บทที่ 4

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับอนุพันธ์ และการประยุกต์
Some theorems on derivative and applications

4.1 กฎลูกโซ่ (Chain rule)

ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบทกฎลูกโซ่ เราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทเกี่ยวกับพีชคณิตของฟังก์ชันซึ่งเกี่ยวข้องกับอนุพันธ์ ซึ่งคุณสมบัติเหล่านี้เหมือนกันกับคุณสมบัติใน R

ทฤษฎีบท 4.1 ให้ $A \subseteq R^n$ และ c เป็นจุดข้างในของ A

(1) ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง R^m และมีอนุพันธ์ที่จุด c และถ้า $\alpha, \beta \in R$ แล้วฟังก์ชัน

$$h = \alpha f + \beta g$$

มีอนุพันธ์ที่จุด c และ

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$$

(2) ถ้า $\psi : A \to R$ และ $f : A \to R^m$ มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้ว ผลคูณของฟังก์ชัน

$$k = \psi f : A \to R^m$$

มีอนุพันธ์ที่จุด c และ

$$Dk(c)(u) = [D\psi(c)(u)]\ f(c) + \psi(c)\ [Df(c)(u)]$$

สำหรับ $u \in R^n$

พิสูจน์ (1) ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า f, g มีอนุพันธ์ที่จุด c

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_1$ แล้ว

$$\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}\|x - c\|$$

และจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_2$ แล้ว

$$\| g(x) - g(c) - Dg(c)(x - c)\| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \| x - c\|$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$

ดังนั้น $0 < \|x - c\| < \delta \leqslant \delta_1$

และ $0 < \|x - c\| < \delta \leqslant \delta_2$

พิจารณา $\|h(x) - h(c) - [\alpha Df(c)(x - c) + \beta Dg(c)(x - c)]\|$

$$\begin{aligned}
&= \|(\alpha f + \beta g)(x) - (\alpha f + \beta g)(c) - \alpha Df(c)(x - c) \\
&\qquad - \beta Dg(c)(x - c)\| \\
&= \|(\alpha f(x) - \alpha f(c) - \alpha Df(c)(x - c)) + (\beta g(x) \\
&\qquad - \beta g(c) - \beta Dg(c)(x - c))\| \\
&\leqslant \|\alpha f(x) - \alpha f(c) - \alpha Df(c)(x - c)\| + \|\beta g(x) - \beta g(c) \\
&\qquad - \beta Dg(c)(x - c)\| \\
&= |\alpha| \, \| f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| + |\beta| \, \| g(x) - g(c) \\
&\qquad Dg(c)(x - c)\| \\
&< |\alpha| \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \|x - c\| + |\beta| \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \|x - c\| \\
&= \frac{\varepsilon}{2} \|x - c\| + \frac{\varepsilon}{2} \|x - c\| \\
&= \varepsilon \|x - c\|
\end{aligned}$$

เพราะว่า $\alpha Df(c) + \beta Dg(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m

ดังนั้นจะได้ว่า h มีอนุพันธ์ที่จุด c และ

$$Dh(c) = \alpha Df(c) + \beta Dg(c)$$

(2) พิจารณา

$$k(x) - k(c) - [D\psi(c)(x - c)f(c) + \psi(c)\ Df(c)(x - c)]$$
$$= \psi f(x) - \psi f(c) - [D\psi(c)(x - c)f(c) + \psi(c)\ Df(c)(x - c)]$$
$$= \psi(x)\ f(x) - \psi(c)f(c) - [D\psi(c)(x - c)f(c) + \psi(c)\ Df(c)(x - c)]$$
$$= [\psi(x)f(x) - \psi(c)f(x) - D\psi(c)(x - c)f(x)]$$
$$+ [D\psi(c)(x - c)f(x) - D\psi(c)(x - c)f(c)]$$
$$+ [\psi(c)f(x) - \psi(c)f(c) - \psi(c)\ Df(c)(x - c)]$$
$$= [\psi(x) - \psi(c) - D\psi(c)(x - c)]f(x) + D\psi(c)(x - c)[\ f(x) - f(c)]$$
$$+ \psi(c)[f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)]$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $Df(c)$ หาค่าได้ ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่า f ต่อเนื่องที่จุด c

ดังนั้นมี $M \in R$ ซึ่ง $\|f(x)\| < M$

เพราะว่า ψ มีอนุพันธ์ที่จุด c

ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_1$ แล้ว

$$|\psi(x) - \psi(c) - D\psi(c)(x - c)| < \frac{\varepsilon}{3M}\|x - c\|$$

เพราะว่า $D\psi(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่ามีค่าคงที่ K ซึ่ง

$$|D\psi(c)(x - c)| \leq K\|x - c\|$$

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่จุด c

ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง ถ้า $\|x - c\| < \delta_2$

$$\|f(x) - f(c)\| < \frac{\varepsilon}{3K}$$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่ c

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_3$ แล้ว

$$\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| < \frac{\varepsilon}{3|\psi(c)|}\|x - c\|$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$

ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ ดังนั้น

$0 < \|x - c\| < \delta \leq \delta_1$, $0 < \|x - c\| < \delta \leq \delta_2$ และ

$0 < \|x - c\| < \delta \leq \delta_3$

เพราะฉะนั้น
$$\begin{aligned}
&\|k(x) - k(c) - [D\psi(c)(x - c)f(c) + \psi(c)Df(c)(x - c)]\| \\
&< |\psi(x) - \psi(c) - D\psi(c)(x - c)|\,\|f(x)\| \\
&\quad + |D\psi(c)(x - c)|\,\|f(x) - f(c)\| \\
&\quad |\psi(c)|\,\|f(x) - f(c) - Df(c)(x - c)\| \\
&< M\frac{\varepsilon}{3M}\|x - c\| + K\frac{\varepsilon}{3K}\|x - c\| + |\psi(c)|\frac{\varepsilon}{3|\psi(c)|}\|x - c\| \\
&= \frac{\varepsilon}{3}\|x - c\| + \frac{\varepsilon}{3}\|x - c\| + \frac{\varepsilon}{3}\|x - c\| \\
&= \varepsilon\|x - c\|
\end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น k มีอนุพันธ์ที่จุด c และ

$$Dk(c)(x - c) = D\psi(c)(x - c)f(c) + \psi(c)Df(c)(x - c)$$

ให้ $u = x - c$ เพราะฉะนั้น $u \in R^n$

ดังนั้น $Dk(c)(u) = D\psi(c)(u)f(c) + \psi(c)\ Df(c)(u)$ ∎

ผลต่อไปที่เราจะได้มีความสำคัญมากคือ การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (composite function) ซึ่งเราจะได้ตั้งทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R^m$ ให้ $B \subseteq R^m$ และ $g : B \to R^k$

สมมุติ f มีอนุพันธ์ที่จุด c และ g มีอนุพันธ์ที่จุด $b = f(c)$

ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $h = g \circ f$ มีอนุพันธ์ที่ c และ

$$Dh(c) = Dg(b) \circ Df(c)$$

โดยทั่ว ๆ ไปเราเขียนว่า

$$D(g \circ f)(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c)$$

พิสูจน์ จากที่กำหนดให้ c เป็นจุดข้างใน A ซึ่งเป็นโดเมนของฟังก์ชัน f ดังนั้น จะได้ว่า c เป็นจุดข้างในของโดเมนของฟังก์ชัน $h = g \circ f$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพื่อความสะดวกในการพิสูจน์จะเขียน Lf แทน $Df(c)$ และ Lg แทน $Dg(b) = Dg(f(c))$

เพราะว่า Lg เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^m ไปยัง R^k

เพราะฉะนั้นจากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่ามี $M > 0$ ซึ่ง

$$\|Lg(u)\| \leq M\|u\|$$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด c

จากทฤษฎีบท 3.4 จะได้ว่ามี $K, \delta_1 > 0$ ซึ่ง

ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_1$ แล้ว $\|f(x) - f(c)\| \leq K\|x - c\|$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด c โดยนิยามจะได้ว่า มี $\delta_2 > 0$

ซึ่งถ้า $0 < \|x - c\| < \delta_2$ แล้ว $\|f(x) - f(c) - Lf(x - c)\| < \frac{\varepsilon}{2M}\|x - c\|$

และเพราะว่า g มีอนุพันธ์ที่จุด $b = f(c)$

ดังนั้นจะมี $\delta_3 > 0$ ซึ่ง ถ้า $0 < \|f(x) - f(c)\| < \delta_3$ แล้ว

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(f(x) - f(c))\| < \frac{\varepsilon}{2K}\|f(x) - f(c)\|$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \frac{\delta_3}{M}\}$

ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ ดังนั้น $0 < \|x - c\| < \delta_1, 0 < \|x - c\| < \delta$

และ $0 < \|x - c\| < \frac{\delta_3}{M}$

พิจารณา $\|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(Lf(x - c))\|$

$$= \|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(f(x) - f(c)) + Lg(f(x) - f(c)) - Lg(Lf(x - c))\|$$

$$\leq \|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(f(x) - f(c))\| + \|Lg(f(x) - f(c) - Lg(Lf(x - c))\|$$

เพราะว่า $\|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(f(x) - f(c))\| < \frac{\varepsilon}{2K}\|f(x) - f(c)\|$

$$< \frac{\varepsilon}{2K} K \|x - c\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\|x - c\|$$

และ $\|Lg(f(x) - f(c)) - Lg(Lf(x - c))\|$

$$= \|Lg(f(x) - f(c) - Lf(x - c))\|$$

$$\leq M\|f(x) - f(c) - Lf(x - c)\|$$

$$< M\frac{\varepsilon}{2M}\|x - c\|$$

$$= \frac{\varepsilon}{2}\|x - c\|$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\|g(f(x)) - g(f(c)) - Lg(Lf(x - c))\| < \varepsilon\|x - c\|$$

นั่นคือ gof มีอนุพันธ์ที่จุด c และ

$$Dgof(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c) \qquad \blacksquare$$

มีข้อน่าสังเกตอยู่อย่างหนึ่งคือว่า $Lf = Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จาก R^n ไปยัง R^m และ $Lg = Dg(b) = Dg(f(c))$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จาก R^m ไปยัง R^k ส่วนฟังก์ชันประกอบ $Lg \circ Lf$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จาก R^n ไปยัง R^k

พิจารณาตัวอย่างต่อไปนี้

__ตัวอย่าง__ 4.1 กำหนด $f : R^n \to R^m$ และ $g : R^m \to R$

ดังนั้นความสัมพันธ์จาก R^n ไปยัง R แทนด้วยฟังก์ชัน h โดยที่ $h = gof$

กำหนดให้ $y = g(x_1,x_2,\ldots,x_m)$

$$x_1 = f_1(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$x_2 = f_2(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

....

....

$$x_m = f_m(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

จะเห็นว่า

$$f(t_1,t_2,\ldots,t_n) = (f_1(t_1,t_2,\ldots,t_n),\ f_2(t_1,t_2,\ldots,t_n)$$

$$\ldots,f_m(t_1,t_2,\ldots,t_n))$$

$$Dh(c) = Dg(f(c)) \circ Df(c)$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial h(c)}{\partial t_j} = D_1 g(f(c)) D_j f_1(c) + \ldots + D_m (f(c)) D_j f_m(c)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial x_1}(f(c)) \frac{\partial f_1(c)}{\partial t_j} \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_m}(f(c)) \frac{\partial f_1}{\partial t_j}(c)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(c)) \frac{\partial f_i}{\partial t_j}(c)$$

เราแทน $\frac{\partial h}{\partial t_j}(c)$ ด้วย $\frac{\partial y}{\partial t_j}$

และ $\frac{\partial g}{\partial x_i}(f(c))$ ด้วย $\frac{\partial y}{\partial x_i}$

และ $\frac{\partial f_i}{\partial t_j}(c)$ ด้วย $\frac{\partial x_i}{\partial t_j}$

ดังนั้น $\frac{\partial y}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.2 ถ้า $y = g(x_1, x_2, \ldots, x_m)$

$x_1 = f_1(t)$

$x_2 = f_2(t)$

....

....

$x_m = f_m(t)$

$y = h(t)$

นั่นคือ $f : R \to R^m$ และ $g : R^m \to R$

และ $h = gof : R \to R$

$$\frac{\partial h(c)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(c)) \frac{\partial x_i}{\partial t}$$

หรือ $$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t}$$ ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 4.3 ให้ $f : R^2 \to R^2$ และ $g : R^2 \to R$ โดยที่

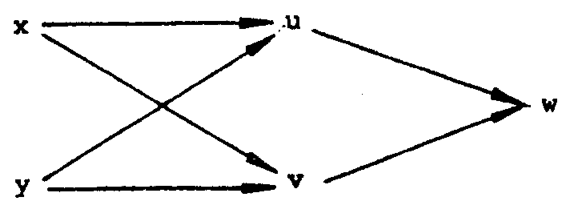
$$w = g(u,v)$$

และ $$u = f_1(x,y)$$

$$v = f_2(x,y)$$

จงหา $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$

<u>วิธีทำ</u> พิจารณาแผนภาพของความสัมพันธ์ของตัวแปร x,y,u,v และ w



รูป 4.1

ถ้าสังเกตจากแผนภาพจะเห็นว่า การหา $\frac{\partial w}{\partial x}$ ต้องหา $\frac{\partial w}{\partial u}$ แล้วหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ และหา $\frac{\partial w}{\partial v}$ และ $\frac{\partial v}{\partial x}$

จากตัวอย่าง 4.1 $$\frac{\partial h(c)}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x_i}(f(c)) \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

และ $$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

∎

<u>ตัวอย่าง</u> 4.4 กำหนดให้ $f : R^2 \to R^2$ และ $g : R^2 \to R^3$ โดยที่ $(w_1, w_2, w_3) \in R^3$ และ

$$w_1 = g_1(x_1, x_2)$$

$$w_2 = g_2(x_1, x_2)$$

$$w_3 = g_3(x_1, x_2)$$

และ

$$x_1 = f_1(t_1, t_2)$$

$$x_2 = f_2(t_1, t_2)$$

จงหา $\frac{\partial w_1}{\partial t_1}, \frac{\partial w_2}{\partial t_1}, \frac{\partial w_3}{\partial t_1}, \frac{\partial w_1}{\partial t_2}, \frac{\partial w_2}{\partial t_2}$ และ $\frac{\partial w_3}{\partial t_2}$

<u>วิธีทำ</u> เช่นเดียวกันจะได้

$$\frac{\partial w_1}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w_1}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j},$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w_2}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

และ

$$\frac{\partial w_3}{\partial t_j} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial w_3}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j}$$

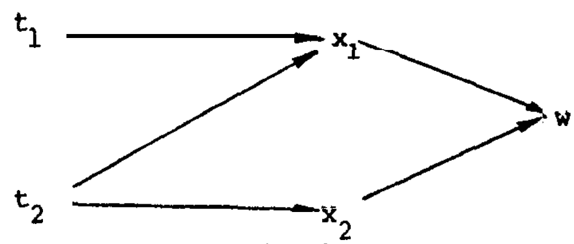
■

<u>หมายเหตุ</u> เราสามารถขยายแนวความคิดของกฎลูกโซ่ใน R^n ออกไปสำหรับกรณีพิเศษ

$$w = g(x_1, x_2)$$

$$x_1 = f_1(t_1, t_2)$$

แต่ $x_2 = f_1(t_2)$ ดังรูป 4.2



รูป 4.2

เพราะฉะนั้น $$\frac{\partial w}{\partial t_1} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}$$

และ $$\frac{\partial w}{\partial t_2} = \frac{\partial w}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial w}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2}$$

ตัวอย่างเช่น $$w = uv^2 + u^2$$
$$u = y\sin x$$
$$v = e^x$$

เพราะฉะนั้น $$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$= (v^2 + 2u)(y\cos x) + (2uv + 0)(e^x)$$
$$= y(v^2 + 2u)\cos x + 2uve^x$$

และ $$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$
$$= (v^2 + 2u)(\sin x) + (2uv + 0)(0)$$
$$= (v^2 + 2u)\sin x$$ ∎

4.2 ทฤษฎีค่ากลาง (Mean value theorem)

ในตอนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีค่ากลางซึ่งเป็นซึ่งกรณีทั่วไปของฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้บน R^n ไปยัง R^m ถ้าเรานำไปเปรียบเทียบกับทฤษฎีค่ากลางของฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน R ไปยัง

R แล้วเราจะได้ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดของ R^n ซึ่งค่าฟังก์ชันอยู่ใน R^m และถ้า a,b เป็นสมาชิกของ R^n แล้วจะมีจุด c (อยู่บนเส้นจำกัดระหว่าง a กับ b) ซึ่ง $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$

ข้อสรุปข้างบนนี้ไม่เป็นความจริง เช่น กรณี $n = 1, m = 2$ ให้ f นิยามบน R ไปยัง R^2 โดย

$$f(x) = (x - x^2, x - x^3)$$

ดังนั้น $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R ไปยัง R^2 โดยส่งจำนวนจริง u ไปยัง $Df(c)(u) = ((1 - 2c)u, (1 - 3c^2)u)$

ซึ่งจะเห็นว่า $f(0) = (0,0)$ และ $f(1) = (0,0)$

แต่ไม่มีจุด c ซึ่ง $Df(c)(u) = (0,0)$ สำหรับ $u \neq 0$

จากตัวอย่างข้างบนนี้ทำให้ทราบว่าสูตร

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

เป็นจริงในกรณีที่ $m = 1$ เท่านั้น

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนดให้ $\Omega \subseteq R^n$ เป็นเซตเปิด และ $f : \Omega \to R$ ให้ $a,b \in \Omega$ และ S เป็นเส้นจำกัด (line segment) ต่อระหว่าง a กับ b ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดบน S แล้ว จะมีจุด c บน S ซึ่ง

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $\psi : R \to R^n$ นิยามโดย

$$\psi(t) = (1 - t)a + tb$$
$$= a + t(b - a)$$

ดังนั้น $\psi(0) = a$

$\psi(1) = b$

และ $\psi(t) \in S \subseteq \Omega$ สำหรับ $t \in [0,1]$

เพราะว่า Ω เป็นเซตเปิด และ ψ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้นจะมี $\rho > 0$ ซึ่ง ψ ส่งช่วงเปิด $(-\rho, 1 + \rho)$ ไปยัง Ω

ให้ $F : (-\rho, 1 + \rho) \to R$ นิยามโดย

$$F(t) = f \circ \psi(t)$$

$$= f((1 - t)a + tb)$$

โดยใช้กฎลูกโซ่จะได้ว่า

$$F'(t) = Df((1 - t)a + tb)\ \psi'(t)$$

แต่ $\psi'(t) = b - a$

$$F'(t) = Df((1 - t)a + tb)(b - a)$$

โดยใช้ทฤษฎีค่ากลางใน R กับ $F(t)$ จะได้ว่ามี $t_o \in (0,1)$

ซึ่ง $$F'(t_o) = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0}$$

นั่นคือ $F(1) - F(0) = F'(t_o)$

แต่ $F(1) = f(b)$ และ $F(0) = f(a)$

เพราะฉะนั้น $f(b) - f(a) = F'(t_o)$

$$= Df((1 - t_o)a + t_ob)(b - a)$$

ให้ $c = \psi(t_o)$ ดังนั้นจะได้ว่า $c \in S$

ดังนั้น $f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$ ∎

แม้ว่ากรณีทั่วไปของทฤษฎีบทค่ากลางไม่เป็นจริงเมื่อเรนจ์อยู่ใน R^m, $m > 1$ ก็ตาม แต่ผลที่ได้เมื่อ $f : R^n \to R^m$, $m > 1$ อยู่ในรูปอสมการข้างล่างนี้ คือ

$$\|f(b) - f(a)\| < \|Df(c)(b - a)\|$$

สำหรับการพิสูจน์อสมการข้างบนนี้ผู้ที่สนใจหาดูได้จากหนังสืออ้างอิง

4.3 การเปลี่ยนอันดับของอนุพันธ์

(Interchange of the order of differentiation)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซตย่อยของ R^n และเรนจ์ของฟังก์ชันอยู่ใน R ดังนั้น f มีอนุพันธ์ย่อยทั้งหมด n อนุพันธ์ย่อยคือ

$$D_i f \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \; i = 1,2,\ldots,n.$$

และแต่ละอนุพันธ์ย่อยเป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมนเป็นเซตย่อยของ R^n และเรนจ์ของฟังก์ชันอยู่ใน R

ในทำนองเดียวกัน $D_i f$ แต่ละตัวก็มีอนุพันธ์ย่อยได้ n อนุพันธ์ย่อยซึ่งเราเรียกว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 (second partial derivative) แทนด้วยสัญลักษณ์

$$D_{ji} f \quad \text{หรือ} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,\ldots,n \\ j = 1,2,\ldots,n \end{array}$$

<u>หมายเหตุ</u> $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$

โดยวิธีการเดียวกันกับข้างต้นเราสามารถกล่าวถึงอนุพันธ์ย่อยอันดับ 3,4,...,n ได้ แต่ปัญหาสำคัญของอนุพันธ์ย่อยซึ่งมีอันดับมากกว่าหรือเท่ากับ 2 คือการสลับเปลี่ยนอันดับของอนุพันธ์ ซึ่งในการพิจารณาเราจะกล่าวเฉพาะในกรณีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 เท่านั้นสำหรับกรณีที่มากกว่า 2 ก็ใช้แนวความคิดแบบเดียวกัน

เราพิจารณาฟังก์ชันจาก R^2 ไปยัง R ถ้าให้ $(x,y) \in R^2$ ถ้าสามารถพิสูจน์ได้ว่า $D_x f$, $D_y f$ และ $D_{yx} f$ หาค่าได้และต่อเนื่องที่จุดที่กำหนดแล้วอนุพันธ์ย่อย $D_{xy} f$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับ $D_{yx} f$ แต่ถ้าขาดเงื่อนไขข้างต้น $D_{xy} f$ กับ $D_{yx} f$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากันเสมอไปดังตัวอย่างข้างล่างนี้

<u>ตัวอย่าง</u> 4.5 กำหนด $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{ถ้า } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ถ้า } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} \neq \dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$

<u>วิธีทำ</u> (1) $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}\right)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{k}$$

แต่ $\dfrac{\partial f(0,k)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,k) - f(0,k)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{hk(h^2-k^2)}{h^2+k^2} - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{k(h^2-k^2)}{h^2+k^2}$$

$$= -k$$

และ $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h}$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x} = \lim_{k \to 0} \frac{-k - 0}{k}$$

$$= -1$$

(2) $$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h}$$

แต่ $$\frac{\partial f(h,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(h,k) - f(h,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{\frac{hk(h^2 - k^2)}{h^2 + k^2} - 0}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{h(h^2 + k^2)}{h^2 + k^2}$$

$$= h$$

และ $$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k}$$

$$= \lim_{k \to 0} \frac{0 - 0}{k}$$

$$= 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h}$$

$$= 1$$

นั่นคือจะได้ว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$.

ทฤษฎีบท 4.4 ถ้า $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ หาค่าได้ และต่อเนื่องบนเซตเปิด S ซึ่งมี $(x_o,y_o) \in S$ แล้ว $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_o,y_o)$ หาค่าได้ และ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_o,y_o) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_o,y_o)$$

พิสูจน์ ให้ $G_k(t) = f(x_o+t, y_o+k) - f(x_o+t, y_o)$

เพราะฉะนั้น $\frac{G_k(h) - G_k(0)}{k}$

$$= \frac{f(x_o+h,y_o+k) - f(x_o+h,y_o) - f(x_o,y_o+k) + f(x_oy_o)}{k}$$

เพราะว่า $G_k(t)$ มีอนุพันธ์บนเซตเปิดซึ่งมี 0 อยู่ในเซตนั้น

เพราะฉะนั้น $G_k(t)$ มีอนุพันธ์และต่อเนื่องบนช่วงปิดซึ่งมี 0 อยู่ในช่วงปิดนั้น

โดยใช้ทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า มี $\bar{h}$ ซึ่ง $0 < \bar{h} < h$

แล้ว $\frac{G_k(h) - G_k(0)}{h} = G_k'(\bar{h})$

จากนิยามของ $G_k(t)$ จะได้

$$G_k'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o+t),y_o+k)\frac{\partial}{\partial t}(x_o+t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o+t,y_o)\frac{\partial}{\partial t}(x_o+t)$$

$$= \frac{\partial t}{\partial x}(x_o+t,y_o+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o+t,y_o)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{af}{\partial y}(x_o+h,y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{[f(x_o+h,\ y_o+k) - f(x_o+h,\ y_o)]-[f(x_o,y_o+k) - f(x_oy_o)]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{G_k(h) - G_k(0)}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h(G_K'(\bar{h}))}{k} \qquad \text{เมื่อ} \quad |\bar{h}| < |h|$$

ให้ $E(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_o+\bar{h}\ ,\ y_o+s)$

เพราะว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ หาค่าได้บนเซตเปิด S ซึ่ง $(x_o,\ y_o) \in S$

โดยใช้ทฤษฎีบทค่ากลางสำหรับ $E(s)$ บนช่วงปิดซึ่งมี 0 อยู่บนช่วงนั้น จะได้ว่า

$$\frac{E(k) - E(0)}{k} = E'(\bar{k}) \quad \text{สำหรับ} \quad |\bar{k}| < |k|$$

เพราะว่า $E'(s) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o+\bar{h}\ ,y_o+s)\ \frac{\partial}{\partial s}(y_o+s)$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o+\bar{h}\ ,y_o+s)$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h,y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h\ G_k(\bar{h})}{k} \quad , \ |\bar{h}| < |h|$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h[\frac{\partial f}{\partial x}(x_o+\bar{h},y_o+k) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_o+\bar{h}),y_o)]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{h[E(k) - E(0)]}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} h\, E'(\bar{k}) \quad , \quad |\bar{k}| < |k|$$

$$= \lim_{k\to 0} h\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(x_o + \bar{h}),y_o + \bar{k})\right]$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\lim_{k\to 0}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o + \bar{h},y_o + \bar{k})\right]$

$$= \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,(x_o + h)y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}\,(x_o,y_o)}{h}$$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ต่อเนื่องที่ (x_o,y_o)

ดังนั้นจะมี $\delta' > 0$ ซึ่ง ถ้า $\|(x,y) - (x_o,y_o)\| < \delta'$ แล้ว

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\,(x,y) - \frac{{}^2 f}{y\ x}\,(x_o,y_o)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \frac{\delta'}{2}$

ให้ h เป็นจำนวนจริงซึ่ง $0 < |h| < \delta$

เพราะว่า $\lim_{k\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o + \bar{h},y_o+\bar{k}) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h,y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)}{h}$

ดังนั้นจะมี $\delta^* > 0$ ซึ่ง $0 < |k| < \delta^*$ แล้ว

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o + \bar{h}),y_o + \bar{k}) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o + h,y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o)}{h}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \ldots.(1)$$

เลือก k โดยที่ $0 < |k| < \min\{\delta^*,\delta\}$

จะเห็นว่า (1) เป็นจริงสำหรับทุกค่า h ซึ่ง $0 < |h| < \delta$

ดังนั้น $\|(x_o+h, y_o+k) - (x_o, y_o)\|^2 = \|(\bar{h},\bar{k})\|$

$$= \bar{h}^2 + \bar{k}^2$$

$$< h^2 + k^2$$

$$< \delta^2 + \delta^2$$

$$< \left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

$$< \delta'^2$$

ดังนั้น $\|(x_o+\bar{h}, y_o+\bar{k}) - (x_o, y_o)\| < \delta'$

เพราะฉะนั้น $\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o+\bar{h}, y_o+\bar{k}) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_o)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ .....(2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\left| \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_o)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_o)$

แต่ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_o+h, y_o) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_o, y_o)}{h}$

นั่นคือ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_o, y_o) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_o, y_o)$ ∎

ตัวอย่าง 4 . 6 กำหนดให้ $f(x,y) = 3x^3y^2 + 2x^2y^3$ จงแสดงว่า

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$$

วิธีทำ

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y^2 + 4xy^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 18x^2y + 12xy^2$$

และ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^3y + 6x^2y^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 18x^2y + 12xy^2$$

จะเห็นว่า $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial}(x,y)$ ∎

นอกจากนี้อนุพันธ์ย่อยอันดับสูง ๆ ยังใช้กับฟังก์ชันประกอบได้ด้วยดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.7 กำหนดให้ $h(t_1,t_2) = f(g_1(t_1,t_2), g_2(t_1,t_2))$

โดยที่ $y = f(x_1,x_2)$

$x_1 = g_1(t_1,t_2)$

$x_2 = g_2(t_1,t_2)$

จงหา $\frac{\partial^2 h}{\partial t_1^2}$ (หรือ $\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}$) และ $\frac{\partial^2 h}{\partial t_2 \partial t_1}$ (หรือ $\frac{\partial^2 y}{\partial t_2 \partial t_1}$)

วิธีทำ (1) หา $\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2}$

เพราะว่า $$\frac{\partial y}{\partial t_1} = \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial^2 y}{\partial t_1^2} = \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)$$
$$+ \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)$$
$$+ \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1}\right)^2$$

(2) หา $\dfrac{\partial^2 y}{\partial t_2 \partial t_1}$

เพราะว่า $$\frac{\partial^2 y}{\partial t_2 \partial t_1} = \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_1} \right)$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \right) + \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{\partial y}{\partial x_2} \right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial x_1}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \right)$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial x_2}{\partial t_1}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \right)$$

$$= \frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial^2 x_1}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1}\right)\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_2} \right) + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_1} \right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \right)$$

$$+ \frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial^2 x_2}{\partial t_2 \partial t_1} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}\left(\frac{\partial x_1}{\partial t_2} \right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \right)$$

$$+ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_1} \right)\left(\frac{\partial x_2}{\partial t_2} \right)$$

ตัวอย่าง 4 . 9 กำหนดให้ $h(u,v) = f(2u + 3v, uv)$

จงหาค่าของ $\frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u}$

วิธีทำ ให้ $x_1 = 2u + 3v$

$x_2 = uv$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial u}$

$$= 2\frac{\partial f}{\partial x_1} + v\frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\left(2\frac{\partial f}{\partial x_1} + v\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}v\right)$$

$$= 2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial v}{\partial v} +$$

$$v\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\frac{\partial x_1}{\partial v} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)$$

$$= 2\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + u\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2} + v\left(3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + u\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\right)$$

$$= 6\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + 2u\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + 3v\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + uv\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

4.4 อนุพันธ์อันดับสูง ๆ (Higher derivative)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนคือเซตย่อยของ R^n และเรนจ์อยู่ใน R ดังนั้นอนุพันธ์ $Df(c)$ ของ f ที่จุด c คือฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R โดยที่

$$|f(c + z) - f(c) - Df(c)(z)| < \varepsilon\ |z|$$

สำหรับค่า z ที่มีค่าน้อยมาก

นั่นแสดงว่า $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งมีค่าเข้าใกล้ $f(c + z) - f(c)$ เมื่อ z มีค่าน้อยมาก

สำหรับ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in R^n$

$$Df(c)(z) = D_1f(c)z_1 + D_2f(c)z_2 + \ldots + D_nf(c)z_n$$

$$= \sum_{j=1}^{n} D_jf(c)z_j$$

ถ้า $Df(c)$ หาค่าได้และต่อเนื่องบนย่านของจุด c เราจะกล่าวถึงอนุพันธ์อันดับที่ 2 (second derivative of f at c) $D^2f(c)$ โดยที่ $D^2f(c)$ เป็นฟังก์ชันจาก $R^n \times R^n$ ไปยัง R ซึ่งถ้า $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ และ $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ แล้ว

$$D^2f(c)(y,z) = \sum_{j,i=1}^{n} D_{ji}f(c)y_iz_j$$

ในทำนองเดียวกันถ้าอนุพันธ์อันดับที่ 2 หาค่าไม่ได้ และต่อเนื่องที่ย่านของจุด c แล้วอนุพันธ์อันดับที่ 3 (third derivative) $D^3f(c)$ หาค่าได้ และ $D^3f(c)$ เป็นฟังก์ชันจาก $R^n \times R^n \times R^n$ ไปยัง R ซึ่งถ้า $(y,z,w) \in R^n \times R^n \times R^n$ แล้ว

$$D^3f(c)(y,z,w) = \sum_{k,j,i=1}^{n} D_{kji}f(c)y_iz_jw_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3 f(c)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}\ y_iz_jw_k$$

สำหรับกรณีทั่วไปเราสรุปได้ว่า

นิยาม 4.1 ถ้า $f : R^n \to R$ มีอนุพันธ์อันดับที่ m ที่จุด $c \in R^n$ และ $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in R^n$ แล้ว

$$D^m f(c)(t)^m = \sum_{i_m=1}^{n} \cdots\cdots \sum_{j_1=1}^{n} D^m_{i_m \ldots i_1} f(c) t_{i_1} \ldots t_{i_m}$$

$$= \sum_{i_m=1}^{n} \cdots\cdots \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial^m f(c)}{\partial x_{i_m} \ldots \partial x_{i_1}} t_{i_1} \ldots t_{i_m}$$ เรียกว่าอนุพันธ์

อันดับที่ m ของ f ที่ c ค่าที่ t

ตัวอย่าง 4.9 กำหนด $f : R^2 \to R$ เพราะฉะนั้น

$$D^2 f(c)(t,t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} D_{ji} f(c)\ t_i t_j$$

$$= D_{11} f(c) t_1 t_1 + D_{12} f(c) t_2 t_1$$

$$+ D_{21} f(c) t_2 t_1 + D_{22} f(c) t_2 t_2$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} f(c)\ t_1^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} f(c)\ t_2 t_1 +$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} f(c) t_1 t_2 + \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_2} f(c) t_2^2$$

ถ้า $f : R^n \to R$ แล้วอนุพันธ์อันดับที่ 3

$$D^3 f(c)(t,t,t) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^3}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} f(c)\ t_i t_j t_k$$

$$= \frac{\partial^3 f(c)}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_1} t_1 t_1 t_2 + \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_1 \partial x_2} f(c)\ t_2 t_1 t_1$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

<u>ตัวอย่าง</u> 4.10 กำหนด $f(x,y) = 4x^3y + 3x^2y^3$

จงหาค่าของ $D^2f(1,1)(t_1,t_2)$

$$D^2f(1,1)(t_1,t_2) = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(1,1)\ t_i t_j$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,1)\ t_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)\ t_2 t_1$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) t_1 t_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) t_2^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^2y + 6xy^3 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = 24xy + 6y^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 12x^2 + 18xy^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^3 + 9x^2y^2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = 18x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 12x^2 + 18xy^2$$

เพราะฉะนั้น $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(1,1) = 30$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,1) = 30$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 30$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(1,1) = 18$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$D^2f(1,1)(t_1,t_2) = 30t_1^2 + 60t_1t_2 + 18t_2^2$$

ทฤษฎีบท 4.5 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's theorem)

ให้ $f : \Omega \to R$ โดยที่ Ω R^n เป็นเซตเปิด ถ้าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ m ในย่านของทุกจุดบนเส้นจำกัด (line segment) S ที่เชื่อมต่อ a,b ใน Ω ต่อเนื่องแล้วจะมี $c \in S$ ซึ่ง

$$f(b) = f(a+u) = f(a) + \frac{1}{1!}Df(a)(u) + \frac{1}{2!}D^2f(a)(u)^2 + \ldots$$
$$+ \frac{1}{(m-1)!}D^{m-1}f(a)(u)^{m-1} + \frac{1}{m!}D^nf(c)(u)^n \quad \text{โดยที่} \quad b = a + u$$

<u>หมายเหตุ</u> สัญลักษณ์ที่ใช้ $D^2f(a)(u)^2 \equiv D^2f(a)(u,u)$

$$D^3f(a)(u)^3 \equiv D^3f(a)(u,u,u)$$

<u>พิสูจน์</u> นิยามฟังก์ชัน F โดยที่

$$F(t) = f(a+tu) \qquad \text{สำหรับ} \qquad 0 < t < 1$$

เพราะว่า f มีอนุพันธ์ย่อยและอนุพันธ์ย่อยต่อเนื่องด้วย

ดังนั้น F(t) หาอนุพันธ์ได้ โดยใช้กฎลูกโซ่

$$F'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu)\,\frac{d}{dt}(a_i + tu_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a+tu)(u_i)$$

$$= Df(a+tu)(u)$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$F''(t) = D^2f(a+tu)(u,u)$$

$$= D^2f(a+tu)(u)^2$$

$$F'''(t) = D^3f(a+tu)(u)^3$$

$$\vdots$$

$$F^{(k)}(t) = D^kf(a+tu)(u(^k$$

เพราะว่าอนุพันธ์ย่อยของ f ต่อเนื่อง

ดังนั้น $F', F'', F''', \ldots F^{(k)}$ ต่อเนื่องด้วย

ใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์สำหรับ F ใน R^1

$$F(1) = F(0) + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}}{k!}(0) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(t_o) \quad \text{เมื่อ } 0 < t_0 < 1$$

เพราะว่า $F(1) = f(a + u) = f(b)$

$$F(0) = f(a)$$

และ
$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{F^{(k)}(0)}{k!} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{D^k f(a)(u)^k}{k!}$$

$$= \frac{1}{1!}Df(a)(u) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(u)^2 + \ldots$$

$$+ \ldots + \frac{1D^{m-1}}{(m-1)!}f(a)(u)^{m-1}$$

เลือก $c = a + t_o u$

$$= a + t_o(b - a) = t_o b + (1 - t_o)a$$

เพราะฉะนั้น $c \in S$ และ

$$F^{(m)}(t_o) = D^m f(a + t_o u)(u)^m$$

$$= D^m f(c)(u)^m$$

นั่นคือจะได้ว่า

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{1!}Df(a)(u) + \frac{1}{2!}D^2 f(a)(u)^2 + \ldots,$$

$$+ \frac{1}{(m-1)!}D^{m-1} f(a)(u)^{m-1} + \frac{1}{n!}D^n f(c)$$

4.5 ทฤษฎีฟังก์ชันผกผัน และทฤษฎีฟังก์ชันโดยปริยาย

(Inverse function theorem and Implicit function theorem)

สำหรับการศึกษาทฤษฎีบททั้งสองนี้ก่อนอื่นสิ่งสำคัญที่ต้องใช้คือ นิยามของตัวกำหนดของยาโคบี (Jacobian determinant) ซึ่งเราใช้สัญลักษณ์ $J_f(c)$ ซึ่ง

$$J_f(c) = \left| \left[D_j f_j(c) \right] \right|$$

คือเรากล่าวถึงค่าตัวกำหนดของเมตริกซ์ $D_j f_j$ เมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่งส่ง R^n ไปยัง R^n และ $j = 1,2,\ldots,n$ ดังนั้นในกรณีที่ต้องการนำเอาตัวกำหนดของยาโคบี หรือ $J_f(c)$ ไปใช้ต้องแน่ใจเสียก่อนว่า f เป็นฟังก์ชันซึ่งส่ง R^n ไปยัง R^n เท่านั้นนอกจากนั้นคุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของตัวกำหนดยาโคบี คือ ตัวกำหนดยาโคบีของฟังก์ชันประกอบมีค่าเท่ากับผลคูณของตัวกำหนดยาโคบีของสองฟังก์ชันนั้น

ก่อนจะถึงทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน และทฤษฎีบทฟังก์ชันโดยปริยายเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งใช้เป็นแนวทางในการพิสูจน์ทฤษฎีบททั้งสองต่อไป

ทฤษฎีบท 4.6 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R^n$ $c \in A$, $r > 0$

และให้ $\Omega = \{x \mid \|x - c\| < r\}$

$\bar{\Omega} = \{x \mid \|x - c\| \leq r\}$

ถ้า f ต่อเนื่องบน $\bar{\Omega}$, f มีอนุพันธ์ย่อยบน Ω และ f เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งบน Ω และ $J_f(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ ค่า $x \in \Omega$ แล้วจะมีย่าน $N(f(c) ; r') \subseteq f(\Omega)$

พิสูจน์ ให้ $B(\Omega) = \{ x \mid \|x - c\| = r\}$

จะได้ว่า $B(\Omega)$ เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

นิยามฟังก์ชัน $g : B(\Omega) \to R$ โดยที่

$$g(x) = \|f(x) - f(c)\|$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน $\bar{\Omega}$

ดังนั้น $f(x) \neq f(c)$ สำหรับทุก ๆ $x \in B(\Omega)$

เพราะฉะนั้น $f(x) - f(c) \neq 0$

จะได้ว่า $g(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in B(\Omega)$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบน $\bar{\Omega}$ และ $|\cdot|$ เป็นฟังก์ชัน ต่อเนื่อง

จาก R^n ไปยัง R

เพราะฉะนั้น g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตปกคลุมแน่น $B(\Omega)$

จะได้ว่า g มีค่าต่ำสุดบน $B(\Omega)$

ให้ $l = \min \{ g(x) \mid x \in B(\Omega)\}$

ดังนั้น $l = g(x')$ สำหรับ $x' \in B(\Omega)$

เพราะฉะนั้น $l > 0$

ให้ $r' = \frac{l}{2}$

ดังนั้น $r' > 0$

ให้ $N(f(c);r')$ เป็นย่านของ $f(c)$

ต้องการพิสูจน์ว่า $N(f(c);r') \subseteq f(\Omega)$

ให้ $y \in N(f(c);r')$

ดังนั้น $\|f(c) - y\| < r'$

นิยามฟังก์ชัน $h : R^n \to R$ โดยที่

$$h(x) = \|f(x) - y\| \quad \text{สำหรับ} \quad x \in \bar{\Omega}$$

ดังนั้น h เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซตปกคลุมแน่น $\bar{\Omega}$

เพราะฉะนั้น h มีค่าต่ำสุดบน $\bar{\Omega}$

เพราะว่า $h(c) = \|f(c) - y\| < r'$

เพราะฉะนั้น $\min\{ h(x) \mid x \in \bar{\Omega}\} < \varepsilon$ ......(1)

พิจารณา $h(x) + \|f(c) - y\| = \|f(x) - y\| + \|f(c) - y\|$

$$\geq \|f(x) - f(c)\|$$

$$= g(x)$$

$$\geq m \quad \text{ถ้า} \quad x \in B(\Omega)$$

เพราะฉะนั้น $h(x) \geq m - \|f(c) - y\|$

$$h(x) \geq 2\varepsilon - \|f(c) - y\|$$

$$> 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $h(x) > \varepsilon$ .....(2)

ดังนั้นจะได้ว่า h ไม่มีค่าต่ำสุดบน $B(\Omega)$

จะมี $x_o \in \Omega$ ซึ่ง h มีค่าต่ำสุดที่ x_o

เพราะฉะนั้น $h^2(x)$ มีค่าต่ำสุดที่ x_o ด้วย

$$[h(x)]^2 = \|f(x) - y\|^2$$

$$= (f_1(x) - y_1)^2 + (f_2(x) - y_2)^2 + \dots + (f_n(x) - y_n)^2$$

เพราะว่า $\dfrac{\partial h^2}{\partial x_j}(x_o) = 0$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[(f_1(x) - y_1)^2 + (f_2(x) - y_2)^2 + \dots + (f_n(x) - y_n)^2\right] = 0$

ที่ $x = x_o$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$2(f_1(x_o) - y_1)\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x_o) + \dots + 2(f_n(x_o) - y_n)\frac{\partial f_n}{\partial x_j}(x_o) = 0$$

สำหรับ $j = 1,2,\dots,n.$

จะเห็นว่าเรามีสมการทั้งหมด n สมการ โดยคิดให้

$f_1(x_o) - y_1,\ f_2(x_o) - y_2, \dots, f_n(x_o) - y_n$ เป็นตัวไม่ทราบค่า

ดังนั้นค่าตัวกำหนดของระบบนี้คือ

$$\begin{vmatrix} D_1f_1(x_o) & D_1f_2(x_o) & \cdots\cdots & D_1f_n(x_o) \\ D_2f_1(x_o) & D_2f_2(x_o) & \cdots\cdots & D_2f_n(x_o) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_nf_1(x_o) & D_nf_2(x_o) & \cdots\cdots & D_nf_n(x_o) \end{vmatrix}$$

ซึ่งมีค่าเท่ากับ $J_f(x_o)$

แต่ $J_f(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in \Omega$

ดังนั้นค่าตัวกำหนดของระบบนี้ไม่เท่ากับศูนย์ คำตอบของระบบสมการนี้จึงมีได้เพียงคำตอบเดียว

ดังนั้น $f_1(x_o) - y_1 = f_2(x_o) - y_2 = \ldots = f_n(x_o) - y_n) = 0$

จะได้ $f_1(x_o) = y_1$

$f_2(x_o) = y_2$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$f_n(x_o) = y_n$

นั่นคือ $(f_1(x_o), f_2(x_o), \ldots, f_n(x_o)) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

ดังนั้น $y = f(x_o) \in f(\Omega)$ ∎

ทฤษฎีบท 4.7 กำหนดให้ $R^{nk} = R^n \times R^n \times \ldots \times R^n$ เป็นผลคูณคาทีเซียนของ R^n ทั้งหมด k ตัว.

ถ้า $h : R^{nk} \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $(x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^k)$ โดยที่ $h(x_o^1, x_o^2, \ldots, x_o^k) \neq 0$ แล้ว จะมีย่าน $N(x_o^1; \delta_1), \ldots, N(x_o^k, \delta_k)$ ซึ่ง $h(x^1, x^2, \ldots, x^k) \neq 0$

สำหรับทุก $(x^1, x^2, \ldots, x^k) \in N(x_o^1, \delta_1) \times N(x_o^2, \delta_2) \times \ldots \times N(x_o^k, \delta_k)$

พิสูจน์ จะพิสูจน์กรณี $k = 2$ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัดสำหรับกรณี k ใด ๆ ซึ่งกรณี k ใด ๆ วิธีทำเช่นเดียวกันกับกรณี $k = 2$

นั่นคือ ถ้า $h : R^n \times R^n \to R$ ต่อเนื่องที่จุด (x_o^1, x_o^2) และ $h(x_o^1, x_o^2) \neq 0$ แล้วจะมีย่าน $N(x_o^1, \delta_1)$, $N(x_o^2, \delta_2)$ ซึ่ง $h(x^1, x^2) \neq 0$ สำหรับ $(x^1, x^2) \in N(x_o^1, \delta_1) \times N(x_o^2, \delta_2)$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะฉะนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า

$$(x^1, x^2) \in N((x_o^1, x_o^2); \delta) \to |h(x^1, x^2) - h(x_o^1, x_o^2)| < \varepsilon$$

เพราะว่า $h(x_o^1, x_o^2) \neq 0$

ดังนั้น $|h(x_o^1, x_o^2)| > 0$

ดังนั้นจะมี $\delta' > 0$ ซึ่งถ้า

$$(x^1, x^2) \in N((x_o^1, x_o^2); \delta') \to |h(x^1, x^2) - h(x_o^1, x_o^2)| < |h(x_o^1, x_o^2)|$$

เลือก $\delta_1 = \frac{\delta'}{2}$ และ $\delta_2 = \frac{\delta'}{2}$.

สำหรับ $(x^1, x^2) \in N(x_o^1, \delta_1) \times N(x_o^2, \delta_2)$

จะได้ว่า $\|x^1 - x_o^1\| < \delta_1$ และ

$\|x^2 - x_o^2\| < \delta_2$

เพราะฉะนั้น $\|(x^1, x^2) - (x_o^1, x_o^2)\|^2 \leq \|(x^1 - x_o^1)\|^2 + \|(x^2 - x_o^2)\|^2$

$$< \delta_1^2 + \delta_2^2 < \delta'^2$$

จะได้ว่า $\| (x^1,x^2) - (x_o^1, x_o^2)\| < \delta'$

นั่นคือ $(x^1,x^2) \in N(x_o^1, x_o^2); \delta')$

เพราะฉะนั้น จะได้ว่า

$$|h(x^1,x^2) - h(x_o^1, x_o^2)| < |h(x_o^1, x_o^2)|$$

จะได้ว่า

$$- |h(x_o^1, x_o^2)| + h(x_o^1, x_o^2) < h(x^1,x^2) < |h(x_o^1, x_o^2)| + |h(x_o^1, x_o^2)|$$

จากอสมการข้างบนจะได้ว่า ไม่ว่า $h(x_o^1, x_o^2)$ จะมากกว่าศูนย์หรือน้อยกว่าศูนย์ก็ตาม $h(x^1,x^2) \neq 0$

นั่นคือ จะสรุปได้ว่ามีย่าน $N(x_o^1, \delta_1), N(x_o^2, \delta_2)$ ซึ่ง

$$(x^1,x^2) \in N(x_o^1 ;\delta_1) \times N(x_o^2, \delta_2) \rightarrow h(x^1,x^2) \neq 0 \quad \blacksquare$$

จากทฤษฎีบท 4.7 เราจะได้ว่าถ้า δ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$\delta = \min \{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_k\}$$

แล้วผลสรุปของทฤษฎีก็ยังคงเป็นจริงคือ จะมีย่าน $N(x_o; \delta)$ ซึ่ง $h(x^1,\ldots,x^k) \neq 0$ สำหรับทุก ๆค่า $x^1, \ldots, x^k \in N(x_o; \delta)$

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \rightarrow R^n$ ถ้า $\Omega \subseteq A$, Ω เป็นเซตเปิด และ f มีอนุพันธ์ย่อยซึ่งต่อเนื่องบน Ω และ $J_f(x_o) \neq 0$ สำหรับ $x_o \in \Omega$ แล้วจะมีย่าน $N(x_o, \delta)$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบน $N(x_o, \delta)$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $w^1, w^2, \ldots, w^n \in \Omega$ โดยที่ $w = (w^1,w^2,\ldots,w^n)$

นิยาม $F : R^{n^2} \rightarrow R$ โดยที่

$$F(w) = |(D_j f_i(w^i)|$$

เพราะฉนั้น h ต่อเนื่องบน $\underbrace{\Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega}_{n \text{ ตัว}} \subseteq R^{n^2}$

จะได้ว่า h ต่อเนื่องที่จุด $(x_o, x_o, \ldots, x_o)$ และ

$$h(x_o, x_o, \ldots, x_o) = |(D_j f_i(x_o))|$$

$$= J_f(x_o) \neq 0$$

จากทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่ามีย่าน $N(x_o, \delta)$ ซึ่งสำหรับ $w^1 \varepsilon N(x_o; \delta)$ แล้ว $h(w^1, w^2, \ldots, w^n) \neq 0$

ต้องการแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งนั่นคือ ต้องพิสูจน์ว่า ถ้า $f(x) = f(y)$ และ $x = y$

ให้ $x, y \ \varepsilon \ N(x_o; \delta)$ และ $f(x) = f(y)$

จะได้ว่า $f_i(x) = f_i(y)$ สำหรับแต่ละค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

จากทฤษฎีค่ากลาง (Mean value theorem) จะได้ว่า

$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(w^1)(y - x)$ สำหรับ w^1 ซึ่งอยู่บนเส้นจำกัด S (line segment) ที่ต่อระหว่าง x กับ y

ดังนั้น $w^1 \ \varepsilon \ S \subseteq N(x_o, \delta)$

เพราะฉนั้น $Df_i(w^i)(y - x) = 0$ สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

นั่นคือจะได้ว่า

$$D_1 f_i(w^1)(y_1 - x_1) + D_2 f_i(w^1)(y_2 - x_2) + \ . \ . \ . + D_n f_i(w^1)(y_n - x_n) = 0$$

สำหรับทุกค่า $i = 1, 2, \ldots, n.$

เพราะว่า $J_f(w)$ คือ

$$\begin{vmatrix} D_1f_1(w^1) & D_2f_1(w^1) & \cdots\cdots & D_nf_1(w^1) \\ D_1f_2(w^2) & D_2f_2(w^2) & \cdots\cdots & D_nf_2(w^2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_n(w^n) & D_2f_n(w^n) & \cdots\cdots & D_nf_n(w^n) \end{vmatrix} \neq 0$$

ดังนั้นคำตอบของระบบสมการนี้มีได้เพียงคำตอบเดียว ดังนั้นที่เป็นไปได้สำหรับสมการข้างต้นคือ

$$y_1 - x_1 = y_2 - x_2 = \cdots\cdots = y_n - x_n = 0$$

นั่นคือ $y_1 = x_1$

$y_2 = x_2$

$\cdots\cdots\cdots$

$y_n = x_n$

จะได้ว่า $(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

นั่นคือ $y = x$

แสดงว่า f เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งบนย่าน $N(x_o, \delta)$ ∎

ทฤษฎีบท 4.9 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R^m$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน Ω ซึ่งเป็นเซตเปิดและเป็นเซตย่อยของ A ถ้า Y เป็นเซตเปิดใน R^m แล้ว $\Omega \cap f^{-1}(Y)$ เป็นเซตเปิดด้วย

<u>พิสูจน์</u> ต้องการแสดงว่า $\Omega \cap f^{-1}(Y)$ เป็นเซตเปิด นั่นคือต้องการแสดงว่า ถ้าให้ $x_o \in \Omega \cap f^{-1}(Y)$ แล้ว จะมี $r > 0$ ซึ่ง

$N(x_o; r) \subseteq \Omega \cap f^{-1}(Y)$

ให้ $x_o \in \Omega \cap f^{-1}(Y)$

เพราะฉะนั้น $f(x_o) \in Y$

เพราะว่า Y เป็นเซตเปิด ดังนั้นจะมี $r' > 0$ ซึ่ง

$N(f(x_o);r') \subseteq Y$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้นเราจะได้ว่าจะมี $r_1 > 0$ ซึ่ง

ถ้าสำหรับทุก ๆ x, $x \in N(x_o, r_1) \rightarrow f(x) \in N(f(x_o);r')$

นั่นคือ $X \in N(x_o;r_1) \rightarrow f(x) \in N(f(x_o);r') \subseteq Y$

$N(x_o;r_1) \subseteq f^{-1}(Y)$

เพราะว่า Ω เป็นเซตเปิด

ดังนั้น จะมี $r_2 > 0$ ซึ่ง $N(x_o, r_2) \subseteq \Omega$

เลือก $r = \min\{r_1, r_2\}$

จะได้ว่า $N(x_o;r) \subseteq f^{-1}(Y)$

และ $N(x_o;r) \subseteq \Omega$

นั่นคือ $N(x_o;r) \subseteq \Omega \cap f^{-1}(Y)$

จะสรุปได้ $\Omega \cap f^{-1}(Y)$ เป็นเซตเปิด ∎

สำหรับในปริภูมิ n มิติ เราได้ข้อสังเกตอย่างหนึ่งคือ สำหรับฟังก์ชันซึ่งส่ง R^n ไปยัง R^m โดยที่ f เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบนเซตปกคลุมแน่นของ R^n แล้ว f^{-1} จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนภาพของเซตปกคลุมแน่นของ R^n ภายใต้ f

สำหรับทฤษฎีบทที่จะกล่าวต่อไปคือ ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน และทฤษฎีบทฟังก์ชันโดยปริยาย แต่ก่อนที่จะพิสูจน์ทฤษฎีบททั้งสองนี้ จำเป็นต้องทราบนิยามของคำคำหนึ่งที่ใช้มากในการกล่าวถึงอนุพันธ์และความต่อเนื่องของฟังก์ชันคือ นิยามของชั้นของ $C^1(\Omega)$ (class $C^1(\Omega)$)

นิยาม กำหนดให้ $A \subseteq R^n$, Ω เป็นเซตเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ A และ $f : A \to R^m$. มีอนุพันธ์ย่อยซึ่งต่อเนื่องบนเซต Ω แล้วเรียก f ว่ามีอนุพันธ์ต่อเนื่องบน Ω แทนด้วยสัญลักษณ์

$$f \in C^1(\Omega)$$

" f belongs to $C^1(\Omega)$"

ทฤษฎีบท 4.10 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน)

กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R^n$ ให้ $x_o \in \Omega \subseteq A$ Ω เป็นเซตเปิดและ $T = f(\Omega)$ ถ้า $f \in C^1(\Omega)$ และค่าตัวกำหนดยาโคบีที่ x_o ไม่เท่ากับศูนย์แล้วจะมีฟังก์ชัน g จาก R^n ไปยัง R^n และมี X , Y เป็นเซตเปิดซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้

(1) $x_o \in X \subseteq \Omega$ $\quad f(x_o) \in Y \subseteq T$

(2) $Y = f(X)$

(3) f เป็นฟังก์ชัน 1 - 1 บน X

(4) สำหรับทุก ๆ $x \in X$ $\quad g(f(x)) = x$

(5) $g \in C^1(Y)$

__พิสูจน์__ ในการพิสูจน์ (1), (2) และ (3) ยังไม่ได้กล่าวถึงฟังก์ชัน g ดังนั้นจะสร้างฟังก์ชัน g ในการพิสูจน์ (4)

(1) เพราะว่า $f \in C^1(\Omega)$

ดังนั้น $J_f(x)$ ต่อเนื่องสำหรับทุก $x \in \Omega$

จากที่กำหนดให้ $J_f(x_o) \neq 0$

จะมีย่าน $N(x_o;r_1) \subseteq \Omega$ ซึ่ง $J_f(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in N(x_o,r_1)$

เพราะว่า $J_f(x) \neq 0$ สำหรับ $x \in N(x_o;r_1)$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 4.8 จะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนย่าน $N(x_0;r_2)$

เลือก r ซึ่ง $0 < r < r_2$

จะได้ว่า $N(x_0;r) \subseteq N\overline{(x_0;r)} \subsetneq N(x_0;r)$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องและหนึ่งต่อหนึ่งบน $\overline{N(x_0;r)}$

และ $J_f(x) \neq 0$ สำหรับทุก q $x \in N(x_0;r)$

จากทฤษฎีบท 4.7 จะได้ว่ามีย่านของ $f(x_0)$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $f(N(x_0;r))$

ให้ Y เป็นย่านของ $f(x_0)$

ให้ $X = f^{-1}(Y) \cap N(x_0;r)$

จะได้ว่าข้อ (1),(2) และ (3) เป็นจริง

(2) จะพิสูจน์ข้อ (4) จะต้องแสดงว่ามี g ซึ่ง $g(f(x)) = x$

เพราะว่า Y เป็นเซตเปิด

จากทฤษฎีบท 4.9 $\Omega \cap f^{-1}(Y)$ เป็นเซตเปิด

$N(x_0;r) \cap f^{-1}(Y)$ เป็นเซตเปิดด้วย

ให้ $X = f^{-1}(Y) \cap N(x_0;r)$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งบนเซตปกคลุม แน่น $\overline{N(x_0;r)}$

และต่อเนื่องด้วย

เพราะฉะนั้น f^* ซึ่งเป็นฟังก์ชัน f แต่ใช้โดเมนคือ $\overline{N(x_0;r)}$

จะเป็นหนึ่งต่อหนึ่งและต่อเนื่องบน $\overline{N(x_0,r)}$ ด้วย

$(f^*)^{-1}$ มีค่าและต่อเนื่องบน $f(\overline{N(x_0;r)})$

ให้ $g = (f^*)^{-1}$

เพราะว่า f^* นิยามบน $f(\overline{N(x_0;r)})$

เพราะฉะนั้น $Y \subseteq f(N(x_0;r)) \subsetneq f(\overline{N(x_0;r)})$

นั่นคือ I t $\subseteq D(g)$ (โดเมนของฟังก์ชัน g)

และสำหรับแต่ละ $x \in X$

$$g(f(x)) = (f^*)^{-1}(f(x))$$
$$= f^{-1}(f(x))$$
$$= x$$

(3) พิสูจน์ข้อ (5)

ให้ $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n) \in \Omega$

ให้ $h(w) = |(D_j f_i(w_i)|$

เพราะฉะนั้น $h(x_o, x_o, \ldots, x_o) = |(D_j f_i(x_o)|$

$$= J_f(x_o)$$
$$\neq 0$$

เพราะว่า h ต่อเนื่องและ $h(x_o, \ldots, x_o) \neq 0$

ดังนั้นจะมี $r_3 > 0$ ซึ่ง $h(w_1, w_2, \ldots, w_n) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ

$(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in N((x_o, \ldots, x_o); r_3)$

สามารถเลือก $r_3 > r_2$

ดังนั้น $N(x_o; r_2) \subseteq N(x_o; r_3)$

เพราะฉะนั้น $\overline{N(x_o; r)} \subseteq N(x_o; r_3)$

เพราะฉะนั้น $h(w_1, w_2, \ldots, w_n) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $(w_1, w_2, \ldots, w_n) \in N(x_o; r)$

เพราะว่า $g : R^n \to R^n$ ดังนั้นเขียน g ได้ในรูป

$$g(x_1, \ldots, x_n) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_n(x_1, \ldots, x_n))$$

พิจารณา

$$\frac{g_m(y + \lambda e_k) - g_m(y)}{\lambda}$$ เมื่อ λ เข้าใกล้ 0

จะได้ว่า $y + \lambda e_k \in Y$

ให้ $x = g(y)$

$x' = g(y + \lambda e_k)$

เพราะฉะนั้น $f(x') - f(x) = f|_\Omega(x') - f|_\Omega(x)$

<u>หมายเหตุ</u> $f|_\Omega$ หมายถึงฟังก์ชันคิดเฉพาะบนโดเมนคือ Ω

$$= f|_\Omega(g(y + \lambda e_k)) - f|_\Omega(g(y))$$

$$= y + \lambda e_k - y$$

$$= \lambda e_k$$

แต่ $f(x') - f(x) = (f_1(x') - f_1(x), \dots, f_n(x') - f_n(x))$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\frac{f_i(x') - f_i(x)}{\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad i \neq k \\ 1 & \text{ถ้า} \quad i = k \end{cases}$$

โดยอาศัยทฤษฎีบทค่ากลาง จะได้ว่า

$$f_i(x') - f_i(x) = Df_i(w_i)(x' - x)$$

$$= \nabla f_i(w_i) \cdot (x' - x)$$

สำหรับ $w_i \in S$ ซึ่งเป็นเส้นจำกัดเชื่อมต่อระหว่าง x กับ x'

เพราะว่า $S \subseteq N(x_o, r)$

เพราะฉะนั้น $w_i \in N(x_o, r)$

เพราะฉะนั้น $$\frac{\nabla f_i(w_i)(x' - x)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า} \quad i \neq k \\ 1 & \text{ถ้า} \quad i = k \end{cases}$$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า

$$\frac{\partial f_i(w_i)}{\partial x_1}\frac{(x_1' - x_1)}{\lambda} + \frac{\partial f_i(w_i)}{\partial x_2}\frac{(x_2' - x_2)}{\lambda} + \dots + \frac{\partial f_i(w_i)}{\partial x_n}\frac{(x_n' - x_n)}{\lambda}$$

$$= \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{สำหรับ } i = 1,2,\ldots,n.$$

จะได้ระบบสมการเชิงเส้น n สมการโดยมีตัวไม่ทราบค่า n ตัวคือ

$$\frac{x_1' - x_1}{\lambda}, \ldots, \frac{x_n' - x_n}{\lambda}$$

ซึ่งค่าของตัวกำหนดของระบบสมการเชิงเส้นนี้คือ

$$\begin{vmatrix} D_1f_1(w_1) & D_2f_1(w_1) & \cdots & D_nf_1(w_1) \\ D_1f_2(w_2) & D_2f_2(w_2) & \cdots & D_nf_2(w_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_1f_n(w_n) & D_2f_n(w_n) & \cdots & D_nf_n(w_n) \end{vmatrix}$$

ซึ่ง $h(w_1,\ldots,w_n) \neq 0$

โดยใช้กฎของเครเมอร์ (cramer's rule) จะได้ว่า

$$\frac{x_{in}' - x_{in}}{A} = \frac{h_m(w_1,\ldots,w_n)}{h(w_1,\ldots,w_n)}$$

แทน x, x' ในพจน์ของ g

$$\frac{g_m(y + \lambda e_k) - g_m(y)}{\lambda} = \frac{h_m(w_1,\ldots,w_n)}{h(w_1,\ldots,w_n)}$$

เพราะว่า h do เนื่อง

ดังนั้น $\lim\limits_{x'\to x} \dfrac{h_m(w_1,\ldots,w_n)}{h(w_1,\ldots,w_n)}$ มีค่าและมีค่าเท่ากับ $\dfrac{h_m(\ldots,x)}{h(x,\ldots,x)}$

เพราะว่า $\lim\limits_{x\to 0} x' = x$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h_m(w_1,\ldots,w_n)}{h(w_1,\ldots,w_n)}$ มีค่าและมีค่าเท่ากับ

$$\frac{h_m(x,\ldots,x)}{h(x,\ldots,x)}$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g_m(y + \lambda e_k) - g_m(y)}{\lambda}$ มีค่าและมีค่าเท่ากับ

$$\frac{h_m(x,\ldots,x)}{h(x,\ldots,x)}$$

นั่นคือ $\dfrac{\partial g_m(y)}{\partial y_k}$ มีค่าและมีค่าเท่ากับ $\dfrac{h_m(x,\ldots,x)}{h(x,\ldots,x)}$

เพราะว่า h, h_m ต่อเนื่อง

และ $x = g(y)$ และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

เพราะฉะนั้น $h_m(g(y) \;.\;.\;.\; g(y))$ และ $h(g(y),\ldots,g(y))$ เป็นฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันต่อเนื่อง

ดังนั้น $\dfrac{\partial g_m}{\partial y_k}$ ต่อเนื่อง

นั่นคือ $g \in C^1(Y)$ ∎

ทฤษฎีบท 4.11 ถ้า $A \subseteq R^n \times R^m$ และ $F : A \to R^m$ Ω เป็นเซตเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ A $F \in C^1(\Omega)$, $(t_o,u_o) \in \Omega$ มีคุณสมบัติว่า $F(t_o, u_o) = 0$ และค่าตัวกำหนดของ $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial u_j}(t_o,u_o)\right) \neq 0$ แล้วจะมีเซตเปิด T_o ซึ่งเป็นเซตย่อยของ R^n ซึ่ง $t_o \in T_o$ และมีฟังก์ชัน h เพียงหนึ่งเดียวซึ่ง $h : R^n \to R^m$ นิยามบน T_o มีคุณสมบัติว่า $h \in C^1(T_o)$ และ $h(t_o) = u_o$ นอกจากนั้นยังได้อีกว่า $F(t, h(t)) = 0$ สำหรับทุก ๆ $t \in T_o$

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชัน $f : R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ โดยที่

$$
\begin{array}{llll}
f_1(t,u) = t_1 & & f_{n+1}(t,u) = F_1(t,u) \\
f_2(t,u) = t_2 & & f_{n+1}(t,u) = F_2(t,u) \\
f_3(t,u) = f_3 & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
f_n(t,u) = t_n & & f_{n+m}(t,u) = F_m(t,u)
\end{array}
$$

สำหรับทุก ๆ $t = (t_1,t_2,\ldots,t_n)$

$u = (u_1,u_2,\ldots,u_n)$

$$
\text{จะได้ว่า } J_f(t,u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_n} & & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}
$$

$$
= \det\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(t,u)\right)
$$

$$
\text{เพราะฉะนั้น } J_f(t_o,u_o) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t_o,u_o)\right)
$$

$$
\neq 0
$$

โดยใช้ทฤษฎีบท 4.10 (ทฤษฎีบทฟังก์ชันผกผัน) จะได้ว่ามีเซตเปิด X,Y ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $R^n \times R^m$ และมีฟังก์ชัน $g : R^n \times R^m \to R^n \times R^m$ สอดคล้องกับคุณสมบัติ $(t_o,u_o) \in X$ และ $f(t_o,u_o) \in Y$, $Y = f(X)$, f เป็นฟังก์ชัน หนึ่งต่อหนึ่งบน X, g เป็นฟังก์ชันบน Y ซึ่ง

$g(y) = x$ และ $g(f(t,u)) = (t,u)$ สำหรับทุก ๆ $(t,u) \in X\_$

และ $g \in C^1(Y)$

เพราะว่า $g : R^n \times R^m \ni R^n \times R^m$

เพราะฉนั้น $g(t,u) = (g_1(t,u), \ldots, g_{n+m}(t,u))$

กำหนด $T_o = \{t \in R^n \mid (t,0) \in Y\}$

และสำหรับแต่ละ $t \in T_o$

ให้ $h(t) = (g_{n+1}(t,0), \ldots, g_{n+m}(t,0))$

ให้ $t' \in T_o$

เพราะฉนั้น $(t',0) \in Y$

จะมี $r > 0$ ซึ่ง $N((t',0);r) \subseteq Y$

ให้ $t \in N(t';r)$

เพราะฉนั้น $\|t - t'\| < r$

เพราะว่า $\|(t,0) - (t',0)\|^2 = \|t - t'\| < r^2$

เพราะฉนั้น $\|(t,0) - (t',0)\| < r$

$(t,0) \in N((t',0);r) \subseteq Y$

นั่นคือ $(t,0) \in Y$

เพราะฉนั้น $t \in T_o$

เพราะฉนั้น $N(t';r) \subseteq T_o$ จะได้ต่อไปว่า T_o เป็นเซตเปิด

เพราะว่า $f(t,u) = (t, F(t,u))$

$f(t_o,u_o) = (t_o, F(t_o,u_o))$

$= (t_o,0)$

เพราะว่า $f(t_o,u_o) \in Y$

ดังนั้น $(t_o,0) \in Y$ ด้วย

นั่นคือ $t_o \in T_o$

เพราะว่า $g \in C^1(Y)$

เพราะฉนั้น $\frac{\partial g_i}{\partial t_I}$ และ $\frac{\partial g_i}{\partial u_j}$ ต่อ เนื่องที่ (t,u)

เพราะฉนั้น $\frac{\partial g_i}{\partial u_j}(t,0)$ ต่อ เนื่องที่ $t \in T_o$

นั่นคือ $h \in C^1(T_o)$

เพราะวา $g(f(t,u)) = (t,u)$

$f(t,u) = (t, F(t,u))$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} g(f(t,u)) &= g(t, F(t,u)) \\ &= (t,u) \end{aligned}$$

เพราะฉนั้น
$$\begin{aligned} (t_o,u_o) &= g(t_o, F(t_o,u_o)) \\ &= g(t_o,0) \\ &= (g_1(t_o,0), g_2(t_o,0) I\ldots, g_{n+m}(t_o,0)) \end{aligned}$$

เพราะฉนั้น
$$\begin{aligned} U_0 &= (g_{n+1}(t_o,0)\ldots, g_{n+m}(t_o,0)) \\ &= h(t_o) \end{aligned}$$

เพราะว่า $f(g(t,u)) = (t,u)$ สำหรับทุก ๆ $(t,u) \in Y$

จะได้ว่า

$$(f_1(g(t,u)),\ldots, f_n(g(t,u))) = t$$

และ $$(f_{n+1}(g(t,u)),\ldots, f_{n+m}(g(t,u))) = u$$

เพราะฉนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f_1(g(t,u)) &= f_1(g_1(t,u),\ldots, g_{n+m}(t,u)) \\ &= g_1(t,u) \\ f_2(g(t,u)) &= f_2(g_1(t,u),\ldots, g_{n+m}(t,u)) \\ &= g_2(t,u) \end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$f_n(g(t,u)) = g_n(t,u)$$

เพราะว่า $(g_1(t,u), \ldots, g_n(t,u)) = t$

และ $(F_1(g(t,u)),\ldots, F_n(g(t,u))) = u$

นั่นคือ $F(g(t,u)) = u$

แต่ $g(t,u) = (t, g_{n+1}(t,u),\ldots, g_{n+m}(t,u))$

นั่นคือจะได้ว่า

$$F(t, g_{n+1}(t,u), \ldots, g_{n+m}(t,u)) = u$$

ให้ $u = 0$ จะได้ว่า

$$F(t, g_{n+1}(t,0),\ldots, g_{n+m}(t,0) = 0$$

$$F(t, h(t)) = 0$$

ในการพิสูจน์ว่ามี h เพียงหนึ่งเดียว (unique) ทำได้โดยสมมติว่ามี h' ซึ่ง $F(t,h'(t))= 0$ โดยนิยามข้างต้น จะได้ $h(t) = h'(t)$

4.6 ปัญหาสุดขีด (Extreme Problems)

ในวิเคราะห์จำนวนจริง หรือในแคลคูลัสเบื้องต้นได้กล่าวถึงปัญหาขอบเขต พวกค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด ซึ่งอาจต้องใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่งหรืออนุพันธ์อันดับที่สอง ช่วยในการทดสอบหาค่าสูงสุดต่ำสุดตลอดจนความสำคัญของจุดวิกฤต (critical point) มาบ้างแล้ว

ในกรณีที่โดเมนของฟังก์ชันเป็นเซตย่อยของ R^n ก็เช่นเดียวกัน แต่ในที่นี้จะกล่าวถึงกรณีที่เรนจ์ของฟังก์ชันอยู่ใน R เท่านั้นคือฟังก์ชันค่าจริง (real value function) นั่นเอง โดยอาศัยวิธีการเบื้องต้น และทฤษฎีบางทฤษฎี เพียงแต่ใน R^n จะยุ่งยากสับสนมากกว่าใน R นอกนั้นแล้ววิธีการแก้ปัญหายังคงเหมือนเดิมทุกประการ

นิยาม ให้ $\Omega \subseteq R^n$ และ $f : \Omega \to R$ จุด $c \in \Omega$ เรียกว่าจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ของ f เมื่อและก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$f(c) < f(x)$ สำหรับ $x \in \Omega$ และ $\|x - c\| < \delta$ และเรียก $c \in \Omega$ ว่าจุดต่ำสุดแท้ (strict minimum) ของ f เมื่อและก็ต่อเมื่อมี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(c) < f(x)$ สำหรับ $x \in \Omega$ และ $0 < \|x - c\| < \delta$

นิยาม ให้ $\Omega \subseteq R^n$ และ $f : \Omega \to R$ จุด $c \in \Omega$ เรียกว่าจุดสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ของ f เมื่อและก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(c) > f(x)$ สำหรับ $x \in \Omega$ และ $\|x - c\| < \delta$

และเรียก $c \in \Omega$ ว่าจุดสูงสุดแท้ (strict maximum) ของ f เมื่อและก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง $f(c) > f(x)$ $x \in \Omega$ และ $0 < \|x - c\| < \delta$

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ $\Omega \subseteq R^n$ และ $f : \Omega \to R$ ถ้า c เป็นจุดภายในของ Ω ซึ่งเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ (ต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือสูงสุดสัมพัทธ์) ของ f และถ้าอนุพันธ์ย่อย $D_u f(c)$ ของ f เทียบกับ $u \in R^n$ มีค่าแล้ว $D_u f(c) = 0$

พิสูจน์ โดยสมมุติฐาน f เมื่อคิดโดเมนคือผลร่วมระหว่าง Ω กับเส้น $\{c + tu \mid t \in R\}$ มีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ที่ c ซึ่งจะเห็นว่าโดเมน $\{c + tu \mid t \in R\}$ เป็นเซตใน 1 มิติ

โดยอาศัยทฤษฎีบทค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดใน R จะได้ว่า $D_u f(c) = 0$ ∎

บทแทรก 4.12.1 ให้ $\Omega \subseteq R^n$ และ $f : \Omega \to R$ ถ้าจุดภายใน c ของ Ω เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของ f และถ้าอนุพันธ์ $Df(c)$ หาค่าได้แล้ว $Df(c) = 0$

พิสูจน์ จากบทแทรก 3.5.1จะได้ว่าสำหรับทุก ๆ อนุพันธ์ย่อย $D_j f(c)$, $j = 1,2,\ldots,n$ ที่มีค่า และถ้า $u = (u_1,\ldots,u_n) \in R^n$ แล้ว

$$Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j D_j f(c)$$

จากทฤษฎีบทที่แล้วได้ว่า $D_j f(c) = 0$ สำหรับทุกค่า $j = 1,2,\ldots,n$

ดังนั้น $Df(c)(u) = 0$ สำหรับทุก ๆ $u \in R^n$

นั่นคือ $Df(c) = 0$

จะได้ว่าถ้า $\Omega \subseteq R^n$ และถ้า $f : \Omega \to R$ มีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ที่ $c \in \Omega$ และถ้า $Df(c)$ หาค่าได้แล้ว

$$D_1 f(c) = 0,\ D_2 f(c) = 0, \ldots,\ D_n f(c) = 0$$

จุด $c \in \Omega$ ซึ่ง $Df(c) = 0$ เรียกว่าจุดวิกฤต (critical point) ของ f เราได้ข้อสรุปว่า ถ้า Ω เป็นเซตเปิดซึ่งเป็นเซตย่อยของ R^n และ f มีอนุพันธ์แล้ว เซตของจุดวิกฤตของ f จะมีจุดซึ่งเป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ทั้งหมดเป็นสมาชิก แต่อย่างไรก็ตาม เซตของจุดวิกฤตอาจมีสมาชิกส่วนหนึ่งซึ่งไม่เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ก็ได้

นอกจากนั้นฟังก์ชัน f อาจมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c ซึ่งเป็นจุดข้างในของ Ω แต่อนุพันธ์ $Df(c)$ หาค่าไม่ได้ หรือ f อาจมีค่าสุดขีดสัมพันทธ์ที่จุด c ซึ่งไม่เป็นจุดข้างในของ Ω ซึ่งทั้งสองกรณีนี้จุด c ไม่เป็นจุดวิกฤตของ f

<u>ตัวอย่าง</u> 4.11(1) ให้ $f(x) = x^3$ สำหรับ $x \in [-1,1]$

จะได้ว่า $Df(0) = 0$

อย่างไรก็ตาม f ไม่มีค่าสุดขีดที่ $x = 0$

แต่ f มีค่าสุดขีดที่ $x = \pm 1$

(ซึ่ง ± 1 ไม่เป็นจุดข้างในของโดเมนของ f และไม่เป็นจุดวิกฤต)

(2) ให้ $g(x) = |x|$ สำหรับ $x \in [-1,1]$

จะได้ว่า $Dg(0)$ หาค่าไม่ได้

แต่ g มีค่าต่ำสุดที่ $x = 0$ ซึ่งเป็นจุดข้างในของโดเมนของ g

และ g มีค่าสูงสุดที่ $x = \pm 1$ แต่ไม่เป็นจุดข้างในของ g

(3) ให้ $F : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$F(x,y) = xy$$

จะได้ว่า $DF(0,0) = \theta$

นั่นแสดงว่าจุด (0,0) เป็นจุดวิกฤตของ F

แต่อย่างไรก็ตาม (0,0) ไม่ได้ให้ค่าสุดขีดของ F เพราะว่า

$F(0,0) < F(x,y)$ สำหรับ $xy > 0$

$F0,0) > F(x,y)$ สำหรับ $xy < 0$

เราเรียกจุด (0,0) ว่าจุดอานม้า (saddle point) ของ F ซึ่งหมายความว่าทุก ๆย่านของ (0,0) ประกอบด้วยจุด (x,y) ซึ่ง $F(x,y) > F(0,0)$ และ $F(x,y) < F(0,0)$ ด้วย

(4) ให้ $G : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$G(x,y) = \frac{y - x^2}{y - 2x^2}$$

เราจะได้ว่า $DG(0,0) = 0$ และจะได้อีกว่า G ซึ่งกำหนดโดเมนเป็นเส้นที่ผ่านจุด (0,0) มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด (0,0) ∎

การทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับที่ 2

(The second derivative test)

จากตัวอย่างข้างบน จะเห็นว่าจำเป็นต้องมีเงื่อนไขซึ่งจะจำเป็นเพื่อที่จะบอกได้ว่าจุดวิกฤตที่ได้เป็นจุดสุดขีดหรือจุดอานม้า (saddle point)

พิจารณาทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ $\Omega \subseteq R^n$ เป็นเซตเปิดและ $f : \Omega \to R$ มีอนุพันธ์ย่อยซึ่งต่อเนื่องบน Ω

ถ้า $c \in \Omega$ เป็นจุดซึ่งให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (ค่าสูงสุดสัมพัทธ์) ของ f แล้ว

$$D^2f(c)(w)^2 = \sum_{i,j=1}^{n} D_{ij}f(c)w_iw_j \geq 0$$

$(D^2f(c)(w)^2 \leq 0)$ สำหรับทุก ๆ $w \in R^n$

พิสูจน์ (1) ให้ $w \in R^n$, $\|w\| = 1$

เพราะว่า c เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

เพราะฉะนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $|t| > \delta$ แล้ว $f(c + tw) - f(c) \geq 0$

เพราะว่า Ω เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง $\delta_1 \leq \delta$ และ $c + tw \in \Omega$

สำหรับ $0 \leq t \leq \delta_1$

โดยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ จะได้ว่ามี t_1 ซึ่ง

$0 \leq t_1 \leq t \leq \delta_1$ ซึ่งถ้า $c_t = c + t_1w$ แล้ว

$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2$$

เพราะว่า c เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จากบทแทรก 4.12.1 จะได้ว่า $Df(c) = 0$

ดังนั้น $\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2 = f(c + tw) - f(c)$

ดังนั้น $\frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2 \geq 0$ สำหรับ $0 \leq t \leq \delta_1$

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $D^2f(c_t)(w)^2 \geq 0$

เพราะว่า $\|c_t - c\| = \|t_1\| < \|t\|$

เพราะฉะนั้นเมื่อ $t \to 0$, $c_t \to c$

เพราะว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ของ f ต่อเนื่อง

ดังนั้นจะได้ว่า $D^2f(c)(w)^2 \geq 0$ สำหรับ $w \in R^n$, $\|w\| = 1$

จะได้ว่า $D^2f(c)(w)^2 \geq 0$ สำหรับ $w \in R^n$

(2) สำหรับ c ซึ่งเป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์พิสูจน์ทำนองเดียวกัน ■

$\boxed{\text{เป็นเซตเปิด, ให้}}$ ให้ $\Omega \subseteq R^n$, Ω : $\Omega \to R$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ซึ่งต่อเนื่องบน Ω และให้ $c \in \Omega$ เป็นจุดวิกฤต (crttical point) ของ f

(1) ถ้า $D^2f(c)(w)^2 > 0$ สำหรับทุก ๆ $w \in R^n$, $w \neq 0$

แล้ว f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด c

(2) ถ้า $D^2f(c)(w)^2 < 0$ สำหรับทุก ๆ $w \in R^n$, $w \neq 0$

แล้ว f ให้ว่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด C

(3) ถ้า $D^2f(c)(w)^2$ มีทั้งค่าบวกและค่าลบสำหรับ $W \in R^n$

แล้ว f มีจุดอานม้า (saddle point)

(1) โดยสมมติฐานจะได้ว่า $D^2f(c)(w)^2 > 0$ สำหรับ w ซึ่งอยู่ใน เซตปกคลุมแน่น $\{w \in R^n \mid \|w\| = 1\}$

เพราะว่าการส่ง $w \mapsto D^2f(c)(w)^2$ ต่อเนื่อง

ดังนั้นจะมี $m > 0$ ซึ่ง

$D^2f(c)(w)^2 \geq m$ สำหรับ $\|w\| = 1$

เพราะว่าอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ของ f ต่อเนื่องบน Ω

ดังนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

ถ้า $\|x - c\| < \delta$ แล้ว

$$D^2f(x)(w)^2 > \frac{1}{2}m \quad \text{สำหรับ} \quad \|w\| = 1$$

โดยอาศัยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ จะได้ว่า

ถ้า $0 \leq t \leq 1$ แล้วจะมี c_t บนเส้นจำกัดเชื่อมระหว่าง c กับ $c + tw$ ซึ่ง

$$f(c + tw) = f(c) + Df(c)(tw) + \frac{1}{2}D^2f(c_t)(tw)^2$$

เพราะว่า c เป็นจุดวิกฤต จะได้ว่า

ถ้า $\|w\| = 1$ และ $0 < t < \delta$ แล้ว

$$f(c + tw) - f(c) = \frac{1}{2}t^2D^2f(c_t)(w)^2$$

$$\geq \frac{1}{4}mt^2$$

$$> 0$$

ดังนั้น $f(c + u) > f(c)$ สำหรับ $0 < \|u - c\| < \delta$

ดังนั้น f ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด c

(2) พิสูจน์ทำนองเดียวกันกับ (1)

(3) ให้ $w^+, w^- \in R^n$ โดยที่ $\|w^+\| = \|w^-\| = 1$

และ $D^2f(c)(w^+)^2 > 0$

$D^2f(c)(w^-)^2 < 0$

โดยอาศัยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ สำหรับ $t > 0$ โดยที่ $t \to 0$ แล้ว

$f(c + tw^+) > f(c)$

และ $f(c + tw^-) < f(c)$

ดังนั้น c เป็นจุดอานม้า (saddle point) a

ถ้าพิจารณาทฤษฎีบท 4.13 กับทฤษฎีบท 4.14 พบว่าถ้ามีผู้กล่าวว่า

(1) ถ้า $c \in \Omega$ เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์แล้ว $D^2f(c)(w)^2 > 0$ สำหรับ $w \in R^n$ และ $w \neq 0$

(2) ถ้า $c \in \Omega$ เป็นจุดอานม้าของ f แล้ว $D^2f(c)(w)^2$ มีค่าทั้งบวกและลบสำหรับ $w \in R^n$

และ (3) ถ้า $D^2f(c)(w)^2 \geqslant 0$ สำหรับ $w \in R^n$ แล้ว c เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

จะได้ว่าข้อความทั้งสามไม่เป็นความจริง นั่นคือบทกลับของทฤษฎีบททั้งสองไม่เป็นความจริงนั่นเอง

เพื่อที่จะใช้ทฤษฎีบท 4.14 เป็นเครื่องมือในทางคณิตศาสตร์ในการหาค่าสูงสุด ค่าต่ำสุดจึงได้อาศัยวิธีการข้างล่างนี้ คือ

สำหรับ $j = 1,2,3,\ldots,n$

ให้ Δj เป็นค่าตัวกำหนด (determinant) ของเมตริกซ์จตุรัส

$$\begin{vmatrix} D_{11}f(c) & \cdots\cdots & D_{1j}f(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & * \; * & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{j1}f(c) & \cdots\cdots & D_{jj}f(c) \end{vmatrix}$$

ถ้า $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ เป็นจำนวนบวกทั้งหมดแล้ว $D^2f(c)(w)^2 > 0$ สำหรับทุก $w \neq 0$ และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c แต่ถ้า $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ มีเครื่องหมายลบ บวก สลับกันแล้ว $D^2f(c)(w)^2 < 0$ สำหรับ $w \neq 0$ และ f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c สำหรับกรณีอื่น ๆ อาจเป็นจุดสุดยึดหรือจุดอานม้า

กรณีพิเศษที่นำมาพิจารณาคือกรณี $n = 2$

พิจารณาฟังก์ชันกำลังสอง

$$Q = Au^2 + 2\,Buv + Cv^2$$

ถ้า $\Delta = AC - B^2 > 0$ แล้ว $A \neq 0$ (และ $C \neq 0$) และจะเขียนสมการใหม่

$$Q = \frac{1}{A}\left((AU + BV)^2 + (AC - B^2)V^2\right)$$

ดังนั้นจะเห็นว่าเครื่องหมายของ Q มีเครื่องหมายเหมือนกับ A (หรือ C) ในทางกลับกันถ้า $\Delta < 0$ ดังนั้น Q มีได้ทั้งค่าบวก และค่าลบซึ่งได้มาจากสมการข้างบน เมื่อ $A \neq 0$ สำหรับ กรณี $A = 0$ ค่า $\Delta < 0$ ด้วยและ Q ก็มีได้ทั้งค่าบวกและค่าลบ

บทแทรก 4.14.1 ให้ $\Omega \subseteq R^n$ เป็นเซตเปิด และ $f : \Omega \to R$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับที่ 2 ซึ่งต่อเนื่องบน Ω ให้ c เป็นจุดวิกฤตของ f และให้

$$A = D_{11}f(c)D_{22}f(c) - \left[D_{12}f(c)\right]^2$$

(1) ถ้า $\Delta > 0$ และ $D_{11}f(c) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

(2) ถ้า $A > 0$ และ $D_{11}f(c) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ c

(3) ถ้า $\Delta < 0$ แล้ว f มีจุดอานม้าที่ c

<u>พิสูจน์</u> (อาศัยข้อสรุปเดียวกับ Δ ข้างบน)

<u>ตัวอย่าง</u> 4.11 จงหาจุดวิกฤตของผิว

$$z = x^2 - xy + y^2 + 2x + 2y - 4$$

บอกด้วยว่า เป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุด หรือจุดอานม้า

<u>วิธีทำ</u> เงื่อนไขที่จำเป็นในการหาจุดวิกฤต คือ

$$D_1 f = 0$$

และ $D_2 f = 0$

ให้จุดวิกฤตคือ (a,b)

ดังนั้น $D_1 f(x,y) = 2x - y + 2$

$D_2 f(x,y) = -x + 2y + 2$

จะได้ว่า $2a - b + 2 = 0$ ......(1)

$-a + 2b + 2 = 0$ ......(2)

จาก (1) และ (2) จะได้

$a \; 3\!: \; b = -2$

เพราะว่า $z = f(x,y)$

ดังนั้น $f(-2,-2) = 4 - 4 + 4 - 4 - 4 - 4$

$= -8$

จุดบนผิวคือ $(-2,-2,-8)$ แต่ยังไม่ทราบว่าเป็นจุดสูงสุดหรือต่ำสุดซึ่งทำการทดสอบได้ดังนี้

วิธีที่ 1 พิจารณา $D = f(x,y) - f(-2,-2)$

ให้ $x = -2 + h$, $y = -2 + k$

ซึ่ง $h \to 0$ และ $k \to 0$

ดังนั้น $D = f(-2 + h), -2 + k) - f(-2,-2)$

$= h^2 - hk + k^2$

$= (h - \frac{1}{2} k)^2 + \frac{3}{4} k^2$

เพราะฉะนั้น $D > 0$

นั่นคือ $f(x,y) - f(-2,-2) > 0$

$(-2,-2)$ ให้ค่าต่ำสุด

ดังนั้นจุด $(-2,-2,-8)$ เป็นจุดต่ำสุดของผิว

<u>วิธีที่ 2</u> ใช้บทแทรก 4.14.1

พิจารณา $\Delta = D_{11}f(-2,-2)D_{22}f(-2,-2) - [D_{12}f(-2,-2)]^2$

เพราะว่า $D_1f(x,y) = 2x - Y + 2$

$D_2f(x,y) = -x + 2y + 2$

$D_{11}f(x,y) = 2$

$D_{22}f(x,y) = 2$

$D_{12}f(x,y) = -1$

แทนค่า $A = (2)(2) - (-1)^2$

$= 3 > 0$

นั่นคือ $A > 0$ และ $D_{11}f(-2,-2) > 0$ จะได้ f มีค่าต่ำสุด

นั่นคือ จุด $(-2,-2,-8)$ เป็นจุดต่ำสุด ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 4.12 จงหาจุดบนระนาบ $2x + y - z = 5$ และใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> ให้จุด $P(x,y,z)$ อยู่บนระนาบ

ระยะทางจาก O ไปยัง P คือ

$$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ให้ $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

ต้องการค่าต่ำสุดของ $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ก็คือต้องการค่าต่ำสุด

ของ f ค่าตัวแปร x,y,z ไม่อิสระทั้งหมด เพราะว่า P อยู่บนระนาบ

$$2x + y - z = 5$$

จะได้ว่า

$$z = 2x + y - 5$$

เพราะฉนั้น $f(x,y,z)$ หรือตัวแปรเพียง 2 ตัว คือ x , y

ให้ $g(x,y) = x^2 + y^2 + (2x + y - 5)^2$

เงื่อนไขที่จำเป็นคือ

$D_1g = 0$

และ $D_2g = 0$

$D_1g(x,y) = 10x + 4y - 20 = 0$

$D_2g(x,y) = 4x + 4y - 10 = 0$

แก้สมการได้

$$x = \frac{5}{3} , y = \frac{5}{6}$$

แทนค่า x, y จะได้ว่า $z = -\frac{5}{6}$

จากการทดสอบจะได้ว่าจุด $(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6})$ อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด ■

<u>ตัวอย่าง</u> 4.13 จงหาจุดบนผิว

$$x^2 - z^2 = 1$$

และอยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

<u>วิธีทำ</u> โจทย์ต้องการหาค่าต่ำสุดของ

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

จาก $x^2 - z^2 = 1$

$$x^2 = 1 + z^2$$

หรือ $z^2 = x^2 - 1$

ถ้าต้องการกำจัดค่า z^2 จะได้

$$g(x,y) = 2x^2 + y^2 - 1$$

ซึ่งเมื่อใช้เงื่อนไข $D_1 g = 0$, $D_2 g = 0$

จะได้ $D_1 g(x,y) = 4x = 0$

$$D_2 g(x,y) = 2y = 0$$

จะได้ $x = 0, y = 0$ แทนค่าจะได้ $z^2 = -1$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ (นั่นคือผิวไม่ตัดแกน z)

ดังนั้นจึงต้องกำจัด x^2

จะได้ $g(y,z) = y^2 + 2z^2 + 1$

โดยการใช้เงื่อนไข $D_1 g = 0$, $D_2 g = 0$ จะได้

$$D_1 g(y,z) = 2y = 0$$

$$D_2 g(y,z) = 42 = 0$$

จะได้ $y = 0$, $z = 0$ แทนค่า

ได้ $x = \pm 1$

นั่นคือ จุด $(1,0,0)$ และ $(-1,0,0)$ อยู่บนผิวห่างจากจุดกำเนิดน้อยที่สุด ∎

4. ตัวคูณของลากรองจ์ (Lagrange's Multipliers)

พิจารณาตัวอย่าง 4. จะพบว่าเป็นปัญหาโจทย์การหาค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

โดยที่จุด (x,y,z) อยู่ภายใต้เงื่อนไข

$$g(x,y,z) = x^2 - z^2 - 1 = 0$$

วิธีการคูณของลากรองจ์ เพื่อที่จะหาค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ จาก $g(x,y,z) = 0$ ทำได้โดยการสร้างฟังก์ชัน

$$F(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$

แล้วหาค่าอนุพันธ์ย่อย D_1F, D_2F, D_3F และ D_4F คืออนุพันธ์ที่เทียบกับ x,y,z และ λ ตามลำดับ ซึ่งจะได้สมการ

$$D_1F = 0$$

$$D_2F = 0$$

$$D_3F = 0$$

$$D_4F = 0$$

ทั้งหมด 4 สมการ มีตัวไม่ทราบค่า 4 ตัว คือ x,y,z,λ คำตอบที่ได้จากการแก้สมการคือจุดที่ทำให้ f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดตามต้องการ

<u>ตัวอย่าง</u> 4.14 จงหาจุดบนระนาบ

$$2x - 3y + 5z = 19$$

ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด (ใช้วิธีการของลากรองจ์)

<u>วิธีทำ</u> ต้องการหาค่าน้อยที่สุดของฟังก์ชัน

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$

ภายใต้เงื่อนไข

$$g(x,y,z) = 2x - 3y + 5z - 19 = 0$$

ให้ $F(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(2x - 3y + 5z - 19)$ จะได้

$$D_1F = 2x - 2\lambda = 0 \qquad (1)$$

$$D_2F = 2y + 3\lambda = 0 \qquad (2)$$

$$D_3F = 2z - 5X = 0 \qquad (3)$$

$$D_4F = -2x + 3y - 52 + 19 - 0 \qquad (4)$$

จะได้

$$x = A$$

$$y = -\frac{3}{2}\lambda$$

$$z = \frac{5}{2}\lambda$$

แทนในสมการ (4) จะได้

$$2\lambda + \frac{9}{2}\lambda + \frac{25}{2}\lambda - 19 = 0$$

$$\lambda = 1$$

จะได้ $x = 1,\ y = -\frac{3}{2},\ z = \frac{5}{2}$

ดังนั้นจุด $(1, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ เป็นจุดที่ทำให้ระยะทางสั้นที่สุดซึ่งระยะทางเท่ากับ

$\sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{38}$ หน่วย ■

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทของลากรองจ์ (Lagrange's theorem) ผู้ที่สนใจดูได้จากหนังสืออ้างอิง

แบบฝึกหัด 4

1. กำหนดให้ $f(x,y) = x^2 + y^2$

   $g(t) = (3t + 1,\ 2t - 3)$

   จงหา $F'(t)$ เมื่อ $F(t) = f\circ g(t)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = xy$

   $g(s,t) = (2s + 3t,\ 4s + t)$

   ถ้า $F(s,t) = f\circ g(s,t)$ แล้วจงหา $D_1F(s,t)$, $D_2F(s,t)$

3. กำหนดให้ $f(x,y,z) = xyz$

   $g(s,t) = (3s + st,\ s,\ t)$

   ถ้า $F(s,t) = f\circ g(s,t)$ จงหา $D_1F(s,t)$, $D_2F(s,t)$

4. ให้ $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บน R จงพิสูจน์ว่า

   (1) ถ้า $f(x,y) = f(xy)$ แล้ว $xD_1F(x,y) = yD_2F(x,y)$ สำหรับทุก ๆ $x,y \in R$

   (2) ถ้า $f(x,y) = f(ax + by)$ แล้ว $bD_1F(x,y) = aD_2F(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y) และ $a,b \in R$

   (3) ถ้า $f(x,y) = f(x^2 + y^2)$ แล้ว $yD_1F(x,y) = xD_2F(x,y)$ สำหรับทุก ๆ (x,y)

   (4) ถ้า $f(x,y) = f(x^2 - y^2)$ แล้ว $yD_1F(x,y) + xD_2F(x,y) = 0$ สำหรับทุก ๆ (x,y)

5. ให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{สำหรับ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า $D_{xy} f$ และ $D_{yx} f$ หาค่าได้ แต่ค่าไม่เท่ากัน

6. ให้ $x_1 = t_1^2 + 2t_1 t_2$

$x_2 = t_1 + t_2$

$y = f(x_1, x_2)$ และ f เป็นฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้แล้วจงหา

$D_1 y$, $D_2 y$ ในเทอมของ $D_1 t$, $D_2 t$

7. ถ้า $x = F(u,v)$, $y = G(u,v)$ และ $z = H(x,y)$ จงกระจาย $D_1 z(u_o, v_o)$ $D_2 z(u_o, v_o)$ ในเทอมของอนุพันธ์ย่อยของ x, y และ F ตามลำดับที่จุดที่กำหนด

8. จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

(1) $f(x,y) = x^2 + 4xy$

(2) $f(x,y) = x^4 + 2y^4 + 32x - y + 17$

(3) $f(x,y) = x^2 + 4y^2 - 12x - 36y$

(4) $f(x,y) = x^4 - 4xy$

(5) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4xy - 2y$

9. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีจุดวิกฤตที่จุดกำเนิด ข้อใดเป็นจุดสุดขีดและข้อใดเป็นจุดอานม้า

(1) $f(x,y) = x^2 y^2$

(2) $f(x,y) = x^2 - y^3$

(3) $f(x,y) = x^3 - y^3$

(4) $f(x,y) = x^4 - x^2 y^2 + y^4$

(5) $f(x,y) = x^3 y - xy^3$

(6) $f(x,y) = x^4 + y^4$

10. จงแสดงว่า $f(x,y) = 2x + 4y - x^2y^2$ มีจุดวิกฤตแต่ไม่มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์

11. จงหาระยะทางที่สั้นที่สุดจาก $(2,1,-3)$ ไปยังระนาบ $2x + y - 2z = 4$

12. กล่องสี่เหลี่ยมผืนผ้าด้านบนเปิด จุได้ 256 ลูกบาศก์นิ้ว จงหาขนาดกล่องที่มีพื้นที่ผิวน้อยที่สุด

★ ★ ★