บทที่ 1
ความรู้เบื้องต้น
(Introduction)

นิยามและคุณสมบัติ

นิยาม 1 ฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ เรียกว่า "ฟังก์ชันมีคาบ (periodic function)" ถ้ามีค่าคงที่ 2p และมีคุณสมบัติว่า

$$f(x + 2p) = f(x) \qquad \text{..........(1)}$$

สำหรับทุกค่าของ x ในเมื่อ 2p เป็นจำนวนที่น้อยที่สุด ซึ่งทำให้ (1) เป็นจริง (แต่ $2p > 0$) ดังนั้น 2p คือ คาบ (period) ของฟังก์ชัน $f(x)$

นิยาม 2 ฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ เรียกว่า "ฟังก์ชันคู่ (even function)" เมื่อสอดคล้องตามสมการ

$$f(-x) = f(x) \qquad \text{..........(2)}$$

และเรียกว่า "ฟังก์ชันคี่ (odd function)" เมื่อสอดคล้องตามสมการ

$$f(-x) = -f(x) \qquad \text{..........(3)}$$

ข้อสังเกต ในกรณีที่ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่สอดคล้องตาม (2) หรือ (3) เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า "ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่ (neither even nor odd function)"

คุณสมบัติของฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

1. (ฟังก์ชันคู่) × (ฟังก์ชันคู่) = ฟังก์ชันคู่
2. (ฟังก์ชันคี่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคู่
3. (ฟังก์ชันคู่) × (ฟังก์ชันคี่) = ฟังก์ชันคี่
4. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคู่
5. $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันคี่

การทดสอบว่าอนุกรมลู่เข้าแบบสม่ำเสมอหรือไม่ จะใช้การทดสอบเอ็มของไวแยร์สตราสส์ (Weierstrass' M-test) เรียกย่อ ๆ ว่า การทดสอบเอ็ม (M-test)

การทดสอบเอ็ม กล่าวว่า ถ้าลำดับของค่าคงที่บวก $M_1, M_2, \ldots$ สามารถหาค่าได้ในบางช่วง $[a, b]$ นั่นคือ

1. $|U_n(x)| \leqslant M_n$; $n = 1, 2, 3, \ldots$

และ 2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น สรุปได้ว่า อนุกรมอนันต์ $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ ลู่เข้าแบบสม่ำเสมอบนช่วง $[a, b]$ แต่ถ้ามีข้อหนึ่งข้อใดไม่จริงจะสรุปแบบข้างต้นไม่ได้

การทดสอบว่า อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกจะใช้วิธีเปรียบเทียบกับอนุกรมมาตรฐาน อนุกรมมาตรฐานที่นิยมใช้คือ อนุกรมพี

อนุกรมพี (P - series)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = 1 + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \ldots + \frac{1}{n^P} + \ldots$$

1. ถ้า $P > 1$ อนุกรมจะลู่เข้า และ
2. ถ้า $P \leqslant 1$ อนุกรมจะลู่ออก

นิยาม 3 เซตของฟังก์ชัน $f_n(x)$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ซึ่งนิยามบนช่วง $a \leqslant x \leqslant b$ เรียกว่า "เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน (orthogonal sets of functions)" บนช่วง $a \leqslant x \leqslant b$ ถ้าหากว่า

$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m(x)\, f_n(x)\, dx$ หาค่าได้ และ

$(f_m, f_n) = 0$ เมื่อ $m \neq n$

$\neq 0$ เมื่อ $m = n$

นิยาม 4 เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน $\{ f_n(x) \}$ เรียกว่า "เซตเชิงตั้งฉากปกติ (orthonormal sets of functions)" บนช่วง $a \leqslant x \leqslant b$ ถ้าหากว่า

$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m(x)\, f_n(x)\, dx$ หาค่าได้

และ $(f_m, f_n) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$

สูตรหาค่าประจำ (norm) ของฟังก์ชัน $f(x)$ เขียนแทนด้วย $\| f_n \|$ คือ

$$\| f_n \| = \sqrt{(f_n, f_n)} = \left| \int_a^b f_n^2(x)\, dx \right|^{\frac{1}{2}}$$

การสร้างเซตเชิงตั้งฉากปกติของฟังก์ชัน $\{ g_n(x) \}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ซึ่งสมนัยกับ เซตเชิงตั้งฉากของฟังก์ชัน $\{ f_n(x) \}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ในเมื่อค่าประจำของมันไม่เป็นศูนย์ คือ

$$g_n(x) = \frac{f_n(x)}{\| f_n \|} \; ; \; a \leqslant x \leqslant b$$

เฉลยแบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาคาบของฟังก์ชันต่อไปนี้

(ก) $\cos 2x$

(ข) $\sin \pi x$

(ค) $\cos \frac{2n\pi x}{T}$

(ง) $\sin 2k\pi x$

วิธีทำ (ก) ให้ $f(x) = \cos 2x$

และให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $\cos 2x$ ดังนั้น

$$f(x + T) = f(x)$$

หรือ
$$\cos 2(x + T) = \cos 2x$$
$$\cos (2x + 2T) = \cos 2x$$

แต่จากความรู้เรื่องตรีโกณมิติ

$$\cos (2\pi + A) = \cos A$$

ถ้าเอาสองสมการเปรียบเทียบกัน ดังนั้น

$$2T = 2\pi$$
$$T = \pi$$

นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $\cos 2x$ คือ π

(ข) ให้ $f(x) = \sin \pi x$

และให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $\sin \pi x$ ดังนั้น

$$f(x + T) = f(x)$$

หรือ
$$\sin \pi(x + T) = \sin \pi x$$
$$\sin (\pi x + \pi T) = \sin \pi x$$

แต่
$$\sin (2\pi + A) = \sin A$$

เปรียบเทียบกัน จะได้

$$\pi T = 2\pi$$
$$T = 2$$

นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $\sin \pi x$ คือ 2

(ค) ให้ $f(x) = \cos \frac{2n\pi x}{T}$

และให้ P เป็นคาบของฟังก์ชัน f(x) ดังนั้น

$$f(x + P) = f(x)$$

หรือ $$\cos \frac{2n\pi(x + P)}{T} = \cos \frac{2n\pi x}{T}$$

$$\cos\left(\frac{2n\pi x}{T} + \frac{2n\pi P}{T}\right) = \cos \frac{2n\pi x}{T}$$

แต่ $$\cos(2\pi + A) = \cos A$$

เปรียบเทียบกันจะได้

$$\frac{2n\pi P}{T} = 2\pi$$

$$P = \frac{T}{n}$$

นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $\cos \frac{2n\pi x}{T} = \frac{T}{n}$

(ง) ให้ $f(x) = \sin 2k\,\pi x$

และให้ T เป็นคาบของฟังก์ชัน $\sin 2k\,\pi x$ ดังนั้น

$$f(x + T) = f(x)$$

หรือ $$\sin 2k\,\pi(x + T) = \sin 2k\,\pi x$$

$$\sin(2k\,\pi x + 2k\,\pi T) = \sin 2k\,\pi x$$

แต่ $$\sin(2\pi + A) = \sin A$$

เปรียบเทียบสมการทั้งสองจะได้

$$2k\pi T = 2\pi$$

$$T = \frac{1}{k}$$

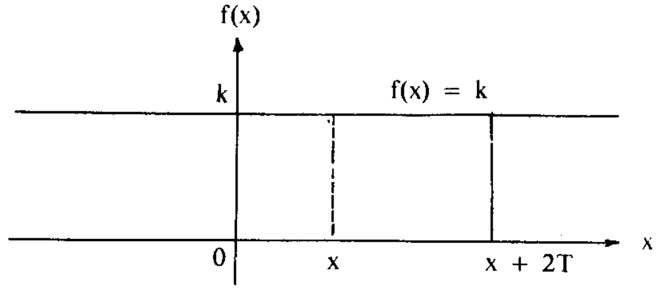
2. จงแสดงว่าฟังก์ชันคงที่เป็นฟังก์ชันมีคาบ ซึ่งมีคาบเป็น $2T > 0$

วิธีทำ สมมุติให้ $f(x) = k$ เป็นฟังก์ชันคงที่

และให้ P เป็นคาบของฟังก์ชัน f(x) ดังนั้น

$$f(x + P) = f(x)$$

จากนิยามของฟังก์ชันคงที่ ไม่ว่า x จะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่าใดก็ตาม ค่าของ f(x) จะมีค่าคงที่เสมอ ดูรูปประกอบ



ดังนั้น $$f(x + 2T) = k = f(x) \qquad \text{..........(2)}$$

เปรียบเทียบ (1) กับ (2) จะได้

$$P = 2T$$

ดังนั้น คาบของฟังก์ชันคงที่ คือ 2T

3. กำหนดว่า f(x) มีคาบเป็น 2T จงหาคาบของ $f\left(\frac{ax}{b}\right)$

วิธีทำ เพราะว่า f(x) มีคาบเป็น 2T เพราะฉะนั้น

$$f(x + 2T) = f(x) \qquad \text{..........(1)}$$

สมมุติให้ P เป็นคาบของฟังก์ชัน $f\left(\frac{ax}{b}\right)$

ดังนั้น $$f\left[\frac{a}{b}(x + P)\right] = f\left(\frac{ax}{b}\right)$$

$$f\left(\frac{ax}{b} + \frac{aP}{b}\right) = f\left(\frac{ax}{b}\right) \qquad \text{..........(2)}$$

เปรียบเทียบ (1) กับ (2) จะได้

$$2T = \frac{aP}{b}$$

หรือ $$P = \frac{2bT}{a}$$

นั่นคือ คาบของฟังก์ชัน $f\left(\frac{ax}{b}\right)$ **คือ** $\frac{2bT}{a}$

4. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันคู่ หรือฟังก์ชันคี่ หรือไม่ เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่

(ก) e^{-x}

(ข) $e^{\cos x}$

(ค) $g(x^2)$

(ง) $x\, g(x^2)$

(จ) $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

(ฉ) $x^3 \sin x \cos x$

(ช) $x^2 - 3x^3 + 4x^4$

วิธีทำ (ก) ให้ $f(x) = e^{-x}$

แทนค่า $x = -x$ ดังนั้น

$$f(-x) = e^{-(-x)} = e^x$$

ซึ่งจะพบว่า เราไม่สามารถจัด e^x ให้อยู่ในรูป e^{-x} หรือ $-e^{-x}$ ได้ เพราะฉะนั้น จึงสรุปไม่ได้ว่า ฟังก์ชันนี้เป็นฟังก์ชันคู่หรือฟังก์ชันคี่ เราเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า "ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่"

(ข) ให้ $f(x) = e^{\cos x}$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(-x) &= e^{\cos(-x)} \\ &= e^{\cos x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $e^{\cos x}$ เป็นฟังก์ชันคู่

(ค) ให้ $f(x) = g(x^2)$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(-x) &= g[(-x)^2] \\ &= g(x^2) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $g(x^2)$ เป็นฟังก์ชันคู่

(ง) ให้ $f(x) = x\, g(x^2)$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)\, g[(-x^2)] \\ &= -x\, g(x^2) \\ &= -\{x\, g(x^2)\} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $x\, g(x^2)$ เป็นฟังก์ชันคี่

(จ) ให้ $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log\left[\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right] \\ &= \log\left[\frac{1-x}{1+x}\right] \\ &= \log(1-x) - \log(1+x) \\ &= -[\log(1+x) - \log(1-x) \\ &= -\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ เป็นฟังก์ชันคี่

(ฉ) ให้ $f(x) = x^3 \sin x \cos x$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 \sin(-x) \cos(-x) \\ &= (-x^3)(-\sin x)(\cos x) \\ &= x^3 \sin x \cos x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

สรุปได้ว่า $x^3 \sin x \cos x$ เป็นฟังก์ชันคู่

(ข) ให้ $f(x) = x^2 - 3x^3 + 4x^4$

แทนค่า x ด้วย $-x$ ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
f(-x) &= (-x)^2 - 3(-x)^3 + 4(-x)^4 \\
&= x^2 + 3x^3 - 4x^4
\end{aligned}
$$

ซึ่งจะพบว่า เราไม่สามารถจัดให้สอดคล้องตามนิยามของฟังก์ชันคู่หรือคี่ได้ เราจึงเรียกฟังก์ชันในลักษณะนี้ว่า "ไม่เป็นทั้งฟังก์ชันคู่และฟังก์ชันคี่"

เฉลยแบบฝึกหัด 1.2

1. โดยการเปรียบเทียบกับอนุกรมฮาร์โมนิค จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่ออก

(ก) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$

(ข) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots$

(ค) $\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \dots$

วิธีทำ อนุกรมฮาร์โมนิค คือ

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$

ซึ่งอนุกรมนี้จะลู่ออก

ดังนั้น อนุกรม

(ก) $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots$ จึงลู่ออก

(ข) เพราะว่าอนุกรม

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \dots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)$$

เพราะฉะนั้นอนุกรมนี้ลู่ออก เพราะว่า $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$ ลู่ออก

(ค) เพราะว่า อนุกรม

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \dots = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots\right)$$

เพราะฉะนั้นอนุกรมนี้ลู่ออก เพราะว่า $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots$ ลู่ออก

2. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่า ลู่เข้าหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบกับอนุกรมพี

(ก) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n}}$ (ข) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$

(ค) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(2n+1)^2}$ (ง) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2}$

(จ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3}$ (ฉ) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$

(ช) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6 + 3}$ (ซ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$

วิธีทำ อนุกรมพี คือ

$$\frac{1}{1^P} + \frac{1}{2^P} + \frac{1}{3^P} + \frac{1}{4^P} + \ldots$$

อนุกรมพี นี้จะลู่เข้า ถ้า $P > 1$ และ อนุกรมพี นี้จะลู่ออก ถ้า $P \leqslant 1$

ดังนั้น (ก) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} = 4\left(\frac{1}{1^{1/2}} + \frac{1}{2^{1/2}} + \frac{1}{3^{1/2}} + \frac{1}{4^{1/2}} + \ldots \right)$$

อนุกรมนี้เป็นอนุกรมพี ซึ่งมี $P = \frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น อนุกรมนี้ลู่ออก

(ข) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{n} + 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2.2^{3/2}+1} + \frac{1}{2.3^{3/2}+1} + \frac{1}{2.4^{3/2}+1} + \ldots$$

ซึ่งจะพบว่า อนุกรมนี้ พอจะเทียบกับอนุกรมพี ซึ่งมี $P = \frac{3}{2} > 1$ โดยที่แต่ละพจน์ของอนุกรมนี้น้อยกว่าอนุกรมพี แต่อนุกรมพี ซึ่งมี $P = \frac{3}{2}$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรมข้อ (ข) ลู่เข้าด้วย

(ค) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(2n+1)^2} = \frac{\cos^2 x}{3^2} + \frac{\cos^2 2x}{5^2} + \frac{\cos^2 3x}{7^2} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

แต่ค่าของ cosine ยกกำลังสอง มีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ 1 ดังนั้นอนุกรมจาก (1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(2n+1)^2} \leqslant \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

แต่อนุกรมพี เมื่อ $P = 2$ คือ

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

เป็นอนุกรมที่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรมจาก (2) ซึ่งน้อยกว่า (3) จะลู่เข้าด้วย

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 nx}{(2n+1)^2}$ ลู่เข้า

(ง) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{2}{5^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{9^2} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

เทียบกับอนุกรมฮาร์โมนิค

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \ldots$$

จะพบว่า อนุกรมจาก (4) เทียบกับอนุกรมฮาร์โมนิคพจน์ต่อพจน์ แต่ละพจน์ของอนุกรมฮาร์โมนิคจะมีค่ามากกว่าอนุกรมของ (4)

ดังนั้น อนุกรมของ (4) ลู่ออก

(จ) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{3^3} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{7^3} + \frac{4}{9^3} + \ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

เทียบกับอนุกรมพี เมื่อ $P = 3$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{9^3} + \ldots$$

จาก (5) เขียนใหม่เป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)^3} = \frac{1}{3^3} + \left|\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^3}\right| + \left|\frac{2}{7^3} + \frac{1}{7^3}\right| + \left|\frac{3}{9^3} \quad \frac{1}{9^3}\right| + \left|\frac{4}{11^3} + \frac{1}{11^3}\right| + \ldots$$

ซึ่งเมื่อเราเทียบอนุกรมทั้งสอง โดยเริ่มจากพจน์ $\frac{1}{3^3}$ จะพบว่า

$$\frac{1}{4^3} > \frac{1}{5^3}$$

$$\frac{1}{6^3} > \frac{2}{7^3}$$

$$\frac{1}{8^3} > \frac{3}{9^3}$$

$$\frac{1}{10^3} > \frac{4}{11^3}$$

....

....

นั่นคือ เมื่อเทียบกับอนุกรมพี พจน์ต่อพจน์ อนุกรมพียังมีค่ามากกว่า แต่อนุกรมพี (P = 3) ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n-1)^3}$ ลู่เข้าด้วย

(ฉ) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2} = e^{-1} + e^{-4} + e^{-9} + e^{-16} + e^{-25} + \ldots$$

$$\frac{1}{e} + \frac{1}{e^4} + \frac{1}{e^9} + \frac{1}{e^{16}} + \frac{1}{e^{25}} + \ldots$$

เทียบกับอนุกรมพี เมื่อ P = 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

เมื่อนำสองอนุกรมมาเปรียบเทียบกัน แบบพจน์ต่อพจน์ จะพบว่า

$\frac{1}{1^2} > \frac{1}{e}$ ในเมือ $e = 2.718$

$\frac{1}{2^2} > \frac{1}{e^4}$

$\frac{1}{3^2} > \frac{1}{e^9}$

....

....

แต่อนุกรมพี เมื่อ P = 2 ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2}$ ลู่เข้าด้วย

(a) เพราะว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \frac{3}{n^4}}$$

$$= \frac{1}{1^2 + \frac{3}{1^4}} + \frac{1}{2^2 + \frac{3}{2^4}} + \frac{1}{3^2 + \frac{3}{34}} + .$$

เทียบกับอนุกรมพี เมื่อ P = 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

จะพบว่า

$$\frac{1}{1^2} > \frac{1}{1^2 + \frac{3}{1^4}}$$

$$\frac{1}{2^2} > \frac{1}{2^2 + \frac{3}{2^4}}$$

$$\frac{1}{3^2} > \frac{1}{3^2 + \frac{3}{3^4}}$$

....

....

แต่อนุกรมพี เมื่อ $P = 2$ ลู่เข้า ดังนั้น อนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{n^6 + 3}$ ลู่เข้าด้วย

เฉลยแบบฝึกหัด 1.3

จากข้อ 1 ถึง ข้อ 5 จงแสดงว่า แต่ละเซตของฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉาก บนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาเซตเชิงตั้งฉากปกติ ซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉาก

1. $\{\cos nx\}$; $n = 0, 1, 2, \ldots; 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$

วิธีทำ $\{\cos nx\}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ เขียนใหม่เป็น $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}$

พิจารณากรณีที่ $m \neq n$

$$\int_0^{2\pi} (1) \cos nx\, dx = \frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{\sin 2n\pi}{n} - 0$$

$$= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos(m+n)x + \cos(m-n)x}{2}\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\sin(m+n)2\pi}{m+n} - 0\right\} + \left\{\frac{\sin(m-n)2\pi}{m-n} - 0\right\}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[0]$$

$$= 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(2)$$

พิจารณากรณีที่ $m = n$

$$\int_0^{2\pi} (1)^2\, dx = x\Big|_0^{2\pi} = 2\pi \qquad \ldots\ldots\ldots.(3)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2nx}{2}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 2nx}{2n}\right]\Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2\pi - 0) + \frac{1}{2n}(\sin 4n\pi - 0)\right]$$

$$\pi \qquad \ldots\ldots\ldots.(4)$$

จาก (1), (2), (3) และ (4) สรุปได้ว่า

$\{\cos nx\}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

ดังนั้น เซตเชิงตั้งฉากปกติ ซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉากข้างต้น คือ

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \ldots \right\}$$

2. $\left\{\sin \frac{n\pi x}{T}\right\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots; \ -T \leqslant x \leqslant T$

วิธีทำ $\left\{\sin \frac{n\pi x}{T}\right\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เขียนใหม่เป็น

$$\left\{\sin \frac{\pi x}{T}, \sin \frac{2\pi x}{T}, \sin \frac{3\pi x}{T}, \ldots\right\}$$

พิจารณากรณีที่ $m \neq n$

$$\int_{-T}^{T} \sin \frac{m\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} dx = \int_{0}^{T} \left[\frac{\cos(m-n)\pi x/T - \cos(m+n)\pi x/T}{2} \right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m-n)\pi x/T}{(m-n)\pi/T} - \frac{\sin(m+n)\pi x/T}{(m+n)\pi/T} \right]\Bigg|_{0}^{T}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{ \frac{\sin(m-n)\pi - 0}{(m-n)\pi/T} \right\} - \left\{ \frac{\sin(m+n)\pi - 0}{(m+n)\pi/T} \right\}\right]$$

แต่ $\sin(m-n)\pi = 0$
และ $\sin(m+n)\pi = 0$ } เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก

$$\int_{-T}^{T} \sin \frac{m\pi x}{T} \sin \frac{n\pi x}{T} dx = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots.(1)$$

พิจารณากรณีที่ $m = n$

$$\int_{-T}^{T} \sin^2 \frac{n\pi x}{T} dx = \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin \frac{2n\pi x}{T}}{\frac{2n\pi}{T}} \right]\Bigg|_{-T}^{T}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\{T - (-T)\} - \frac{T}{2n\pi}\{\sin 2n\pi - \sin(-2n\pi)\} \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2T - \frac{T}{2n\pi}\{0\}\right]$$

$$= T \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า $\left\{\sin\frac{n\pi x}{T}\right\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉาก

ดังนั้น เซตเชิงตั้งฉากปกติซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉากนี้คือ

$\left\{\frac{\sin \pi x/T}{\sqrt{T}}, \frac{\sin 2\pi x/T}{\sqrt{T}}, \frac{\sin 3\pi x/T}{\sqrt{T}}, \ldots\right\}$ หรือเขียนใหม่เป็น $\left\{\frac{\sin n\pi x/T}{\sqrt{T}}\right\}$

ในเมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

3. $\left\{\cos\frac{2n\pi x}{T}\right\}; n = 0, 1, 2, \ldots ;\ 0 < x < T$

วิธีทำ $\left\{\cos\frac{2n\pi x}{T}\right\} n = 0, 1, 2, \ldots$ สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\left\{1, \cos\frac{2\pi x}{T}, \cos\frac{4\pi x}{T}, \ldots\right\}$$

พิจารณากรณี $m \neq n$

$$\int_0^T (1)\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx = \left.\frac{\sin\frac{2n\pi x}{T}}{\frac{2n\pi}{T}}\right|_0^T$$

$$= \frac{T}{2n\pi}\{\sin 2n\pi - 0\}$$

$$= 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\int_0^T \cos\frac{2m\pi x}{T}\cos\frac{2n\pi x}{T}\,dx = \int_0^T \left[\frac{\cos 2(m+n)\pi x/T + \cos 2(m-n)\pi x/T}{2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(m+n)\pi x/T}{2(m+n)\pi/T} + \frac{\sin 2(m-n)\pi x/T}{2(m-n)\pi/T}\right]\Bigg|_0^T$$

$$= \left[\left\{\frac{\sin 2(m+n)\pi - 0}{2(m+n)T}\right\} + \left\{\frac{\sin 2(m-n)\pi - 0}{2(m-n)\pi}\right\}\right]$$

$$= 0 \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณากรณี $m = n$

$$\int_0^T (1)^2\,dx = x\Big|_0^T = T \neq 0 \qquad \text{..........(3)}$$

$$\int_0^T \left(\cos\frac{2n\pi x}{T}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^T \left(1 + \cos\frac{4n\pi x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin\frac{4n\pi x}{T}}{\frac{4n\pi}{T}}\right]\Big|_0^T$$

$$= \frac{T}{2} \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (1), (2), (3) และ (4) สรุปได้ว่า $\left\{\cos\frac{2n\pi x}{T}\right\}$; $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $(0, T)$

ดังนั้น เซตเชิงตั้งฉากปกติซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉากนี้ คือ

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos\frac{2\pi x}{T}}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \frac{\cos\frac{4\pi x}{T}}{\sqrt{\frac{T}{2}}}, \ldots\right\} \text{ บนช่วง } (0, T)$$

4. $\{\sin 2nx\}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$

วิธีทำ

$\{\sin 2nx\}$; $n = 1, 2, 3, \ldots$ สามารถเขียนใหม่เป็น

$\{\sin 2x, \sin 4x, \sin 6x, \ldots\}$

พิจารณากรณี $m \neq n$

$$\int_0^\pi \sin 2mx \sin 2nx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi [\cos 2(m-n)x - \cos 2(m+n)x]\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(m-n)x}{2(m-n)} - \frac{\sin 2(m+n)x}{2(m+n)}\right]\Big|_0^\pi$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{\frac{\sin 2(m-n)\pi - 0}{2(m-n)}\right\} - \left\{\frac{\sin 2(m+n)\pi - 0}{2(m+n)}\right\}\right]$$

แต่ $\sin 2(m-n)\pi = \sin 2m\pi \cos 2n\pi - \cos 2m\pi \sin 2n\pi = 0$

$\sin 2(m+n)\pi = \sin 2m\pi \cos 2n\pi + \cos 2m\pi \sin 2n\pi = 0$

ดังนั้น

$$\int_0^{\pi} \sin 2mx \sin 2nx \, dx = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

พิจารณากรณี $m = n$

$$\int_0^{\pi} (\sin 2nx)^2 \, dx = \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 4nx}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 4nx}{4n} \right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) สรุปได้ว่า

$\{ \sin 2nx \}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $[0, \pi]$

ดังนั้น เซตเชิงตั้งฉากปกติ ซึ่งสมนัยกับเซตเชิงตั้งฉากนี้คือ

$$\left\{ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{\sin 4x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{\sin 6x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \ldots \right\}$$

5. $\{ \cos 2nx \}$; $n = 0, 1, 2, \ldots ; 0 \leqslant x \leqslant \pi$

วิธีทำ $\{ \cos 2nx \}$; $n = 0, 1, 2, \ldots$ สามารถเขียนใหม่เป็น

$$\{ 1, \cos 2x, \cos 4x, \cos 6x, . \}$$

พิจารณากรณี $m \neq n$

$$\int_0^{\pi} (1) \cos 2nx \, dx = \frac{\sin 2nx}{2n} \Big|_0^{\pi} = \frac{\sin 2n\pi - 0}{2n}$$

$$= 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\int_0^{\pi} \cos 2mx \cos 2nx \, dx = \int_0^{\pi} \left[\frac{\cos 2(m+n)x + \cos 2(m-n)x}{2} d \right] x$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin 2(m-n)x}{2(m-n)} \right]\Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left\{ \frac{\sin 2(m+n)\pi - 0}{2(m+n)} \right\} + \left\{ \frac{\sin 2(m-n)x - 0}{2(m-n)} \right\} \right]$$

$$= \quad 0 \qquad \text{..........(2)}$$

พิจารณากรณี $m = n$

$$\int_0^{\pi} (1)^2\, dx \;=\; x \Big|_0^{\pi} = \pi \neq 0 \qquad \text{..........(3)}$$

$$\int_0^{\pi} (\cos 2nx)^2\, dx \;=\; \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos 4nx}{2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{\sin 4nx}{4n} \right] \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} \neq 0 \qquad \text{..........(4)}$$

จาก (1), (2), (3) และ (4) สรุปได้ว่า

$\{ \cos 2nx \}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, \ldots$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $[0, \pi]$

ดังนั้น เซตเชิงตั้งฉากปกติบนช่วง $[0, \pi]$ คือ

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \frac{\cos 4x}{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}, \ldots \right\}$$

6. จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f_1(x) = 1$ และ $f_2(x) = x$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากบนช่วง $(-1, 1)$ จงหาค่าคงที่ A และ B เพื่อว่าฟังก์ชัน $f_3(x) = 1 + Ax + Bx^2$ เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากกับ f_1 และ f_2 บนช่วง $(-1, 1)$

วิธีทำ พิจารณา

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\, f_2(x)\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} (1)(x)\, dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\int_{-1}^{1} [f_1(x)]^2\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} (1)^2\, dx = x \Big|_{-1}^{1} = (1 + 1) = 2 \qquad \text{..........(2)}$$

$$\int_{-1}^{1} [f_2(x)]^2\, dx \;=\; \int_{-1}^{1} (x)^2\, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{3}\left[(1)^3 - (-1)^3 \right]$$

$$= \frac{1}{3}[1 + 1] = \frac{2}{3} \neq 0 \qquad \text{..........(3)}$$

จาก (1), (2) และ (3) สรุปได้ว่า

$\{ f_1(x), f_2(x) \} = \{ 1, x \}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $(-1, 1)$

ถ้า $f_1(x)$ และ $f_3(x)$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $(-1, 1)$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} f_1(x)\, f_3(x)\, dx$$

หรือ

$$\int_{-1}^{1} (1)\,(1 + Ax + Bx^2)\, dx = 0$$

$$x \Big|_{-1}^{1} + A\,\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} + B\,\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\{1 - (-1)\} + \frac{A}{2}\{(1)^2 - (-1)^2\} + \frac{B}{3}\{(1)^3 - (-1)^3\} = 0$$

$$2 + 0 + \frac{2B}{3} = 0$$

หรือ $\quad B = -3$

ถ้า $f_2(x)$ และ $f_3(x)$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง $(-1, 1)$

ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} f_2(x)\, f_3(x)\, dx = 0$$

หรือ

$$\int_{-1}^{1} x(1 + Ax + Bx^2)\, dx = 0$$

$$\left[\frac{x^2}{2} + A\,\frac{x^3}{3} + B\,\frac{x^4}{4} \right]\Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\frac{1}{2}\{(1)^2 - (-1)^2\} + \frac{A}{3}\{(1)^3 - (-1)^3\} + \frac{B}{4}\{(1)^4 - (-1)^4\} = 0$$

$$0 + \frac{2A}{3} + 0 = 0$$

$$A = 0$$

7. กำหนดฟังก์ชัน $a_0,\ a_1 + a_2x,\ a_3 + a_4x + a_5x^2$ เมื่อ a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 และ a_5 คือค่าคงที่ จงหาค่าของตัวคงที่เพื่อว่าฟังก์ชันเหล่านี้เป็นฟังก์ชันตั้งฉากปกติใน $(-1, 1)$

วิธีทำ ถ้าฟังก์ชัน $a_0, a_1 + a_2x, a_3 + a_4x + a_5x^2$ เป็นฟังก์ชันตั้งฉากปกติใน $(-1, 1)$ ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} (a_0)^2\, dx = 1$$

หรือ

$$(a_0)^2 x \Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$2a_0^2 = 1$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \#$$

$$\int_{-1}^{1} a_0(a_1 + x)\, dx = 0$$

$$a_0a_1 x \Big|_{-1}^{1} + a_0 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$2a_0a_1 + \frac{a_0}{2}(0) = 0$$

$$a_1 = 0 \qquad \#$$

$$\int_{-1}^{1} (a_1 + a_2x)^2\, dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} (a_1^2 + 2a_1a_2x + a_2^2x^2)\, dx = 1$$

$$a_1^2 x \Big|_{-1}^{1} + 2a_1a_2 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} + a_2^2 \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 1$$

แต่ $a_1 = 0$ เพราะฉะนั้น

$$\frac{a_2^2}{3} \{ (1)^3 - (-1)^3 \} = 1$$

$$\frac{2a_2^2}{3} = 1$$

$$a_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \#$$

$$\int_{-1}^{1} (a_1 + a_2x)(a_3 + a_4x + a_5x^2)\, dx = 0$$

หรือ

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, x(a_3 + a_4x + a_5x^2)\, dx = 0 \;; \qquad a_1 = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, a_3 \int_{-1}^{1} x\, dx + \sqrt{\frac{3}{2}}\, a_4 \int_{-1}^{1} x^2\, dx + \sqrt{\frac{3}{2}}\, a_5 \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, a_3(0) + \sqrt{\frac{3}{2}}\, a_4 x^3 \Big|_{-1}^{1} + \sqrt{\frac{3}{2}}\, a_5(0) = 0$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}}\, a_4 \{ (1)^3 - (-1)^3 \} = 0$$

$$\sqrt{6a_4} = 0$$

$$a_4 = 0 \qquad \#\#$$

$$\int_{-1}^{1} a_0(a_3 + a_4x + a_5x^2)\, dx = 0$$

แทนค่า $a_0 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, $a_4 = 0$ ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1}{2}}(a_3 + a_5x^2)\, dx = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}}\, a_3x \Big|_{-1}^{1} + a_5\sqrt{\frac{1}{2}} \quad \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

$$\frac{2a_3}{\sqrt{2}} + \frac{a_5}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{3}\right) = 0$$

$$\sqrt{2}a_3 + \frac{\sqrt{2}}{3}\, a_5 = 0$$

หรือ

$$3a_3 + a_5 = 0 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\int_{-1}^{1} (a_3 + a_4x + a_5x^2)^2\, dx = 1$$

แทนค่า $a_4 = 0$ ดังนั้น

$$\int_{-1}^{1} (a_3 + a_5x^2)^2\, dx = 1$$

$$\int_{-1}^{1} (a_3^2 + 2a_3a_5x^2 + a_5^2x^4)\, dx = 1$$

$$a_3^2\, x \Big|_{-1}^{1} + 2a_3a_5\, \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^{1} + a_5^2\, \frac{x^5}{3} \Big|_{-1}^{1} = 1$$

$$2a_3^2 + \frac{4}{3}\, a_3a_5 + \frac{2}{5}\, a_5^2 = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1)

$$a_5 = -3a_3 \qquad \text{..........(3)}$$

ดังนั้น แทนค่า a_5 ใน (2) จะได้

$$2a_3^2 + \frac{4}{3}\, a_3(-3a_3) + \frac{2}{5}(-3a_3)^2 = 1$$

$$2a_3^2 - 4a_3^2 + \frac{18}{5}\, a_3^2 = 1$$

$$\left(-2 + \frac{18}{5}\right) a_3^2 = 1$$

$$\frac{8}{5} a_3^2 = 1$$

$$a_3 = \sqrt{\frac{5}{8}} \qquad \#$$

แทนค่า a_3 ใน (3)

$$a_5 = -3\sqrt{\frac{5}{8}} \qquad \#$$

8. ถ้า $\{\phi_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติบนช่วง (0, 1) ถ้า $a > 0$ จงแสดงว่า เซตของฟังก์ชัน $\psi_n(x) = \dfrac{\phi_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ บนช่วง (0, a)

วิธีทำ โจทย์กำหนดว่า $\{\phi_n\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากบนช่วง (0, 1)

ดังนั้น

$$\int_0^1 \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } m \neq n \\ 1 & \text{ถ้า } m = n \end{cases} \qquad \text{..........(1)}$$

ถ้าฟังก์ชัน $\psi_n(x) = \dfrac{\phi_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ บนช่วง (0, a) นั่นคือ จะได้ว่า

$$\int_0^a \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases} \qquad \text{..........(2)}$$

เพราะว่า

$$\int_0^a \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \int_0^a \frac{\phi_m\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\phi_n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}}\,dx$$

$$= \frac{1}{a}\int_0^a \phi_m\left(\frac{x}{a}\right)\phi_n\left(\frac{x}{a}\right)dx$$

ให้ $\frac{x}{a} = y$ จะได้ $dx = a\,dy$

นั่นคือ ถ้า $x = 0$ จะได้ $y = 0$

$x = a$ จะได้ $y = 1$

แทนค่า จะได้

$$\int_0^a \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \frac{1}{a}\int_0^1 \phi_m(y)\,\phi_n(y)\,a\,dy$$
$$= \int_0^1 \phi_m(y)\,\phi_n(y)\,dy$$

เปลี่ยนตัวแปรหุ่น

$$\int_0^a \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,dx = \int_0^1 \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

ตามสมการ (1) ซึ่งจะมีค่าเท่ากับ สมการ (2)

นั่นคือ สรุปได้ว่า $\psi_n(x) = \dfrac{\phi n\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{a}}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติ บนช่วง (0, a)

9. สูตรหาระยะทางระหว่างสองฟังก์ชัน นิยามโดยสมการ

$$d(f, g) = \left\{ \int_a^b [\, f(x) - g(x)\,]^2\, dx \right\}^{1/2}$$

จงแสดงว่าระยะทางระหว่างสองจำนวนใด ๆ ที่ต่างกันของเซตเชิงตั้งฉากปกติ คือ $\sqrt{2}$ (กำหนดว่า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b))

วิธีทำ โจทย์กำหนดว่า f และ g เป็นฟังก์ชันเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) ดังนั้น

$$\int_a^b [\, f(x)\,]^2 dx = 1 \qquad \text{..........(1)}$$

$$\int_a^b [\, g(x)\,]^2\, dx = 1 \qquad \text{..........(2)}$$

และ $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = 0$ ....(3)

เพราะว่า $d(f, g) = \left\{ \int_a^b [\, f(x) - g(x)\,]^2\, dx \right\}^{1/2}$

$$= \left\{ \int_a^b [\, (f(x))^2 - 2f(x)\,g(x) + (g(x))^2\,]\, dx \right\}^{1/2}$$

$$= \left\{ \int_a^b [\, f(x)\,]^2\, dx - 2\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \int_a^b [g(x)]^2\, \right\}^{1/2} \qquad \text{..........(4)}$$

แทนค่า (1), (2) และ (3) ใน (4) จะได้

$$d(f, g) = \{1 - 2(0) + 1\}^{1/2} = \sqrt{2}$$ #

10. ถ้า $f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x)$ ในเมื่อ c_k เป็นค่าคงที่ และ $\{\phi_k\}$ คือ เซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) จงแสดงว่า

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$$

วิธีทำ โจทย์กำหนดว่า

$\{\phi_k\}$ คือ เซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) นั่นคือ

$$\int_a^b \phi_m(x)\,\phi_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases} \qquad \text{..........(1)}$$

ในเมื่อ $m = 1, 2, 3$ และ $n = 1, 2, 3$

เพราะว่า

$$f(x) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + c_3\phi_3(x)$$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned}[f(x)]^2 &= c_1^2\phi_1^2(x) + c_2^2\phi_2^2(x) + c_3^2\phi_3^2(x) + 2c_1c_2\phi_1(x)\,\phi_2(x) \\ &\quad + 2c_1c_3\phi_1(x)\phi_3(x) + 2c_2c_3\phi_2(x)\phi_3(x)\end{aligned}$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จาก x = a ถึง b

$$\begin{aligned}\int_a^b [f(x)]^2\,dx &= c_1^2\int_a^b [\phi_1(x)]^2\,dx + c_2^2\int_a^b [\phi_2(x)]^2\,dx + c_3^2\int_a^b [\phi_3(x)]^2\,dx \\ &\quad + 2c_1c_2\int_a^b \phi_1(x)\phi_2(x)dx + 2c_1c_3\int_a^b \phi_1(x)\phi_3(x)dx \\ &\quad + 2c_2c_3\int_a^b \phi_2(x)\phi_3(x)dx\end{aligned}$$

ใช้นิยามใน (1) จะได้

$$\int_a^b [f(x)]^2\,dx = c_1^2(1) + c_2^2(1) + c_3^2(1) + 0 + 0 + 0$$

ดังนั้น $\int_a^b [f(x)]^2\,dx = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2$ #

11. ถ้า $\{\phi_n\}$ คือ เซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) และ

$$k_n(x, y) = \phi_1(x)\phi_1(y) + \phi_2(x)\phi_2(y) + \ldots + \phi_n(x)\phi_n(y)$$

จงแสดงว่า สมการ

$$\int_a^b k_n(x, y)\, f(y)\, dy \quad = \quad f(x)$$

จะเป็นจริงสำหรับทุกฟังก์ชัน ซึ่งอยู่ในรูป

$$f(x) \quad = \quad c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

วิธีทำ เพราะว่า

$$\int_a^b k_n(x, y)\, f(y)\, dy = \int_a^b [\, \phi_1(x)\phi_1(y) + \phi_2(x)\phi_2(y) + \ldots + \phi_n(x)\phi_n(y) \,] \times [\, c_1\phi_1(y) + c_2\phi_2(y) + \ldots + c_n\phi_n(y) \,]\, dy$$

$$= \int_a^b c_1\phi_1(x)\, [\, \phi_1(y)\,]^2\, dy + \int_a^b c_2\phi_2(x)\, [\, \phi_2(y)\,]^2\, dy + \ldots + \ldots + \int_a^b c_n\phi_n(x)\, [\, \phi_n(y)\,]^2\, dy$$

เพราะว่า $\{\, \phi_n \,\}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) เพราะฉะนั้น

$$\int_a^b \phi_m(y)\, \phi_n(y)\, dx \quad = \quad \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b k_n(x, y)\, f(y)\, dy \quad = \quad c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

$$= \quad f(x)$$

12. จงแสดงว่า ถ้า c_n คือ สัมประสิทธิ์ฟูเรียร์ของ f(x) เทียบกับเซตเชิงตั้งฉากปกติ $\{\, \phi_n(x) \,\}$ บน (a, b) ดังนั้น

$$\int_a^b [\, f(x)\,]^2\, dx \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

สมการนี้ คือ เอกลักษณ์ของปาร์เซอวาล

วิธีทำ ให้

$$f(X) = c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x + \ldots + c_n\phi_n(x)$$

ดังนั้น

$$[\, f(x)\,]^2 \; = \; c_1^2\phi_1^2(x) + c_2^2\phi_2^2(x) + \ldots + c_n^2\phi_n^2(x)$$

อินทิเกรตเทียบกับ x จาก $x = a$ ถึง b จะได้

$$\int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, dx = c_1^2 \int_a^b \phi_1^2(x) \, dx + c_2 \int_a^b \phi_2^2(x) \, dx + \ldots + c_n \int_a^b \phi_n^2(x) \, dx$$

เพราะว่า $\{ \phi_n(x) \}$ เป็นเซตเชิงตั้งฉากปกติบน (a, b) เพราะฉะนั้น

$$\int_a^b \phi_m(x) \, \phi_n(x) \, dx = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } m \neq n \\ 1 & \text{เมื่อ } m = n \end{cases}$$

ดังนั้น

$$\int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, dx = c_1^2 (1) + c_2^2 (1) + \ldots + c_n^2 (1)$$

หรือ

$$\int_a^b [\, f(x) \,]^2 \, dx = \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$$

#