บทที่ 5

อินทิกรัลหลายชั้น

Multiple Integrals

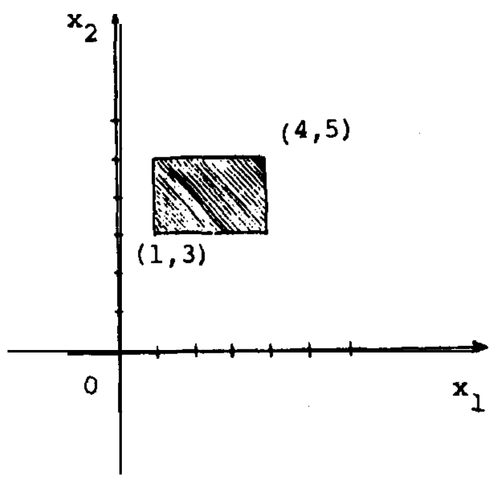
5.1 อินทิกรัลหลายชั้นแบบรีมานน์ (Multiple Riemann Integrals)

สำหรับรีมานน์อินทิกรัล $\int_a^b f(x)\,dx$ ที่กล่าวในวิเคราะห์จำนวนจริง 1 (real analysis I) นั้นเราสามารถขยายแนวความคิดให้กว้างออกไปโดยแทนช่วงปิด $[a,b]$ ใน R ด้วยบริเวณ (region) ใน n มิติซึ่ง f เป็นฟังก์ชันที่นิยามและมีขอบเขตบนบริเวณนี้ และบริเวณใน R^n ที่ง่ายที่สุดในการพิจารณา คือ ช่วงปิดใน n มิติ เช่น ช่วงปิดใน R^2 ตัวอย่างเช่น $a,\ b \in R^2$, $a = (1,3)$, $b = (4,5)$

$$[a,b] = [(1,3),(4,5)]$$

$$= \{(x_1,x_2) \mid (x_1,x_2) \in R^2,\ 1 \leq x_1 \leq 4, 3 \leq x_2 \leq 5\}$$

ซึ่งแสดงได้ดัง รูป 5.1



รูป 5.1

ในทำนองเดียวกันจะนิยามช่วงปิดใน R^n ได้ดังนี้

ให้ $a, b \in R^n$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

และ $[a,b] = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) , a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2, \ldots a_n \leq x_n \leq b_n\}$

<u>หมายเหตุ</u> นอกจากช่วงปิดใน R^n แล้วยังมีช่วงเปิด, ช่วงครึ่งเปิดครึ่งปิด อีกด้วย ซึ่งใช้สัญลักษณ์ (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก a,b ของ R^n

นั่นคือ จะได้ว่า

$(a,b) = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) , a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \ldots a_n < x_n < b_n\}$

$[a,b) = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), a_1 \leq x_1 < b_1, a_2 \leq x_2 < b_2, \ldots a_n \leq x_n < b_n\}$

$(a,b] = \{x \mid x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) , a_1 < x_1 \leq b_1, a_2 < x_2 \leq b_2, \ldots a_n < x_n \leq b_n\}$

สำหรับใน R^2 การพิจารณาผลบวกรีมานน์ (Riemann's sum) เราต้องแบ่ง (partition) $[a,b]$ ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย ๆ เรียกว่า I_k และจะได้ว่า

$$\text{ผลบวกรีมานน์} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\, A(I_k)$$

เมื่อ $(x_k, y_k) \in I_k$ และ $A(I_k)$ แทนพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า I_k ซึ่งที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดเป็นการนำเข้าสู่การศึกษาอินทิกรัล 2 ชั้น (double integral) นั่นเอง

สำหรับใน R^3 ช่วงปิด $[a,b]$ เมื่อ $a, b \in R^3$ เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานฉาก (rectangular parallelepipeds) ซึ่งเมื่อแบ่งออกเป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมย่อย ๆ แล้วจะได้ว่า

$$\text{ผลบวกรีมานน์} = \sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\, V(I_k)$$

เมื่อ $(x_k,y_k,z_k) \in I_k$ และ $V(I_k)$ แทนปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานฉาก I_k ซึ่งผลบวกรีมานน์นี้นำไปสู่การศึกษาอินทิกรัล 3 ชั้น (triple integral)

โดยอาศัยแนวความของอินทิกรัลแบบรีมานน์ใน R^1, R^2 และ R^3 ทำให้เราศึกษาอินทิกรัลแบบรีมานน์ใน R^n ซึ่งจะได้กล่าวต่อไป

5.2 เมเชอร์ของช่วงที่มีขอบเขตใน R^n

(Measure of a bounded interval in R^n)

กำหนดให้ $A_1,A_2,\ldots,A_n$ เป็นช่วงใด ๆ ใน R

ดังนั้น A_k อาจเป็นช่วงเปิด, ช่วงปิดหรือ ช่วงครึ่งเปิด ครึ่งปิด ใน R

พิจารณา $A \subseteq R^n$ ซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$
$$= \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_k \in A_k,\ k = 1,2,\ldots,n\}$$

เรียก A ว่าช่วงทั่ว ๆ ไปใน n มิติ

ความสัมพันธ์ระหว่าง A, A_k เราพบว่า ถ้าแต่ละ A_k เป็นเซตเปิด, เซตปิด หรือ เป็นเซตที่มีขอบเขตแล้ว A จะเป็นเซตเปิด เซตปิด หรือ เซตที่มีขอบเขตด้วย

ถ้าแต่ละ A_k เป็นเซตที่มีขอบเขตแล้วเมเชอร์ (measure) ของ A ใน n มิติแทนด้วยสัญลักษณ์ $\mu(A)$ นิยามโดย

$$\mu(A) = \mu(A_1)\mu(A_2) \ldots \mu(A_n)$$

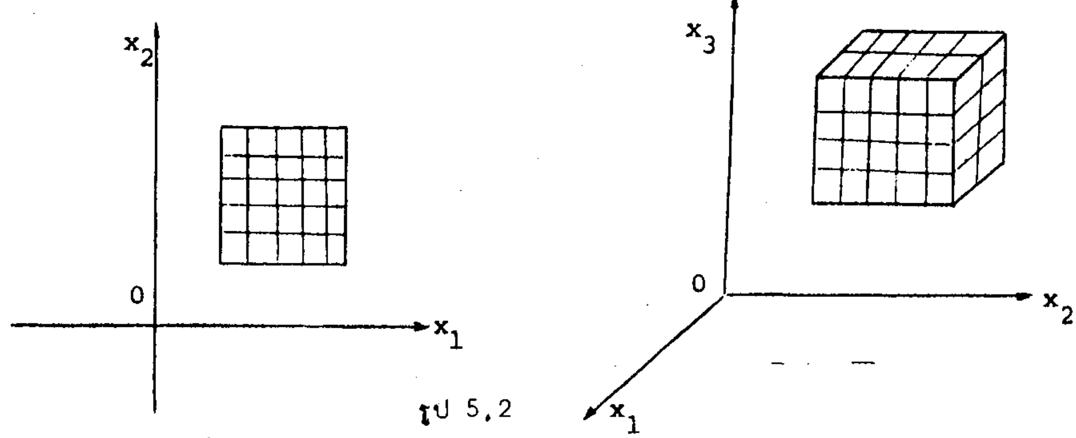
โดยที่ $\mu(A_k)$ คือเมเช่อร์ใน 1 มิติของ A_k ซึ่งอันที่จริงก็คือ ความยาวนั่นเอง

<u>หมายเหตุ</u> ถ้า $\mu(A_k) = 0$ สำหรับ k บางตัวแล้ว $\mu(A) = 0$

5.3 อินทิกรัลแบบรีมานน์ของฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดนิยามบนช่วงปกคลุมแน่นใน R^n

(The Riemann integral of a bounded function define on a compact interval in R^n)

นิยาม 5.1 ให้ $I = [a,b] \subseteq R^n$ โดยที่ $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$ $b = (b_1,b_2,\ldots,b_n)$ และ $a_i \leq b_i$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,n$ ถ้า $\mathcal{P}_i$ เป็นผลแบ่งกั้น (partition) ของ $[a_i,b_i]$, $i = 1,2,\ldots,n$ แล้ว $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times \ldots \times \mathcal{P}_n$ เรียกว่าผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$



รูป 5.2

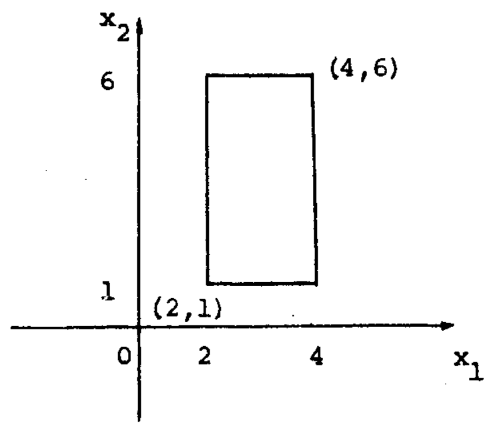
ถ้าแต่ละ $\mathcal{P}_i$ แบ่ง $[a_i,b_i]$ ออกเป็น m_i ช่วงย่อย (subbintervals) ใน 1 มิติ แล้วผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}$ จะแบ่ง $[a,b]$ ออกเป็น $m_1m_2\ldots m_n$ ช่วงใน n มิติ

พิจารณาตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 5.1 ให้ $a = (2,1)$, $b = (4,6)$

ดังนั้น $[a,b] = \{(x_1,x_2) \mid 2 \leq x_1 \leq 4 \ , \ 1 \leq x_2 \leq 6\}$

ดังรูป 5.3

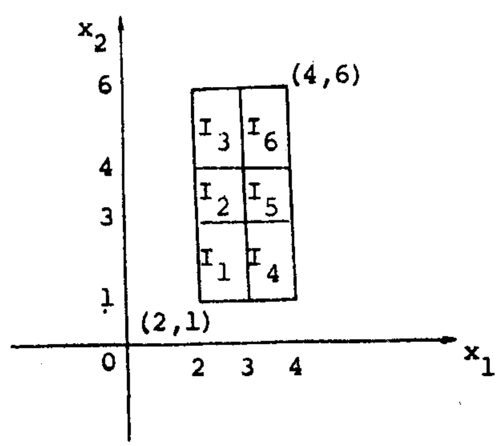


รูป 5.3

ให้ $\mathscr{P}_1$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[2,4]$ โดยแบ่งออกเป็น 2 ส่วนให้เซต ของจุดแบ่งคือ $\{2,3,4\}$

ให้ $\mathscr{P}_2$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[1,6]$ โดยแบ่งออกเป็น 3 ส่วนให้เซต ของจุดแบ่งคือ $\{1,3,4,6\}$

ดังนั้นจะได้ช่วงย่อยทั้งหมด 6 ช่วงใน R^2 ดังรูป 5.4



รูป 5.4

โดยที่ $I_1 = [2,3] \times [1,3]$

$I_2 = [2,3] \times [3,4]$

$I_3 = [2,3] \times [4,6]$

$I_4 = [3,4] \times [1,3]$

$I_5 = [3,4] \times [3,4]$

$I_6 = [3,4] \times [4,6]$

สำหรับตัวอย่างนี้ $\mathscr{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[(2,1), (4,6)]$ ซึ่งแบ่งออกเป็น 6 ช่วงใน 2 มิติ คือ $I_1, I_2, \ldots, I_6$

<u>ข้อสังเกต</u> การแบ่งของช่วงแต่ละช่วงอาจเท่ากันหรือไม่เท่ากันก็ได้ แต่โดยทั่ว ๆ ไป นิยมแบ่งเท่ากัน เพราะสะดวกในการคิดคำนวณ

$\boxed{\text{นิยาม } 5.2}$ ถ้า $I = [a,b] \subseteq R^n$ โดยที่ $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ และ $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ แล้ว $\mu(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$ เรียกว่า เมเชอร์ (measure) ของ I

ดังนั้นเมเชอร์ใน R^2 คือพื้นที่และใน R^3 คือปริมาตรนั่นเองสำหรับในตัวอย่าง 5.1 $I = [(2,1),(4,6)]$ เมเชอร์ของ I หรือ
$\mu(I) = (4-2)(6-1) = 10$ หน่วยพื้นที่เป็นต้น

$\boxed{\text{นิยาม } 5.3}$ ถ้า $\mathscr{P}_i$ และ $\mathscr{P}_i'$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a_i, b_i]$ ใน 1 มิติ โดยที่เซตของจุดแบ่งย่อยของ $\mathscr{P}_i$ เป็นสับเซตของ $\mathscr{P}_i'$ แทนด้วย $\mathscr{P}_i \subseteq \mathscr{P}_i'$ แล้วเรียก $\mathscr{P}_i'$ ว่าผลแบ่งที่ละเอียดกว่า (finer than) $\mathscr{P}_i$

<u>ตัวอย่าง</u> 5.2 ให้ $\mathscr{P}_1$ แบ่ง $[1,4]$ ออกเป็น 2 ส่วนโดยมีเซตของจุดแบ่งย่อยคือ $\{1,3,4\}$ และให้ $\mathscr{P}_1'$ แบ่ง $[1,4]$ ออกเป็น 4 ส่วน โดยมีเซตของจุดแบ่งย่อยคือ $\{1,2,3,\frac{7}{2},4\}$

จะเห็นว่าการแบ่งของ $\mathscr{P}_1'$ ละเอียดกว่า $\mathscr{P}_1$

นั่นคือ $\mathscr{P}_1 \subseteq \mathscr{P}_1'$ ∎

นิยาม 5.4 สำหรับ 2 ผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$, $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ ถ้า $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2 \times \ldots \times \mathscr{P}_n$ และ $\mathscr{P}' = \mathscr{P}_1' \times \mathscr{P}_2' \times \ldots \times \mathscr{P}_n'$ แล้ว $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}'$ หมายความว่า $\mathscr{P}_i \subseteq \mathscr{P}_i'$ สำหรับทุกค่า $i = 1,2,\ldots,n$

นิยาม 5.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันมีค่าและมีขอบเขตบน $I = [a,b] \subseteq R^n$ ถ้า $\mathscr{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I ออกเป็นช่วงย่อย m ช่วงเรียกว่า $I_1, I_2, \ldots, I_m$ และ $t_k \in I_k$ แล้วผลบวกรีมานน์เขียนอยู่ในรูป

$$S(\mathscr{P},f) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k)\mu(I_k)$$

เรากล่าวว่า f หาค่าอินทิกรัลได้บน I ก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริง A ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติข้างล่างนี้

"ทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε จะมี $\mathscr{P}_\varepsilon$ และสำหรับทุก ๆ $\mathscr{P}$ ซึ่ง $\mathscr{P}_\varepsilon \subseteq \mathscr{P}$ แล้ว $|S(\mathscr{P},f) - A| < \varepsilon$"

ถ้าจำนวนจริง A มีค่าแล้วจะแทน A ด้วย

$$\int_I f\,dx \quad , \quad x \in R^n$$

หรือ

$$\int_I f(x)dx \quad , \quad x \in R^n$$

หรือ $$\int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)d(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

หรือ $$\int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1dx_2\ldots .dx_n$$

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับอินทิกรัลหลายชั้น $\int_I f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1\ dx_2\ldots .dx_n$ ถ้า $n = 2$ เรียกว่าอินทิกรัล 2 ชั้น (double integral) ซึ่งจะพบในรูป

$$\int_I\int f(x,y)dx\ dy$$

สำหรับ $n = 3$ เรียกว่าอินทิกรัล 3 ชั้น (triple integral) ซึ่งจะพบในรูป

$$\underset{I}{\int\int\int} f(x,y,z)dx\ dy\ dz$$

นิยาม 5.6 ให้ f เป็นฟังก์ชันมีค่าและมีขอบเขตบน $I = [a,b] \subsetneq R^n$, $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I โดยที่แบ่งออกเป็น $I_1,I_2,\ldots,I_k$

ถ้าให้ $m_k(f) = \text{g.l.b.}\{f(x) \mid x \in I_k\}$

$M_k(f) = \text{l.u.b.}\{f(x) \mid x \in I_k\}$

แล้ว

$$L(\mathcal{P},f) = \sum_{k=1}^{m} m_k(f)\mu(I_k)$$ เรียกว่าผลบวกล่าง

(lower sum) และ

$$U(\mathcal{P},f) = \sum_{k=1}^{m} M_k(f)\mu(I_k)$$ เรียกว่า ผลบวกบน

(upper sum) และเรียก

$$\underline{\int}_I f\,dx = \text{l.u.b.}\{L(\mathscr{P},f) \mid \mathscr{P} \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a,b]\}$$

$$\overline{\int}_I f\,dx = \text{g.l.b.}\{U(\mathscr{P},f) \mid \mathscr{P} \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a,b]\}$$

ว่าอินทิกรัลล่าง (lower integrals) อินทิกรัลบน (upper integrals) ของฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,b]$

$\boxed{\text{นิยาม 5.7}}$ f อินทิเกรตได้ (integrable) บน $[a,b]$ และ A เรียกว่า อินทิกรัล (integral) บน $[a,b]$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $\underline{\int}_{[a,b]} f\,dx = \overline{\int}_{[a,b]} f\,dx = A$

สำหรับผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ $\mathscr{P}, \mathscr{P}'$ ซึ่ง $\mathscr{P} = \mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2 \times \dots \times \mathscr{P}_n$ และ $\mathscr{P}' = \mathscr{P}_1' \times \mathscr{P}_2' \times \dots \times \mathscr{P}_n'$ ข้อสรุปต่อไปนี้เป็นจริง

1. ถ้า $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{P}'$ แล้ว $L(\mathscr{P},f) < L(\mathscr{P}',f)$ และ
   $U(\mathscr{P},f) > U(\mathscr{P}',f)$

2. $L(\mathscr{P},f) < U(\mathscr{P},f)$

3. $L(\mathscr{P},f) < L(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}',f) < U(\mathscr{P} \cup \mathscr{P}',f) < U(\mathscr{P}',f)$

โดยที่ $\mathscr{P} \cup \mathscr{P}' = (\mathscr{P}_1 \cup \mathscr{P}_1') \times (\mathscr{P}_2 \cup \mathscr{P}_2') \times \dots \times (\mathscr{P}_n \cup \mathscr{P}_n')$

4. $\underline{\int}_I f\,dx \leqslant \overline{\int}_I f\,dx$

5. $\overline{\int}_I (f+g)dx \leqslant \overline{\int}_I f\,dx + \overline{\int}_I g\,dx$

   $\underline{\int}_I (f+g)dx \geqslant \underline{\int}_I f\,dx + \underline{\int}_I g\,dx$

6. สำหรับ $I = I_1 \cup I_2$ และ $I_1 \cap I_2 = \phi$ จะได้ว่า

$$\overline{\int}_I f\,dx = \overline{\int}_{I_1} f\,dx + \overline{\int}_{I_2} f\,dx$$

$$\underline{\int}_I f\,dx = \underline{\int}_{I_1} f\,dx + \underline{\int}_{I_2} f\,dx$$

เงื่อนไขของรีมานน์ (Riemann's condition)

ฟังก์ชัน f เรียกว่าฟังก์ชันที่สอดคล้องกับเงื่อนไขรีมานน์ (salify Riemann's condition) บน I ถ้า "สำหรับทุกจำนวนจริงบวก ε จะมีผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}_\varepsilon$ ของ I ซึ่งทุก ๆ $\mathcal{P}$ ซึ่ง $\mathcal{P}_\varepsilon \subseteq \mathcal{P}$ จะได้ว่า $U(\mathcal{P},f) - L(\mathcal{P},f) < \varepsilon$"

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันมีค่าและมีขอบเขตบน $[a,b] \subseteq R^n$ แล้วข้อความข้างล่างนี้สมมูลย์กัน

1) f อินทิเกรตได้บน $[a,b]$

2) f สอดคล้องกับเงื่อนไขของรีมานน์

3) $\underline{\int}_{[a,b]} f\,dx = \overline{\int}_{[a,b]} f\,dx$

สำหรับการพิสูจน์ของทฤษฎีบท 5.1 พิสูจน์ทำนองเดียวกับทฤษฎีบทใน R ในหนังสือวิเคราะห์จำนวนจริง 1 หรือดูได้จากทฤษฎีบท 7.19 จากหนังสืออ้างอิง [2]

5.4 การประเมินค่าของอินทิกรัลหลายชั้นโดยการอินทิเกรตซ้ำ

(Evaluation of a multiple integral by iterated integration)

จากแคลคูลัสเบื้องต้นเคยทราบวิธีการหาค่าอินทิกรัล 2 ชั้น 3 ชั้น มาแล้ว

ว่าหาค่าได้โดยการใช้วิธีการอินทิเกรตสืบเนื่องโดยเทียบกับแต่ละตัวแปร ตัวอย่างเช่น f เป็นฟังก์ชันของ 2 ตัวแปร x,y f ต่อเนื่องบน $Q = \{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\} \subseteq R^2$ ดังนั้นถ้ากำหนด y เป็นตัวคงที่แล้วนิยามฟังก์ชัน $F(x) = f(x,y)$ จะได้ว่า $F(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และได้ต่อไปอีกว่า $F(x)$ หาค่าอินทิกรัลได้บน $[a,b]$ ค่าของ $\int_a^b F(x)dx$ ขึ้นอยู่กับค่าของ y

ต่อไปนิยาม $G(y) = \int_a^b f(x,y)dx$ จะได้ว่า $G(y)$ ต่อเนื่องบน $[c,d]$ และได้ต่อไปอีกว่า $G(y)$ หาค่าอินทิกรัลได้บน $[c, d]$ ค่าของ $\int_c^d G(y)dy$ คือของอินทิกรัล 2 ชั้น $\int_Q f(x,y)d(x,y)$ นั่นเอง

$$\text{จะได้ว่า} \quad \int_Q f(x,y)d(x,y) = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)dx\right] dy \qquad \ldots(*)$$

กรณีที่น่าสนใจอีกกรณีหนึ่งคือกรณีที่ $f(x,y)$ ไม่ต่อเนื่องบน Q แต่ $\int_Q f(x,y)d(x,y)$ หาค่าได้ ซึ่งในกรณีนี้ $\int_a^b f(x,y)dx$ อาจหาค่าไม่ได้ ดังนั้นในกรณีทั่วไปสำหรับ (*) เราใช้อินทิกรัลบนและอินทิกรัลล่าง (upper and lower integral) แทน ดังทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ f เป็นฟังก์ชันมีค่าและมีขอบเขตบน

$$Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq R^2$$

แล้วจะได้ว่า

1) $$\int_Q f(x,y)d(x,y) \leqslant \underline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right] dx$$

$$\leqslant \overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right]dx \leqslant \overline{\int_Q} f(x,y)d(x,y)$$

2) $$\underline{\int}_Q f(x,y)\,d(x,y) \leqslant \underline{\int}_a^b\Big[\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx$$

$$\leqslant \overline{\int}_a^b\Big[\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx \leqslant \overline{\int}_Q f(x,y)\,d(x,y)$$

3) $$\underline{\int}_Q f(x,y)\,d(x,y) \leqslant \underline{\int}_c^d\Big[\overline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy \leqslant \overline{\int}_c^d\Big[\overline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

$$\leqslant \overline{\int}_Q f(x,y)\,d(x,y)$$

4) $$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) \leqslant \underline{\int}_c^d\Big[\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy \leqslant \overline{\int}_c^d\Big[\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy$$

$$\leqslant \overline{\int}_Q f(x,y)\,d(x,y)$$

5) ถ้า $\int_Q f(x,y)\,d(x,y)$ มีค่าแล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_Q f(x,y)\,d(x,y) &= \int_a^b\Big[\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx \\
&= \int_a^b\Big[\overline{\int}_c^d f(x,y)\,dy\Big]dx \\
&= \int_c^d\Big[\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy \\
&= \int_c^d\Big[\overline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]dy
\end{aligned}$$

<u>พิสูจน์</u> พิสูจน์ 1) กำหนดฟังก์ชัน F โดย

$$F(x) = \int_c^d f(x,y)dy \qquad x \in [a,b]$$

ดังนั้น $|F(x)| < M(c - d)$ เมื่อ $M = \text{lub}\{|f(x,y)| \mid (x,y) \in Q\}$

พิจารณา

$$\bar{I} = \overline{\int_a^b} F(x)dx$$

$$= \overline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right]dx$$

และ

$$\underline{I} = \underline{\int_a^b} F(x)dx$$

$$= \underline{\int_a^b}\left[\overline{\int_c^d} f(x,y)dy\right]dx$$

ให้ $\mathcal{P}_1 = \{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$

$\mathcal{P}_2 = \{y_0,y_1,\ldots,y_m\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[c,d]$

ดังนั้น $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ เป็นผลแบ่งกั้นของ Q ซึ่งแบ่ง Q ออกเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อย ๆ mn รูปเรียก Q_{ij}

เรานิยาม $\bar{I}_{ij}$ และ $\underline{I}_{ij}$ โดยที่

$$\bar{I}_{ij} = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\int_{y_{j-1}}^{y_i} f(x,y)dy\right]dx$$

และ

$$\underline{I}_{ij} = \underline{\int_{x_{i-1}}^{x_i}}\left[\overline{\int_{y_{i-1}}^{y_i}} f(x,y)dy\right]dx$$

เพราะว่า $\quad \bar{\int_c^d} f(x,y)dy = \sum_{j=1}^{m} \bar{\int_{y_{j-1}}^{y_j}} f(x,y)dy$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$\bar{\int_a^b}\left[\bar{\int_c^d} f(x,y)dy\right]dx \leqslant \sum_{j=1}^{m} \int_a^b \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right] dx$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right] dx$$

นั่นคือเราจะได้ว่า $\bar{I} \leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ij}$ $\quad$ .....(1)

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\underline{I} \geqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \underline{I}_{ij} \qquad .....(2)$$

ให้ $\quad m_{ij} = \text{g.l.b.} \{f(x,y) \mid (x,y) \in Q_{ij}\}$

$\quad M_{ij} = \text{l.u.b.} \{f(x,y) \mid (x,y) \in Q_{ij}\}$

เพราะว่า $m_{ij} \leqslant f(x,y) \leqslant M_{ij}$ สำหรับ $(x,y) \in Q_{ij}$

ดังนั้นเราจะได้ว่า

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leqslant \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \leqslant M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

ดังนั้น

$$m_{ij}\mu(Q_{ij}) \leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{i-1}}^{y_j} f(x,y)dy \right] dx$$

$$\leq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy \right] dx$$

$$\leq M_{ij}\mu(Q_{ij}) \qquad \ldots\ldots.(3)$$

ใส่ $\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n}$ สำหรับสมการ (3) และใช้ผลของ (1) (2) จะได้ว่า

$$L(\mathscr{P},f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq U(\mathscr{P},f)$$

เพราะว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น $\mathscr{P}$ ของ Q ดังนั้น

$$\underline{\int_Q} f(x,y)d(x,y) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \overline{\int_Q} f(x,y)d(x,y)$$

นั่นคือการพิสูจน์ของข้อ (1)

2) การพิสูจน์ (2) ทำได้ทำนองเดียวกับการพิสูจน์ (1) โดยนิยาม $F(x)$ ดังนี้

$$F(x) = \underline{\int_c^d} f(x,y)dy$$

3), 4) การพิสูจน์ 3), 4) ทำได้วิธีการเดียวกับ 1), 2) เพียงแต่เปลี่ยนตำแหน่งของ

x,y เสียใหม่ เท่านั้น.

5) การพิสูจน์ 5) เป็นผลที่ได้จาก 1), 2), 3), 4) ∎

สำหรับทฤษฎีบท 5.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน Q แล้ว

$$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$

$$= \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy$$

$\boxed{\text{บทแทรก}}$ ถ้า $Q = [a,b] \times [c,d]$ และ $f : R^2 \to R$ ต่อเนื่องบน Q

แล้ว $$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \Big[\int_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$

$$= \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy$$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า f มีขอบเขตและหาค่าอินทิกรัลได้บน Q

เพราะฉนั้น $$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \Big[\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy\Big]\,dx$$

$$= \int_c^d \Big[\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx\Big]\,dy$$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบน Q

ดังนั้นจะได้ว่า $f(x,y_o)$ ต่อเนื่องด้วย

ดังนั้นจะได้ $f(x,y_o)$ หาค่าอินทิกรัลได้บน $[a,b]$

เพราะฉนั้น $$\underline{\int}_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

นั่นคือ $$\int_Q f(x,y)\,d(x,y) = \int_c^d \Big[\int_a^b f(x,y)dx\Big]\,dy$$

ในทำนองเดียวกันได้ว่า $f(x_o,y)$ ต่อเนื่องบน $[c,d]$

เพราะฉนั้น $$\underline{\int}_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy$$

ดังนั้น $\int_Q f(x,y)\ d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right] dx$

เพราะฉะนั้น $\int_Q f(x,y)\ d(x,y) = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\ dy\right] dx$

$$= \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\ dx\right] dy \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 5.3 กำหนด $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = x + y \quad \text{บน} \quad [0,2] \times [0,2]$$

จงหาค่าอินทิกรัลของ f บน $[0,2] \times [0,2]$

วิธีทำ เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[0,2] \times [0,2]$

ดังนั้น $\int_Q f = \int_0^2 \left[\int_0^2 (x + y)\ dy\right] dx$

พิจารณา $\int_0^2 (x + y)dy = F(2) - F(0)$

โดยที่ $F'(y) = x + y$ (โดยทฤษฎีบทหลักมูล)

$F(y) = xy + \frac{y^2}{2}$

เพราะฉะนั้น $\int_0^2 (x + y)dy = 2x + 2$

ดังนั้น $\int_Q f = \int_0^2 (2x + 2)dx$

$= G(2) - G(0)$ โดยที่ $G'(x) = 2x + 2$

ดังนั้น $G(x) = x^2 + 2x$

$\int_Q f = 4 + 4 - 0$

$= 8 \qquad \blacksquare$

ตัวอย่าง 5.4 กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = xe^{xy} \quad \text{บน} \quad [0,1] \times [0,2]$$

จงหาค่าอินทิกรัลของ f บน $[0,1] \times [0,2]$

วิธีทำ เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $[0,1] \times [0,2]$

เพราะฉนั้น $\int_Q f = \int_0^1 \left[\int_0^2 xe^{xy}\, dy\right] dx$

พิจารณา $\int_0^2 xe^{xy}\, dy = F(2) - F(0)$

โดยที่ $F'(y) = xe^{xy}$

ดังนั้น $F(y) = e^{xy}$

จะได้ว่า

$$\int_0^2 xe^{xy}\, dy = e^{2x} - e^0$$
$$= e^{2x} - 1$$

ดังนั้น $\int_Q f = \int_0^1 (e^{x} - 1)dx$

แต่ $\int_0^1 (e^{2x} - 1)dx = G(1) - G(0)$ โดยที่ $G'(x) = e^{2x} - 1$

ดังนั้น $G(x) = \frac{e^{2x}}{2} - x$

เพราะฉนั้น

$$\int_0^1 (e^{2x} - 1)dx = \left(\frac{e^2}{2} - 1\right) - \left(\frac{e^0}{2} - 0\right)$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{e^2 - 3}{2}$$

■

มีข้อที่น่าสังเกตอยู่อย่างหนึ่งคือว่า ถ้า f หาค่าอินทิกรัลได้แล้ว จึงจะได้ว่า

$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]\ dx$ และ $\int_c^d[\int_a^b f(x,y)dx]\ dy$ มีค่าแต่ในทางกลับการที่

$\int_a^b[\int_c^d f(x,y)dy]\ dx$, $\int_c^d[\int_a^b f(x,y)dx]\ dy$, หาค่าได้ไม่จำเป็นจะต้องได้ว่า

$\int_Q f(x,y)\ d(x,y)$ หาค่าได้เสมอไป ดูได้จากแบบฝึกหัดที่ 5 ข้อ 6

ก่อนที่จะศึกษาทฤษฎีบท 5 . 2 ในกรณี R^n เราจะนิยามคำบางคำและสัญลักษณ์บางตัวที่ใช้ในการพิสูจน์ ดังนี้

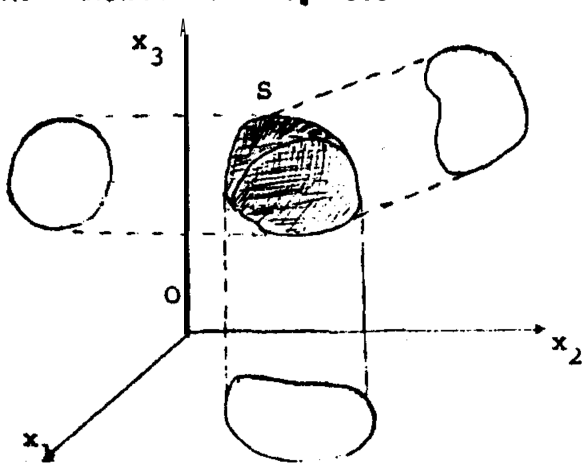
ถ้า $k \leq n$ เซตของจุด$(x_1,x_2,...,x_n) \in R^n$ ซึ่ง $x_k = 0$ เรียกว่าโคออร์ดิเนตระนาบมิติเกิน (coordinate hyperplane) แทนด้วยสัญลักษณ์ π_k

กำหนด $S \subseteq R^n$ แล้วโพรเจคชัน (projection) S_k ของ S บน π_k นิยามโดยเป็นภาพ (image) ของ S ภายใต้ F_k ซึ่ง

$$F_k(x_1,x_2,...,x_k,...,x_n) = (x_1,x_2,...,x_{k-1},0,x_{k+1},...,x_n)$$

เราจะได้ว่าสำหรับทุก ๆ $k \leq n$, F_k เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นอกจากนั้น ถ้า S เป็นเซตปกคลุมแน่น (compact set) แล้ว S_k เป็นเซตปกคลุมแน่นด้วย ถ้า S เป็นเซตไม่ขาดตอน (connected set) แล้ว S_k เป็นเซตไม่ขาดตอนด้วย

พิจารณารูปโพรเจคชันใน R^3 ดังรูป 5.5



รูป 5.5

พิจารณาทฤษฎีบท 5.2 เมื่อ f เป็นฟังก์ชันบน $[a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \dots \times [a_n,b_n] \subseteq R^n$ ในกรณีที่ $n = 3$ จะเห็นว่า

$$Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times [a_3,b_3] \subseteq R^3$$

$$\underline{\int}_Q f \, dx \leq \underline{\int}_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_{Q_1} f \, d(x_2,x_3) \right] dx_1$$

$$\leq \overline{\int}_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_{Q_1} f \, d(x_2,x_3) \right] dx_1$$

$$\leq \overline{\int}_Q f \, dx$$

โดยที่ Q_1 คือ โพรเจคชันของ Q บนระนาบโคออร์ดิเนต π_1 เช่นเดียวกันเมื่อ $\int_Q f(x)dx$ มีค่าแล้ว ข้อ (5) ของทฤษฎีบท 5 . 2 คือ

$$\int_Q f(x)dx = \int_{a_1}^{b_1} \left[\overline{\int}_{Q_1} f \, d(x_2,x_3) \right] dx_1$$

$$= \int_{Q_1} \left[\overline{\int}_{a_1}^{b_1} f \, dx_1 \right] d(x_2,x_3)$$

ซึ่งเหมือนกันในทฤษฎีบทแต่การสลับของอินทิกรัลมีได้หลายแบบทั้งนี้ขึ้นอยู่กับโพรเจคชันของ Q ซึ่งมี Q_1,Q_2,Q_3

การพิสูจน์ในกรณีที่ n ก็ทำแบบเดียวกันกับในกรณี R^3 โดยอาศัยโพรเจคชันของ $Q_1,Q_2,\dots,Q_n$ ดังนั้นเราจะได้ทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 5.3 กำหนดให้ f มีค่าและมีขอบเขตบน

$$Q = [a_1,b_1] \times [a_2,b_2] \times \ldots \times [a_n,b_n] \quad \text{ใน} \quad R^n$$

ถ้า $\int_Q f\,dx$ หาค่าได้ แล้ว

$$\int_Q f\,dx = \int_{a_2}^{b_1} \left[\overline{\int}_{Q_1} f\,d(x_2,\ldots,x_n)\right] dx_1$$

$$= \int_{Q_1} \left[\overline{\int}_{a_1}^{b_1} f\,dx_1\right] d(x_2,\ldots,x_n)$$

ในทำนองเดียวกันข้อความข้างบนจริงสำหรับ เมื่อแทนอินทิกรัลข้างบนด้วยอินทิกรัลข้างล่าง และแทน Q_1 ด้วย Q_k ซึ่งเป็นโพรเจคชันของ Q บน π_k ∎

5.5 เซตเมเชอเรเบิลของจอร์แดนใน R^n

(Jordan - measurable set in R^n)

นิยาม 5.8 ให้ $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$, $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$

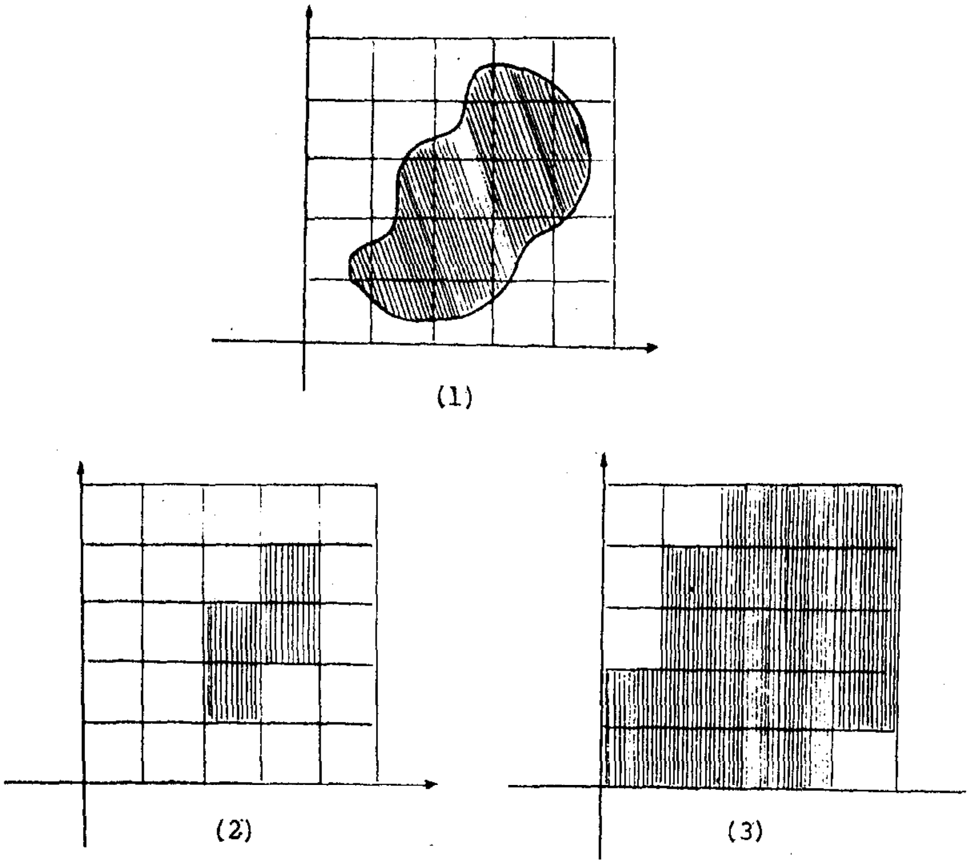
$$\underline{J}(\mathcal{P},S) = \sum_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \subseteq \mathrm{Int}S}} \mu(I_k)$$ แทนผลบวกของเมเชอร์

ของช่วงย่อยของ $\mathcal{P}$ ซึ่งแต่ละช่วงย่อยเป็นสับเซตของเซตของจุดภายในของ S และ

$$\bar{J}(\mathcal{P},S) = \sum_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \phi}} \mu(I_k)$$ แทนผลบวกของเมเชอร์

ของช่วงย่อยของ $\mathcal{P}$ ซึ่งแต่ละช่วงย่อยมีสมาชิกร่วมกับ $S \cup \partial S$ เมื่อ ∂S แทนเซตของจุดขอบของ S

พิจารณา $S \subseteq [a,b] \subseteq R^2$ รูป 5.6 (2) แสดงช่วงย่อยที่เป็นสับเซตของเซตของจุดภายในของ S ส่วนรูป 5.6 (3) แสดงช่วงย่อยที่มีสมาชิกร่วมกับ $S \cup \partial S$



รูป 5.6

ถ้าการแบ่งของแต่ละ I_k เท่ากับ และ $\mu(I_k) = 1$ สำหรับแต่ละ k แล้ว

$$\underline{J}(\mathscr{P},S) = \mu(I_9) + \mu(I_{10}) + \mu(I_{13}) + \mu(I_{14}) = 4$$

$$\bar{J}(\mathscr{P},S) = \mu(I_1) + \dots + \mu(I_{20}) = 20 \qquad \blacksquare$$

นิยาม 5.9 กำหนดให้ $S \subseteq [a,b]$ R^n แล้ว $C(S) = \text{l.u.b.}\{\, \underline{J}(\mathscr{P},S) \mid \mathscr{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ $\}$ เรียกว่า **ยอร์ดองคอนเ**[illegible]ภายในของ S (inner Jordan content) และ $\bar{C}(S) = \text{g.l.b.}\{\bar{J}(\mathscr{P},S) \mid \mathscr{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ $\}$ เรียกว่ายอร์ดองคอนเทนต์ภายนอกของ S (outer Jordan content)

นิยาม 5.10 ถ้า $\bar{C}(S) = \underline{C}(S)$ แทนด้วย $C(S)$ แล้วเรียกเซต S ว่าเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล (Jordan measurable set)

จากนิยาม 5.8, 5.9 และนิยามข้างต้นของรีมานน์ จะพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ได้

(1) $\underline{J}(\mathcal{P},S) \leq \bar{J}(\mathcal{P},S)$

(2) ถ้า $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{P}'$ แล้ว $\underline{J}(\mathcal{P},S) \leq \underline{J}(\mathcal{P}',S)$ และ $\bar{J}(\mathcal{P},S) \geq \bar{J}(\mathcal{P}',S)$

(3) สำหรับผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}', \mathcal{P}^*$ ใด ๆ จะได้ว่า

$\underline{J}(\mathcal{P}',S) < \underline{J}(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}^*, S) < \bar{J}(\mathcal{P}' \cup \mathcal{P}^*, S) < \bar{J}(\mathcal{P}^*,S)$

(4) $\underline{C}(S) \leq \bar{C}(S)$

สำหรับทฤษฎีบทข้างล่างนี้มีความสำคัญมากในการตรวจสอบว่าเซตใดเป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล (Jordan measurable set) หรือไม่

ทฤษฎีบท 5.4 กำหนดให้ $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$ แล้ว S เป็นจอร์ดองเมเชอเรเบิลเมื่อและก็ต่อเมื่อทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ซึ่ง $\bar{J}(\mathcal{P},S) - \underline{J}(\mathcal{P},S) < \varepsilon$

พิสูจน์ (1) สมมุติ S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $C(S) = \underline{C}(S)$

$= \text{l.u.b}\ \{\underline{J}(\mathcal{P},S) \mid \mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]\}$

เพราะฉะนั้น $C(S) - \frac{\varepsilon}{2}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{\underline{J}(\mathcal{P},S) \mid \mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]\}$

ดังนั้นจะมี $\mathcal{P}'$ ซึ่ง

$$\underline{J}(\mathcal{P}',S) > C(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่ามี $\mathcal{P}^*$ ซึ่ง

$\bar{J}(\mathcal{P}'', S) < C(S) + \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $\mathcal{P} = \mathcal{P}' \cup \mathcal{P}''$

เพราะฉะนั้น $\underline{J}(\mathcal{P}, S) \geq \underline{J}(\mathcal{P}', S) > C(S) - \frac{\varepsilon}{2}$ .....(1)

และ $\bar{J}(\mathcal{P}, S) \leq \bar{J}(\mathcal{P}'', S) < C(S) + \frac{\varepsilon}{2}$ .....(2)

(2) - (1) จะได้

$$J(\mathcal{P}, S) - J(\mathcal{P}, S) < C(S) + \frac{\varepsilon}{2} - (C(S) - \frac{\varepsilon}{2})$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \varepsilon$$

นั่นคือทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$\bar{J}(\mathcal{P}, S) - \underline{J}(\mathcal{P}, S) < \varepsilon$

(2) สมมุติว่าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ซึ่ง

$\bar{J}(\mathcal{P}, S) - J(\mathcal{P}, S) < \varepsilon$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก ใด ๆ

เลือก $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ซึ่ง $\bar{J}(\mathcal{P}, S) - \underline{J}(\mathcal{P}, S) < \varepsilon$

เพราะว่า

$$\underline{J}(\mathcal{P}, S) \leq \underline{C}(S) < \bar{C}(S) \leq \bar{J}(\mathcal{P}, S)$$

เพราะฉะนั้น

$$0 \leq \bar{C}(S) - \underline{C}(S) \leq \bar{J}(\mathcal{P}, S) - \underline{J}(\mathcal{P}, S) < \varepsilon$$

นั่นคือ $0 \leq \bar{C}(S) - \underline{C}(S) < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $\bar{C}(S) - \underline{C}(S) = 0$

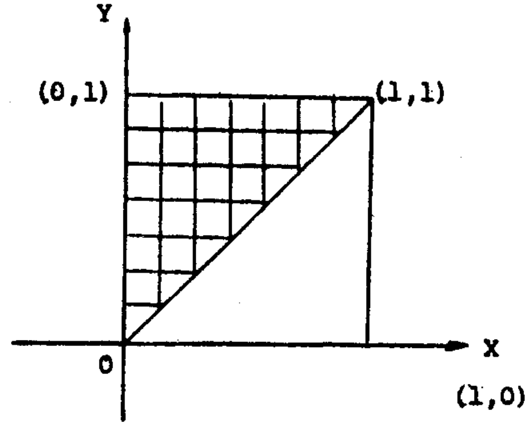
$$\bar{C}(S) = \underline{C}(S)$$

S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

ตัวอย่าง 5.5 กำหนดให้ $S = \{(x,y) \mid 0 < x < y < 1\}$

จงแสดงว่า S เป็นเซตย่อยจอร์ดองเมเชอเรเบิล และหา $C(S)$

วิธีทำ



รูป 5.7

พิจารณารูป 5.7 แทนเซต S

จะเห็นว่า $S \subseteq [(0,0),(1,1)] \subseteq R^2$

ให้ $\mathcal{P}_{1n} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ แทนเซตของจุดแบ่งกั้น ตามแกน x

$\mathcal{P}_{2n} = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ แทนเซตของจุดแบ่งกั้น ตามแกน y

ให้ $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{1n} \cup \mathcal{P}_{2n}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ

พิจารณา $\underline{J}(\mathcal{P},S) = \sum_{\substack{I_k \varepsilon \mathcal{P} \\ I_k \text{ Int } S}} \mu(I_k)$

ถ้าพิจารณาจากรูป 5.7 จะเห็นว่าจำนวนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าเล็ก ๆ ซึ่งเป็นสับเซตของเซตของจุดภายใน S มีเท่ากับ

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 4) \quad \text{รูป}$$

$$= \frac{(n-4)(n-3)}{2} \quad \text{รูป}$$

แต่ $\mu(I_k) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$

ดังนั้น $\underline{J}(\mathcal{P}, S) = \frac{(n-4)(n-3)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$

$$= \frac{(n-4)(n-3)}{2n^2}$$

ทำนองเดียวกัน $\bar{J}(\mathcal{P}, S) = \sum_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \Phi}} \mu(I_k)$

จำนวนรูปของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่สอดคล้องกับเงื่อนไข $I_k \cap S \neq \Phi$

คือ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

ดังนั้น $\bar{J}(\mathcal{P}, S) = \frac{n(n+1)}{2n^2}$

เพราะฉะนั้น $\bar{J}(\mathcal{P}, S) - \underline{J}(\mathcal{P}, S) = \frac{1}{2n^2}(n^2 + n - n^2 + 7n - 12)$

$$= \frac{8n - 12}{2n^2}$$

$$= \frac{4n - 6}{n^2} < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก n ซึ่ง $\frac{4}{n} < \varepsilon$

ดังนั้นจะได้ว่า $\bar{J}(\mathcal{P}, S) - J(\mathcal{P}, S) < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

เพราะว่า S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิลดังนั้นจะได้ว่า

$\underline{J}(\mathcal{P},S) \leq \underline{C}(S) = C(S) = \bar{C}(S) \leq \bar{J}(\mathcal{P},S)$

$$\frac{(n-3)(n-4)}{2n^2} \leq C(S) \leq \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

เมื่อ n มีค่ามาก ๆ คือแบ่งออกเป็นช่วงเล็กมาก ๆ จะได้ว่า

ดังนั้น $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2n^2} \to \dfrac{1}{2}$ และ $\dfrac{n(n+1)}{2} \to \dfrac{1}{2}$ ด้วย

ดังนั้น $C(S) = \dfrac{1}{2}$ •

ตัวอย่าง 5.6 กำหนดให้ $S = \{x \mid x$ เป็นจำนวนตรรกยะในช่วง $(0,1)\}$

จงแสดงว่า S ไม่เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

วิธีทำ S = เซตของจำนวนตรรกยะในช่วง (0,1)

ดังนั้น $S \subseteq [0,1] \subseteq R$

พิจารณา $\underline{J}(S) = \sum\limits_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \subseteq \text{Int } S}} \mu(I_k)$

แต่ Int s = ϕ

ดังนั้นไม่มี I_k ซึ่งเป็นสับเซตของ Int S

$\underline{J}(\mathcal{P},S) = 0$

แต่ $\bar{J}(\mathcal{P},S) = \sum\limits_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \phi}} \mu(I_k)$ มีค่า = 1

ดังนั้น S ไม่เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว $\bar{C}(S)$ และ $\underline{C}(S)$ มีค่ามากกว่าหรือเท่ากับ 0 และ $\underline{C}(S) \leq \bar{C}(S)$ เสมอแต่ถ้า $\bar{C}(S) = 0$ แล้วเราจะได้ทันทีว่า S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

และ $C(S) = 0$ ด้วยดังทฤษฎีบทข้างล่างนี้

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท 5.5}}$ ให้ $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$ และ $\bar{C}(S) = 0$ แล้วจะได้ว่า S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิลและ $C(S) = 0$

พิสูจน์ สำหรับเซต S ใด ๆ และ $\mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$

$$\underline{J}(\mathcal{P},S) \geq 0$$

นั่นคือ $\text{l.u.b}\,\{\,\underline{J}(\mathcal{P},S) \mid \mathcal{P}\text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } [a,b]\} \geq 0$

$$\underline{C}(S) \geq 0$$

แต่ $0 \leq \underline{C}(S) \leq \bar{C}(S) = 0$

ดังนั้น $\underline{C}(S) = \bar{C}(S) = 0$

นั่นคือ $C(S) = 0$

ดังนั้น S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล ∎

ตัวอย่าง 5.7 กำหนดให้ $S = \{(1,1),(2,2)\}$ เป็นจุดในระนาบแล้ว จงแสดงว่า S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิล

วิธีทำ เพราะว่า $S \subseteq [(0,0),(3,3)] \subseteq R^2$

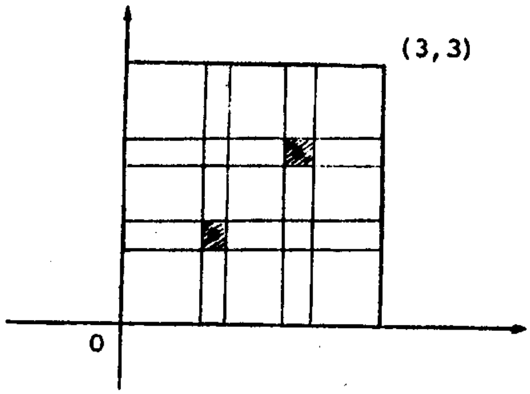
ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ให้ผลแบ่งกั้น $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$ เป็นผลแบ่งกั้นบนแกน x,y ตามลำดับโดยที่

$$\mathcal{P}_1 = \{0, 1-\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 1+\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 2-\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 2+\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 3\}$$

และ $\mathcal{P}_2 = \{0, 1-\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 1+\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 2-\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 2+\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}, 3\}$

ดังรูป 5.8



รูป 5.8

ให้ $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$

$$\mu(I_k) = \left(2\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}\right)\left(2\sqrt{\tfrac{\varepsilon}{9}}\right)$$

$$= \frac{4\varepsilon}{9} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bar{J}(\mathcal{P},S) = \sum_{\substack{I_k \in \mathcal{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \phi}} \mu(I_k)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\mathcal{P}$ ซึ่ง $\bar{J}(\mathcal{P},S) < \varepsilon$

แสดงว่า g.l.b $\{\bar{J}(\mathcal{P},S) \mid \mathcal{P}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[(0,0),(3,3)]\} = 0$

เพราะฉะนั้น $\bar{C}(S) = 0$

จากทฤษฎีบท 5.5 จะได้ว่า

S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล ∎

หมายเหตุ ใน R^2 เราเรียก C(S) ว่าพื้นที่ของ S (area of S) และใน R^3 เราเรียก C(S) ว่า ปริมาตรของ S (volumn of S)

ถ้าพิจารณา $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$ จะพบว่า $\bar{S}$ เขียนได้เป็นรูปผลผนวกของ Int S และ Bd.S ซึ่งยังคงเป็นความจริงที่ว่า Bd.S เป็นสับเซตของ $[a,b]$

เราแทน Bd.S ด้วยสัญลักษณ์ ∂S

พิจารณา $\bar{J}(\mathscr{P},S) = \sum_{\substack{I_k \in \mathscr{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \Phi}} \mu(I_k)$

พบว่า $I_k \in \mathscr{P}$ และ $I_k \cap S \neq \Phi$ นั้นสามารถแบ่งได้เป็น 2 กรณีที่ไม่เกี่ยวข้องกันคือ

กรณีที่ 1 : $I_k \in \mathscr{P}$ และ $I_k \subseteq \text{Int } S$

กรณีที่ 2 : $I_k \in \mathscr{P}$ และ $I_k \cap \partial S \neq \Phi$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\sum_{\substack{I_k \in \mathscr{P} \\ I_k \cap \bar{S} \neq \Phi}} \mu(I_k) = \sum_{I_k \subseteq \text{Int } S} \mu(I_k) + \sum_{I_k \cap \partial S \neq \Phi} \mu(I_k)$$

นั่นคือ $\bar{J}(\mathscr{P},S) = = \underline{J}(\mathscr{P},S) + \bar{J}(\mathscr{P},\partial S)$

ซึ่งเราจะได้ว่า

$\bar{J}(\mathscr{P},\partial S) = \bar{J}(\mathscr{P},S) - \underline{J}(\mathscr{P},S)$ ซึ่งสมการนี้ใช้ประโยชน์ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.6 ต่อไป

ทฤษฎีบท 5.6 กำหนดให้ $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$ แล้วจะได้ว่า

$\bar{C}(\partial S) = \bar{C}(S) - \underline{C}(S)$

<u>พิสูจน์</u> เพราะว่า $\bar{C}(S) \leq \bar{J}(\mathscr{P},S)$

และ $\underline{C}(S) \geq \underline{J}(\mathscr{P},S)$

ดังนั้นจะได้ว่า

$\bar{C}(S) - \underline{C}(S) \leq \bar{J}(\mathscr{P},S) - \underline{J}(\mathscr{P},S)$ สำหรับทุก ๆ $\mathscr{P}$

จาก $\bar{J}(\mathscr{P},S) - \underline{J}(\mathscr{P},S) = \bar{J}(\mathscr{P},\partial S)$

ดังนั้น $\bar{C}(S) - \underline{C}(S) \leq \bar{J}(\mathscr{P},\partial S)$

$\leq$ g.l.b $\{\bar{J}(\mathscr{P},\partial S) \mid \mathscr{P}$ เป็นผลแบ่งกั้น $\}$

$= \bar{C}(\partial S)$

นั่นคือเราพิสูจน์ได้ว่า

$$\bar{C}(S) - \underline{C}(S) \leqslant \bar{C}(\partial S) \qquad \ldots\ldots(1)$$

ต่อไปต้องพิสูจน์ว่า $\bar{C}(S) - \underline{C}(S) \geqslant \bar{C}(\partial S)$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\mathcal{P}_1$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ โดยที่

$$\bar{J}(\mathcal{P}_1, S) < \bar{C}(S) + \frac{\varepsilon}{2}$$

เลือก $\mathcal{P}_2$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ โดยที่

$$\underline{J}(\mathcal{P}_2, S) > \underline{C}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2$

ดังนั้น

$$\bar{J}(\mathcal{P}, S) \leqslant \bar{J}(\mathcal{P}_1, S) < \bar{C}(S) + \frac{\varepsilon}{2}$$

และ $\underline{J}(\mathcal{P}, S) \geqslant \underline{J}(\mathcal{P}_2, S) > \underline{C}(S) - \frac{\varepsilon}{2}$

$$\bar{J}(\mathcal{P}, S) - \underline{J}(\mathcal{P}, s) < \bar{C}(S) - \underline{C}(S) + \varepsilon$$

นั่นคือ $\bar{J}(\mathcal{P}, \partial S) < \bar{C}(S) - \underline{C}(S) + \varepsilon$

จะได้ว่า

$$\bar{C}(\partial S) < \bar{C}(S) - \underline{C}(S) + \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } \varepsilon > 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\bar{C}(\partial S) \leqslant \bar{C}(S) - \underline{C}(S) \qquad \ldots\ldots(2)$$

จาก (1) และ (2)

ดังนั้น $\bar{C}(\partial S) = \bar{C}(S) - \underline{C}(S)$ ∎

ทฤษฎีบท 5.7 กำหนดให้ $S \subseteq [a,b] \subseteq R^n$ แล้ว

S เป็นเซตย่อยของเมเชอเรเบิลเมื่อและก็ต่อเมื่อ $\bar{C}(\partial S) = 0$

<u>พิสูจน์</u> (1) สมมุติ S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล

เพราะฉะนั้น $\bar{C}(S) = \underline{C}(S)$

เพราะฉะนั้น $\bar{C}(\partial S) = \bar{C}(S) - \underline{C}(S) = 0$

(2) สมมุติ $\bar{C}(\partial S) = 0$

แต่ $\bar{C}(\partial S) = \bar{C}(S) - \underline{C}(S)$

ดังนั้น $\bar{C}(S) - \underline{C}(S) = 0$

นั่นคือ $\bar{C}(S) = \underline{C}(S)$

S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล ∎

<u>ข้อสังเกต</u> S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิลเมื่อและก็ต่อเมื่อ $C(\partial S) = 0$

5.6 อินทิกรัลหลายชั้นบนเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล

(Multiple integral over Jordan - measurable sets)

นิยาม 5.10 กำหนดให้ฟังก์ชัน f มีค่าและมีขอบเขตบนเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิล S เป็นเซตที่มีขอบเขตบน R^n $S \subseteq [a,b]$ g เป็นฟังก์ชันนิยามโดย

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } x \in S \\ 0 & \text{ถ้า } x \in [a,b] - S \end{cases}$$

แล้วเรียก f ว่าหาค่าอินทิกรัลแบบรีมานน์ได้บน S เมื่อ $\int_{[a,b]} g(x)\,dx$ หาค่าได้

$$\text{นั่นคือ} \quad \int_S f(x)\,dx = \int_{[a,b]} g(x)\,dx$$

ทฤษฎีบท 5.8 ถ้า S เป็นเซตจอร์ดองเมเชอเรเบิลและ f มีค่า และมีขอบเขตบน S แล้ว จะได้ว่า

f หาค่าอินทิกรัลแบบรีมานน์ได้ เมื่อและก็ต่อเมื่อเมเชอร์ของเซตของจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f ใน S มีค่าเท่ากับ 0

พิสูจน์ ให้ $S \subseteq [a,b]$

ให้ $g(x) = f(x)$ เมื่อ $x \in S$ และ $g(x) = 0$ เมื่อ $x \in [a,b] - S$

ทุก ๆ จุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f จะเป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ g อย่างไรก็ตาม จุดที่ไม่ต่อเนื่องของ g อยู่บนขอบของ S

เพราะว่า S เป็นเซตย่อร์ดองเมเชอเรเบิล

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 5.7 $c(\partial S) = 0$

ดังนั้น g หาค่าอินทิกรัลแบบรีมานน์บน $[a,b]$ ได้เมื่อและก็ต่อเมื่อเมเชอร์ของเซตของจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f มีค่าเท่ากับ 0

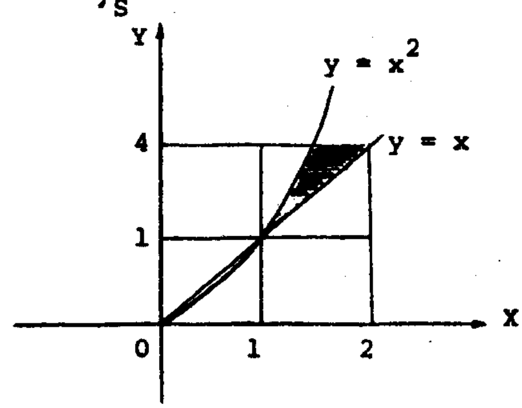
จากนิยาม $\int_{[a,b]} g(x)dx$ หาค่าได้ จะได้ว่า $\int_S f(x)dx$ หาค่าได้ด้วย

ดังนั้น $\int_S f(x)dx$ หาค่าอินทิกรัลแบบรีมานน์ได้เมื่อและก็ต่อเมื่อเมเชอร์ของเซตของจุดที่ไม่ต่อเนื่องมีค่าเท่ากับ 0 ■

ตัวอย่าง 5.8 กำหนด $S = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq y \leq x^2 \leq 4\}$

และ $f(x,y) = x + y$

จงหาค่าของ $\int_S f(x,y)d(x,y)$



รูป 5.9

$S \subseteq [(1,1),(2,4)] \subseteq R$

ให้ g นิยามโดย

$$g(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in S \\ 0 & (x,y) \in [(1,1),(2,4)] - S \end{cases}$$

นั่นคือ

$$g(x,y) = \begin{cases} 0 & y < x \\ f(x,y) & x \leqslant y \leqslant x^2 \\ 0 & y > x^2 \end{cases}$$

เพราะฉะนั้น

$$\int_1^4 g(x,y)\,dy = \int_1^x g(x,y)\,dy + \int_x^{x^2} g(x,y)\,dy + \int_{x^2}^4 g(x,y)\,dy$$

$$= 0 + \int_x^{x^2} g(x,y)\,dy + 0$$

$$= \int_x^{x^2} (x + y)\,dy$$

$$= xy + \frac{y^2}{2} \Big|_x^{x^2}$$

$$= x^3 + \frac{x^4}{2} - (x^2 + \frac{x^2}{2})$$

$$= \frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{3}{2}x^2$$

$$\text{เพราะฉนั้น} \quad \int_1^2 \int_1^4 g(x,y)\,dy\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^4}{2} + x^3 - \frac{3}{2}x^2\right)dx$$

$$= \frac{x^5}{10} + \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}x^3 \Big|_1^2$$

$$= \left(\frac{32}{10} + \frac{16}{4} - \frac{8}{2}\right) - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{67}{20}$$

5.7 อินทิกรัลหลายชั้นแบบเลอเบสก์

(Multiple Lebesques integrals)

สำหรับอินทิกรัลหลายชั้นแบบเลอเบสก์เป็นส่วนขยายของอินทิกรัลแบบรีมานน์ ซึ่งสำหรับอินทิกรัลแบบรีมานน์เรากล่าวเฉพาะฟังก์ชันที่มีขอบเขตเท่านั้น แต่อินทิกรัลแบบเลอเบสก์สามารถแก้ปัญหาฟังก์ชันที่ไม่มีขอบเขตบางฟังก์ชันได้ซึ่งทฤษฎีบทส่วนใหญ่ก็เป็นส่วนขยายของอินทิกรัลแบบเลอเบสก์ใน R ซึ่งไม่ได้กล่าวไว้ในบทนี้แต่สำหรับผู้ที่สนใจหาอ่านได้จากหนังสืออ้างอิงท้ายเล่มซึ่งมีรายละเอียดเกี่ยวกับอินทิกรัลแบบเลอแบสก์

แบบฝึกหัดที่ 5

1. ถ้า f_1 หาค่าอินทิกรัลได้บน $[a_1,b_1]$, f_2 หาค่าอินทิกรัลได้บน $[a_2,b_2]$ ... ... f_n หาค่าอินทิกรัลได้บน $[a_n,b_n]$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

$$\int_S f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)\, d(x_1 \ldots x_n) = \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)\,dx_1\right) \ldots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(s_n)\,dx_n\right)$$

โดยที่ $S = [a_1,b_1] \times \ldots \times [a_n,b_n]$

2. จงหาค่าของอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

(1) $\iint_Q \sin^2 x \sin^2 y \, dx \, dy \qquad Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

(2) $\iint_Q \cos(x + y) dx \, dy \qquad Q = [0,\pi] \times [0,\pi]$

(3) $\iint_Q (x + y) dx \, dy \qquad Q = [0,2] \times [0,2]$

3. ให้ $Q = [0,1] \times [0,1]$ จงหาค่าของ $\iint_Q f(x,y) dx \, dy$

(1) $f(x,y) = 1 - x - y$ เมื่อ $x + y \leq 1$ และ $f(x,y) = 0$.
สำหรับกรณีอื่น ๆ

(2) $f(x,y) = x^2 + y^2$ เมื่อ $x^2 + y^2 \leq 1$ และ $f(x,y) = 0$
สำหรับกรณีอื่น ๆ

(3) $f(x,y) = x + y$ da $x^2 \leq y \leq 2x^2$ และ $f(x,y) = 0$
สำหรับกรณีอื่น ๆ

4. กำหนดให้ $Q = [0,1] \times [0,1]$ และฟังก์ชัน f นิยาม ดังนี้

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 2y & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

(1) จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int_0^1} \left[\int_0^t f(x,y) dy\right] dx = t^2$ และ

$$\overline{\int_0^1} \left[\int_0^t f(x,y) dy\right] dx = t$$

(2) จากข้อ (1) จงแสดงว่า $\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y) dy\right] dx$ มีค่าเท่ากับ 1

(3) จงพิสูจน์ $\int_0^1 \left[\overline{\int_0^1} f(x,y)\,dx \right] dy$ มีค่าและจงหาค่านั้น

(4) จงแสดงว่า $\iint_Q f(x,y)\; d(x,y)$ หาค่าไม่ได้

5. กำหนดฟังก์ชัน f บน $Q = [0,1] \times [0,1]$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x \text{ หรือ } y \text{ อย่างน้อย 1 ตัวเป็นจำนวนอตรรกยะ} \\ \frac{1}{n} & \text{ถ้า } y \text{ เป็นจำนวนตรรกยะและ } x = \frac{m}{n} \end{cases}$$

โดยที่ m,n เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน (relatively prime) และ $n > 0$

จงพิสูจน์ว่า

$$\int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right] dy$$

$$= \int_Q f(x,y)\; d(x,y)$$

$$= 0$$

6. ถ้า P_k แทนจำนวนเฉพาะตัวที่ k และให้

$$S(P_k) = \{ (\frac{n}{P_k}, \frac{m}{P_k}) \mid n = 1,2,\ldots,P_k - 1,\ m = 1,2,\ldots P_k - 1\}$$

ให้ $S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S(P_k)$ และให้ $Q = [0,1]\times[0,1]$

ถ้านิยาม f บน Q โดยที่

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } (x,y) \in S \\ 1 & \text{ถ้า } (x,y) \in Q - S \end{cases}$$

แล้วจงพิสูจน์ว่า

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy\right] dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx\right] dy = 1$$

แต่ $\int_Q f(x,y)\ d(x,y)$ หาค่าไม่ได้

7. จงหาค่า $C(S)$ เมื่อกำหนด S ดังต่อไปนี้

   (1) $S = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 4\}$

   (2) $S = \{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

8. จงแสดงว่าเซต S ในข้อ 7 เป็นเซตย่อยรัดของเมเชอเรเบิล

9. ถ้า S เป็นเซตที่มีจุดลิมิตเป็นจำนวนจำกัด (finite) แล้วจงแสดงว่า $C(S) = 0$

10. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ ให้
    $S = \{(x,y) \mid y = f(x),\ a \leqslant x \leqslant b\}$ จงแสดงว่า $C(S) = 0$

★ ★ ★