

แทนค่าใน $b_n$ จะได้

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\sin(1+n)\pi x - \sin(1-n)\pi x\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(1+n)\pi x}{(1+n)\pi} + \frac{\cos(1-n)\pi x}{(1-n)\pi}\right]\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\left\{\frac{\cos(1+n)\pi - \cos(1+n)(-\pi)}{(1+n)\pi}\right\} + \left\{\frac{\cos(1-n)\pi - \cos(1-n)(-\pi)}{(1-n)\pi}\right\}\right]$$

เพราะว่า $\cos(1+n)\pi = \cos(\pi + n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

$\cos(1-n)\pi = \cos(\pi - n\pi) = -\cos n\pi = -(-1)^n$

และ $\cos(1+n)(-\pi) = \cos(1+n)\pi = -(-1)^n$

$\cos(1-n)(-\pi) = \cos(1-n)\pi = -(-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$b_n = \frac{1}{2}\left[-\left\{\frac{-(-1)^n + (-1)^n}{(1+n)\pi}\right\} + \left\{\frac{-(-1)^n + (-1)^n}{(1-n)\pi}\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0]$$

$$= 0 \quad ; \quad n \neq 1$$

หาค่า $b_1$ ใหม่ จากสูตร $b_n$ โดยแทนค่า $n = 1$ ดังนั้น

$$b_1 = \frac{1}{1}\int_{-1}^{1}\cos\pi x \sin\pi x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\sin 2\pi x\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 2\pi x}{2\pi}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{-1}{4\pi}\left[\cos 2\pi - \cos(-2\pi)\right]$$

$$= \frac{-1}{4\pi}[1 - 1]$$

$$= 0$$

แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + (1)\cos\pi x + (0)\sin\pi x + 0$$

หรือ $\cos \pi x = \cos \pi x$

4. จงกระจายฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2x & ; \quad 0 \leqslant x < 3 \\ 0 & ; \quad -3 < x < 0 \end{cases}$$

ให้อยู่ในรูปอนุกรมฟูเรียร์

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 6$ เพราะฉะนั้น $\ell = 3$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(0)\,dx + \int_{0}^{3}(2x)\,dx\right] \\ &= \frac{1}{3}(x^2)\Big|_0^3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

จากสูตร

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \\ &= \frac{1}{3}\left[\int_{-3}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_{0}^{3}(2x)\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx\right] \\ &= \frac{2}{3}\int_{0}^{3} x\cos\frac{n\pi x}{3}\,dx \end{aligned}$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $x = u$ และ $dv = \cos\frac{n\pi x}{3}\,dx$

ดังนั้น

$$a_n = \frac{2}{3}\left[ x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{9}{n\pi}\sin n\pi + \frac{9}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{9}{n^2\pi^2}\{\cos n\pi - 1\} \right]$$

$$= \frac{6}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right] \quad ; \quad n \neq 0$$

หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[ \int_{-3}^{0}(0)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx + \int_0^3 (2x)\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^3 x\sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$$

อินทิเกรตทีละส่วน ให้ $u = x$ และ $dv = \sin\frac{n\pi x}{3}\,dx$

ดังนั้น

$$b_n = \frac{2}{3}\left[ x\left(\frac{\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)\Big|_0^3 - \int_0^3 \left(\frac{\cos\frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}}\right)dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{9}{n\pi}\cos n\pi - \frac{9}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{3}\Big|_0^3 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{9}{n\pi}(-1)^n - \frac{9}{n^2\pi^2}(0) \right]$$

$$= \frac{6}{n\pi}(-1)^n$$

แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}(3) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{6}{n^2\pi^2}\left\{(-1)^n - 1\right\}\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{6(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$$

$$= \frac{3}{2} + 6\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\{(-1)^n - 1\}}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{3} + \frac{(-1)^n}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{3}\right]$$

5. ถ้า $f(x + 2\ell) = f(x)$ สำหรับทุกค่า x และ $f(x) = -1$ ในเมื่อ $-\ell < x < 0$, $f(x) = 1$ เมื่อ $0 < x < \ell$ และ $f(0) = f(c)$ จงแสดงว่า สำหรับทุกค่า $x\ (-\infty < x < \infty)$ มันจะเป็นจริงว่า

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}$$

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ = $2\ell$ เพราะฉะนั้น $\ell = \ell$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\left[\int_{-\ell}^{0}(-1)\,dx + \int_{0}^{\ell}(1)\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[(-x)\Big|_{-\ell}^{0} + (x)\Big|_{0}^{\ell}\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}[-\ell + \ell]$$

$$= 0$$

จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\int_{-\ell}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \int_{0}^{\ell}(1)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{-\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Bigg|_{-\ell}^{0} + \frac{\sin\frac{n\pi x}{\ell}}{\frac{n\pi}{\ell}}\Bigg|_{0}^{\ell}\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{-\ell}{n\pi}(0) + \frac{\ell}{n\pi}(0)\right]$$

$$= 0$$

**จากสูตร**

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\int_{-\ell}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx + \int_{0}^{\ell}(1)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{-\ell}^{0} - \frac{\ell}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\Big|_{0}^{\ell}\right]$$

$$= \frac{1}{\ell}\left[\frac{\ell}{n\pi}\left\{1-\cos(-n\pi)\right\} - \frac{\ell}{n\pi}\left\{\cos n\pi - 1\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}[1-\cos n\pi - \cos n\pi + 1]$$

$$= \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

**แทนค่าในสูตรอนุกรมฟูเรียร์**

$$f(x) = \frac{1}{2}(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(0)\cos\frac{n\pi x}{\ell} + \frac{2}{n\pi}\left\{1-(-1)^n\right\}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left\{1-(-1)^n\right\}}{n}\sin\frac{n\pi x}{\ell}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{2}{1}\sin\frac{\pi x}{\ell} + 0 + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi x}{\ell} + 0 + \frac{2}{5}\sin\frac{5\pi x}{\ell} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{\ell} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{\ell} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{\ell} + \ldots\right]$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{\ell}$$

6. ถ้ากำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -2 < x < 1 \\ 1 & ; \quad 1 < x < 2 \end{cases}$$

และ $f(1) = f(x) = \frac{1}{2}$ จงแสดงว่า ในเมื่อ $-2 \leqslant x \leqslant 2$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 4$ เพราะฉะนั้น $\ell = 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{1}(0)\,dx + \int_{1}^{2}(1)\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[x\Big|_1^2\right] \\
&= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{1}(0)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2}(1)\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right] \\
&= \frac{-\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}
\end{aligned}$$

**หาค่า $b_n$ จากสูตร**

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_{-2}^{1}(0)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \int_{1}^{2}(1)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_1^2\right]$$

$$= \frac{-1}{n\pi}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]$$

แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

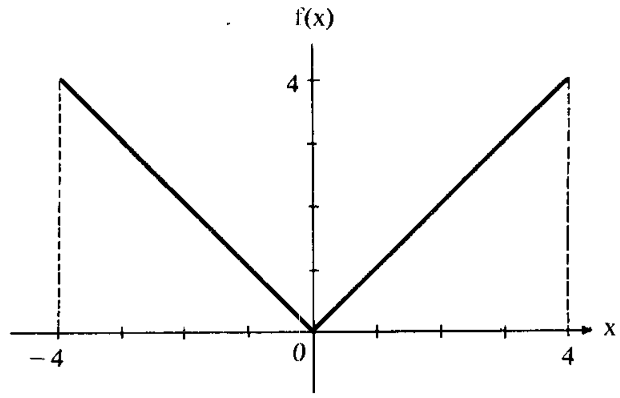
$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{-\sin\frac{n\pi}{2}}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi x}{2} - \frac{1}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

$$f(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi x}{2} + \left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin\frac{n\pi x}{2}\right]$$

จงเขียนกราฟของฟังก์ชันต่อไปนี้ และหาอนุกรมฟูเรียร์โดยใช้คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ ในเมื่อสามารถใช้ได้

7. $f(x) = \begin{cases} -x & ; \quad -4 \leqslant x \leqslant 0 \\ x & ; \quad 0 \leqslant x \leqslant 4 \end{cases}$

**วิธีทำ** เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x)



สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = 8$ เพราะฉะนั้น $\ell = 4$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\,dx$$

เพราะว่า $f(x) = |x|$ เป็นฟังก์ชันคู่ เพราะฉะนั้น

$$a_0 = \frac{1}{4}\cdot 2\int_0^4 f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$= 4$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-4}^{4} f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\;2\int_0^4 f(x)\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx \text{ ; } f(x) \text{ เป็นฟังก์ชันคู่}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^4 x\cos\frac{n\pi x}{4}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)\Big|_0^4 - \int_0^4\left(\frac{\sin\frac{n\pi x}{4}}{\frac{n\pi}{4}}\right)dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{16}{n\pi}(\sin n\pi - 0) + \frac{16}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{4}\Big|_0^4\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[0 + \frac{16}{n^2\pi^2}\{\cos n\pi - 1\}\right]$$

$$= \frac{-8}{n^2\pi^2}\{1 - \cos n\pi\}$$

และ $b_n = 0$ เพราะว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่

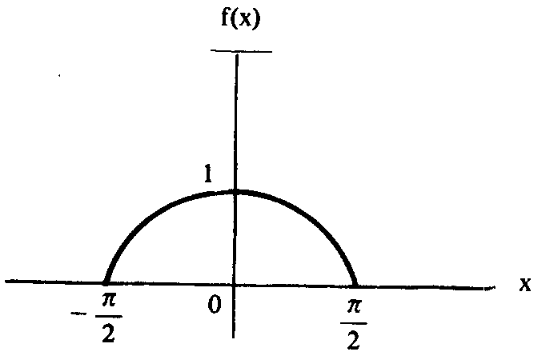
แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ จะได้

$$f(x) = \frac{1}{2}(4) + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{-8}{n^2\pi^2}\{1 - \cos n\pi\}\cos\frac{n\pi x}{4} + 0\right]$$

$$= 2 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1 - \cos n\pi)}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{4}$$

8. $f(x) = \cos x$ ; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

**วิธีทำ** เขียนกราฟของฟังก์ชัน f(x)




จากกราฟพบว่า $f(x) = \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $b_n = 0$ และ $a_0$ หาได้จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\,dx$$

เพราะว่า 1 คาบ $= 2\ell = \pi$ เพราะฉะนั้น $\ell = \frac{\pi}{2}$ ดังนั้น

$$a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}(\sin x)\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{\pi} \quad ; \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

หาค่า $a_n$ จากสูตร

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

แทนค่า $\ell = \frac{\pi}{2}$ จะได้

$$a_n = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos x\cos 2nx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\cos(1+2n)x + \cos(1-2n)x\right]dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(1+2n)x}{1+2n} + \frac{\sin(1-2n)x}{1-2n}\right]\Bigg|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left\{\frac{\sin(1+2n)\frac{\pi}{2} - 0}{1+2n}\right\} + \left\{\frac{\sin(1-2n)\frac{\pi}{2} - 0}{1-2n}\right\}\right]$$

เพราะว่า

$$\sin(1+2n)\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)^n$$

และ $\sin(1-2n)\frac{\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - n\pi\right) = \cos n\pi = (-1)^n$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{1+2n} + \frac{(-1)^n}{1-2n}\right]$$

$$= \frac{2(-1)^n}{\pi}\left[\frac{1}{1+2n} + \frac{1}{1-2n}\right]$$

$$= \frac{4(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)}$$

แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{\pi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{\pi(1 - 4n^2)} \cos 2nx$$

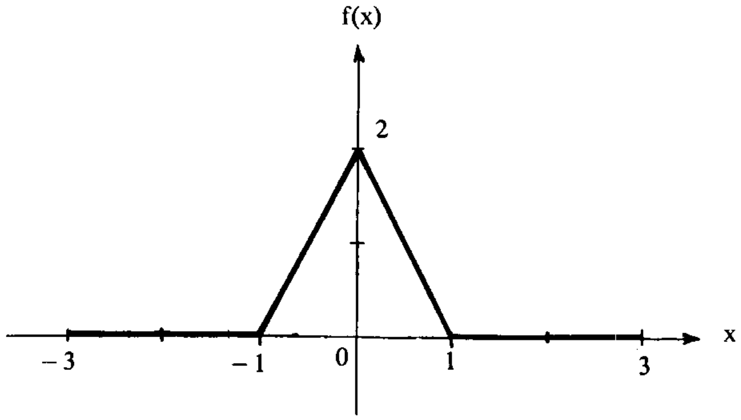
$$= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 - 4n^2} \cos 2nx$$

หรือ $\cos x = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nx$

9. $$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -3 < x < -1 \\ 1 + \cos \pi x; & -1 < x < 1 \\ 0 & ; \quad 1 < x < 3 \end{cases}$$

**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}\right)$$




จากรูป พบว่า f(x) เป็นฟังก์ชันคู่ ดังนั้น $b_n = 0$ หาค่า $a_0$ จากสูตร

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x)\, dx$$

$$= \frac{2}{3} \int_0^{3} f(x)\, dx$$ แทนค่า $\ell = 3$

$$= \frac{2}{3}\left[ \int_0^1 (1 + \cos \pi x)\, dx + \int_1^3 (0)\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ (x) \Big|_0^1 + \left( \frac{\sin \pi x}{\pi} \right) \Big|_0^1 + 0 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ 1 + \frac{1}{\pi} \left\{ \sin \pi - 0 \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

**หาค่า $a_n$ จากสูตร**

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell}\, dx$$

**แทนค่า $\ell = 3$ จะได้**

$$a_n = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \int_0^1 (1 + \cos \pi x) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx + \int_1^3 (0) \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{\sin \frac{n\pi x}{3}}{\frac{n\pi}{3}} \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos \pi x \cos \frac{n\pi x}{3}\, dx + 0 \right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[ \frac{3}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ \cos\left(1 + \frac{n}{3}\right)\pi x + \cos\left(1 - \frac{n}{3}\right)\pi x \right] dx \right.$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[ \frac{\sin\left(1 + \frac{n}{3}\right)\pi x}{\left(1 + \frac{n}{3}\right)\pi} + \frac{\sin\left(1 - \frac{n}{3}\right)\pi x}{\left(1 - \frac{n}{3}\right)} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[ \left\{ \frac{\sin\left(1 + \frac{n}{3}\right)\pi - 0}{\left(1 + \frac{n}{3}\right)\pi} \right\} \right.$$

$$\left. + \left\{ \frac{\sin\left(1 - \frac{n}{3}\right)\pi - 0}{\left(1 - \frac{n}{3}\right)\pi} \right\} \right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin\left(1+\frac{n}{3}\right)\pi}{\left(1+\frac{n}{3}\right)\pi} + \frac{\sin\left(1-\frac{n}{3}\right)\pi}{\left(1-\frac{n}{3}\right)\pi}\right]$$

เพราะว่า $\sin\left(1+\frac{n}{3}\right)\pi = \sin\left(\pi + \frac{n\pi}{3}\right) = -\sin\frac{n\pi}{3}$

และ $\sin\left(1-\frac{n}{3}\right)\pi = \sin\left(\pi - \frac{n\pi}{3}\right) = \sin\frac{n\pi}{3}$

เพราะฉะนั้น

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3}\left[\frac{-\sin\frac{n\pi}{3}}{\left(1+\frac{n}{3}\right)\pi} + \frac{\sin\frac{n\pi}{3}}{\left(1-\frac{n}{3}\right)\pi}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left[\frac{-1}{1+\frac{n}{3}} + \frac{1}{1-\frac{n}{3}}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{1}{3\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left[\frac{\frac{2n}{3}}{1-\frac{n^2}{9}}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3} + \frac{2n}{9\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left[\frac{9}{9-n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left[\frac{1}{n} + \frac{n}{9-n^2}\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\sin\frac{n\pi}{3}\left[\frac{9-n^2+n^2}{n(9-n^2)}\right]$$

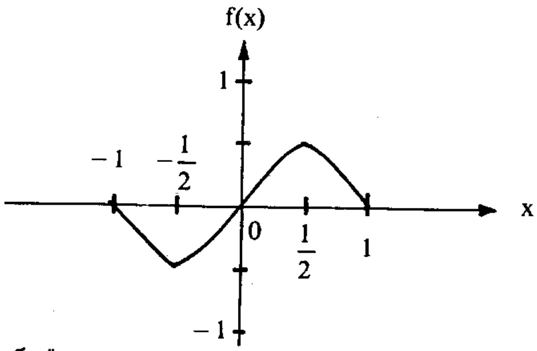
$$= \frac{18}{\pi}\left[\frac{1}{n(9-n^2)}\right]\sin\frac{n\pi}{3}$$

แทนค่า $a_0$, $a_n$ และ $b_n$ ลงในสูตรอนุกรมฟูเรียร์

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{18}{\pi}\left\{\frac{1}{n(9-n^2)}\right\}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{18}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(9-n^2)}\sin\frac{n\pi}{3}\cos\frac{n\pi x}{3}$$

10. $f(x) = x - x^3 \quad ; \quad -1 < x < 1$




**วิธีทำ** สูตรอนุกรมฟูเรียร์ คือ

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}\right)$$

เพราะว่า $f(x) = x - x^3$

แทนค่า x ด้วย −x จะได้

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x) - (-x)^3 \\ &= -x + x^3 \\ &= -(x - x^3) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $f(x) = x - x^3$ เป็นฟังก์ชันคี่

ดังนั้น $a_0 = 0$ และ $a_n = 0$ หาค่า $b_n$ จากสูตร

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}\,dx$$

เพราะว่า $2\ell = 2$ เพราะฉะนั้น $\ell = 1$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx \\ &= 2\int_0^1 (x - x^3)\sin n\pi x\,dx \\ &= 2\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx - 2\int_0^1 x^3 \sin n\pi x\,dx \qquad \text{..........(1)} \end{aligned}$$

อินทิเกรตทีละส่วน