บทที่ 2

เซตของจุดในปริภูมิ n มิติ

Point set in n dimensional space

สำหรับเซตที่กล่าวในบทที่หนึ่งนั้นกล่าวถึงเซตของสิ่งทั่ว ๆ ไป แต่สำหรับในบทนี้เซตที่จะกล่าวถึงคือ เซตของจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน โดยเฉพาะอย่างยิ่งศึกษาถึงเซตในปริภูมิ (space) ที่มีมิติสูง ๆ ขึ้นไป

ในการศึกษาเซตของจุดในปริภูมิ n มิติใด ๆ เราจะใช้ตัวอย่างเซตของจุดบนเส้นจำนวน เซตของจุดบนระนาบ และเซตของจุดในปริภูมิ 3 มิติ ประกอบการพิจารณาเพราะว่าบนเส้นจำนวน บนระนาบ และในปริภูมิ 3 มิติวิธีการทางเรขาคณิตช่วยในการแก้ปัญหาได้

2.1 ปริภูมิ n มิติ : R^n

(n - dimension Space)

จุดในปริภูมิ 2 มิติ คือคู่อันดับของจำนวนจริง (x_1, x_2) เช่นเดียวกันกับจุดในปริภูมิ 3 มิติ คืออันดับของจำนวนจริง 3 จำนวน (x_1, x_2, x_3) ดังนั้นในปริภูมิ n มิติใด ๆ จุดในปริภูมิ มิติคืออันดับของเลขจำนวนจริง n จำนวน $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

นิยาม 2.1 สำหรับจำนวนเต็มบวก n อันดับของเลขจำนวนจริง n จำนวน $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เรียกว่าจุดในปริภูมิ n มิติ แทนด้วยสัญลักษณ์

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

จำนวนจริง x_k เรียกว่าโคออร์ดิเนตตัวที่ k ของ x ส่วนเซตของจุดทั้งหลายใน n มิติเรียกว่า ปริภูมิ n มิติ (n - dimension space) แทนด้วยสัญลักษณ์ R^n

หมายเหตุ 1. $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \mid x_i \in R, \ i = 1,2,\ldots\ldots n\}$

2. ในเรื่องเวกเตอร์ใช้ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ แทนเวกเตอร์ที่มี n ส่วนประกอบ (components) และเรียก x_n ว่าส่วนประกอบที่ n ของเวกเตอร์ x

นิยาม 2.2 (การเท่ากัน)

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n แล้ว $x = y$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\ldots$, $x_n = y_n$

นิยาม 2.3 (การบวก)

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n ผลบวกของ x,y ,เขียนได้ในรูป

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

นิยาม 2.4 (การคูณด้วยสเกลาร์)

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n และ c เป็นจำนวนจริงสเกลาร์ แล้ว

$$cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

นิยาม 2.5

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n แล้ว $x - y = x + (-1)y$

$$= (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$$

นิยาม 2.6 (ผลคูณภายใน)

ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n แล้ว $x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

นิยาม 2.7 ให้ $X = (x_1, x_2, \ldots \ldots x_n)$ เป็นสมาชิกของ R^n แล้วขนาด (norm) ของ x แทนด้วย $\|x\|$ คือ

$$\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\sum_{n=1}^{n} x_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

หมายเหตุ 1. $\|x - y\|$ แทนระยะทางระหว่าง x กับ y

2. $0 \in R^n$ แทนด้วย $(0, 0, \ldots, 0)$ หรือ $x \in R^n$, $x = 0$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $x_i = 0$ สำหรับทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

ทฤษฎีบท 2.1 กำหนดให้ x, y เป็นจุดใน R^n แล้ว

(1) $\|x\| > 0$

(2) $\|x\| = 0$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(3) $\|cx\| = |c|\|x\|$

(4) $|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$

(5) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

<u>พิสูจน์</u> (1) จากนิยาม $\|x\| = (\sum_{k=1}^{n} x_k^2)^{\frac{1}{2}}$

และ $x_k^2 > 0$ สำหรับทุก ๆ

ดังนั้น $\|x\| > 0$

(2) ถ้า $x \neq 0$ ดังนั้นจะมี $x_k \neq 0$ สำหรับ k บางตัว

เพราะว่า $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_k^2 + \ldots + x_n^2$

$\geqslant x_k^2 > 0$

จะได้ว่า $\|x\| > 0$

แสดงว่า $\|x\| \neq 0$

นั่นคือพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $\|x\| = 0$ แล้ว $x = 0$ (*)

ถ้า $x = 0$ ดังนั้น $x = (0,0,\ldots,0)$

$$x = \sqrt{0^2 + 0^2 + \ldots + 0^2}$$

$$= 0$$

นั่นคือพิสูจน์ได้ว่า ถ้า $x = 0$ แล้ว $\|x\| = 0$ (**)

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า

$\|x\| = 0$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $x = 0$

(3) $\|cx\|^2 = (cx_1)^2 + (cx_2)^2 + \ldots + (cx_n)^2$

$= c^2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)$

$= c^2 \|x\|^2$

$\|cx\| = |c| \|x\|$

(4) ต้องการพิสูจน์ $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$

นั่นคือ $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq$

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \; \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

ให้ $a = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$,

$$b = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

$$c = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$$

เพราะฉะนั้น $ax^2 + 2bx + c = (x_1^2x^2 + 2x_1y_1x + y_1^2) +$

$$(x_2^2x^2 + 2x_2y_2x + y_2^2) + \ldots + (x_n^2x^2 + 2x_ny_nx + y_n^2)$$

$$= (x_1x + y_1)^2 + (x_2x + y_2)^2 + \ldots + (x_nx + y_n)^2 \geq 0$$

เพราะฉะนั้น $(2b)^2 - 4ac \leq 0$

$$4b^2 - 4ac \leq 0$$

$$b^2 - ac \leq 0$$

$$b^2 \leq ac$$

$$b \leq \sqrt{ac} = \sqrt{a}\,\sqrt{c}$$

เพราะฉะนั้น $x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$

$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}$$

นั่นคือ $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$

(5) $\|x + y\|^2 = \|(x_1+ y_1, x_2+ y_2, \ldots, x_n+ y_n)\|^2$

$$= (x_1+ y_1)^2 + (x_2+ y_2)^2 + \ldots + (x_n+ y_n)^2$$

$$= x_1^2 + 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 + 2x_2y_2 + y_2^2 + \ldots +$$

$$x_n^2 + 2x_ny_n + y_n^2$$

$$= (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2) + 2(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots$$

$$+ x_ny_n) + (y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2)$$

$$= \|x\|^2 + 2x.y + \|y\|^2$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2$$

$$= (\|x\| + \|y\|)^2$$

แสดงว่า

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| .$$

อสมการในข้อ (4) เรียกว่า Cauchy - Schwarz inequality
ส่วนอสมการในข้อ (5) เรียกว่า Triangle inequality

<u>ข้อสังเกต</u> การนำ Triangle inequality ไปใช้โดยมากจะใช้ในรูปแบบข้างล่างนี้

$$\|x - z\| < \|x - y\| + \|y - z\|$$

ซึ่งมาจาก $\|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\|$

$$\leq \|x - y\| + \|y - z\|$$

นอกจากนี้เรายังพิสูจน์ต่อไปได้อีกว่า $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$ โดยอาศัยคุณสมบัติของ Triangle inequality

ทฤษฎีบท 2.2 สำหรับ x, y ใน R^n

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

พิสูจน์ เพราะว่า $\|x\| = \|(x - y) + y\|$

$$\leq \|x - y\| + \|y\|$$

จะได้ว่า $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$ (*)

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$$

นั่นคือ $-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\|$ (**)

จาก (*) และ (**) จะได้ว่า

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$ ∎

2.2 เซตเปิดใน R^n

(open set in R^n)

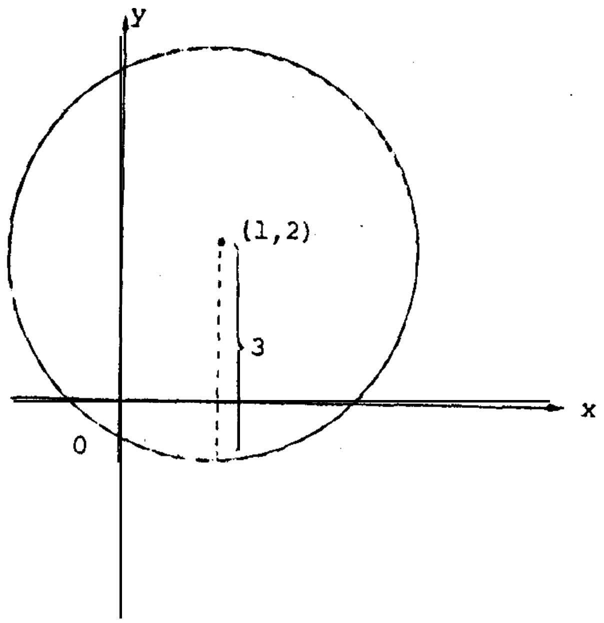
นิยาม 2.6 a เป็นจุดใน R^n และ r เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $\{x \mid x \in R^n$ และ $\|x - a\| < r\}$ เรียกว่าย่านของ a (neighborhood of a) รัศมี r แทนด้วยสัญลักษณ์

$$N(a\,;\,r) \quad \text{หรือ} \quad N_r(a)$$

เซต $N(a\,;\,r)$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยจุดทั้งหลายซึ่งระยะทางระหว่างจุดนั้น ๆ กับจุด a น้อยกว่า r ตัวอย่างของ $N(a\,;\,r)$ ใน R^1 คือช่วงเปิด ใน R^2 คือวงกลมเปิด (คือวงกลมซึ่งไม่รวมจุดบนเส้นรอบวง) และใน R^3 คือทรงกลมซึ่งไม่รวมจุดบนผิวทรงกลม

<u>ตัวอย่าง</u> 2.1 จงเขียนรูปของ $N((1,2)\ ;\ 3)$

วิธีทำ เพราะว่า $N((1,2)\ ;\ 3)$ เป็นย่าน (neighborhood) ของจุด $(1,2)$ ซึ่งอยู่ใน R^2



รูป 2.1

$N((1,2)\ ;\ 3)$ เป็นตัวอย่างของย่านใน R^2 ซึ่งแสดงว่าถ้า $x \in N((1,2)\ ;\ 3)$ แล้ว $\|x - (1,2)\| < 3$

$\boxed{\text{นิยาม } 2.9}$ ให้ $S \subseteq R^n$ และ $a \in S$ แล้ว a จะเรียกว่าเป็นจุดข้างใน (interior point) ของ S เมื่อและก็ต่อเมื่อมีจำนวนจริงบวก r ซึ่ง $N(a\ ;\ r) \subseteq S$

สำหรับเซต S ใด ๆ ซึ่ง $S \subseteq R^n$ เซตของจุดทั้งหลายซึ่งเป็นจุดข้างใน (interior point) ของเซต S แทนด้วยสัญลักษณ์ Int.S

$\boxed{\text{นิยาม 2.10}}$ ให้ $S \subseteq R^n$ และ $a \in R^n$ แล้ว a จะเรียกว่าเป็นจุดข้างนอก (exterior point) ของ S เมื่อและก็ต่อเมื่อ มี r เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง $S \cap N(a\,;\,r) = \phi$

สำหรับเซต S ใด ๆ ซึ่ง $S \subseteq R^n$ เซตของจุดทั้งหลายซึ่งเป็นจุดข้างนอก (exterior point) ของ S แทนด้วยสัญลักษณ์ Ext.S

$\boxed{\text{นิยาม 2.11}}$ ให้ $S \subseteq R^n$ และให้ $a \in R^n$ ซึ่ง a ไม่เป็นทั้งจุดข้างนอก (exterior point) และจุดข้างใน (interior point) แล้วเรียก a ว่าจุดขอบ (boundary point) ของ S

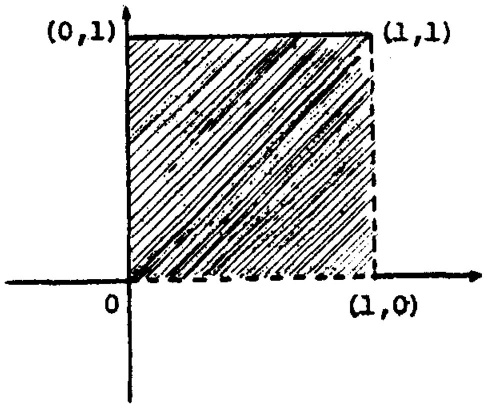
เซตของจุดทั้งหลายซึ่งเป็นจุดขอบ (boundary point) ของ S แทนด้วยสัญลักษณ์ Bd.S

<u>ตัวอย่าง</u> 2.2 กำหนดให้ $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 < 1$ และ $0 < x_2 \le 1\}$

$S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$ และ $x_1^2 + x_2^2 < 1\}$

จงเขียนรูปของ S_1, S_2 พร้อมทั้งบอกจุดข้างใน จุดข้างนอก และจุดขอบ ของ S

<u>วิธีทำ</u> $S_1 = \{(x_1, x_2) \mid 0 \le x_1 < 1\ ,\ 0 < x_2 \le 1\}$



รูป 2.2

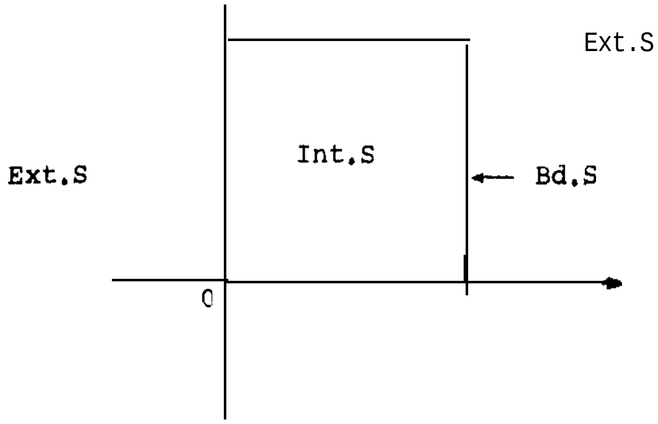
จุดข้างในของ S_1 คือจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมซึ่งไม่รวม ขอบ

นั่นคือ $Int.S_1 = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1 < 1 \ , \ 0 < x_2 < 1\}$

จุดข้างนอกของ S_1 คือจุดภายนอกรูปสี่เหลี่ยมซึ่งไม่รวมขอบ

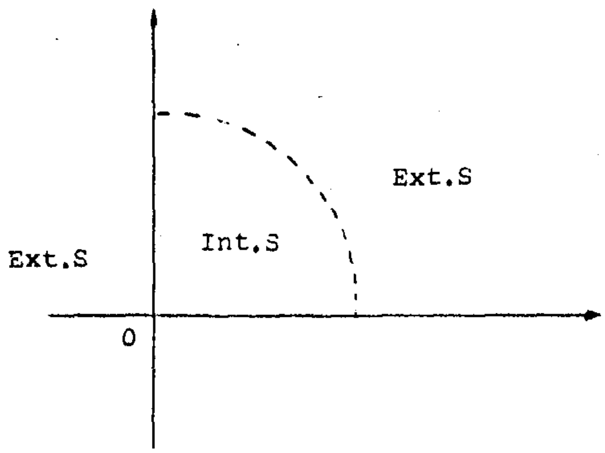
นั่นคือ $Ext.S_1 = R^2 - \{(x_1,x_2) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \ , \ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1\}$

สำหรับจุดขอบของ S_1 คือจุดทั้งหลายบนด้านของสี่เหลี่ยม



รูป 2.3

$S_2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \geqslant 0 \ , \ x_2 \geqslant 0$ และ $x_1^2 + x_2^2 < 1\}$



รูป 2.4

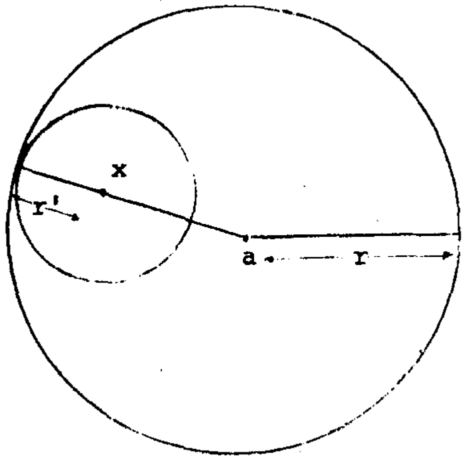
นิยาม 2.12 ให้ $S \subseteq R^n$ แล้วเรียก S ว่าเซตเปิด (open set) เมื่อและก็ต่อเมื่อ Int.S = S หรือหมายความว่าทุก ๆ สมาชิกใน S เป็นจุดข้างในของ S

ดังนั้นในการพิสูจน์ว่า S เป็นเซตเปิดเพียงพอที่พิสูจน์ว่า ทุก ๆ สมาชิก x ใน S จะมีจำนวนจริงบวก r ซึ่ง $N(x\ ;\ r) \subseteq S$

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนดให้ $a \in R^n$ และ r เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว $N(a\ ;\ r)$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ให้ x เป็นสมาชิกใด ๆ ของ $N(a\ ;\ r)$

ให้ $r' = r - \|x - a\|$ ดังนั้น $r' > 0$



รูป 2.5

ต้องการพิสูจน์ว่า $N(x\ ;\ r') \subseteq N(a\ ;\ r)$

ให้ $y \in N(x\ ;\ r')$

ดังนั้น $\|y - x\| < r'$

จะได้ว่า $\|y - x\| < r - \|x - a\|$

$$\|y - x\| + \|x - a\| < r$$

แต่ $\|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\|$

เพราะฉะนั้น $\|y - a\| < r$

นั่นคือ $y \in N(a\ ;\ r)$

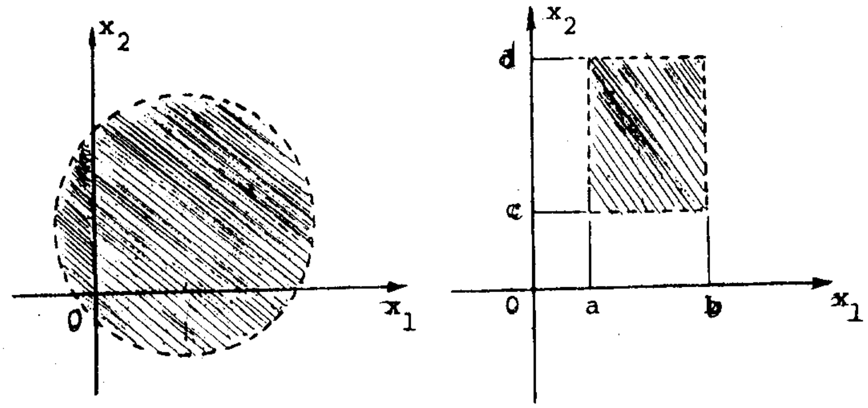
แสดงว่า $N(x\ ;\ r') \subseteq N(a\ ;\ r)$

เพราะฉะนั้น x เป็นจุดข้างในของ $N(a\ ;\ r)$

ดังนั้น $N(a\ ;\ r)$ เป็นเซตเปิด ■

<u>ตัวอย่าง</u> 2.3 ใน R เซตเปิดคือช่วงเปิด (a,b) ใด ๆ นอกจากนั้นอาจเป็นผลผนวก (union) ของ 2 หรือมากกว่า 2 เซตใด ๆ เป็นเซตเปิดด้วย แต่สำหรับ $[a,b]$ ไม่เป็นเซตเปิดเพราะว่า จุด a,b เป็นจุดใน $[a,b]$ แต่ a,b ไม่เป็นจุดข้างในของ $[a,b]$

ตัวอย่างของเซตเปิดใน R^2 ได้แก่เซตของจุดทั้งหลายภายในวงกลมไม่รวมเส้นรอบวงหรือผลคูณคาร์ทีเชียนของ 2 ช่วงเปิดใด ๆ ดังรูป 2.6



$(a,b) \times (c,d)$

รูป 2.6

จากตัวอย่าง 2.2 S_1, S_2 ไม่เป็นเซตเปิด ■

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท } 2.4}$ Φ และ R^n เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ (1) Φ เป็นเซตเปิด

สมมุติว่า Φ ไม่เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้นจะมี $x \in \Phi$ ซึ่ง x ไม่เป็นจุดข้างในของ Φ

เกิดข้อขัดแย้งที่ว่ามี $x \in \Phi$

ดังนั้น Φ เป็นเซตเปิด

(2) R^n เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in R^n$

จะได้ $N(x\,;\,r) \subseteq R^n$ สำหรับจำนวนจริงบวก r ใด ๆ เพราะว่า R^n เป็นเอกภพ ทุก ๆ เซตเป็นสับเซตของ R^n

เพราะฉะนั้น R^n เป็นเซตเปิด ∎

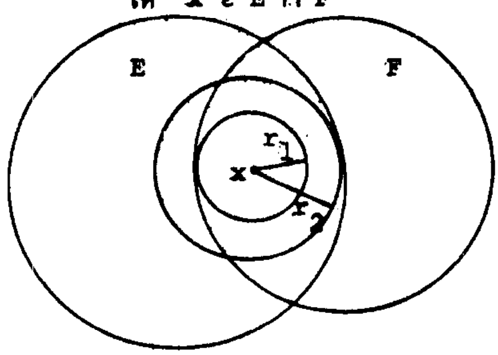
สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้จะแสดงถึงคุณสมบัติของเซตเปิด ผลผนวก (union) และผลร่วม (intersection)

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท } 2.5}$ กำหนดให้ $E \subseteq R^n$ และ $F \subseteq R^n$ E, F เป็นเซตเปิดใน R^n แล้ว $E \cap F$ เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ กำหนดให้ E และ F เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า $E \cap F$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in E \cap F$



รูป 2.7

เพราะฉนั้น $x \in E$ และ $x \in F$

เพราะว่า E และ F เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $r_1>0$ ซึ่ง $N(x\ ;\ r_1) \subseteq E$ และจะมี $r_2>0$ ซึ่ง $N(x\ ;\ r_2) \subsetneq F$

เลือก r เป็นค่าน้อยที่สุดระหว่าง r_1 กับ r_2

ต้องการพิสูจน์ว่า $N(x\ ;\ r) \subseteq E \cap F$

ให้ $y \in N(x\ ;\ r)$

ดังนั้น $\|y - x\| < r \leq r_1$

$y \in N(x\ ;\ r_1) \subseteq E$

และทำนองเดียวกันได้ $y \in N(x\ ;\ r_2) \subsetneq F$

เพราะฉนั้น $y \in E \cap F$

นั่นคือ ทุก ๆ สมาชิก x ใน $E \cap F$ จะมี $r > 0$ ซึ่ง

$N(x\ ;\ r) \subsetneq E \cap F$

ดังนั้น $E \cap F$ เป็นเซตเปิด ∎

โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical Induction)
จะพิสูจน์ได้ว่า $E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n = \bigcap_{i=1}^{n} E_i$ เป็นเซตเปิด เมื่อกำหนดให้ E_i เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ $i = 1,2,3,\ldots,n$

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท 2.6}}$ ให้ E_v เป็นเซตเปิดสำหรับแต่ละ $v \in I$ แล้ว

$\bigcup_{v\in I} E_v$ เป็นเซตเปิด

<u>พิสูจน์</u> ให้ E_v เป็นเซตเปิด

ต้องการแสดงว่า $\bigcup_{v\in I} E_v$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in \bigcup_{v \in I} E_v$

ดังนั้น $x \in E_{v_0}$ สำหรับ $v_0 \in I$

เพราะว่า E_{v_0} เป็นเซตเปิด

ดังนั้น จะมี $r > 0$ ซึ่ง $x \in N(x\ ;\ r) \subseteq E_{v_0}$

จะได้ว่า $x \in N(x\ ;\ r) \subseteq E_{v_0} \subseteq \bigcup_{v \in I} E_v$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{v \in I} E_v$ เป็นเซตเปิด ∎

<u>**ข้อสังเกต**</u> จากทฤษฎีบท 2.5 และ 2.6 จะได้ข้อสังเกตว่าผลผนวก (union) และผลร่วม (intersection) ของเซตเปิดที่มีจำนวนจำกัดจะเกิดเซตใหม่ซึ่งเป็นเซตเปิดแต่สำหรับจำนวนเซตที่เป็นอนันต์ ผลผนวกยังคงเป็นเซตเปิดแต่ผลร่วมไม่จำเป็นต้องเป็นเซตเปิดเสมอไปดังตัวอย่าง เช่น

ใน R ให้ $E_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ เป็นเซตเปิด แต่

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{0\}$ ไม่เป็นเซตเปิด

ใน R^2 ให้ $E_n = N((0,0)\ ;\ \frac{1}{n})$ เป็นย่าน (neighborhood) ของจุด $(0,0)$ รัศมี $\frac{1}{n}$ เป็นเซตเปิด แต่

$\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} N((0,0)\ ;\ \frac{1}{n}) = \{(0,0)\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตเปิด

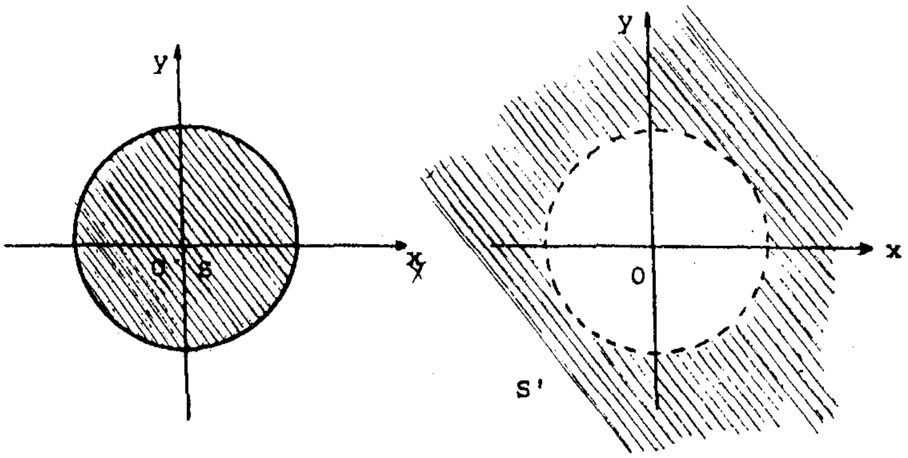
2.3 เซตปิด

(Closed set)

นิยาม 2.13 ให้ $S \subseteq R^n$ แล้วเรียก S ว่าเซตปิด (closed set) เมื่อและก็ต่อเมื่อ S' หรือ $R^n - S$ เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.4 ใน R ช่วงปิด $[a,b]$ เป็นเซตปิดเพราะว่าคอมพลีเมนต์ คือ $(-\infty, a) \cup (b, \infty)$ ซึ่งเป็นผลรวมของเซตเปิด 2 เซตจึงเป็นเซตเปิด

ใน R^2, $S = \{x \mid x \in R^2$ และ $\|x\| < 1\}$ เป็นเซตปิด เพราะว่า



S' เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.7 Φ และ R^n เป็นเซตปิด

พิสูจน์ เพราะว่า R^n เป็นเซตเปิด และคอมพลีเมนต์ของ R^n คือ

$R^n - R^n = \Phi$

ดังนั้น Φ เป็นเซตปิด

และเพราะว่า Φ เป็นเซตเปิดและคอมพลีเมนต์ของ Φ คือ

$R^n - \Phi = R^n$

ดังนั้น R^n เป็นเซตปิด ∎

สำหรับทฤษฎีบท 2.8, 2.9 เช่นเดียวกันเป็นผลสืบเนื่องมาจาก ทฤษฎีบท 2.5 และ 2.6 กล่าวถึงการสร้างเซตปิดจากเซตปิดที่กำหนดให้

ทฤษฎีบท 2.8 ให้ E, F เป็นเซตปิดใน R^n แล้ว $E \cup F$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ เพราะว่า $(E \cup F)' = E' \cap F'$

แต่ E', F' เป็นเซตเปิด เพราะว่า E, F เป็นเซตปิด

จากทฤษฎีบท 2.5 ได้ $E' \cap F'$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $(E \cup F)'$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $E \cup F$ เป็นเซตปิด ∎

โดยวิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (mathematical induction) จะพิสูจน์ได้ว่า $E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ เป็นเซตปิด เมื่อกำหนดให้ E_i เป็นเซตปิดสำหรับทุก ๆ ค่า $i = 1, 2, \ldots, n$

ทฤษฎีบท 2.9 ให้ E_v เป็นเซตปิดสำหรับทุกค่า v แล้ว $\bigcap_{v \in I} E_v$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ เพราะว่า $(\bigcap_{v \in I} E_v)' = \bigcup_{v \in I} E_v'$

แต่ E_v' เป็นเซตเปิด เพราะว่า E_v เป็นเซตปิด

จากทฤษฎีบท 2.6 $\bigcup_{v \in I} E_v'$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $(\bigcap_{v \in I} E_v)'$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $\bigcap_{v \in I} E_v$ เป็นเซตปิด ∎

สำหรับความสัมพันธ์ระหว่างเซตเปิดและเซตปิด จะเห็นได้จากทฤษฎีบทข้างล่างต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.10 ถ้า E เป็นเซตเปิด และ F เป็นเซตปิดแล้วจะได้ว่า

(1) $E - F$ เป็นเซตเปิด

(2) $F - E$ เป็นเซตปิด

พิสูจน์ (1) เพราะว่า $E - F = E \cap F'$

E เป็นเซตเปิด และ F' เป็นเซตเปิด

ดังนั้น $E - F$ เป็นเซตเปิด

(2) เพราะว่า $F - E = F \cap E'$

F เป็นเซตปิด และ E' เป็นเซตปิด

ดังนั้น $F - E$ เป็นเซตปิด ∎

12.4 จุดเกาะกลุ่ม หรือ จุดลิมิต

(Accumulation point, Limit point)

ในการศึกษาเซตปิด นอกจากนิยามปิดด้วยคอมพลีเมนต์ของเซตเปิดแล้วยังอาศัยจุดลิมิต (limit point) ในการนิยามเซตปิด ได้อีกวิธีหนึ่ง

นิยาม 2.14 กำหนดให้ $a \in R^n$ r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ แล้ว

$N^*(a\,;\,r) = N(a\,;\,r) - \{a\}$ เรียกว่าย่านใกล้เคียงจุด a (delated neighborhood of a)

นิยาม 2.15 ให้ $S \subseteq R^n$ $a \in R^n$ เรียกว่าจุดลิมิต (limit point) ของ S เมื่อและก็ต่อเมื่อ สำหรับทุกๆ $r > 0$, $N^*(a\,;\,r) \cap S \neq \phi$

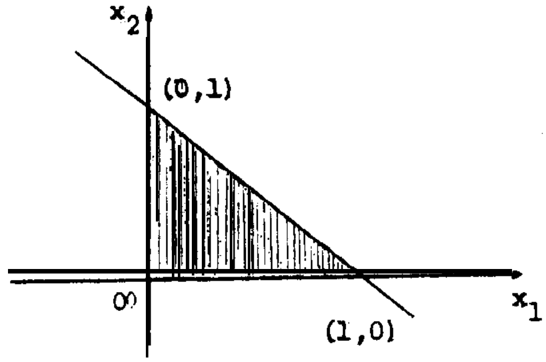
ตัวอย่าง 2.5 (1) $S_1 = \{ \frac{1}{n} \mid n \in N\}$ มี 0 เป็นจุดลิมิต ของ S_1

(2) $S_2 = \{x \mid a < x < b\}$ ซึ่งก็คือ (a,b) แล้วทุก ๆ จุดใน

$[a,b]$ เป็นจุดลิมิตของ S_2

(3) $S_3 = \{(x_1,x_2) \mid 0 \leq x_1,\ 0 \leq x_2,\ x_1 + x_2 < 1\}$

ตัวอย่างจุดที่เป็นจุดลิมิตของ S_3 เช่น $(0,1)$ ดังรูป



รูป 2.9

หมายเหตุ นอกจากจะใช้คำว่าจุดลิมิต (limit point) แล้วตำราบางเล่มใช้คำว่า จุดเกาะกลุ่ม (accumulation point) แทนจุดลิมิต

$\boxed{\text{ทฤษฎีบท } 2.11}$ กำหนดให้ $S \subseteq R^n$ และ x เป็นจุดลิมิตของ S แล้ว ทุก ๆ ย่าน $N(x\ ;\ r)$ ประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์

พิสูจน์ สมมุติว่ามี $N(x\ ;\ r)$ ซึ่งประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนจำกัดซึ่งต่างจาก x คือ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

ให้ r' คือค่าที่น้อยที่สุดของ $\|x - a_1\|$, $\|x - a_2\|$, ..., $\|x - a_n\|$

ดังนั้นไม่มีจุดใน S ซึ่งอยู่ใน $N^*(x\ ;\ \frac{r'}{2})$

นั่นคือ $N^*(x\ ;\ \frac{r'}{2}) \cap S = \Phi$

เพราะฉะนั้น x ไม่เป็นจุดลิมิตของ S

เกิดความขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้น $N(x\ ;\ r)$ ประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ ∎

ที่กล่าวมาแล้วข้างต้น เรานิยามเซตปิดโดยอาศัย คอมพลีเมนต์ของเซตเปิดแต่สำหรับทฤษฎีบทต่อไปนี้ เป็นการอธิบายเซตปิดโดยใช้จุดลิมิต

ทฤษฎีบท 2.121 กำหนดให้ $S \subseteq R^n$

S เป็นเซตปิด เมื่อและก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $x \in R$ ถ้า x เป็นจุดลิมิตของ S แล้ว $x \in S$

พิสูจน์ (1) สมมุติ S เป็นเซตปิด

ให้ x เป็นจุดลิมิตของ S ต้องการพิสูจน์ว่า $x \in S$

สมมุติ $x \notin S$

ดังนั้น $x \in R^n - S$

เพราะว่า S เป็นเซตปิดดังนั้น $R^n - S$ เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $N(x\ ;\ r)$ ซึ่ง $N(x\ ;\ r) \subseteq R^n - S$

$$N(x\ ;\ r) \cap S = \Phi$$

เพราะฉะนั้น $N^*(x\ ;\ r) \cap S = \Phi$

นั่นคือ x ไม่เป็นจุดลิมิตของ S

เกิดความขัดแย้งกัน

เพราะฉะนั้น $x \in S$

(2) สมมุติ ถ้า x เป็นจุดลิมิต ของ S แล้ว $x \in S$

ต้องการแสดงว่า S เป็นเซตปิด นั่นคือต้องการพิสูจน์ว่า $R^n - S$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x \in R^n - S$

เพราะฉะนั้น $x \notin S$

ดังนั้น x ไม่เป็นจุดลิมิตของ S

เพราะฉะนั้น จะมี $r > 0$ ซึ่ง $N^*(x,r) \cap S = \phi$

$$N^*(x\ ;\ r) \subseteq R^n - S$$

$$\{x\} \cup N^*(x\ ;\ r) \subseteq \{x\} \cup R^n - S$$

$$N(x\ ;\ r) \subseteq R^n - S$$

เพราะฉะนั้น $R^n - S$ เป็นเซตเปิด

นั่นคือ S เป็นเซตปิด ∎

2.5 ทฤษฎีบทของโบลซาโน - ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano - Weierstrass Theorem)

ก่อนที่จะศึกษาทฤษฎีบทของโบลซาโน - ไวแยร์สตราสส์ จะต้องศึกษาเกี่ยวกับนิยามของเซตที่มีขอบเขต (bounded set) ดังนิยามต่อไปนี้

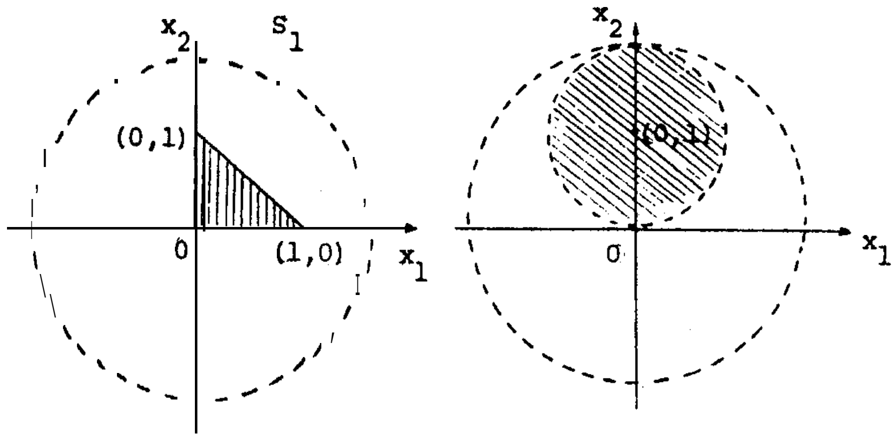
นิยาม 2.16 กำหนดให้ $S \subseteq R^n$ เรา เรียก S ว่าเซตที่มีขอบเขต (bounded set) เมื่อและก็ต่อเมื่อ มี $a \in R^n$ และมี $r > 0$ ซึ่ง $S \subseteq N(a\ ;\ r)$

ตัวอย่าง 2.6 กำหนดให้

$$S_1 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_1 + x_2 \leq 1\}$$

$$S_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 < 1\}$$

จากเซตที่กำหนดให้ S_1, S_2 แสดงได้ดังรูป 2.10



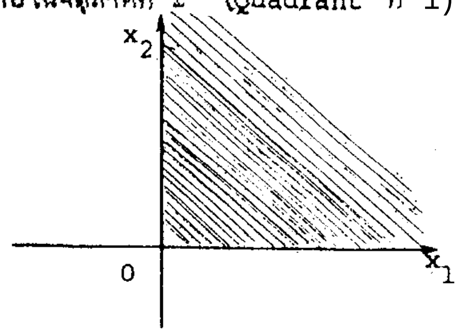
รูป 2.10

จากรูปเพราะว่า $S_1 \subseteq (N(0,0);2)$ และ $S_2 \subseteq N((0,0);2)$
ดังนั้น S_1, S_2 เป็นเซตที่มีขอบเขต

<u>หมายเหตุ</u> สำหรับ $N(a,r)$ ซึ่ง $S \subseteq N(a\ ;\ r)$ นั้นอาจมีได้หลายเซต เช่น ในตัวอย่าง 2.6 อาจเลือก a เป็นจุดอื่น ๆ ที่ไม่ใช่ (0,0) และเลือก r ซึ่งเป็นค่าอื่นไม่ใช่ 2 ก็ได้ เช่น

$$S_1 \subseteq N((1,0);3)$$

ตัวอย่างของเซตที่ไม่มีขอบเขต เช่น $S = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0\}$ คือเซตของจุดทั้งหลายในจตุภาคที่ 1 (Quadrant ที่ 1) ดังรูป 2.11



รูป 2.11

จากตัวอย่างข้างบนทำให้สังเกตได้ว่า ถ้า S เป็นเซตที่ขอบเขตแล้ว จะหา $r > 0$ ซึ่ง $S \subseteq N((0,0)\,;\,r)$ ดังนั้นทฤษฎีต่อไปนี้จะบอกความสัมพันธ์ระหว่างเซตที่มีขอบเขตกับย่านจุด 0 (neighborhood of 0) $0 \varepsilon R^n$

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนดให้ $S \subseteq R^n$

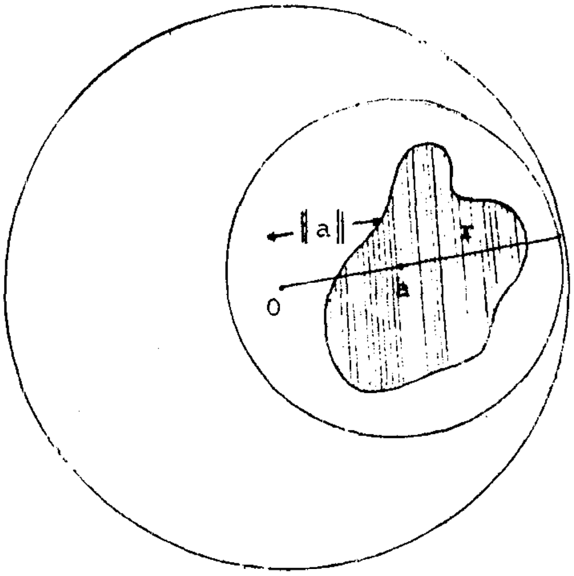
S เป็นเซตที่มีขอบเขตเมื่อและก็ต่อเมื่อ มี $r > 0$ ซึ่ง $S \subseteq N(0\,;\,r)$

พิสูจน์ (1) สมมุติ S เป็นเซตที่มีขอบเขต

จากนิยาม จะมี $a \varepsilon R^n$, $r > 0$ ซึ่ง $S \subseteq N(a\,;\,r)$

ให้ $r' = \|a\| + r$

เพราะฉะนั้น $r \leq r'$



รูป 2.12

ต้องการพิสูจน์ว่า $N(a,r) \subseteq N(0,r')$

ให้ $y \in N(a\,;\,r)$

เพราะฉะนั้น $\|y - a\| < r$

เพราะว่า $\|y - 0\| = \|(y - a) + a\|$

$\leq \|y - a\| + \|a\|$

$< r + \|a\| = r'$

ดังนั้น $y \in N(0,r')$

แต่ $S \subseteq N(a\,;\,r)$

เพราะฉะนั้น $S \subseteq N(0\,;\,r')$

(2) สมมุติ มี $r > 0$ ซึ่ง $S \subseteq N(0\,;\,r)$

จากนิยาม ให้ $a = 0$ จะได้ว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขต ∎

ทฤษฎีบท 2.14 (Bolzano-Weierstrass theorem)

กำหนดให้ $S \subseteq R^n$

ถ้า S เป็นเซตที่มีขอบเขตและประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์แล้วจะมีจุดอย่างน้อย 1 จุดใน R^n ซึ่งเป็นจุดลิมิตของ S

พิสูจน์ (สำหรับการพิสูจน์ กรณี n ใด ๆ นั้น ผู้อ่านอาจยากแก่การเข้าใจ ดังนั้น เพื่อให้ผู้อ่านเข้าใจดียิ่งขึ้น ให้พิจารณากรณี $n = 2$ และใช้รูป 2.13 ประกอบ)

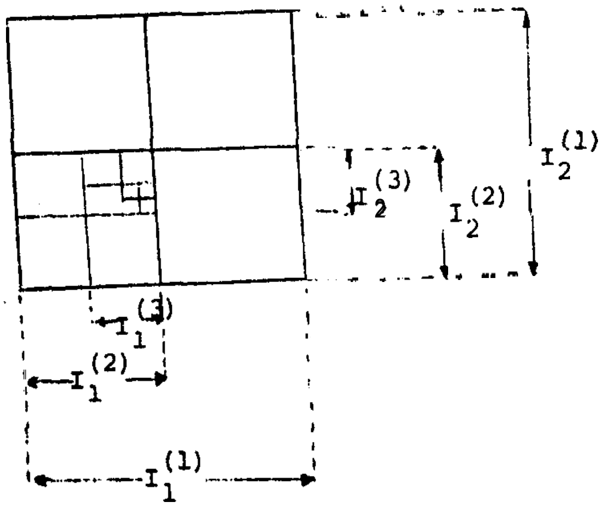
เพราะว่า $S \subseteq R^n$ และ S มีขอบเขต

จากทฤษฎีบท 2.13 จะได้ว่า มี $r > 0$ ซึ่ง

$$S \subseteq N(0\,;\,r)$$

ให้ $J_1 = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid -r \leq x_1 \leq r$,

$-r \leq x_2 \leq r$, ... , $-r \leq x_n \leq r\}$



รูป 2.13

ดังนั้น $J_1 = I_1^{(1)} \times I_2^{(1)} \times \ldots \times I_n^{(1)}$ โดยที่ J_1 แทนเซตของจุด $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ซึ่ง $x_k \in I_k^{(1)}$ และแต่ละ $I_k^{(1)}$ เป็นช่วงในปริภูมิ 1 มิติ คือ $-r \leq x \leq r$

เพราะฉะนั้น $N(0\,;\,r) \subseteq J_1$

จะได้ว่า $S \subseteq J_1$

แบ่ง $I_k^{(1)}$ ออกเป็น 2 ส่วนเท่ากัน เรียกชื่อว่า $I_{k,1}^{(1)}$, $I_{k,2}^{(1)}$

โดยที่

$$I_{k,1}^{(1)} : -r \leq x_k \leq 0 \quad , \quad I_{k,2}^{(1)} : 0 \leq x_k \leq r$$

พิจารณาผลคูณคาร์ทีเซียนที่อยู่ในรูป

$$I_{1,k_1}^{(1)} \times I_{2,k_2}^{(1)} \times \ldots \times I_{n,k_n}^{(1)} \qquad \ldots\ldots(*)$$

โดยที่ $k_i = 1,2$ สำหรับทุก ๆ $i = 1,2,\ldots,n$.

จะได้ว่า ผลคูณคาร์ทีเซียนใน (*) มีได้ 2^n แบบซึ่งแต่ละแบบเป็นช่วงในปริภูมิ n มิติ ซึ่งถ้านำช่วงทั้ง 2^n แบบมาผนวก (union) กันแล้วจะได้ J_1

ดังนั้นจะได้ว่า มีช่วงใน (*) อย่างน้อย 1 ช่วงซึ่งประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ซึ่งจะเรียกช่วงนี้ว่า J_2

ใช้วิธีการเดียวกันจะเขียน J_2 ในรูปผลคูณคาร์ทีเซียน คือ

$$J_2 = I_1^{(2)} \times I_2^{(2)} \times \ldots \times I_n^{(2)}$$

โดยที่แต่ละ $I_k^{(2)}$ เป็นช่วงย่อย (subintervals) ของ $I_k^{(1)}$ มีความยาวด้านเท่ากับ r

แบ่ง $I_k^{(2)}$ เช่นเดียวกับที่ทำใน $I_k^{(1)}$ และจะได้ J_3 เป็นช่วงซึ่งประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์

โดยใช้วิธีการนี้ต่อไปเรื่อย ๆ จะได้กลุ่มช่วงที่นับได้ในปริภูมิ n มิติ คือ $J_1, J_2, J_3, \ldots,$ โดยที่

J_m ประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ และ $J_m = I_1^{(m)} \times I_2^{(m)} \times \ldots \times I_n^{(m)}$ โดยที่ $I_k^{(m)} \subseteq I_k^{(1)}$

ให้ $I_k^{(m)} = [a_n^{(m)}, b_k^{(m)}]$

ดังนั้น $b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \dfrac{2r}{2^{m-1}}$

ให้ $a_k^* = \text{l.u.b.}\{ a_k^{(m)} \mid m = 1, 2, \ldots\}$

$b_k^* = \text{g.l.b.}\{ b_k^{(m)} \mid m = 1, 2, \ldots\}$

จะได้ว่า $a_k^* = b_k^*$

ให้ $t_k = a_k^* (= b_k^*)$

ให้ $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$

ต้องการแสดงว่า t เป็นจุดลิมิตของ S

ให้ $N(t, \varepsilon)$ เป็นย่านใด ๆ ของจุด t

เลือก m_o ซึ่ง $\frac{2r}{2^{m_o-1}} < \frac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้น $J_{m_o} \subseteq N(t ; \varepsilon)$

เพราะฉะนั้น $S \cap J_{m_o} \subseteq S \cap N(t ; \varepsilon)$

แต่ $S \cap J_{m_o}$ ประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์

ดังนั้น $S \cap N(t ; \varepsilon) \neq \Phi$

ดังนั้น t เป็นจุดลิมิตของ S ∎

ทฤษฎีบท 2.15 (Cantor Intersection Theorem)

กำหนดให้ $Q_k \subseteq R^n$ โดยที่

(1) $Q_k \neq \Phi$

(2) $Q_{k+1} \subseteq Q_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ และ Q_1 เป็นเซตที่มีขอบเขต

(3) Q_k เป็นเซตปิดสำหรับแต่ละค่า k

แล้ว $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$ เป็นเซตปิด และ $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \Phi$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$

จากทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า S เป็นเซตปิด

ต้องการแสดงว่า $S \neq \Phi$ นั่นคือแสดงว่ามี $x \in S$

เราสมมุติให้ Q_k ประกอบด้วยจุดเป็นจำนวนอนันต์ได้ เพราะมิฉะนั้นการพิสูจน์จะเป็นกรณีที่มีความสำคัญน้อย (trivial case)

ให้ $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ โดยที่ $x_i \neq x_j$ เมื่อ $i \neq j$ และ $x_k \in Q_k$

เพราะว่า A เป็นเซตอนันต์ และ $A \subseteq Q_1$ ซึ่งเป็นเซตที่มีขอบเขต

ดังนั้นจาก ทฤษฎีบท 2.14 จะได้ว่า A มีจุดลิมิต

ให้ x เป็นจุดลิมิตของ A

ต้องการแสดงว่า $x \in S$ นั่นคือต้องการแสดงว่า $x \in Q_k$ สำหรับทุก ๆ k

แต่ Q_k เป็นเซตปิด ดังนั้นเพียงพอที่จะพิสูจน์ว่า x เป็นจุดลิมิตของ Q_k สำหรับทุกค่า k

เพราะว่าจากทฤษฎีบท 2.11 ย่านของ x ประกอบด้วยจุดใน A เป็นจำนวนอนันต์ และจุดทั้งหลายที่เป็นไปได้เว้นแต่จุดจำนวนจำกัดใน A จะอยู่ใน Q_k

ดังนั้นย่านของ x จะประกอบด้วยจุดใน Q_k เป็นจำนวนอนันต์

จะได้ว่า x เป็นจุดลิมิตของ Q_k

เพราะว่า Q_k เป็นเซตปิด ดังนั้น $x \in Q_k$ สำหรับทุก k

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$$

ดังนั้น $\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \Phi$

2 . 6 ทฤษฎีบทเซตปกคลุมของลินเดอโลฟ

(Lindelög Covering Theorem)

ในตอนนี้จะกล่าวถึง นิยามของ เซตปกคลุม (covering) และทฤษฎีบทเซตปกคลุมของลินเดอโลฟ (Lindelöf covering theorem) ทฤษฎีบทเซตปกคลุมของไฮเน-โบเรล (Heine-Borel covering theorem) รวมไปถึงเรื่องเกี่ยวกับเซตปกคลุมแน่น (compact set)

$\boxed{\text{แล้วเรียก17}}$ กำหนดให้ $\mathcal{F} = \subseteq R^n$, $E\{E_v | R^n$ v ε I}
ว่าเซตปกคลุม (cover) ของ S เมื่อและก็ต่อเมื่อ $S \subseteq \bigcup_{v\varepsilon I} E_v$
ถ้า E_v เป็นเซตเปิดสำหรับทุก ๆ v แล้วเรียก ว่าเซตเปิดที่ปกคลุม (open cover) ของ S

$\boxed{\text{นิยาม 2.18}}$ กำหนดให้ $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_1$ เป็นเซตปกคลุมของ S แล้วเรียก $\mathcal{F}_1$ ว่าเซตปกคลุมย่อย (subcover) ของ $\mathcal{F}$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}$

ตัวอย่าง 2.7 พิจารณาตัวอย่างเซตปกคลุมต่อไปนี้

(1) กำหนด $E_n = \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, n = 2, 3, 4, ...

$S = (0, 1)$

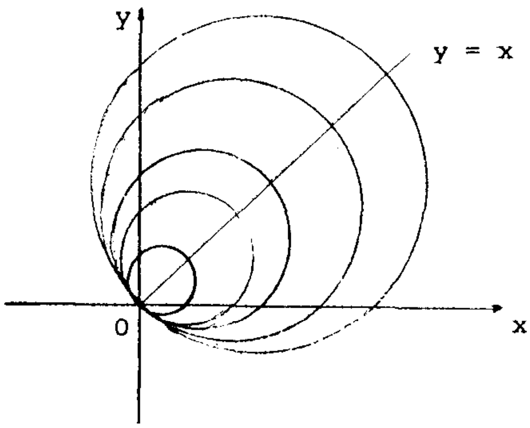
แล้ว $\mathcal{F} = \{E_n | n = 2, 3, 4, \ldots\}$ เป็นเซตปกคลุมของ S

เพราะว่า $(0, 1) \subseteq \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$

(2) ให้ $S = \{(x,y) \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$

$\mathcal{F}$ = เซตของวงกลมทั้งหลายซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ (x,x)

และรัศมี = x จะเป็นเซตปกคลุมของ S ดังรูป 2.14



รูป 2.13

ทฤษฎีบท 2.16 กำหนดให้ $x \in R^n$ และ S เป็นเซตเปิดใน R^n

ถ้า $x \in S$ แล้วจะมี $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in R^n$ และ

$r > 0$ ซึ่ง $y_1, y_2, \ldots, y_n, r$ เป็นจำนวนตรรกยะ และ

$$x \in N(y\,;\,r) \quad S$$

<u>พิสูจน์</u> ให้ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ และ S เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N(x\,;\,\varepsilon) \subseteq S$

เลือก δ ซึ่ง $0 < \delta < \varepsilon$ และ δ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะว่า $x_1 - \frac{\delta}{2\sqrt{n}} < x_1 + \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$

เลือกจำนวนตรรกยะ y_1 ซึ่ง

$$x_1 - \frac{\delta}{2\sqrt{n}} < y_1 < x_1 + \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$$

จะได้ว่า $|y_1 - x_1| < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$

ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$|y_2 - x_2| < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$$

$$|y_3 - x_3| < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$$

....

....

$$|y_n - x_n| < \frac{\delta}{2\sqrt{n}}$$

โดยที่ $y_2, y_3, \ldots, y_n$ เป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2 < \frac{\delta^2}{4n} + \frac{\delta^2}{4n} + \ldots + \frac{\delta^2}{4n}$$

$$= \frac{n\delta^2}{4n}$$

$$= \frac{\delta^2}{4}$$

$$= \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$

เพราะฉนั้น $\| y - x \|^2 < \left(\frac{\delta}{2}\right)^2$

$$\| y - x \| < \frac{\delta}{2}$$

$$x \in N(y ; \frac{\delta}{2})$$

ให้ $r = \frac{\delta}{2}$ ดังนั้น r เป็นจำนวนตรรกยะ และ

$$x \in N(y ; r)$$

ต้องการแสดงว่า $N(y\ ;\ r) \subseteq N\ (x\ ;\ \varepsilon)$

ให้ $z \in N(y\ ;\ r)$

$\|z - y\| < r$

เพราะว่า $\|z - x\| = \|(z - y) + (y - x)\|$

$$< \|z - y\| + \|y - x\|$$

$$< r + \frac{\delta}{2}$$

$$= \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta < \varepsilon$$

ดังนั้น $\|z - x\| < \varepsilon$

$z \in N(x\ ;\ \varepsilon)$

นั่นคือ $x \in N(y\ ;\ r) \subseteq N(x\ ;\ \varepsilon)$ S .

ทฤษฎีบท 2.17 (Lindelöf covering theorem)

กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ F เป็นเซตปกคลุมซึ่งเป็นเซตเปิดของ A แล้วจะมีกลุ่มย่อยซึ่งนับได้ของ F เป็นเซตปกคลุมของ A

<u>พิสูจน์</u> ให้ $G = \{A_1, A_2, \ldots\}$ เป็นเซตของย่านซึ่งมีจุดศูนย์กลางและรัศมีเป็นจำนวนตรรกยะ

ให้ $x \in A$

เพราะว่า F เป็นเซตปกคลุมซึ่งเป็นเซตเปิดของ A

ดังนั้น จะมีเซตเปิด S ใน F ซึ่ง $x \in S$

โดยทฤษฎีบท 2.16 จะได้ว่า

มีย่าน $A_i \in G$ ซึ่ง $x \in A_i \subseteq S$

แต่มี A_k เป็นจำนวนอนันต์ซึ่งสัมพันธ์กับแต่ละ

เลือก A_k ซึ่ง k มีค่าน้อยที่สุดเรียกชื่อว่า $A_{n(x)}$

ดังนั้น $x \in A_{n(x)} \subseteq S$

$\{ A_{n(x)} \mid x \in A \}$ ซึ่งขึ้นอยู่กับสมาชิกของ A
เป็นกลุ่มของเซตเปิดที่นับได้ และเป็นเซตปกคลุมของ A
ดังนั้นกลุ่มย่อยที่นับได้ของ F ซึ่งเป็นเซตปกคลุมของ A คือเซต S
ที่สัมพันธ์กับ แต่ละ $A_{n(x)}$ ∎

2.7 ทฤษฎีบทเซตปกคลุมไฮเน - โบเรล

(Heine - Borel covering theorem)

สำหรับทฤษฎีบทเซตปกคลุมไฮเน - โบเรล ต้องอาศัยทฤษฎีบทเซตปกคลุมลินเดอโลฟ (Linde lof convering theorem) และทฤษฎีบทผลร่วมของคันตอร์ (Cantor intersection theorem) ในการพิสูจน์

ทฤษฎีบท 2.18 กำหนดให้ $A \subseteq R^n$ และ F เป็นเซตปกคลุมซึ่งเป็นเซตเปิดของ A ซึ่งเป็นเซตปิดและมีขอบเขต ดังนั้นจะมีกลุ่มย่อยของ F เป็นจำนวนจำกัดซึ่งเป็นเซตปกคลุมของ A

__พิสูจน์__ จากทฤษฎีบทเซตปกคลุมของลินเดอโลฟ (ทฤษฎีบท 2.17) จะได้ว่า มีกลุ่มย่อยเป็นจำนวนนับได้ของ F ซึ่งเป็นเซตปกคลุมของ A
ให้กลุ่มย่อยที่เป็นจำนวนนับได้ของ F ซึ่งเป็นเซตปกคลุมของ A คือ $\{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$

ให้ $S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ สำหรับ $m \geqslant 1$

เพราะว่า I_k เป็นเซตเปิด
ดังนั้น S_m เป็นเซตเปิด
ต้องการแสดงว่ามี m_o ซึ่งผลผนวก (union) $\bigcup_{k=1}^{m_o} I_k$ เป็นเซตปกคลุมของ A

ให้ $Q_1 = A$

$Q_m = A \quad (R^n - S_m)$ สำหรับ $m > 1$

เพราะว่า A, $R^n - S_m$ เป็นเซตปิด

ดังนั้น Q_m เป็นเซตปิด สำหรับ $m \geq 1$

เพราะว่า $S_m \subsetneq S_{m+1}$

ดังนั้น $Q_{m+1} \subseteq Q_m$

เพราะว่า $Q_m \subseteq A$ และ A เป็นเซตที่มีขอบเขต

ดังนั้น Q_m เป็นเซตที่มีขอบเขตด้วย

สมมุติว่า $Q_m \neq \Phi$ สำหรับทุก ๆ m

จากทฤษฎีบทผลร่วมของคันตอร์ (cantor intersection theorem) จะได้ว่า

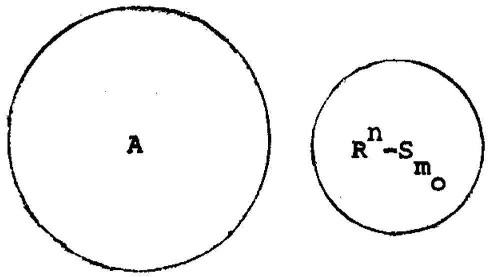
$$\bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k \neq \Phi$$

เพราะฉะนั้น มี $x_o \in A$ ซึ่ง $x_o \in Q_m$ สำหรับทุก ๆ $m \geq 1$

เกิดข้อขัดแย้ง (เพราะว่า $Q_m = R^n - S_m$ และ $S_m = \bigcup_{k=1}^{m} I_k$ และ $\{I_1, I_2, I_3, \ldots\}$ เป็นเซตปกคลุมของ A)

ดังนั้นมี m_o ซึ่ง $Q_{m_o} = \Phi$

$$Q_{m_o} = A \cap (R^n - S_{m_o}) = \Phi$$



รูป 2.14

$$A \subsetneq S_{m_o} = \bigcup_{k=1}^{m_o} I_k$$

นั่นคือจะได้ว่ากลุ่มย่อยจำนวนจำกัดของ F เป็นเซตปกคลุมของ A ■

2 . 8 เซตปกคลุมแน่นใน R^n

(Compact Set in R^n)

เราได้ทราบมาแล้วว่าถ้า $S \subseteq R^n$ เป็นเซตปิด และมีขอบเขตแล้ว เซตปกคลุมของ S ซึ่งเป็นเซตเปิดสามารถที่จะลดทอนลงเหลือเพียงเซตปกคลุมซึ่งเป็นจำนวนจำกัด ในตอนนี้เราจะศึกษาเซตนอกเหนือจากเซตซึ่งเป็นเซตปิดและมีขอบเขตแต่มีคุณสมบัติเช่นเดียวกันกับข้างต้น

เซตที่จะกล่าวต่อไปคือ เซตปกคลุมแน่น (compact set)

นิยาม 2.18 $S \subseteq R^n$

เรียก S ว่าเซตปกคลุมแน่น (compact set) เมื่อและก็ต่อเมื่อทุก ๆ เซตปกคลุมของ S ซึ่งเป็นเซตเปิดมีเซตปกคลุมย่อยเป็นจำนวนจำกัด

จากทฤษฎีบทเซตปกคลุมไฮเน - โบเรลทำให้เราสรุปได้ว่า เซตปิดและมีขอบเขตใน R^n เป็นเซตปกคลุมแน่น

ทฤษฎีบท 2.19 กำหนดให้ $S \subseteq R^n$

(1) S เป็นเซตปกคลุมแน่น

(2) S เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

(3) ทุก ๆ สับเซตของ S ซึ่งเป็นเซตอนันต์มีจุดลิมิตใน S

พิสูจน์ การพิสูจน์ว่า (1) (2) และ (3) สมมูลย์กันนั้น เราต้องพิสูจน์ว่า

(1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3), (3) $\Rightarrow$ (2) และ (2) $\Rightarrow$ (1)

แต่จากทฤษฎีบทเซตปกคลุมไฮเน - โบเรล เราได้แล้วว่า (2) $\Rightarrow$ (1)

ดังนั้นจะพิสูจน์ (1) $\Rightarrow$ (2), (2) $\Rightarrow$ (3) และ (3) $\Rightarrow$ (2) เท่านั้น

พิสูจน์ (1) $\Rightarrow$ (2)

สมมุติ S เป็นเซตปกคลุมแน่น

ต้องการพิสูจน์ว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขต

เลือก $x_o \in S$

กลุ่มของย่าน $N(x_o;k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นเซตปกคลุมซึ่งเป็นเซตเปิดของ S

จากนิยามของเซตปกคลุมแน่น จะได้ว่ากลุ่มย่อยซึ่งเป็นจำนวนจำกัดเป็นเซตปกคลุมของ S ด้วย

ดังนั้น S เป็นเซตที่มีขอบเขต

ต้องการพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิด

สมมุติ S ไม่เป็นเซตปิด ดังนั้น

จะมีจุดลิมิต y ของ S ซึ่ง $y \notin S$

ให้ $x \in S$

ให้ $r_x = \dfrac{\|x - y\|}{2}$

เพราะฉะนั้น $r_x > 0$

$\{N(x\ ;\ r_x)\ |\ x \in S\}$ เป็นเซตปกคลุมซึ่งเป็นเซตเปิดของ S

โดยนิยามของเซตปกคลุมแน่น จะได้ว่า

$$S = \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k;\ r_k)$$

ให้ r เป็นจำนวนน้อยที่สุดของรัศมี $r_1, r_2, \ldots, r_n$

ให้ $z \in N(y\ ;\ r)$

$\|y - z\| < r \leq r_k$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$

เพราะว่า $\|y - x_k\| \leq \|y - z\| + \|z - x_k\|$

$$\|z - x_k\| \geq \|y - x_k\| - \|y - z\|$$

$$= 2r_k - \|y - z\|$$

$$> r_k$$

เพราะฉะนั้น $z \notin N(x_k, r_k)$ $\quad k = 1, 2, \ldots, n$

$$z \notin \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k, r_k) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

นั่นคือ $N(y\ ;\ r) \cap \bigcup_{k=1}^{n} N(x_k, r_k) = \phi$

$$N(y\ ;\ r) \cap S = \phi$$

แต่ $y \notin S$

เพราะฉะนั้น $N(y\ ;\ r) \cap S = \phi$

ดังนั้น y ไม่เป็นจุดลิมิตของ S

เกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น S เป็นเซตปิด

พิสูจน์ (2) $\Longrightarrow$ (3)

สมมุติ S เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

ให้ $T \subseteq S$ และ T เป็นเซตอนันต์

ดังนั้น T มีขอบเขตด้วย

โดยทฤษฎีบทของโบลซาโน - ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano - Weierstrass' theorem) จะได้ว่า T มีจุดลิมิต

ให้ x เป็นจุดลิมิตของ T

ดังนั้น x เป็นจุดลิมิตของ S ด้วย

เพราะว่า S เป็นเซตปิด

ดังนั้น $x \in S$

พิสูจน์ (3) $\Longrightarrow$ (2)

สมมุติทุก ๆ สับเซตของ S ซึ่งเป็นเซตอนันต์มีจุดลิมิตใน S

ต้องการพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิด และมีขอบเขต

สมมุติ S ไม่มีขอบเขต

ดังนั้นมี $x_m \in S$ ซึ่ง $\|x_m\| > m$ สำหรับทุก ๆ $m > 0$

ให้ $T = \{x_1, x_2, \ldots\}$ เป็นสับเซตของ S ซึ่งเป็นเซตอนันต์

ดังนั้น T มีจุดลิมิตใน S

ให้ y เป็นจุดลิมิตของ T

แต่สำหรับ $m > 1 + \|y\|$

$$
\begin{aligned}
\|x_m - y\| &> \|x_m\| - \|y\| \\
&> m - |y| \\
&> 1
\end{aligned}
$$

เกิดข้อขัดแย้งกับข้อความที่ว่า y เป็นจุดลิมิตของ T

ดังนั้น S มีขอบเขต

สำหรับการพิสูจน์ (2) ต้องพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิดด้วย

ให้ x เป็นจุดลิมิตของ S

พิจารณา $N(x ; \frac{1}{k})$ $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$N^*(x ; \frac{1}{k}) \cap S \neq \Phi$$

ให้ $x_k \in N^*(x ; \frac{1}{k}) \cap S$

ให้ $T = \{x_1, x_2, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น $T \subseteq S$ และ T เป็นเซตอนันต์

ดังนั้น T มีจุดลิมิตใน S

ให้ y เป็นจุดลิมิตของ T

เพราะฉะนั้น $y \in S$

ต้องการแสดงว่า $y = x$

สมมุติ $y \neq x$

เพราะฉะนั้น $|y - x| \leq |y - x_k| + |x_k - x|$

$$< |y - x_k| + \frac{1}{k} \quad \text{สำหรับ } x_k \in T$$

เลือก k_o ซึ่ง $k_o > \frac{2}{|y - x|}$

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{k_o} < \frac{1}{2}|y - x|$

สำหรับทุก ๆ $k \geq k_o$

$$\frac{1}{k} \leq \frac{1}{k_o}$$

เพราะฉะนั้น $\|y - x\| < \|y - x_k\| + \frac{1}{2}\|y - x\|$

$$\|y - x_k\| > \frac{1}{2}\|y - x\|$$

ให้ $r = \frac{1}{2}\|y - x\|$

ดังนั้น $\|y - x_k\| > r$

$y \notin N(x_k; r)$ สำหรับ $k \geqslant k_o$

เพราะฉะนั้น y ไม่เป็นจุดลิมิตของ T

เกิดข้อขัดแย้ง

เพราะฉะนั้น $y = x$

จะได้ว่า $x \in S$

ดังนั้น S เป็นเซตปิด ∎

สำหรับเซตของจุดใน R^n เป็นเพียงกรณีพิเศษกรณีหนึ่งเท่านั้น สำหรับกรณีทั่วไปศึกษาได้จากโทโพโลยี (Topology)

แบบฝึกหัด 2

1. จงพิสูจน์ว่า $N((0,0) ; 2)$ เป็นเซตเปิด
2. จงเขียนภาพ พร้อมทั้งบอกจุดข้างใน (interior point) จุดข้างนอก (exterior point) จุดขอบ (boundary point) ของเซตต่อไปนี้

   (1) $S_1 = \{(x_1,x_2) \mid 0 \leqslant x_1,\ 0 \leqslant x_2,\ x_1 + x_2 < 2\}$

   (2) $S_2 = \{(x_1,x_2) \mid 0 \leqslant x_1,\ 0\ 6\ x_2,\ x_1^2 + x_2^2 < 4\}$

   (3) $S_3 = \{(x_1,x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$

(4) $S_4 = N((0,0,0) ; 3)$

(5) $S_5 = \{(x_1,x_2) \mid x_1x_2 < 1\}$

3. เซตในข้อ 2 เป็นเซตเปิดหรือเซตปิด พร้อมทั้งให้เหตุผล

จงเขียนกราฟของเซตในข้อ 2

4. กำหนดให้ S เป็นเซต จงพิจารณาว่า a ที่กำหนดให้เป็นจุดลิมิตของ S หรือไม่

เพราะเหตุใด

(1) $S_1 = \{(x_1,x_2) \mid x_1x_2 < 1\}$, $a = (1,1)$

(2) $S_2 = \{(x_1,x_2) \mid 0 < x_1, 0 < x_2, x_1+ x_2 < 1\}$, $a = (0,1)$

(3). $S_3 = \{(x_1,x_2) \mid x_1+ x_2 < 1\}$, $a = (1,1)$

(4) $S_4 = \{(x_1,x_2) \mid |x_1| + |x_2| < 1\}$, $a = (1,0)$

(5) $S_5 = N((0,0,0) ; 1)$; $1 = (\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$

5. จงพิสูจน์ว่าช่วงเปิดใน R^n เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $\underbrace{(a,b) \times (a,b) \times \ldots \times (a,b)}_{n \text{ ครั้ง}}$ เป็นเซตเปิด

6. จงแสดงว่าเซตของจุดข้างในของ R^n เป็นเซตเปิดใน R^n

7. ถ้า $S \subsetneq R^n$ จงแสดงว่า Int. S เป็นผลผนวก (union) ของเซตเปิดทั้งหมดซึ่งเป็นสับเซตของ S

นั่นคือ แสดงว่า Int. S เป็นเซตเปิดที่ใหญ่ที่สุดซึ่งเป็นสับเซตของ S

8. กำหนดให้ $S \subseteq R^n$, $T \subseteq R^n$ จงพิสูจน์ว่า

(1) Int. $S \cap$ Int. T = Int. $(S \cap T)$

(2) Int. $S \cup$ Int. $T \subseteq$ Int. $(S \cup T)$

จงยกตัวอย่างที่แสดงว่า Int. $(S \cup T) \nsubseteq$ Int. $S \cup$ Int. T

9. <u>นิยาม</u> $S \subseteq R^n$

S เรียกว่าเซตนูน (convex set) เมื่อและก็ต่อเมื่อทุก ๆ $x, y \in S$ และทุก ๆ ค่าจำนวนจริง t ซึ่ง $0 < t < 1$ จะได้ว่า $tx + (1 - t)y \in S$

จงพิสูจน์ว่า

(1) $N(x,r) \subseteq R^n$ เป็นเซตนูน

(2) ช่วงเปิดใน R^n เป็นเซตนูน

(3) Int. S เป็นเซตนูน สำหรับเซต S ซึ่งเป็นเซตนูน

10. จงพิสูจน์ว่า บ่านในระนาบ xy ซึ่งจุดศูนย์กลางคือ (x,x) รัศมี $x > 0$ และ x เป็นเลขตรรกยะ เป็นเซตปกคลุมที่นับได้ของ $\{(x,y) \mid x > 0, y > 0\}$

★ ★ ★