บทที่ 3
อนุพันธ์ในปริภูมิ n มิติ
Derivative in n dimensional space

ในบทนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันใน R^n, $n > 1$ ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทบางทฤษฎีบท นิยามบางนิยามจะคล้ายคลึงกับทฤษฎีบท นิยามใน R ก็ตามแต่จะมีเงื่อนไขสิ่งที่ซับซ้อน ตลอดจนรายละเอียดต่าง ๆ มากกว่าใน R ตัวอย่างที่เห็นได้ง่าย ๆ เช่น ค่าลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ c สำหรับใน R การที่ x เข้าใกล้ค่า c มีได้ 2 กรณีเท่านั้นคือ x เข้าใกล้ c ทางขวามือ $(x \to c^+)$ และ x เข้าใกล้ c ทางซ้ายมือ $(x \to c^-)$ แต่ใน R^n, x เข้าใกล้ค่า c จะเข้าในทิศทางใดก็ได้

ในการศึกษาอนุพันธ์ใน R เรานิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f : R \to R$ ที่จุด c คือ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - L(x - c)|}{|x - c|} = 0$$

จากนิยามข้างบนนี้ได้ขยายแนวความคิดสำหรับฟังก์ชัน $f : R^n \to R^m$ นั่นคืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f นิยามบนย่าน (neighborhood) ของจุด $c \in R^n$ มีค่าอยู่ใน R^m เป็นการส่งแบบเชิงเส้น (linear map) $L : R^n \to R^m$ เขียนอยู่ในรูป

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$$

ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

3.1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Limits and continuity)

นิยาม 3.1 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดลิมิตของ A, $L \in R^m$

ถ้าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in A$ (ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ แล้ว $\|f(x) - L\| < \varepsilon$) แล้วเรียก L ว่าค่าลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ c เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

นิยาม 3.2 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ แล้ว f ต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด c

ตัวอย่าง 3.1 กำหนด $f : R^2 \to R$ โดยที่ $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + 2y^2}$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to R$ โดยที่ $A \subseteq R^2$ และ

$A = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 > 0\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

ให้ $(x,y) \in A$ โดยที่ $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$

เพราะฉะนั้น $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

เพราะว่า $x^2 \leq x^2+y^2$

และ $y^2 \leq x^2+y^2$

ดังนั้น $x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2$

เพราะว่า $x^2+2y^2 \geq x^2+y^2$

พิจารณา $|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} - 0\right|$

$$= \left|\frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}\right|$$

$$\leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$$

$$= x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

หรือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2 จงแสดง $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x,y) = \frac{2xy}{x^2+y^2}$

พิจารณา $x = 0$ แต่ $y \neq 0$

ดังนั้น $f(0,y) = \frac{0}{y} = 0$

นั่นคือ ถ้าเราหาค่าลิมิตโดยเข้าใกล้ (0,0) ตามแกน y ผลที่ได้ คือ

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

พิจารณา $y = 0$ แต่ $x \neq 0$

ดังนั้น $f(x,0) = \frac{0}{x}$

เช่นเดียวกันจะได้ $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

แต่สมมุติให้ $y = x$ โดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้น
$$f(x,y) = f(x,x) = \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

เพราะว่าค่าลิมิตเมื่อ (x,y) เข้าใกล้ $(0,0)$ ของแต่ละทิศทางมีค่าไม่เท่ากัน

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ■

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3 กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$

จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ สำหรับ (x,y) เข้าใกล้ $(0,0)$ ตามแนวเส้นตรงทั้งหลายที่ผ่านจุด $(0,0)$ แต่อย่างไรก็ตาม $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ จงหาเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(0,0)$ ซึ่งค่าลิมิตเมื่อ (x,y) เข้าใกล้ $(0,0)$ ตามแนวเส้นโค้งนี้แล้วทำให้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$$

■

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}$

ถ้า $m = 0$, $f(x,0) = \dfrac{0}{x^4} = 0 \quad (x \neq 0)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = 0$

ถ้า $m \neq 0$ จะได้ $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \dfrac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \dfrac{mx}{x^2 + m^2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x,mx) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{mx}{x^2 + m^2} \quad (m \neq 0)$

$= 0$

กรณีที่ $x = 0$, $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = 0$

ดังนั้นจะสรุปได้ว่าสำหรับในแนวเส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด (0,0)

ค่า $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$

อย่างไรก็ตามถ้าพิจารณา (x,y) เข้าใกล้ (0,0) ตามเส้นโค้งพาราโบลา $y = x^2$ จะได้ว่า

$$f(x,y) = f(x,x^2) = \frac{x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = \lim_{x \to 0} f(x,x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0} f(x,x^2) \neq 0$ ∎

สำหรับทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต เช่น ถ้าลิมิตมีค่าแล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น หรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับ การบวก ลบ คูณ หาร ยกกำลังของลิมิตใน R^n ใช้วิธีการเดียวกับใน R ทั้งสิ้นจึงไม่ได้กล่าวไว้ในที่นี้สำหรับผู้ที่สนใจหาอ่านได้จากหนังสืออ้างอิง ทั้งนี้รวมถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันด้วย

__ตัวอย่าง__ 3.4 กำหนด $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

จะได้ว่า $f(x,y)$ ต่อเนื่องทุก ๆ จุดยกเว้น จุดบนเส้นตรง $x - y = 0$ เท่านั้น ∎

__ตัวอย่าง__ 3.5 กำหนดฟังก์ชัน $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = y = 0 \end{cases}$

จงหาจุดซึ่ง $g(x,y)$ ไม่ต่อเนื่อง

__วิธีทำ__ ฟังก์ชัน g นิยามสำหรับทุก ๆ x,y

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$ ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดที่ส่วนไม่เป็น 0

พิจารณาที่จุด (0,0) ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด (0,0) แล้ว จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ แต่จากตัวอย่าง 3.2 จะเห็นว่าค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0) ∎

3.2 อนุพันธ์ใน R^n (Derivative in R^n)

ในตอนนี้เราจะพิจารณา $f : R^n \to R^m$ โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของ R^n และค่าของฟังก์ชันอยู่ใน R^m และในตอนนี้จะใช้ $\| \cdot \|$ แทน $| \cdot |$ ที่เคยใช้ใน R

มีข้อที่น่าสังเกตและใช้ในการพิจารณาในนิยามของอนุพันธ์ต่อไป คือ สมมติว่า $c \in D$ ซึ่งเป็นโดเมนของ $f : R^n \to R^m$ แล้วสำหรับ u ใด ๆ ใน R^n จุด $c + tu$ จะยังคงอยู่ใน D เมื่อ t มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

นิยาม 3.3 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f c เป็นจุดข้างใน (interior point) ของ A , u เป็นจุดใด ๆ ใน R^n เวกเตอร์ $L_u \in R^m$ เรียกว่าอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของ f ที่จุด c เทียบกับ u ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $t \in R$ ซึ่งถ้า $0 < |t| < \delta$

แล้ว $\left\| \dfrac{f(c + tu) - f(c)}{t} - L_u \right\| < \varepsilon$

__หมายเหตุ__ ค่าของ L_u ในนิยาม 3.3 ถ้า L_u หาค่าได้แล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น บางครั้งเราเขียน L_u ในรูปของลิมิต คือ

$$L_u = \lim_{t \to 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t}$$

เราเขียน $D_u f(c)$ หรือ $f_u(c)$ แทนอนุพันธ์ย่อย L_u ของ f ที่จุด c เทียบกับ u และเราพิจารณาฟังก์ชันที่ส่งส่งมาจาก c ไปยัง $D_u f(c) = f_u(c)$ $(c \to D_u f(c) = f_u(c))$ แทนด้วย $D_u f$ หรือ f_u แต่ฟังก์ชันนี้จะนิยามเฉพาะจุดข้างในของ A เท่านั้น

พิจารณา $f : R^n \to R^m$ กรณีที่ $m = 1$

นั่นคือ $f : R^n \to R$

ดังนั้น f มีค่าจริง และให้ u คือเวกเตอร์ $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$ ใน R^n แล้วอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ e_1 มีความหมายอย่างเดียวกันกับอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปรตัวที่ 1 ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$D_1 f$$

หรือ $\quad f_{x_1}$

หรือ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับเวกเตอร์ $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ $e_3 = (0,0,1,0,\ldots,)$ $,\ldots,$ $e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$ จะได้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปรตัวที่ $2,3,4,\ldots,n$ เขียนแทนด้วย

$$D_2 f = f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$D_3 f = f_{x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n f = f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.6 กำหนดให้ $f(x_1,x_2) = 3x_1x_2 + x_2^2$, $c = (c_1,c_2)$ เป็นจุดข้างในของโดเมนของฟังก์ชัน f

จงหา $D_1 f$, $D_2 f$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} D_1 f = D_{e_1} f(c) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(c + te_1) - f(c)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(c_1 + t,\ c_2) - f(c_1,c_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(3(c_1 + t)c_2 + c_2^2) - (3c_1c_2 + c_2^2)}{} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{3\ c_2 t}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 3\ c_2 \\ &= 3\ c_2 \end{aligned}$$

$$D_2f = D_{e_2}f(c) = \lim_{t\to 0}\frac{f(c + te_2) - f(c)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3c_1(c_2+ t) + (c_2+ t)^2- 3c_1c_2- c_2^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{3c_1t + 2\,c_2t + t^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} 3c_1+ 2c_2+ t$$

$$= 3c_1+ 2c_2 \qquad \blacksquare$$

นิยาม 3.4 ให้ $f : A \to R^m$ $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ c เป็นจุดข้างในของ A ถ้า u เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน R^n โดยที่ $\|u\| = 1$ และ

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(c + tu) - f(c)}{t} \quad \text{หาค่าได้ แล้ว}$$

$$D_uf(c) = \lim_{t\to 0}\frac{f(c + tu) - f(c)}{t}$$ เรียกว่าอนุพันธ์ที่มีทิศทาง (directional derivative) ของ f ที่จุด c ในทิศทางเดียวกับ u

อนุพันธ์(derivative)

ข้อเสียของอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด c เทียบกับเวคเตอร์ u คือขอบเขตของอนุพันธ์ย่อยพิจารณาได้เฉพาะค่า f ใกล้ c บนเซต $\{c + tu \mid t \in R\}$ ดังนั้นเพื่อจะได้อนุพันธ์ของ f ที่จุด c ซึ่งพิจารณาจาก f บนย่านของจุด c ซึ่งเป็นจุดใน R^n เราจึงเขียนอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ในรูปของการส่งแบบเชิงเส้น (linear map) จาก R^n ไปยัง R^m

$\boxed{\text{นิยาม 3.5}}$ ถ้า $L : R^n \to R^m$ โดยที่ทุก ๆ สมาชิก a, b ของ R และทุก ๆ สมาชิก x, y ของ R^n มีคุณสมบัติ

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$$

แล้วเรียก L ว่าฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)

$\boxed{\text{นิยาม 3.6}}$ ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดภายในของ A

ถ้ามีฟังก์ชันเชิงเส้น $L : R^n \to R^m$ โดยที่ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in A$(ถ้า$0< \|x - c\| < \delta$ แล้ว $\| f(x) - f(c) - L(x - c)\| < \varepsilon$) แล้วเรียก f ว่าฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด c

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับนิยาม 3.6 เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(c + u) - f(c) - L(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\|f(c + u) - f(c) - L(u)\|}{\|u\|} = 0$$

เราจะเห็นว่าฟังก์ชันเชิงเส้น L ในนิยามข้างต้น ถ้าหาค่า L ได้แล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และค่านั้นจะเรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่จุด c เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Df(c)$ นอกจากนั้นเราใช้สัญลักษณ์ $Df(c)(u)$ แทน $L(u)$ $Df(c)(x - c)$ แทน $L(x - c)$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่จุดกำหนดเพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ เราพิสูจน์โดยการสมมุติว่ามี 2 ค่าแล้วทั้งสองค่าต้องเท่ากัน

ให้ L_1, L_2 เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m (เป็นอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ที่กำหนดให้)

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(c+u) - f(c) - L_1(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

และ

$$\|f(c+u) - f(c) - L_2(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} 0 &< \|L_1(u) - L_2(u)\| \\ &= \|(f(c+u) - f(c) - L_1(u)) - (f(c+u) - f(c) \\ &\quad - L_2(u))\| \\ &\leq \|f(c+u) - f(c) - L_1(u)\| + \|f(c+u) - f(c) \\ &\quad - L_2(u)\| \\ &< 2\varepsilon\|u\| \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $0 \leq \|L_1(u) - L_2(u)\| < 2\varepsilon\|u\|$ สำหรับทุกค่า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$

ต้องการแสดงว่า $L_1(z) = L_2(z)$ สำหรับทุกค่า $z \in R^n$

สมมุติ $L_1 \neq L_2$

จะมี $z \in R^n$ ซึ่ง $L_1(z) \neq L_2(z)$

ดังนั้น $z \neq 0$

ให้ $z_0 = \left(\frac{\delta}{2\|z\|}\right) z$

ดังนั้น $\|z_0\| = \|(\frac{\delta}{2\|z\|})\ z\|$

$= \frac{\delta}{2}\frac{\|z\|}{\|z\|}$

$= \frac{\delta}{2} < \delta$

ดังนั้น $0 \leq \|L_1(z_0) - L_2(z_0)\| < 2\ \varepsilon\ \|z_0\|$

นั่นคือ $0 \leq \|L_1(z) - L_2(z)\| < 2\ \varepsilon\ \|z\|$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $L_1(z) = L_2(z)$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $L_1 = L_2$ ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 3.7 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$, $y_0 \in R^m$

ให้ $f_o : A \to R^m$ เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) นิยาม

โดย $f(x) = y_o$ สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า c เป็นจุดข้างใน A และ $x \in A$

ดังนั้น $f_o(x) - f_o(c) = 0$

จะได้ว่า f_o มีอนุพันธ์ที่ c และอนุพันธ์ $Df_o(c) = 0$ ซึ่งคือ

ฟังก์ชันเชิงเส้นที่ส่งไปยัง $0 \in R^m$

นั่นคือ อนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ของฟังก์ชันคงที่ คือฟังก์ชันคงที่ที่ส่งไปยัง

0 (zero linear function) ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 3.8 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ ให้ $f_1 : A \to R^m$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ถ้า $c \in A$ และ $x \in A$

ดังนั้น $f_1(x) - f_1(c) - f_1(x - c) = f_1(x) - f_1(c) - f_1(x) + f_1(c)$

$= 0$

จะได้ว่า f_1 มีอนุพันธ์ที่จุด c และ $Df_1(c) = f_1$

นั่นคือ อนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ของฟังก์ชันเชิงเส้นคือฟังก์ชันเชิงเส้นตัวมันเอง ∎

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของอนุพันธ์ต่อไป ในตอนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทของฟังก์ชันเชิงเส้นเพราะว่าฟังก์ชันเชิงเส้นนำไปใช้กับอนุพันธ์ใน R^n อย่างมากมาย จากนิยาม 3.5 กล่าวว่า $L : R^n \to R^m$ เรียกว่าฟังก์ชันเชิงเส้นก็ต่อเมื่อ $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก a,b ใน R และ x,y ใน R^n

จากนิยาม 3.5 โดยใช้วิธีการอุปนัยข้างคณิตศาสตร์ (mathematical induction) จะได้ว่า

$$L(ax + by + \dots + cz) = aL(x) + bL(y) + \dots + cL(z)$$

เมื่อ a,b,...,c เป็นจำนวนจริง n ตัว และ x,y,...,z เป็นสมาชิกของ R^n ทั้งหมด n ตัว

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งมีโดเมนคือ R^n และมีเรนจ์คือ R^m แล้วจะมีจำนวนจริง (c_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ จำนวน mn ตัวซึ่งถ้า $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ เป็นจุดใน R^n และถ้า $y = L(x) = (y_1, y_1, \dots, y_m)$ เป็นภาพ (image) ภายใต้ L แล้ว

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (*) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n \end{aligned}$$

พิสูจน์ ให้ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ เป็นสมาชิกของ R^n โดยที่

$$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$$

$$e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$$

....

...............a....

$$e_n = (0,0,0,\ldots,1)$$

เราพิจารณาภาพ (image) ของเวกเตอร์เหล่านี้ภายใต้ฟังก์ชันเชิงเส้น L

สมมุติ $L(e_1) = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1})$

$L(e_2) = (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{m2})$

. . . .l................

. ..*....**.*......*.....

$L(e_n) = (c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{mn})$

ดังนั้นจำนวนจริง c_{ij} เป็นโคออร์ดิเนตตัวที่ i ของ $L(e_j)$

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$

ดังนั้น x สามารถเขียนได้ในเทอมของ $e_1, e_2, \ldots, e_n$

นั่นคือ $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$

เพราะว่า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ดังนั้น $L(x) = L(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$

$$= x_1L(e_1) + x_2L(e_2) + \ldots + x_nL(e_n)$$