บทที่ 3
อนุพันธ์ในปริภูมิ n มิติ
Derivative in n dimensional space

ในบทนี้จะกล่าวถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันในR^n, $n > 1$ ถึงแม้ว่าทฤษฎีบทบางทฤษฎีบท นิยามบางนิยามจะคล้ายคลึงกับทฤษฎีบท นิยามใน R ก็ตามแต่จะมีเงื่อนไขสิ่งที่ซับซ้อน ตลอดจนรายละเอียดต่าง ๆ มากกว่าใน R ตัวอย่างที่เห็นได้ง่าย ๆ เช่น ค่าลิมิตของฟังก์ชันเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ c สำหรับใน R การที่ x เข้าใกล้ค่า c มีได้ 2 กรณีเท่านั้นคือ x เข้าใกล้ c ทางขวามือ $(x \to c^+)$ และ x เข้าใกล้ c ทางซ้ายมือ $(x \to c^-)$ แต่ใน R^n, x เข้าใกล้ค่า c จะเข้าในทิศทางใดก็ได้

ในการศึกษาอนุพันธ์ใน R เรานิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f : R \to R$ ที่จุด c คือ

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้

ซึ่งมีความหมายเหมือนกับ

$$\lim_{x \to c} \frac{|f(x) - f(c) - L(x - c)|}{|x - c|} = 0$$

จากนิยามข้างบนนี้ได้ขยายแนวความคิดสำหรับฟังก์ชัน $f : R^n \to R^m$ นั่นคืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน f นิยามบนย่าน (neighborhood) ของจุด $c \in R^n$ มีค่าอยู่ใน R^m เป็นการส่งแบบเชิงเส้น (linear map) $L : R^n \to R^m$ เขียนอยู่ในรูป

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|}{\|x - c\|} = 0$$

ซึ่งจะได้กล่าวในหัวข้อต่อไป

3.1 ลิมิตและความต่อเนื่อง

(Limits and continuity)

นิยาม 3.1 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดลิมิตของ A, $L \in R^m$

ถ้าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in A$

(ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ แล้ว $\|f(x) - L\| < \varepsilon$) แล้วเรียก L ว่าค่าลิมิตของ f เมื่อ x เข้าใกล้ c เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

นิยาม 3.2 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ แล้ว f ต่อเนื่อง (continuous) ที่จุด c

ตัวอย่าง 3.1 กำหนด $f : R^2 \to R$ โดยที่ $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2 + 2y^2}$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$ จงแสดงว่า

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) = 0$$

พิสูจน์ ให้ $f : A \to R$ โดยที่ $A \subseteq R^2$ และ

$A = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 > 0\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เลือก $\delta = \sqrt{\varepsilon}$

ให้ $(x,y) \in A$ โดยที่ $0 < \|(x,y) - (0,0)\| < \delta$

เพราะฉะนั้น $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

เพราะว่า $x^2 \leq x^2+y^2$

และ $y^2 \leq x^2+y^2$

ดังนั้น $x^2y^2 \leq (x^2+y^2)^2$

เพราะว่า $x^2+2y^2 \geq x^2+y^2$

พิจารณา
$$|f(x,y) - 0| = \left|\frac{x^2y^2}{x^2+2y^2} - 0\right|$$
$$= \left|\frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}\right|$$
$$\leq \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2}$$
$$= x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

หรือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+2y^2} = 0$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.2 จงแสดง $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ หาค่าไม่ได้

<u>วิธีทำ</u> ให้ $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$

พิจารณา $x = 0$ แต่ $y \neq 0$

ดังนั้น $f(0,y) = \dfrac{0}{y} = 0$

นั่นคือ ถ้าเราหาค่าลิมิตโดยเข้าใกล้ (0,0) ตามแกน y ผลที่ได้ คือ

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

พิจารณา $y = 0$ แต่ $x \neq 0$

ดังนั้น $f(x,0) = \frac{0}{x}$

เช่นเดียวกันจะได้ $\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$

แต่สมมุติให้ $y = x$ โดยที่ $x \neq 0$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x,x) \\ &= \frac{2x^2}{x^2+x^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$

เพราะว่าค่าลิมิตเมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (0,0) ของแต่ละทิศทางมีค่าไม่เท่ากัน

ดังนั้น $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ■

<u>ตัวอย่าง</u> 3.3 กำหนดให้ $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ สำหรับ $(x,y) \neq (0,0)$

จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ สำหรับ (x,y) เข้าใกล้ (0,0) ตามแนวเส้นตรงทั้งหลายที่ผ่านจุด (0,0) แต่อย่างไรก็ตาม $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ จงหาเส้นโค้งที่ผ่านจุด (0,0) ซึ่งค่าลิมิตเมื่อ (x,y) เข้าใกล้ (0,0) ตามแนวเส้นโค้งนี้แล้วทำให้

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \neq 0$$

■

<u>วิธีทำ</u> พิจารณา $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}$

ถ้า $m = 0$, $f(x,0) = \dfrac{0}{x^4} = 0 \quad (x \neq 0)$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x,0) = 0$

ถ้า $m \neq 0$ จะได้ $f(x,mx) = \dfrac{mx^3}{x^4 + m^2x^2} = \dfrac{mx^3}{x^2(x^2 + m^2)} = \dfrac{mx}{x^2 + m^2}$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x,mx) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{mx}{x^2 + m^2} \quad (m \neq 0)$

$= 0$

กรณีที่ $x = 0$, $y \neq 0$, $f(0,y) = \dfrac{0}{y^2} = 0$

ดังนั้น $\lim\limits_{y\to 0} f(0,y) = 0$

ดังนั้นจะสรุปได้ว่าสำหรับในแนวเส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด (0,0)

ค่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

อย่างไรก็ตามถ้าพิจารณา (x,y) เข้าใกล้ (0,0) ตามเส้นโค้งพาราโบลา

$y = x^2$ จะได้ว่า

$f(x,y) = f(x,x^2) = \dfrac{x^2x^2}{x^4 + (x^2)^2} = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) \neq 0$ ∎

สำหรับทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต เช่น ถ้าลิมิตมีค่าแล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น หรือทฤษฎีบทเกี่ยวกับ การบวก ลบ คูณ หาร ยกกำลังของลิมิตใน R^n ใช้วิธีการเดียวกับใน R ทั้งสิ้นจึงไม่ได้กล่าวไว้ในที่นี้สำหรับผู้ที่สนใจหาอ่านได้จากหนังสืออ้างอิง ทั้งนี้รวมถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับความต่อเนื่องของฟังก์ชันด้วย

__ตัวอย่าง__ 3.4 กำหนด $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x-y}$

จะได้ว่า $f(x,y)$ ต่อเนื่องทุก ๆ จุดยกเว้น จุดบนเส้นตรง $x - y = 0$ เท่านั้น ∎

__ตัวอย่าง__ 3.5 กำหนดฟังก์ชัน $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = y = 0 \end{cases}$

จงหาจุดซึ่ง $g(x,y)$ ไม่ต่อเนื่อง

__วิธีทำ__ ฟังก์ชัน g นิยามสำหรับทุก ๆ x,y

ซึ่งจะเห็นว่า $\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$, $x^2+y^2 \neq 0$ ต่อเนื่องสำหรับทุก ๆ จุดที่ส่วนไม่เป็น 0

พิจารณาที่จุด $(0,0)$ ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ แล้ว จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ แต่จากตัวอย่าง 3.2 จะเห็นว่าค่าของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ ∎

3.2 อนุพันธ์ใน R^n (Derivative in R^n)

ในตอนนี้เราจะพิจารณา $f : R^n \to R^m$ โดยที่โดเมนของฟังก์ชัน f เป็นสับเซตของ R^n และค่าของฟังก์ชันอยู่ใน R^m และในตอนนี้จะใช้ $\| \cdot \|$ แทน $| \cdot |$ ที่เคยใช้ใน R

มีข้อที่น่าสังเกตและใช้ในการพิจารณาในนิยามของอนุพันธ์ต่อไป คือ สมมติว่า $c \in D$ ซึ่งเป็นโดเมนของ $f : R^n \to R^m$ แล้วสำหรับ u ใด ๆ ใน R^n จุด $c + tu$ จะยังคงอยู่ใน D เมื่อ t มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

นิยาม 3.3 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f c เป็นจุดข้างใน (interior point) ของ A , u เป็นจุดใด ๆ ใน R^n เวกเตอร์ $L_u \in R^m$ เรียกว่าอนุพันธ์ย่อย (partial derivative) ของ f ที่จุด c เทียบกับ u ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $t \in R$ ซึ่งถ้า $0 < |t| < \delta$

แล้ว $\left\| \dfrac{f(c + tu) - f(c)}{t} - L_u \right\| < \varepsilon$

<u>หมายเหตุ</u> ค่าของ L_u ในนิยาม 3.3 ถ้า L_u หาค่าได้แล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น บางครั้งเราเขียน L_u ในรูปของลิมิต คือ

$$L_u = \lim_{t \to 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t}$$

เราเขียน $D_u f(c)$ หรือ $f_u(c)$ แทนอนุพันธ์ย่อย L_u ของ f ที่จุด c เทียบกับ u และเราพิจารณาฟังก์ชันที่ส่งส่มาจาก c ไปยัง $D_u f(c) = f_u(c)$ $(c \to D_u f(c) = f_u(c))$ แทนด้วย $D_u f$ หรือ f_u แต่ฟังก์ชันนี้จะนิยามเฉพาะจุดข้างในของ A เท่านั้น

พิจารณา $f : R^n \to R^m$ กรณีที่ $m = 1$

นั่นคือ $f : R^n \to R$

ดังนั้น f มีค่าจริง และให้ u คือเวกเตอร์ $e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$ ใน R^n แล้วอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับ e_1 มีความหมายอย่างเดียวกันกับอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปรตัวที่ 1 ซึ่งแทนด้วยสัญลักษณ์

$$D_1 f$$

หรือ $\quad f_{x_1}$

หรือ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับเวกเตอร์ $e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$ $e_3 = (0,0,1,0,\ldots,)$ $,\ldots,$ $e_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$ จะได้ว่าอนุพันธ์ย่อยของ f เทียบกับตัวแปรตัวที่ $2,3,4,\ldots,n$ เขียนแทนด้วย

$$D_2 f = f_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$D_3 f = f_{x_3} = \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$D_n f = f_{x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.6 กำหนดให้ $f(x_1,x_2) = 3x_1x_2 + x_2^2$, $c = (c_1,c_2)$ เป็นจุดข้างในของโดเมนของฟังก์ชัน f

จงหา $D_1 f$, $D_2 f$

<u>วิธีทำ</u>

$$\begin{aligned} D_1 f = D_{e_1} f(c) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(c + te_1) - f(c)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(c_1 + t,\ c_2) - f(c_1,c_2)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{(3(c_1 + t)c_2 + c_2^2) - (3c_1c_2 + c_2^2)}{} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{3\ c_2 t}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} 3\ c_2 \\ &= 3\ c_2 \end{aligned}$$

$$D_2f = D_{e_2}f(c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(c + te_2) - f(c)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3c_1(c_2+ t) + (c_2+ t)^2 - 3c_1c_2 - c_2^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{3c_1t + 2c_2t + t^2}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} 3c_1 + 2c_2 + t$$

$$= 3c_1 + 2c_2 \qquad \blacksquare$$

นิยาม 3.4 ให้ $f : A \to R^m$ $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f และ c เป็นจุดข้างในของ A ถ้า u เป็นเวคเตอร์ใด ๆ ใน R^n โดยที่ $\|u\| = 1$ และ

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t} \quad \text{หาค่าได้ แล้ว}$$

$$D_uf(c) = \lim_{t\to 0} \frac{f(c + tu) - f(c)}{t}$$ เรียกว่าอนุพันธ์ที่มีทิศทาง (directional derivative) ของ f ที่จุด c ในทิศทางเดียวกับ u

อนุพันธ์(derivative)

ข้อเสียของอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด c เทียบกับเวคเตอร์ u คือขอบเขตของอนุพันธ์ย่อยพิจารณาได้เฉพาะค่า f ใกล้ c บนเซต $\{c + tu \mid t \in R\}$ ดังนั้นเพื่อจะได้อนุพันธ์ของ f ที่จุด c ซึ่งพิจารณาจาก f บนย่านของจุด c ซึ่งเป็นจุดใน R^n เราจึงเขียนอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ในรูปของการส่งแบบเชิงเส้น (linear map) จาก R^n ไปยัง R^m

นิยาม 3.5 ถ้า $L : R^n \to R^m$ โดยที่ทุก ๆ สมาชิก a,b ของ R และทุก ๆ สมาชิก x,y ของ R^n มีคุณสมบัติ

$$L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$$

แล้วเรียก L ว่าฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function)

นิยาม 3.6 ให้ $f : A \to R^m$, $A \subseteq R^n$ เป็นโดเมนของฟังก์ชัน f , c เป็นจุดภายในของ A

ถ้ามีฟังก์ชันเชิงเส้น $L : R^n \to R^m$ โดยที่ทุก ๆ $\varepsilon > 0$ มี $\delta > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $x \in A$(ถ้า$0 < \|x - c\| < \delta$ แล้ว $\| f(x) - f(c) - L(x - c)\| < \varepsilon$) แล้วเรียก f ว่าฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ได้ (differentiable) ที่จุด c

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับนิยาม 3.6 เขียนได้อีกแบบหนึ่งคือ f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(c + u) - f(c) - L(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างหนึ่งคือ f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่ $x = c$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{\|u\|\to 0} \frac{\|f(c + u) - f(c) - L(u)\|}{\|u\|} = 0$$

เราจะเห็นว่าฟังก์ชันเชิงเส้น L ในนิยามข้างต้น ถ้าหาค่า L ได้แล้วจะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น และค่านั้นจะเรียกว่าอนุพันธ์ของ f ที่จุด c เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $Df(c)$ นอกจากนั้นเราใช้สัญลักษณ์ $Df(c)(u)$ แทน $L(u)$ $Df(c)(x - c)$ แทน $L(x - c)$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 3.1 ฟังก์ชัน f มีอนุพันธ์ที่จุดกำหนดเพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ เราพิสูจน์โดยการสมมุติว่ามี 2 ค่าแล้วทั้งสองค่าต้องเท่ากัน

ให้ L_1, L_2 เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m (เป็นอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ที่กำหนดให้)

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(c + u) - f(c) - L_1(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

และ

$$\|f(c + u) - f(c) - L_2(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

เพราะว่า

$$\begin{aligned} 0 &< \|L_1(u) - L_2(u)\| \\ &= \|(f(c + u) - f(c) - L_1(u)) - (f(c + u) - f(c) \\ &\quad - L_2(u))\| \\ &\leq \|f(c + u) - f(c) - L_1(u)\| + \|f(c + u) - f(c) \\ &\quad - L_2(u)\| \\ &< 2\varepsilon \|u\| \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้ว่า $0 \leq \|L_1(u) - L_2(u)\| < 2\varepsilon\|u\|$ สำหรับทุกค่า $u \in R^n$ และ $0 < \|u\| < \delta$

ต้องการแสดงว่า $L_1(z) = L_2(z)$ สำหรับทุกค่า $z \in R^n$

สมมุติ $L_1 \neq L_2$

จะมี $z \in R^n$ ซึ่ง $L_1(z) \neq L_2(z)$

ดังนั้น $z \neq 0$

ให้ $z_0 = \left(\frac{\delta}{2\|z\|}\right) z$

ดังนั้น $\quad \|z_o\| = \|(\frac{\delta}{2\|z\|})\ z\|$

$$= \frac{\delta}{2}\frac{\|z\|}{\|z\|}$$

$$= \frac{\delta}{2} < \delta$$

ดังนั้น $\quad 0 \leq \|L_1(z_o) - L_2(z_o)\| < 2\ \varepsilon\ \|z_o\|$

นั่นคือ $\quad 0 \leq \|L_1(z) - L_2(z)\| < 2\ \varepsilon\ \|z\|$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $\quad L_1(z) = L_2(z)$

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น $\quad L_1 = L_2$ ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 3.7 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$, $y_0 \in R^m$

ให้ $f_o : A \rightarrow R^m$ เป็นฟังก์ชันคงที่ (constant function) นิยาม

โดย $f(x) = y_o$ สำหรับทุก $x \in A$

ถ้า c เป็นจุดข้างใน A และ $x \in A$

ดังนั้น $\quad f_o(x) - f_o(c) = 0$

จะได้ว่า f_o มีอนุพันธ์ที่ c และอนุพันธ์ $Df_o(c) = 0$ ซึ่งคือ

ฟังก์ชันเชิงเส้นที่ส่งไปยัง $0 \in R^m$

นั่นคือ อนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ของฟังก์ชันคงที่ คือฟังก์ชันคงที่ที่ส่งไปยัง

0 (zero linear function) ∎

<u>ตัวอย่าง</u> 3.8 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ ให้ $f_1 : A \rightarrow R^m$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ถ้า $c \in A$ และ $x \in A$

ดังนั้น $\quad f_1(x) - f_1(c) - f_1(x - c) = f_1(x) - f_1(c) - f_1(x) + f_1(c)$

$$= 0$$

จะได้ว่า f_1 มีอนุพันธ์ที่จุด c และ $Df_1(c) = f_1$

นั่นคือ อนุพันธ์ที่จุดใด ๆ ของฟังก์ชันเชิงเส้นคือฟังก์ชันเชิงเส้นตัวมันเอง ∎

ก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีบทของอนุพันธ์ต่อไป ในตอนนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทบางทฤษฎีบทของฟังก์ชันเชิงเส้นเพราะว่าฟังก์ชันเชิงเส้นนำไปใช้กับอนุพันธ์ใน R^n อย่างมากมาย จากนิยาม 3.5 กล่าวว่า $L : R^n \to R^m$ เรียกว่าฟังก์ชันเชิงเส้นก็ต่อเมื่อ $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$ สำหรับทุก ๆ สมาชิก a,b ใน R และ x,y ใน R^n

จากนิยาม 3.5 โดยใช้วิธีการอุปนัยข้างคณิตศาสตร์ (mathematical induction) จะได้ว่า

$$L(ax + by + \ldots + cz) = aL(x) + bL(y) + \ldots + cL(z)$$

เมื่อ a,b,...,c เป็นจำนวนจริง n ตัว และ x,y,...,z เป็นสมาชิกของ R^n ทั้งหมด n ตัว

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งมีโดเมนคือ R^n และมีเรนจ์คือ R^m แล้วจะมีจำนวนจริง (c_{ij}), $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$ จำนวน mn ตัวซึ่งถ้า $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นจุดใน R^n และถ้า $y = L(x) = (y_1, y_1, \ldots, y_m)$ เป็นภาพ (image) ภายใต้ L

แล้ว

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (*) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m &= c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n \end{aligned}$$

ในทางกลับกัน ถ้า (c_{ij}) เป็นกลุ่มของจำนวนจริง mn จำนวนและฟังก์ชันซึ่งบ่งถึงสมาชิก x ใน R^n y ใน R^m ตามสมการ (*) คือ L แล้ว L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m

พิสูจน์ ให้ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ เป็นสมาชิกของ R^n โดยที่

$e_1 = (1,0,0,\ldots,0)$

$e_2 = (0,1,0,\ldots,0)$

....

..............a....

$e_n = (0,0,0,\ldots,1)$

เราพิจารณาภาพ (image) ของเวกเตอร์เหล่านี้ภายใต้ฟังก์ชันเชิงเส้น L

สมมุติ $L(e_1) = (c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{m1})$

$L(e_2) = (c_{12}, c_{22}, \ldots, c_{m2})$

. . . .l................

. ..*....**.*......*.....

$L(e_n) = (c_{1n}, c_{2n}, \ldots, c_{mn})$

ดังนั้นจำนวนจริง c_{ij} เป็นโคออร์ดิเนตตัวที่ i ของ $L(e_j)$

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$

ดังนั้น x สามารถเขียนได้ในเทอมของ $e_1, e_2, \ldots, e_n$

นั่นคือ $x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$

เพราะว่า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น

ดังนั้น $L(x) = L(x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n)$

$= x_1L(e_1) + x_2L(e_2) + \ldots + x_nL(e_n)$

แทนค่า $L(e_1), L(e_2)\ .\ .\ .\ L(e_n)$ จะได้

$$L(x) = x_1(c_{11}, c_{21}, \dots, c_{m1}) + x_2(c_{12}, c_{22}, \dots, c_{m2}) + \dots + x_n(c_{1n}, c_{2n}, \dots, c_{mn})$$

$$= (c_{11}x_1, c_{21}x_1, \dots, c_{m1}x_1) + (c_{12}x_2, c_{22}x_2, \dots, c_{m2}x_2) + \dots + (c_{1n}x_n, c_{2n}x_n, \dots, c_{mn}x_n)$$

$$= (c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n,\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n, \dots\dots,\ c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n)$$

ถ้าให้ $y = L(x) = (y_1, y_2, \dots, y_m)$ แล้วจะได้ว่า

$$y_1 = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n$$

$$y_2 = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n$$

....

....

$$y_m = c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \dots + c_{mn}x_n$$

ในทางกลับกันเราสามารถพิสูจน์ได้โดยตรง เลยว่า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น นั่นคือ แสดงว่า $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

ให้ $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$ax + by = (ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \dots, ax_n + by_n)$$

$$L(ax + by) = L(ax_1 + by_1, ax_2 + by_2, \dots\ ax_n + by_n)$$

ให้ $L(ax + by) = (z_1, z_2, \ldots, z_m) = z$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$z_1 = c_{11}(ax_1 + by_1) + c_{12}(ax_2 + by_2) + \ldots + c_{1n}(ax_n + by_n)$$

$$z_2 = c_{21}(ax_1 + by_1) + c_{22}(ax_2 + by_2) + \ldots + c_{2n}(ax_n + by_n)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_m = c_{m1}(ax_1 + by_1) + c_{m2}(ax_2 + by_2 + \ldots + c_{mn}(ax_n + by_n)$$

พิจารณา $aL(x) + bL(y) = a(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n,$

$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n, \ldots, c_{m1}x_1 + c_{m2}x_2 + \ldots + c_{mn}x_n)$

$+ b(c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \ldots + c_{1n}y_n, c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{2n}y_n, \ldots,$

$c_{m1}y_1 + c_{m2}y_2 + \ldots + c_{mn}y_n)$

$= (c_{11}(ax_1 + by_1) + c_{12}(ax_2 + by_2) + \ldots + c_{1n}(ax_n + by_n),$

$c_{21}(ax_1 + by_1) + c_{22}(ax_2 + by_2) + \ldots + c_{2n}(ax_n + by_n), \ldots\ldots$

$\ldots\ldots, c_{m1}(ax_1 + by_1) + c_{m2}(ax_2 + by_2) + \ldots + c_{mn}(ax_n + by_n))$

ดังนั้น $L(ax + by) = aL(x) + bL(y)$

L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น ■

<u>หมายเหตุ</u> เคยทราบมาแล้วว่าเมตริกซ์

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

ซึ่งมี m แถวและ n หลัก สัมนัย (correspond) กับฟังก์ชันเชิงเส้น คือจะมีการสัมนัยชนิดหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างฟังก์ชันเชิงเส้น $L : R^n \to R^m$ กับเมตริกซ์ $m \times n$ ของจำนวนจริง ดังได้เห็นแล้วว่า L บอกได้ในเทอมของเมตริกซ์

ตอนนี้เราต้องการพิสูจน์ว่าฟังก์ชันเชิงเส้น $L : R^n \to R^m$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ซึ่งในการพิสูจน์ต้องอาศัยอสมการของชวาร์ซ (schwarz's inequiality) ซึ่งอยู่ในรูป

$$|a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n|^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)$$

ซึ่งนำไปประยุกต์กับสมการ (*) ในทฤษฎีบท 3.2 จะได้

สำหรับ $1 \leq i \leq m$

$$|y_i|^2 \leq (|c_{i1}|^2 + |c_{i2}|^2 + \dots + |c_{in}|^2)\,\|x\|^2$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 \|x\|^2$$

จะได้ว่า $\|y\|^2 \leq \{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\}\,\|x\|^2$

ซึ่งจะได้ว่า $\|y\| = \|L(x)\| \leq \{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\}^{1/2}\|x\|$

ทฤษฎีบท 3.3 ถ้า L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นมีโดเมนคือ R^n และเรนจ์อยู่ใน R^m แล้วจะมีจำนวนจริงบวก K ซึ่งถ้า $u, v \in R^n$ แล้ว

$$\|L(u) - L(v)\| \leq K\,\|u - v\|$$

__พิสูจน์__ จาก $\|y\| \leq \{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\}^{1/2}\|x\|$

ให้ $K = \{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2\}^{\frac{1}{2}}$

เพราะฉะนั้น $K > 0$ และ

ดังนั้น $\|y\| = |L(x)| \leqslant K |x\|$

ให้ $x = u - v$

เพราะฉะนั้น $\|L(u - v)\| 6 K|u - v|$

$\|L(u) - L(v)\| \leqslant K|u - v|$ ∎

$\boxed{\text{บทแทรก } 3.3.1}$ ฟังก์ชันเชิงเส้นบน R^n ไปยัง R^m เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดบน R^n

<u>**พิสูจน์**</u> จากทฤษฎีบท 3.3 มี $K > 0$, $\|L(u) - L(v)\| \leqslant K\|u - v\|$

สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{K}$ จะได้ว่า

ถ้า $\|u - v\| < \delta$ แล้ว $\|L(u) - L(v)\| < 6$ ∎

นอกจากนี้คุณสมบัติของฟังก์ชันเชิงเส้นที่สำคัญ ๆ เช่น f,g เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นบน R^n แล้วจะได้ว่า $f + g$, cf, $c \in R$ ต่างก็เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นทั้งสิ้น

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท } 3.4}$ ถ้า $f : A \to R^m$ มีอนุพันธ์ที่ $c \in A$ แล้วจะมีจำนวนบวก δ, K ซึ่งถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(x) - f(c)\| < K\|x - c\|$$

<u>**พิสูจน์**</u> เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด c

โดยนิยาม 3.6 จะได้ว่ามี $6 > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|x - c| < \delta$ แล้ว

$$\|f(x) - f(c) - L(x - c)\| < |x - c\|$$

(โดยใช้ $\varepsilon = 1$)

แต่ $\|f(x) - f(c)\| = \|f(x) - f(c) - L(x - c) + L(x - c)\|$

$$\leq \|f(x) - f(c) - L(x - c)\| + \|L(x - c)\|$$

$$< \|x - c\| + \|L(x - c)\|$$

แต่จากทฤษฎีบท 3.3 จะได้ว่ามี $M > 0$ ซึ่ง

$$\|L(x - c)\| \leq M \|x - c\|$$

ดังนั้น ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$\|f(x) - f(c)\| < (M + 1) \|x - c\|$$

ให้ $K = M + 1$

ดังนั้นจะได้ว่า มี $\delta > 0$, $K > 0$ ซึ่งถ้า $cl < \|x - c\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(x) - f(c)\| < K \|x - c\|$$

และอสมการนี้ยังคงจริงสำหรับ $x = c$ ∎

สำหรับทฤษฎีบทต่อไปจะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และอนุพันธ์ย่อยคือ ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้ว f มีอนุพันธ์ย่อยที่จุดนั้นด้วย

ทฤษฎีบท 3.5 ถ้า $A \subseteq R^n$, $f : A \to R^m$ มีอนุพันธ์ที่จุด $c \in A$ และถ้า $u \in R^n$ แล้วอนุพันธ์ย่อย $D_u f(c)$ ของ f ที่จุด c เทียบกับ u หาค่าได้ และ

$$D_u f(c) = Df(c)(u)$$

พิสูจน์ เพราะว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด c

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|tu\| < \delta$ แล้ว

$$\|f(c + tu) - f(c) - Df(c)(tu)\| < \varepsilon \|tu\|$$

ถ้า $u = 0$ แล้ว อนุพันธ์ย่อยซึ่งเทียบกับ 0 คือ $0 = Df(c)(0)$

ดังนั้นเราจะสมมุติ $u \neq 0$

ดังนั้นถ้า $0 < |t| < \dfrac{\delta}{\|u\|}$ จะได้

$$\left\| \frac{f(c + tu) - f(c)}{t} - Df(c)(u) \right\| < \varepsilon \|u\|$$

แสดงว่า $Df(c)(u)$ เป็นอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด c เทียบกับ u

นั่นคือ $Df(c)(u) = D_u f(c)$ ∎

บทแทรก 3.5.1 ให้ $A \subseteq R^n$ ให้ $f : A \to R$ และ c เป็นจุดข้างในของ A ถ้าอนุพันธ์ $Df(c)$ มีค่าแล้วแต่ละอนุพันธ์ย่อย $D_1 f(c), D_2 f(c), \ldots, D_n f(c)$ มีค่าใน R และ ถ้า $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^n$ แล้ว

$$Df(c)(u) = u_1 D_1 f(c) + u_2 D_2 f(c) + \ldots + u_n D_n f(c)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 3.5 จะได้ว่าแต่ละเวคเตอร์ $e_1, e_2, \ldots, e_n$ อนุพันธ์ย่อย $D_1 f(c), D_2 f(c), \ldots, D_n f(c)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ $Df(c)(e_1), Df(c)(e_2), \ldots, Df(c)(e_n)$

เพราะค่า $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น และ

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \ldots + u_n e_n$$

แล้วจะได้ว่า $$Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j Df(c)(e_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} u_j D_j f(c)$$ ∎

หมายเหตุ บทกลับของบทแทรก 3.5.1 ไม่จริงเสมอไปนั่นคือ อนุพันธ์ย่อยของ f หาค่าได้ แม้ว่า อนุพันธ์ของ f จะหาค่าไม่ได้ก็ตาม

ตัวอย่างเช่น

ให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{2x^2+y^2} & \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{สำหรับ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ให้ (a,b) เป็นเวกเตอร์ใด ๆ ใน R^2

$$D_{(a,b)}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f((0,0)+t(a,b))-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^2bt^3}{t(2a^2t^2+b^2t^2)}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{a^2b}{2a^2+b^2}$$

$$= \frac{a^2b}{2a^2+b^2}, \quad (a,b) \neq (0,0)$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$D_1f(0,0) = 0$$

$$D_2f(0,0) = 0$$

สมมุติว่า Df(0,0) หาค่าได้

จากบทแทรก 3.5 .1 จะได้ว่า

$$D_{(a,b)}f(0,0) = Df(0,0)(a,b)$$

$$= aD_1f(0,0) + bD_2f(0,0)$$

$$= a\cdot 0 + b\cdot 0$$

$$= 0$$

เกิดข้อขัดแย้ง เพราะว่า $D_{(a,b)}f(0,0) = \dfrac{a^2b}{2a^2+b^2}$,

ดังนั้น Df(0,0) หาค่าไม่ได้

ตัวอย่าง 3.9 ให้ $A \subseteq R$, และ $f : A \to R$

จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ที่จุด c ซึ่งเป็นจุดข้างในของ A เมื่อและก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(c+t)-f(c)}{t} = f'(c)$$

หาค่าได้

ในกรณีเมื่ออนุพันธ์ $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R ไปยัง R นิยามโดย

$$Df(c)(u) = f'(c)u$$

ดังนั้น $Df(c)$ ส่งส่มาชิก u ใน R ไปยังผลคูณของ $f'(c)$ และ u

บางครั้งแทนที่จะเขียน u ซึ่งเป็นจำนวนจริงที่ถูกกระทำโดยฟังก์ชันเชิงเส้น $Df(c)$ อาจเขียนแทนด้วย dx ดังนั้นเขียน $Df(c)(u) = f'(c)u$ เสียใหม่คือ

$$Df(c)(dx) = \frac{df}{dx}(c)dx$$

ตัวอย่าง 3.10 ให้ $A \subseteq R$ และ $f : A \to R^m$ $(m > 1)$

ดังนั้น f แทนได้ด้วยฟังก์ชันโคออร์ดิเนต

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x)),\ x \in A$$

พิจารณา ถ้า f หาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด $c \in A$ แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$

$$\|f(c+u) - f(c) - L(u)\| < \varepsilon \|u\|$$

สำหรับ $0 < \|u\| < \delta$

เพราะว่า $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$ และ L เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R ไปยัง R^m ดังนั้น

$$L(u) = (L_1(u), L_2(u), \ldots, L_m(u))$$

เพราะว่า $|f_i(c+u) - f_i(c) - L_i(u)| \leq \|f(c+u) - f(c) - L(u)\|$

$$< \varepsilon \|u\|$$

แสดงว่า f_i มีอนุพันธ์ที่จุด c สำหรับทุกค่า $i = 1,2,\ldots,m$.

ในทางกลับกัน กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เพราะว่า f_i มีอนุพันธ์ที่ c

ดังนั้น $|f_i(c+u) - f_i(c) - L_i(u)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}} u$

สำหรับ $0 < \|u\| < \delta$

จะได้ว่า $\|f(c+u) - f(c) - L(u)\| < \varepsilon \|u\|$

นั่นแสดงว่า ถ้า f_i มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้ว f มีอนุพันธ์ที่จุด c ด้วย

ในกรณีนี้ อนุพันธ์ $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จาก R ไปยัง R^m โดยที่

$$Df(c)(u) = u(f_1'(c), f_2'(c), \ldots, f_m'(c)) \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง 3.11 ให้ $A \subseteq R^n$, $n > 1$ ให้ $f: A \to R$ ดังนั้นจากบทแทรก 3.5.1 จะได้ว่า ถ้าอนุพันธ์ $Df(c)$ หาค่าได้ที่จุด c ซึ่งเป็นจุดข้างในของ A แล้วอนุพันธ์ย่อย $D_1f(c), D_2f(c), \ldots, D_nf(c)$ หาค่าได้ และ $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งส่งสมาชิก $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^n$ ไปยัง R โดยที่

$$Df(c)(u) = u_1D_1f(c) + u_2D_2f(c) + \ldots + u_nD_nf(c)$$

บางครั้งแทนที่จะใช้ $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ เราจะเขียน $dx = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ แทนจุดใน R^n

ดังนั้น จะได้ว่า

$$Df(c)(dx) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(c)dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(c)dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(c)dx_n \qquad \blacksquare$$

<u>ตัวอย่าง</u> 3.12 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ $f: A \to R^m$ โดยที่ $n, m > 1$

ในกรณีนี้เราแทน $y = f(x)$ โดย

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
y_2 &= f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
y_m &= f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)
\end{aligned}
$$

เป็นฟังก์ชัน m ฟังก์ชันของตัวแปร n ตัว

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด $c = (c_1,c_2,\ldots,c_n)$ ใน A แล้วจะพิสูจน์ได้ว่า อนุพันธ์ย่อย $D_jf_i(c)$ $(= f_{i,j}(c))$ มีค่าที่จุด c ด้วย

เมื่อ $Df(c)$ หาค่าได้ ดังนั้น $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นซึ่งส่ง $u = (u_1,u_2,\ldots,u_n) \in R^n$ ไปยัง $w = (w_1,w_2,\ldots,w_m) \in R^m$ นิยามโดย

$$
\begin{aligned}
w_1 &= D_1f_1(c)u_1 + D_2f_1(c)u_2 + \ldots + D_nf_1(c)u_n\\
w_2 &= D_1f_2(c)u_1 + D_2f_2(c)u_2 + \ldots + D_nf_2(c)u_n\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
w_m &= D_1f_m(c)u_1 + D_2f_m(c)u_2 + \ldots + D_nf_m(c)u_n
\end{aligned}
$$

อนุพันธ์ $Df(c)$ เป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m แทนได้ด้วยเมตริกซ์ขนาด $m \times n$ ซึ่งมีสมาชิกคือ

$$
\begin{bmatrix}
D_1f_1(c) & D_2f_1(c) & \ldots & D_nf_1(c)\\
D_1f_2(c) & D_2f_2(c) & \ldots & D_nf_2(c)\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
D_1f_m(c) & D_2f_m(c) & \ldots & D_nf_m(c)
\end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} f_{1,1}(c) & f_{1,2}(c) \ldots & f_{1,n}(c) \\ f_{2,1}(c) & f_{2,2}(c) \ldots & f_{2,n}(c) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m,1}(c) & f_{m,2}(c) \ldots & f_{m,n}(c) \end{bmatrix}
$$

สำหรับเมตริกซ์ข้างบนนี้เรียกว่าเมตริกซ์ของยาโคบี (Jacobian matrix) สำหรับกรณีที่ $m = n$ เมตริกซ์ข้างบนสามารถหาตัวกำหนด (determinant) ของเมตริกซ์ซึ่งเราเรียกว่าตัวกำหนดของยาโคบี (Jacobian determinant) แทนด้วยสัญลักษณ์

$$
\left. \frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \right|_{x=c}
$$

หรือ $J_f(c)$

จากทฤษฎีบท 3.5 นั้นทำให้เราทราบว่าถ้าอนุพันธ์มีค่าที่จุด c แล้วอนุพันธ์ย่อยที่จุด c มีค่าด้วย แต่ในทางกลับกันซึ่งจะดูได้จากตัวอย่าง 3.8 จะพบว่าอนุพันธ์ย่อยหาค่าได้ แต่อนุพันธ์อาจหาค่าไม่ได้ก็ได้ซึ่งจะเห็นว่ามันขาดเงื่อนไขที่สำเป็นอย่างหนึ่งซึ่งจะทำให้อนุพันธ์หาค่าได้หรือไม่นั้นเงื่อนไขอันนั้นคือ ความต่อเนื่อง (contimuity) ซึ่งจะเห็นได้จากทฤษฎีบทข้างล่างนี้

ทฤษฎีบท 3.6 ให้ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R^m$

ให้ c เป็นจุดข้างในของ A

ถ้าอนุพันธ์ย่อย $D_j f_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ มีค่าในบ้านของจุด c และ ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว f มีอนุพันธ์ที่จุด c

<u>พิสูจน์</u> ในรายละเอียดของการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้จะพิสูจน์ในกรณีที่ $m = 1$ คือ $A \subseteq R^n$, $f : A \to R$ สำหรับกรณี $f : A \to R^m$ ทำโดยขยายวิธีการพิสูจน์กรณี $f : A \to R$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < \|y - c\| < \delta$ แล้ว

$$\|D_j f(y) - D_j f(c)\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \text{สำหรับ} \quad j = 1,2,\ldots,n$$

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

และให้ $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ แทนจุดใน R^n ซึ่ง

$$z_1 = (c_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$z_2 = (c_1, c_2, x_3, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$z_{n-1} = (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{n-1}, x_n)$$

ให้ $z_0 = x$ และ $z_n = c$

ถ้า $0 < \|x - c\| < \delta$ แล้ว

$0 < \|z_j - c\| < \delta$ สำหรับ $j = 0,1,2,\ldots,n)$

พิจารณา $f(x) - f(c) = \sum_{j=1}^{n} \left[f(z_{j-1}) - f(z_j) \right]$

ใช้ทฤษฎีบทค่ากลาง (Mean value theorem) สำหรับเทอมที่ j ของผลบวกข้างบนจะได้ว่ามีจุด $\bar{z}_j$ ซึ่งอยู่บนส่วนของเส้นตรงที่เชื่อม z_{j-1}, z_j ซึ่ง

$$f(z_{j-1}) - f(z_j) = (x_j - c_j) D_j f(\bar{z}_j)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j) D_j f(c)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j) \left[D_j f(\bar{z}_j) - D_j f(c)\right]$$

เพราะฉะนั้น $\left\| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j) D_j f(c) \right\|^2$

$$= \left\| \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j) \left[D_j f(\bar{z}_j) - D_j f(c)\right] \right\|^2$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n} \left| D_j f(\bar{z}_j) - D_j f(c)\right|^2 \right) \|x - c\|^2$$

$$< \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon^2}{n} \right) \|x - c\|^2$$

$$= \left(\frac{\varepsilon^2}{n} n \right) \|x - c\|^2$$

$$= \varepsilon^2 \|x - c\|^2$$

นั่นคือจะได้ว่า $\left\| f(x) - f(c) - \sum_{j=1}^{n} (x_j - c_j) D_j f(c) \right\| < \varepsilon \|x - c\|$

ดังนั้นเราพิสูจน์ได้แล้วว่า f มีอนุพันธ์ที่ c และอนุพันธ์ Df(c) เป็นฟังก์ชันเชิงเส้น จาก R^n ไปยัง R นิยามโดย

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \longmapsto Df(c)(u) = \sum_{j=1}^{n} u_j D_j f(c) \qquad \blacksquare$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่ออนุพันธ์ย่อย $D_j f_i$ $(i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots n)$ มีค่าแล้วจะได้ว่า Df(c) มีค่าและเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นจาก R^n ไปยัง R^m โดยที่ส่งสมาชิก $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^n$ ไปยัง $W = (w_1, w_2, \ldots, w_m) \in R^m$ นิยามโดย

$$Df(c)(u) = \underline{(w_1, w_2, \ldots, w_n)}$$

โดยที่ $w_1 = D_1f_1(c)u_1 + D_2f_1(c)u_2 + \dots + D_nf_1(c)u_n$

$w_2 = D_1f_2(c)u_1 + D_2f_2(c)u_2 + \dots + D_nf_2(c)u_n$

....

....

$w_m = D_1f_m(c)u_1 + D_2f_m(c)u_2 + \dots + D_nf_m(c)u_n$

ซึ่งแทนฟังก์ชันเชิงเส้น $Df(c)$ ได้ด้วยเมตริกซ์ขนาด m n คือ

$$\begin{bmatrix} D_1f_1(c) & D_2f_1(c) \dots & D_nf_1(c) \\ D_1f_2(c) & D_2f_2(c) \dots & D_nf_2(c) \\ \dots & \dots & \dots \\ D_1f_m(c) & D_2f_m(c) \dots & D_nf_m(c) \end{bmatrix}$$

สำหรับบทที่ 4 ที่จะกล่าวต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ ของอนุพันธ์ตลอดจนการประยุกต์ของอนุพันธ์ อันได้แก่กฎลูกโซ่ ทฤษฎีบทค่ากลาง ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ อนุพันธ์อันดับสูง ๆ การเปลี่ยนอันดับของอนุพันธ์ การหาค่าสูงสุดต่ำสุด เป็นต้น

แบบฝึกหัดที่ 3

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$ (2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (1+y^2)\dfrac{\sin x}{x}$ (4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1+x-y}{x^2+y^2}$

2. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ โดยที่ $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1^3 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1,x_2) \neq (0,0)$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2) = 0$

ถ้า $f(x_1,x_2) = \dfrac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1,x_2) \neq (0,0)$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x_1,x_2)\to(0,0)} f(x_1,x_2)$ หาค่าไม่ได้

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{\substack{x\to o\\ y\to o}} \dfrac{3x^2y^4}{(x^2+y^2)^2} = 0$

4. จงแสดงว่า $\lim\limits_{\substack{x\to o\\ y\to o}} \dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)^2}$ หาค่าไม่ได้.

5. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x}{y} & \text{สำหรับ } y \neq 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } y = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่าอนุพันธ์ย่อย $D_1f\ (0,0)$, $D_2f(0,0)$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ 0 อย่างไรก็ตามอนุพันธ์ของ f ที่จุด (0,0) เทียบกับเวคเตอร์ $u = (a,b)$ หาค่าไม่ได้ ถ้า $ab \neq 0$

จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0)

6. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } xy = 0 \\ 1 & \text{ถ้า } xy \neq 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่าอนุพันธ์ย่อย $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับ 0 อย่างไรก็ตามอนุพันธ์ของ f ที่จุด (0,0) เทียบกับ $u = (a,b)$ หาค่าไม่ได้ถ้า $ab \neq 0$

จงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0)

7. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{ถ้า} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{ถ้า} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงหาค่า $D_1f(0,0)$, $D_2f(0,0)$ และจงแสดงว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด (0,0)

8. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{เมื่อ} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่าอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (0,0) เทียบกับ $u = (a,b)$ หาค่าได้ และ $D_u f(0,0) = \dfrac{b^2}{a}$ เมื่อ $a \neq 0$

9. กำหนดให้ $f : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่าอนุพันธ์ย่อยของ f ที่จุด (0,0) เทียบกับ (a,b) ใด ๆ หาค่าได้ และจะได้ว่า

$$D_u f(0,0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2} \quad \text{ถ้า} \quad (a,b) \neq (0,0)$$

จงแสดงว่า f ต่อเนื่องที่จุด (0,0) แต่ไม่มีอนุพันธ์ที่จุด (0,0)

10. กำหนดให้ $F : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$F(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{ถ้า } x,y \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{ถ้า } x,y \text{ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ} \end{cases}$$

จงแสดงว่า F ต่อเนื่องและมีอนุพันธ์ที่จุด $(0,0)$

11. กำหนดให้ $G : R^2 \to R$ นิยามโดย

$$G(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{(x^2+y^2)} & \text{สำหรับ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{สำหรับ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

จงแสดงว่า G มีอนุพันธ์ที่ทุก ๆ จุดใน R^2 แต่อนุพันธ์ย่อย D_1G, D_2G ไม่ต่อเนื่องบนย่านของ $(0,0)$

12. กำหนดให้ $H : R^2 \to R^2$ นิยามโดย

$$H(x,y) = \begin{cases} (x^2+x^2\sin\frac{1}{x},\ y) & \text{สำหรับ } x \neq 0 \\ 0 & \text{สำหรับ } x = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า D_1H หาค่าได้ที่ทุก ๆ จุด และ D_2H หาค่าได้และต่อเนื่องบนย่านของ $(0,0)$

จงแสดงต่อไปว่า H มีอนุพันธ์ที่จุด $(0,0)$

13. กำหนดให้ $A \subseteq R^n$, $f : A \to R^m$ มีอนุพันธ์ที่จุด c ซึ่งเป็นจุดภายใน A และให้ $v \in R^m$

ถ้านิยาม $g : A \to R$ โดย $g(x) = f(x)\cdot v$ สำหรับ $x \in A$, จงแสดงว่า g มีอนุพันธ์ที่ c และ

$$Dg(c)(u) = (Df(c)(u))\cdot v \quad \text{สำหรับ } u \in R^n$$

14. กำหนดให้ c เป็นจุดภายในของ $A \subseteq R^n$ และ $f : A \to R$

ถ้า f มีอนุพันธ์ที่จุด c แล้วจงแสดงว่าจะมีเวคเตอร์ $v_c \in R^n$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง

$$D_u f(c) = Df(c)(u)$$
$$= v_c \cdot u \quad \text{สำหรับทุก ๆ } u \in R^n$$

<u>นิยาม</u> เวคเตอร์ v_c เรียกว่าเกรเดียนต์ (gradient) ของ f ที่จุด c

แทนด้วยสัญลักษณ์ $\nabla_c f$ หรือ grad f(c)

จงแสดงว่า $\nabla_c f = (D_1 f(c), \ldots . D_n f(c))$

15. ให้ c เป็นจุดภายในของ $A \subseteq R^n$, ให้ f, g : A → R เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ที่จุด c และ $a \in R$

จงแสดงว่า (1) $\nabla_c(\alpha f) = \alpha \nabla_c f$

(2) $\nabla_c(f+g) = \nabla_c f + \nabla_c g$

(3) $\nabla_c(fg) = f(c)\nabla_c g + g(c)\nabla_c f$

16. จงหาค่าเกรเดียนต์ (gradient) ของฟังก์ชันต่อไปนี้ที่จุด (x,y,z) ใด ๆ ใน R^3

(1) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

(2) $g(x,y,z) = x^2 - yz + z^2$

(3) $h(x,y,z) = x \; y \; z$

★ ★ ★