บทที่ 1

ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น

Some basic knowledge

ความรู้พื้นฐานเบื้องต้นที่จะกล่าวต่อไปนี้ เป็นความรู้พื้นฐานในวิชาที่เคยศึกษามาแล้วทั้งสิ้นแต่ให้ไว้เป็นการทบทวนและประกอบในการศึกษาวิชานี้ซึ่งอยู่ในรูปของนิยามและทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ

1.1 เซต (Sets)

คำว่า "เซต" ใช้เมื่อต้องการบ่งบอกถึงพวก หมู่ หรือกลุ่มของสิ่งของอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยต้องทราบแน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่มหรือไม่อยู่ในกลุ่ม สิ่งที่อยู่ในกลุ่มเรียกว่าสมาชิกของเซต (elements)

เซตที่มีสมาชิกเป็นจำนวนจำกัดหรือบอกจำนวนสมาชิกได้ว่ามีจำนวนมากน้อยเท่าใด จำนวนสมาชิกอาจเป็นจำนวนเต็มบวกหรือศูนย์ก็ได้ เรียกว่าเซตจำกัด (finite set) ส่วนเซตซึ่งไม่ใช่เซตจำกัดเรียกว่าเซตอนันต์ (infinite set) เซตที่ไม่มีสมาชิกหรือจำนวนสมาชิกเป็นศูนย์เรียกว่าเซตว่าง (empty set) ใช้สัญลักษณ์ Φ เซตของสิ่งทั้งหมดที่กำลังศึกษาหรือพิจารณาเรียกว่าเอกภพสัมพัทธ์ (universal set) ใช้สัญลักษณ์ U

เซตใช้ในกรณีที่ทราบว่าสิ่งใดเป็นสมาชิกหรือไม่เท่านั้น การเขียนเซตนิยมใช้อักษรตัวใหญ่ A, B, C, ... แทนเซต และอักษรตัวเล็ก a, b, c, ... แทนสมาชิกของเซต

สัญลักษณ์ ε ใช้ในความหมาย "เป็นสมาชิกของ" เช่น $a \varepsilon A$ หมายความว่า a เป็นสมาชิกของ A เช่นเดียวกัน $a \not\varepsilon A$ หมายความว่า a ไม่เป็นสมาชิกของ A นอกจากนี้ในการศึกษาเรื่องเซต เราใช้สัญลักษณ์ทางตรรกศาสตร์เพื่อ

สะดวกในการเขียนและเข้าใจง่ายได้แก่

$\forall x$	หมายถึง	ทุก ๆ x
$\exists x$	หมายถึง	มีบาง x (มี x บางตัว)
$\vee$	หมายถึง	หรือ
$\wedge$	หมายถึง	และ
$\longrightarrow$	หมายถึง	ถ้า...แล้ว
$\longleftrightarrow$	หมายถึง	เมื่อและก็ต่อเมื่อ

1.2 การเขียนเซต

ในการเขียนเซต เพราะว่าสมาชิกของเซตหนึ่ง ๆ มีคุณสมบัติบางอย่างร่วมกัน ดังนั้นการเขียนเซตจึงมีใช้กัน 2 แบบ คือ

(1) การเขียนแบบแจกแจงสมาชิก

(2) การเขียนแบบบอกเงื่อนไขของสมาชิก

สำหรับการเขียนเซตทั้ง 2 แบบนี้ แบบแจกแจงสมาชิกนิยมเขียนในกรณีที่เป็นเซตมีจำนวนสมาชิกน้อย ๆ เช่นเซต A เป็นเซตของจำนวนนับที่มากกว่า 3 แต่น้อยกว่า 7 ดังนั้น

$$A = \{4, 5, 6\}$$

ถ้าเซตมีสมาชิกมาก ๆ หรือเป็นเซตอนันต์ หรือเป็นเซตที่ไม่สามารถแจกแจงสมาชิกได้จะเขียนเซตโดยการบอกเงื่อนไขของสมาชิก โดยสมมุติว่าคุณสมบัติร่วมของสมาชิกคือ $P(x)$ ดังนั้น

$$A = \{x \mid x \text{ มีคุณสมบัติ } P(x)\}$$

อย่างไรก็ตาม จากตัวอย่างของการเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิกของ A ถ้านำมาเขียนแบบบอกเงื่อนไขจะได้ดังนี้

$A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนนับและ $3 < x < 7\}$

1.3 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต (Set Relations)

กำหนด A,B เป็นเซตใด ๆ

นิยาม 1.1 สับเซต (subset)

สำหรับ A,B ใด ๆ ซึ่งทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B จะเรียกว่า A เป็นสับเซตของ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subseteq B$$

นั่นคือ $A \subseteq B \longleftrightarrow \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$

<u>ข้อสังเกต</u> 1. สำหรับ A ใด ๆ $\Phi \subseteq A$

2. $A \subseteq A$

นิยาม 1.2 สับเซตแท้ (proper subset)

ถ้า $A \subseteq B$ โดยที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัวใน B ที่ไม่เป็นสมาชิกของ A แล้วจะเรียกว่า A เป็นสับเซตแท้ของ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \subset B$$

นิยาม 1.3 การเท่ากันของเซต (set equality)

ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้ว จะเรียกว่า A เท่ากันกับ B (คือเซตเดียวกัน) แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A = B$$

นั่นคือ $A = B \longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.1 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{1,2,3,4\}$, $C = \{3,2,1\}$

จะได้ว่า $A \subseteq B$, $C \subseteq B$, $A \subseteq C$

$A \subset B$, $C \subset B$, $A \not\subset C$

$A = C$ แต่ $A \neq B$ ∎

1.4 การดำเนินการของเซต (Operation of set)

ตัวดำเนินการใช้เชื่อมระหว่างเซต 2 เซตขึ้นไปแล้วทำให้เกิดเซตใหม่มีทั้งหมด 4 แบบ คือ

(1) ผลผนวก (union)

(2) ผลร่วม (intersection)

(3) ผลต่าง (difference)

(4) คอมพลีเมนต์ (complement)

นิยาม 1.4 ผลผนวกของ A และ B คือ เซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A หรือ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \cup B$$

นั่นคือ $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

นิยาม 1.5 ผลร่วมของ A และ B คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A และ B แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A \cap B$$

นั่นคือ $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

นิยาม 1.6 ผลต่างของ A,B เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A - B$ (อ่านว่าผลต่างของ B เมื่อเทียบกับ A) คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

นั่นคือ $A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

นิยาม 1.7 คอมพลีเมนต์ของ A คือเซตที่สมาชิกไม่เป็นสมาชิกของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$A'$$

นั่นคือ $A' = \{x \mid x \in U \wedge x \notin A\}$

หมายเหตุ 1. $A' = U - A$

2. ในกรณีทั่ว ๆ ไป สำหรับเซต $A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ จะใช้สัญลักษณ์

$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ แทน $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$

และ

$\bigcap_{k=1}^{n} A_k$ แทน $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n$

ตัวอย่าง 1.2 กำหนดให้

$$U = \{1,2,3,\ldots,10\}$$
$$A = \{1,2,3\}$$
$$B = \{3,5,7\}$$
$$C = \{2,4,6\}$$
$$D = \{1,3\}$$

จะได้

$$A \cup B = \{1,2,3,5,7\}$$
$$A \cup C = \{1,2,3,4,6\}$$
$$A \cup D = \{1,2,3\}$$
$$A \cap B = \{3\}$$
$$A \cap C = \{2\}$$
$$B \cap C = \Phi$$

$A - D = \{2\}$

$B - D = \{5,7\}$

$A' = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

$B' = \{1,2,4,6,8,9,10\}$ ■

นิยาม 1.8 A,B เป็นเซตที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันหรือ $A \cap B = \Phi$ แล้วจะเรียก A และ B ว่าเป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint sets)

จากตัวอย่าง 1.2 B และ C เป็นเซตต่างสมาชิก

1.5 ชั้น (Class)

นิยาม 1.9 เซตที่มีสมาชิกเป็นเซตเรียกว่าชั้น (class) ซึ่งจะใช้อักษร $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ $\mathcal{C}$ แทนชั้น

ตัวอย่างเช่น กำหนดให้ $A = \{0,1\}$, $B = \{1,2\}$ $C = \{1,2,3\}$ และ $D = \{0\}$ แล้ว $\mathcal{B} = \{\{0,1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{0\}\}$ เป็นชั้นซึ่งมีสมาชิกคือ A,B,C และ D

นิยาม 1.10 เพาเวอร์เซตของ A (power set of A) คือ เซตซึ่งสมาชิกคือสับเซตทั้งหมดของ A แทนด้วยสัญลักษณ์

$$\mathcal{P}(A)$$

ถ้า A เป็นเซตจำกัดซึ่งมีสมาชิก n ตัว แล้ว A มีสับเซตทั้งหมด 2^n จำนวน นั่นแสดงว่า $\mathcal{P}(A)$ มีสมาชิก 2^n จำนวนนั่นเอง

<u>ตัวอย่าง</u> 1.3 กำหนด $A = \{0,1\}$

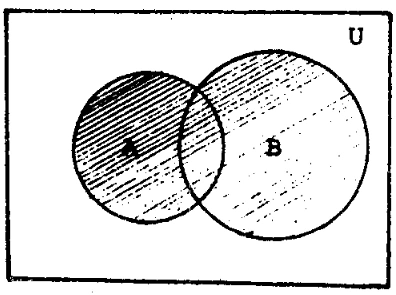
จะได้ $\mathcal{P}(A) = \{\Phi,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}$

กำหนดให้ $\mathcal{B} = \{0,1,\{0,1\}\}$

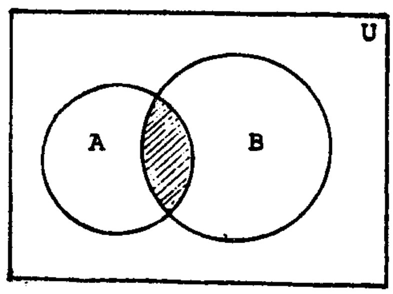
จะได้ $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\Phi,\{0\},\{1\},\{\{0,1\}\},\{0,1\},\{0,\{0,1\}\},$
$\{1,\{0,1\}\}\ ,\ \{0,1,\{0,1\}\}\}$ ■

1.6 แผนภาพเวนน์ (Venn Diagram)

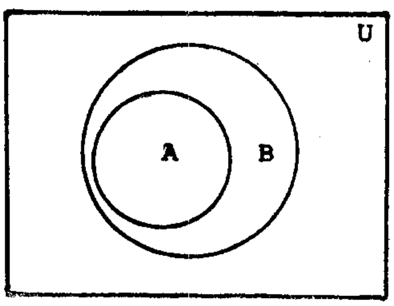
แผนภาพเวนน์ใช้ในการศึกษา แก้ปัญหาเกี่ยวกับเรื่องเซต โดยใช้วงกลมหรือวงรีแทนเซต รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ล้อมรอบแทนเอกภพสัมพัทธ์ U และใช้บริเวณที่แรเงาแทนเซตที่เรากำลังต้องการศึกษา เช่น



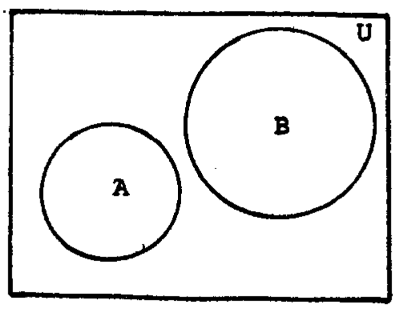
$A \cup B$



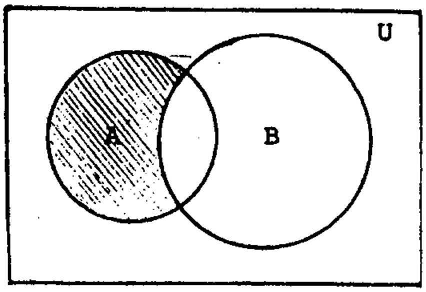
$A \cap B$



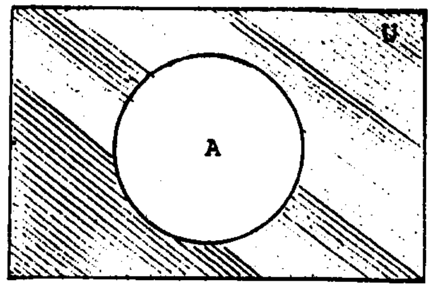
$A \subsetneq B$



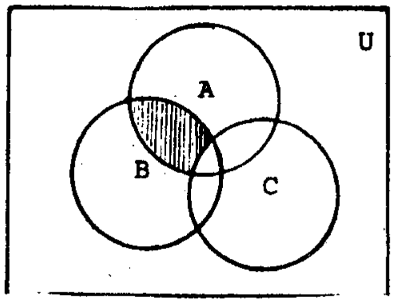
$A \cap B = \Phi$



A - B



A'



$(A \cap B) - C$

รูป 1.1

1.7 พีชคณิตของเซต (Algebra of set)

จากการดำเนินการของเซตข้างต้น จะได้กฎทางพีชคณิตดังต่อไปนี้

1.7.1 กฎการซ้ำ (Idempotent law)

$A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

1.7.2 กฎการสลับที่ (commutative law)

$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

1.7.3 กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \qquad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

1.7.4 กฎการกระจาย (distributive law)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

1.7.5 กฎเอกลักษณ์ (identity law)

$$A \cap \phi = \phi \qquad A \cap U = A$$

$$A \cup \phi = A \qquad A \cup U = U$$

1.7.6 กฎคอมพลีเมนต์ (complement law)

$$(A')' = A \qquad \phi' = U$$

$$U' = \phi \qquad A \cup A' = U$$

$$A \cap A' = \phi$$

1.7.7 กฎของเดอ มอร์กอง (De Morgan's law)

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$$

<u>หมายเหตุ</u> จากกฎของเดอ มอร์กอง ข้อสรุปต่อไปนี้ใช้กันมาก ,

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \qquad (A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)' = \bigcap_{k=1}^{n} A_k'$$

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)' = \bigcup_{k=1}^{n} A_k'$$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.4 จงเขียน $[(A \cup B') \cap B]'$ อยู่ในรูปที่ง่ายที่สุด

<u>วิธีทำ</u>

$$
\begin{aligned}
[(A \cup B') \cap B]' &= (A \cup B')' \cup B' \\
&= (A' \cap B) \cup B' \\
&= (A' \cup B') \cap (B \cup B') \\
&= (A' \cup B') \cap U \\
&= A' \cup B' \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

1.8 วิธีการพิสูจน์ (Method of Proof)

ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์มีวิธีการพิสูจน์หลายแบบด้วยกัน แต่ที่สำคัญ ๆ มีดังนี้

1.8.1 จำเป็นและเพียงพอ (necessity and sufficiency)

ใช้ในการพิสูจน์ประโยคที่มีตัวเชื่อม $\longleftrightarrow$ (เมื่อและก็ต่อเมื่อ) ตัวอย่าง เช่นต้องการพิสูจน์ทฤษฎีบทซึ่งมีข้อความว่า P เป็นจริงเมื่อและก็ต่อเมื่อ Q เป็นจริง ซึ่งจะมีการพิสูจน์เป็นขั้นตอนดังนี้

Sufficiency : สมมุติ Q แล้วแสดงให้ได้ว่า P เป็นจริง

Necessity : สมมุติ P แล้วแสดงให้ได้ว่า Q เป็นจริง

<u>ตัวอย่าง</u> 1.5 จงพิสูจน์ว่า a เป็นเลขคี่เมื่อและก็ต่อเมื่อ a + 1 เป็นเลขคู่

<u>พิสูจน์</u> (1) สมมุติ $a + 1$ เป็นเลขคู่

ดังนั้น $a + 1 = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

$$
\begin{aligned}
a &= 2m - 1 \\
&= 2(m - 1) + 1
\end{aligned}
$$

แต่ m เป็นจำนวนเต็ม $m - 1$ เป็นจำนวนเต็มด้วย

เพราะฉนั้น a เป็นเลขคี่

(2) สมมุติ a เป็นเลขคี่

ดังนั้น $a = 2k + 1$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

$$a + 1 = (2k + 1) + 1$$
$$= 2k + 2$$
$$= 2(k + 1)$$

เพราะฉะนั้น $a + 1$ เป็นเลขคู่ ∎

1.8.2 การแจงเหตุสู่ผล (Implication)

ใช้ในการพิสูจน์ประโยคถ้า...แล้ว โดยการสมมุติประโยคข้างหน้าแล้วสรุปประโยคข้างหลัง เป็นส่วนหนึ่งของการพิสูจน์ประโยคแบบที่ 1 เช่น จงพิสูจน์ว่า ถ้า a เป็นเลขคี่แล้ว a^2 เป็นเลขคี่ด้วย

1.8.3 อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)

วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ใช้พิสูจน์ ประโยค $P(n)$ ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนธรรมชาติ n $(n \in N)$ มีขั้นตอนพิสูจน์ดังนี้

ถ้า $S \subseteq N$ โดยที่

(1) $1 \in S$

(2) ถ้า $k \in S$ แล้ว $k + 1 \in S$

แล้วจะได้ว่า $S = N$

__ตัวอย่าง__ 1.6 จงพิสูจน์ว่า $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

__พิสูจน์__ ถ้าให้ $S = \{ n \mid n \in N$ และ $P(n)\}$ โดยที่ $P(n)$ แทนข้อความ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

(1) แสดงว่า $P(1)$ เป็นจริงหรือ $1 \in S$

เพราะว่า $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

$= 1$

เพราะฉนั้น $1 \in S$

(2) สมมุติว่า $k \in S$

เพราะฉนั้น $1 + 2 + 3 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

$$1 + 2 + 3 + \ldots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)\left[(k+1)+1\right]}{2}$$

นั่นแสดงว่า $k + 1 \in S$

จะได้ว่า $S = N$

นั่นคือ $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $n \in N$ ■

1.8.4 การพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้ง (proof by contradiction)

ทฤษฎีบทส่วนใหญ่พิสูจน์ได้โดยวิธีตรง ๆ แต่สำหรับการพิสูจน์โดยหาข้อขัดแย้งใช้ในกรณีที่พิสูจน์โดยตรงไม่ได้ เช่นถ้าเราต้องการพิสูจน์อะไร เราสมมุติว่าไม่จริง แล้วหาข้อขัดแย้งซึ่งเมื่อได้ข้อขัดแย้งแสดงว่าที่สมมุติไว้ไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

<u>**ตัวอย่าง**</u> 1.7 จงพิสูจน์ว่า $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ

<u>**พิสูจน์**</u> สมมุติ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ เขียนได้อยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำ $\frac{a}{b}$ โดยที่ a,b เป็นจำนวนเต็มและ $b \neq 0$

นั่นคือ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$2b^2 = a^2$$

แสดงว่า a^2 เป็นเลขคู่

ดังนั้น a เป็นเลขคู่ด้วย

ให้ $a = 2m$ เมื่อ m เป็นจำนวนเต็ม

เพราะฉะนั้น $2b^2 = (2m)^2$

$$= 4m^2$$

$$b^2 = 2m^2$$

แสดงว่า b^2 เป็นเลขคู่

ดังนั้น b เป็นเลขคู่ด้วย

ให้ $b = 2n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $\frac{a}{b} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n}$ ซึ่งแสดงว่า $\frac{a}{b}$ ไม่ใช่เศษส่วนอย่างต่ำ

เพราะฉะนั้นเกิดข้อขัดแย้ง (contradiction)

เพราะฉะนั้น $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ ∎

1.9 ความสัมพันธ์ (Relations)

ความสัมพันธ์ใช้สำหรับของ 2 สิ่งหรือมากกว่า 2 สิ่งขึ้นไป ความสัมพันธ์ของแต่ละสิ่งขึ้นกับคุณสมบัติของสิ่งนั้น เช่น แดงมีความสัมพันธ์กับน้องชายชื่อดำ 2 มีความสัมพันธ์กับ 7 คือ 2 น้อยกว่า 7

สำหรับในทางคณิตศาสตร์จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซต 2 เซต หรือมากกว่า 2 เซตขึ้นไป

กำหนด A,B เป็นเซตใด ๆ

นิยาม 1.11 ผลคูณคาร์ทีเชียน (Cartesian product) ของ A,B แทนด้วยสัญลักษณ์ $A \times B$ คือเซตที่มีสมาชิกอยู่ในรูปคู่อันดับ (a,b) โดยที่ $a \in A$ และ $b \in B$

นั่นคือ $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$

สำหรับคู่อันดับ (a,b) และ (c,d) จะได้ว่า $(a,b) = (c,d)$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

ข้อสังเกต $\Phi \times A = A \times \Phi = \Phi$

a. $A \times B \neq B \times A$

โดยทั่ว ๆ ไป $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ เป็นเซตของ อันดับ n จำนวน $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ โดยที่ $a_i \in A_i$ สำหรับ $i = 1,2,3,\ldots,n$

<u>ตัวอย่าง</u> 1.8 กำหนดให้ $A = \{a,b,c\}$ $B = \{1,2\}$

จงหา $A \times B$ และ $B \times A$

<u>วิธีทำ</u> $A \times B = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),(c,1),(c,2)\}$

$B \times A = \{(1,a),(2,a),(1,b),(2,b),(1,c),(2,c)\}$ ●

ความสัมพันธ์ (Relations)

นิยาม 1.12 ถ้า A,B เป็นเซต $r \subseteq A \times B$ จะเรียกว่า r ว่าความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B

ถ้า $(a,b) \in r$ เรียกว่า a มีความสัมพันธ์ r กับ b เขียนแทนด้วย $a\ r\ b$

นิยาม 1.13 โดเมนของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกของ A ที่มีความสัมพันธ์ r กับสมาชิกใน B อย่างน้อย 1 ตัว ใช้สัญลักษณ์ D_r

เรนจ์ของความสัมพันธ์ r คือเซตของสมาชิกของ B ซึ่งมีความสัมพันธ์ r กับสมาชิกใน A อย่างน้อย 1 ตัว ใช้สัญลักษณ์ R_r

นั่นคือ $(a,b) \in r \subseteq A \times B$

$D_r = \{a \mid (a,b) \in r\}$

$R_r = \{b \mid (a,b) \in r\}$

<u>ข้อสังเกต</u> จากนิยามของความสัมพันธ์ทำให้เราทราบว่าลักษณะของความสัมพันธ์ระหว่างเซต 2 เซตมีได้ 3 กรณี คือ สมาชิกในโดเมนตัวหนึ่งมีความสัมพันธ์กับสมาชิกในเรนจ์มากกว่า 1 ตัว สมาชิกในเรนจ์ 1 ตัว มีความสัมพันธ์กับสมาชิกในโดเมนมากกว่า 1 ตัว และสมาชิกในโดเมน และเรนจ์มีความสัมพันธ์ชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง

นอกจากนี้ยังพบว่า A, B เป็นเซต $r \subseteq A \times B$ แทนความสัมพันธ์จาก A ไปยัง B แล้ว D_r อาจเท่ากับเซต A หรือเป็นสับเซตของ A เช่นเดียวกันกับ R_r อาจเท่ากับ B หรือสับเซตของ B ก็ได้

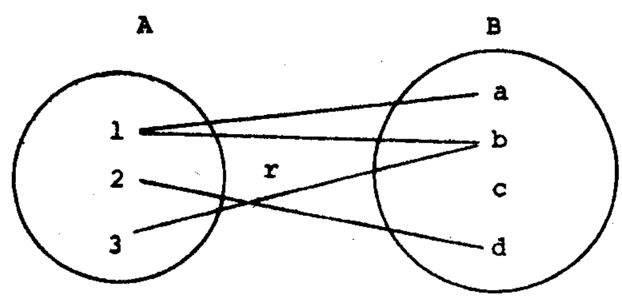
<u>ตัวอย่าง</u> 1.9 กำหนดให้ $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c,d\}$ และ $r = \{(1,a),(1,b),(2,d),(3,b)\}$ จงหาโดเมน และเรนจ์ของความสัมพันธ์ r

<u>วิธีทำ</u> เพราะว่า $A \times B = \{(1,a),(1,b),(1,c),(1,d),(2,a),(2,b),(2,c),(2,d),(3,a),(3,b),(3,c),(3,d)\}$

จะเห็นว่า $r \subseteq A \times B$

$D_r = \{1,2,3\} = A$

$R_r = \{a,b,d\} \subseteq B$ ดังรูป 1.2



รูป 1.2

จากรูปจะได้ว่า

$1\ r\ a,\ 1\ r\ b,\ 2\ r\ d$ และ $3\ r\ b$ ∎

1.10 คุณสมบัติของความสัมพันธ์ที่ควรทราบ

กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A นั่นคือ $r \subseteq A \times A$ จะได้คุณสมบัติต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติสะท้อน (reflexive)

นิยาม 1.14 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติสะท้อน เมื่อและก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิก $a \in A$ แล้ว $(a,a) \in r$

นั่นคือ $a\ r\ a$ สำหรับทุก ๆ $a \in A$

(2) คุณสมบัติสมมาตร (symmetric)

นิยาม 1.15 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติสมมาตร เมื่อและก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a,b) \in r$ แล้ว $(b,a) \in r$

นั่นคือ $a\ r\ b \rightarrow b\ r\ a$

(3) คุณสมบัติถ่ายทอด (transitive)

นิยาม 1.16 ความสัมพันธ์ r เรียกว่ามีคุณสมบัติถ่ายทอด เมื่อและก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a,b) \in r$ และ $(b,c) \in r$ แล้ว $(a,c) \in r$

นั่นคือ $a\ r\ b \wedge b\ r\ c \rightarrow a\ r\ c$

(4) ปฏิสมมาตร (antisymmetric)

$\boxed{\text{นิยาม 1.17}}$ ความสัมพันธ์ r เรียกว่าปฏิสมมาตร เมื่อและก็ต่อเมื่อ ถ้า $(a,b) \in r$ และ $(b,a) \in r$ แล้ว $a = b$

นั่นคือ $a\, r\, b \wedge b\, r\, a \rightarrow a = b$

(5) การเป็นอันดับบางส่วน (partial ordering)

$\boxed{\text{นิยาม 1.18}}$ ความสัมพันธ์ r เป็นอันดับบางส่วนของ A เมื่อและก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติสะท้อน
2. r มีคุณสมบัติถ่ายทอด
3. r มีคุณสมบัติปฏิสมมาตร

(6) การเป็นอันดับเชิงเส้น (linear ordering, total ordering)

$\boxed{\text{นิยาม 1.19}}$ ความสัมพันธ์ r เป็นอันดับเชิงเส้นของเซต A เมื่อและก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติการเป็นอันดับบางส่วน
2. ถ้าทุก ๆ $a, b \in A$ แล้ว $(a,b) \in r$ หรือ $(b,a) \in r$

(7) ความสัมพันธ์สมมูลย์ (equivalence relation)

นิยาม 1.20 ความสัมพันธ์ r เรียกว่าความสัมพันธ์สมมูลย์ เมื่อและก็ต่อเมื่อ r มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. r มีคุณสมบัติสะท้อน
2. r มีคุณสมบัติสมมาตร
3. r มีคุณสมบัติถ่ายทอด

1.11 ฟังก์ชัน (Functions)

นิยาม 1.21 ให้ A,B เป็นเซตใด ๆ แล้วฟังก์ชัน f จาก A ไปยัง B คือเซตของคู่อันดับใน $A \times B$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า (a,b) และ (a,b') เป็นสมาชิกของ f แล้ว $b = b'$ แทนด้วยสัญลักษณ์

$$f : A \to B$$

โดยทั่ว ๆ ไปถ้า $(x,y) \in f$ แล้วจะเขียนว่า $y = f(x)$ และเรียกว่า " y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด x "

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B แล้วจะได้

(1) $f \subseteq A \times B$

(2) ทุก ๆ สมาชิก $x \in A$ จะมีสมาชิก $y \in B$ ซึ่ง $(x,y) \in f$ และถ้า $(x,y_1),(x,y_2) \in f$ แล้ว $y_1 = y_2$

ถ้า $f : A \to B$ เรียก A ว่าโดเมนของ f ใช้สัญลักษณ์ D_f และเรียก B ว่าโคโดเมน (co - domain) ของ f ส่วนเรนจ์ของ f ใช้สัญลักษณ์ R_f คือ

เซตของสมาชิกของ B ซึ่งเป็นภาพ (image) ของสมาชิกใน A

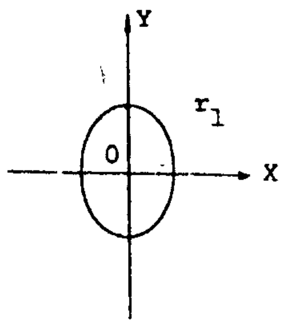
ดังนั้น $R_f = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B$

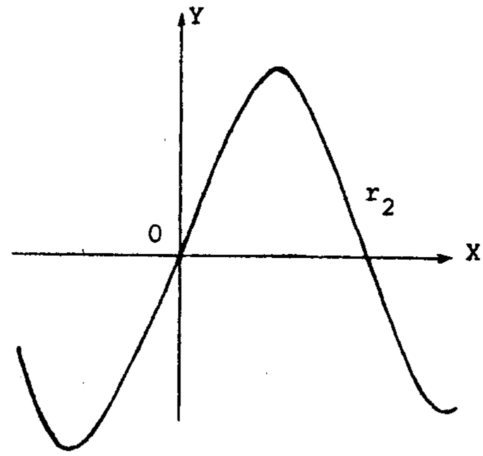
<u>ตัวอย่าง</u> 1.10 กำหนดให้ R เป็นเซตของเลขจำนวนจริง และ

$$r_1 = \{(x,y) \mid x, y \in R, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$$

$$r_2 = \{(x,y) \mid x, y \in R, y = \sin x\}$$

<u>วิธีทำ</u> รูปของ r_1, r_2





รูป 1.3

r_1 ไม่เป็นฟังก์ชันเพราะว่ามีคู่ลำดับ x ในโดเมนจับคู่กับสมาชิก 2 ตัว ในเรนจ์ตัวอย่างเช่น (0,3), (0,-3) เป็นสมาชิกของ

r_2 เป็นฟังก์ชัน โดยมี โดเมนคือ R โคโดเมน คือ R แต่เรนจ์ของฟังก์ชัน คือ $[-1,1]$ ∎

กำหนดให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B จะแบ่งฟังก์ชัน f ออกได้ 3 ลักษณะดังนี้

(1) ฟังก์ชันทั่วถึง (surjective function , onto function)

นิยาม 1.22 ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เรียกว่าฟังก์ชันทั่วถึง หรือฟังก์ชันจาก A ไปบน B เมื่อและก็ต่อเมื่อ เรนจ์ของฟังก์ชัน f เท่ากับ B

(2) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective function , one to one function)

นิยาม 1.23 ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เรียกว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (1 – 1) จาก A ไปยัง B เมื่อและก็ต่อเมื่อ ถ้า $(x_1, y) \in f$ และ $(x_2, y) \in f$ แล้ว $x_1 = x_2$

(3) ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijective function)

นิยาม 1.24 ฟังก์ชัน $f : A \to B$ เรียกว่าฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง เมื่อและก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

<u>ตัวอย่าง</u> 1.11 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก f เป็นฟังก์ชันนิยามโดย $f(x) = x^2$

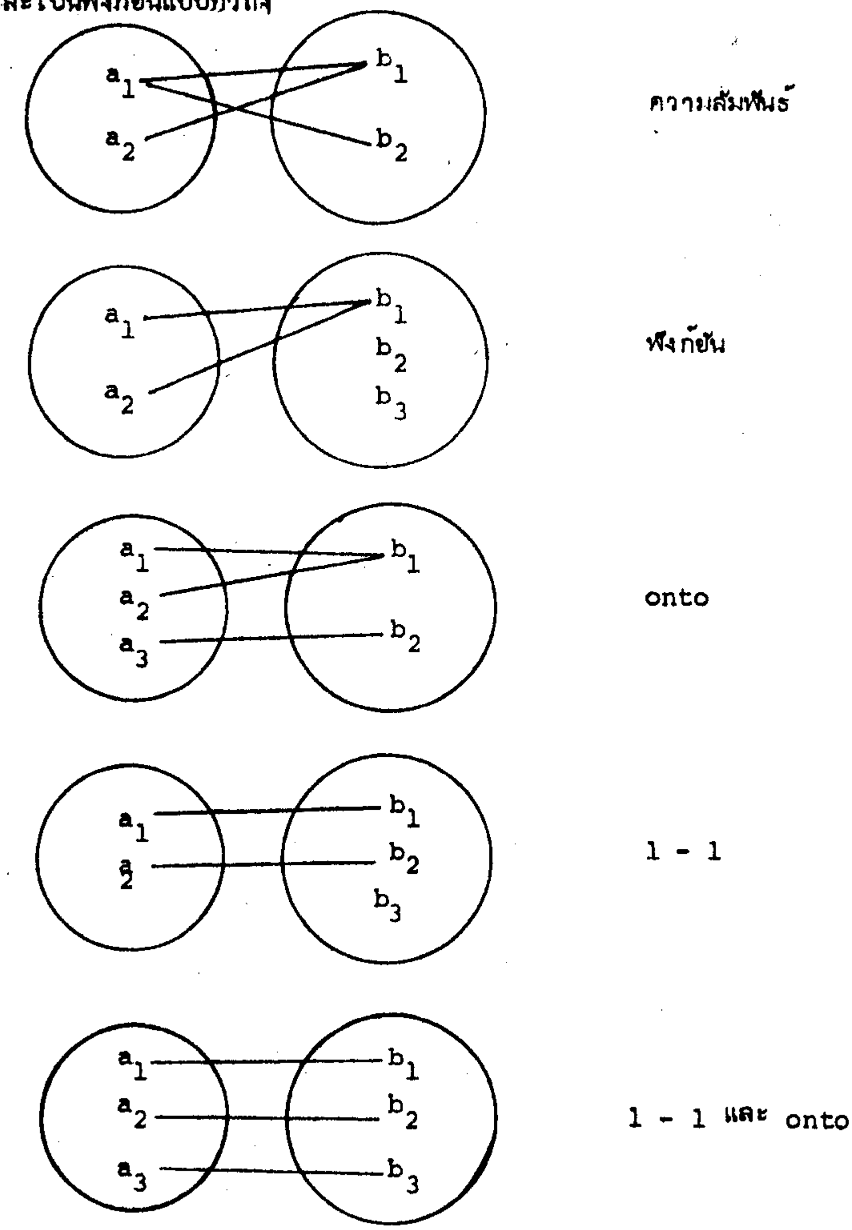
<u>วิธีทำ</u> จะได้ว่า

(1) $f_1 : R \to R$ โดยที่ $f_1(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ไม่เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

(2) $f_2 : R \to R^+$ โดยที่ $f_2(x) = x^2$ ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(3) $f_3 : R^+ \rightarrow R$ โดยที่ $f_3(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แต่ไม่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

(4) $f_4 : R^+ \rightarrow R^+$ โดยที่ $f_4(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 และเป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง ∎



รูป 1.4

พิจารณาฟังก์ชัน $f : A \rightarrow B$ เพราะว่า $f : A \rightarrow B$ เป็นเซตของคู่อันดับซึ่งเป็นสับเซตของ $A \times B$ ดังนั้นถ้า $C \subsetneq A$ จะได้ว่า

$$f(C) = \{f(a) \mid a \in C \subsetneq A\}$$

เรียกว่าภาพตรง (direct image) ของ C ภายใต้ f

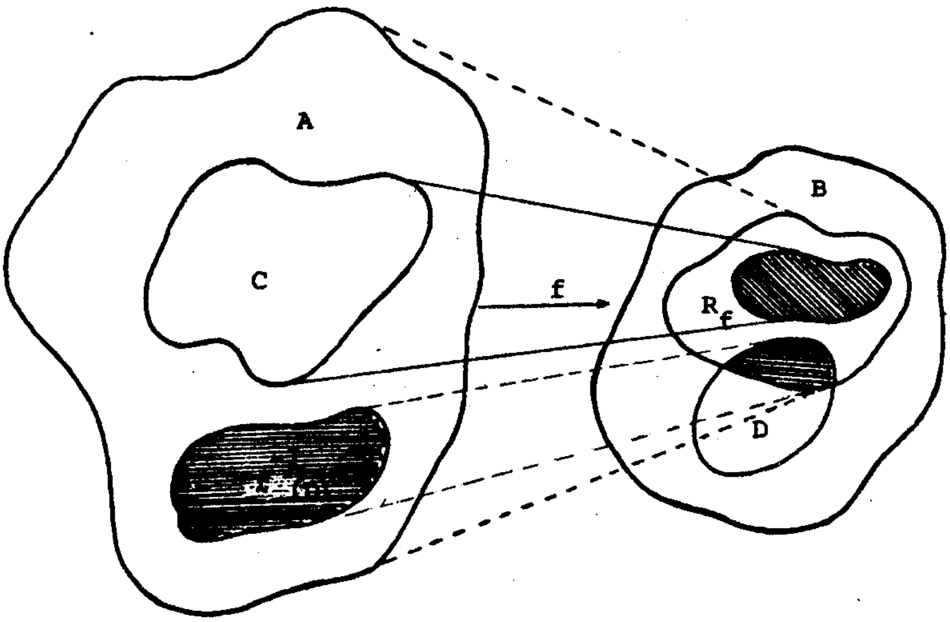
จะได้ว่า $f(C) \subseteq R_f$

ในทำนองเดียวกัน $f : A \rightarrow B$ และ $D \subseteq B$ ดังนั้น

$$f^{-1}(D) = \{a \mid f(a) \in D\}$$

เรียกว่าภาพผกผัน (inverse image) ของ D ภายใต้ f

จะได้ว่า $f^{-1}(D) \subseteq A$



รูป 1.5

จากคุณสมบัติข้างบนจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.1 กำหนดให้ $f : X \to Y$, $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $C \subseteq Y$ และ $D \subseteq Y$ แล้วจะได้ว่า

(1) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

(3) $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(4) $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

<u>พิสูจน์</u> (1) พิสูจน์ว่า $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

ให้ $y \in f(A \cup B)$

ดังนั้นจะมี $x \in A$ หรือ $x \in B$ ซึ่ง $y = f(x)$

ถ้า $x \in A$ ดังนั้น $y = f(x) \in f(A)$

ถ้า $x \in B$ ดังนั้น $y = f(x) \in f(B)$

นั่นคือ $y \in f(A) \cup f(B)$

แสดงว่า $f(A \cup B) \subseteq f(A) \cup f(B)$

ให้ $y \in f(A) \cup f(B)$

ดังนั้น y เป็นภาพของ $x \in A$ หรือ $x \in B$

ดังนั้น $y = f(x)$, $x \in A \cup B$

ดังนั้น $y = f(x) \in f(A \cup B)$

จะได้ว่า $f(A) \cup f(B) \subseteq f(A \cup B)$

นั่นคือ $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

(2) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

(3) พิสูจน์ว่า $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ให้ $x \in f^{-1}(C \cup D)$

ดังนั้นจะมี $y \in C \cup D$ ซึ่ง $y = f(x)$

เพราะฉะนั้น $f(x) \in C$ หรือ $f(x) \in D$

ถ้า $f(x) \in C$ ดังนั้น $x \in f^{-1}(C)$

ถ้า $f(x) \in D$ ดังนั้น $x \in f^{-1}(D)$

ดังนั้น $x \in f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

จะได้ว่า $f^{-1}(C \cup D) \subseteq f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ในทำนองเดียวกันจะพิสูจน์ได้ว่า

$$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) \subseteq f^{-1}(C \cup D)$$

ดังนั้น $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

(4) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด ■

<u>ตัวอย่าง</u> 1.12 จงให้ตัวอย่างที่แสดงว่า $f(A) \cap f(B) \neq f(A \cap B)$

<u>วิธีทำ</u> ให้ $A = \{-1,-2\}$, $B = \{1,2\}$

ให้ $f(x) = x^2$ ดังนั้น

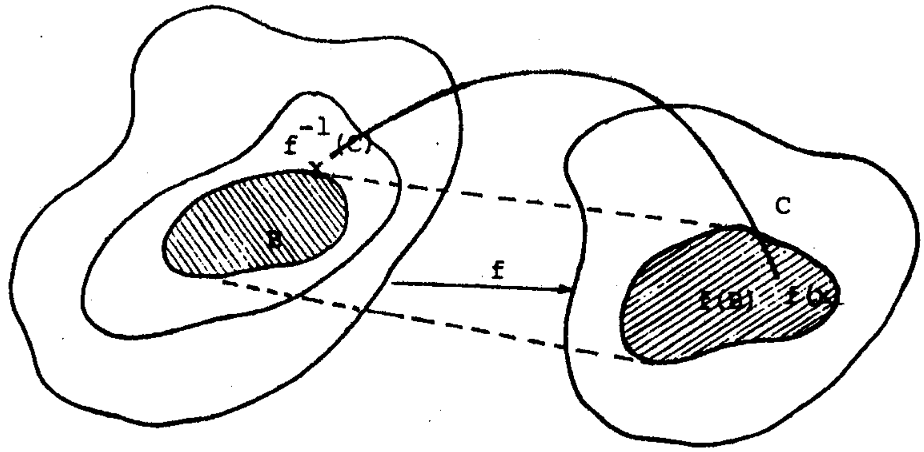
$A \cap B = \phi$

เพราะฉะนั้น $f(A \cap B) = \phi$

อย่างไรก็ตาม $f(A) = \{1,4\}$, $f(B) = \{1,4\}$

$f(A) \cap f(B) = \{1,4\} \neq \phi = f(A \cap B)$ ■

<u>ข้อสังเกต</u> ถ้า $f(x) \in C$ แล้ว $x \in f^{-1}(C)$ แต่ถ้า $f(x) \in f(B)$ ไม่จำเป็นที่ $x \in B$ เพราะว่า f ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังรูป 1.6



รูป 1.6

1.12 พีชคณิตของฟังก์ชัน (Algebra of functions)

นิยาม 1.25 กำหนดให้ $f : A \to B$, $g : B \to R$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงแล้ว

(1) $f + g$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) cf เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(cf)(x) = cf(x)$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(3) fg เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(4) $\frac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

อนึ่ง โดเมนของฟังก์ชันในแต่ละกรณีก็คือผลร่วมของโดเมนของ f กับโดเมนของ g ยกเว้นกรณีที่ 4 ซึ่งโดเมนของฟังก์ชันจะไม่รวม x ซึ่ง $g(x) = 0$

1.13 ฟังก์ชันประกอบ (compositions, product functions)

นิยาม 1.26 กำหนดให้ $f : X \to Y$ และ $g : Y \to Z$ ดังนั้น f และ g จะนิยามฟังก์ชันประกอบ ใช้สัญลักษณ์ gof จาก X ไปยัง Z ($gof : X \to Z$) เมื่อและก็ต่อเมื่อ

$$gof = \{(x,z) \in X \times Z \mid \text{มี } y \in Y \text{ ซึ่ง } (x,y) \in f \text{ และ } (y,z) \in g\}$$

หรือกล่าวได้ว่า $(gof)(x) = g(f(x))$

__ตัวอย่าง__ 1.13 กำหนด $f : R \to R$ โดยที่ $f(x) = x^2$ และ
$g : R \to R$ โดยที่ $g(x) = x + 1$ จงหา gof, fog

__วิธีทำ__

$$\begin{aligned} gof(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= x^2 + 1 \\ fog(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x + 1) \\ &= (x + 1)^2 \end{aligned}$$
■

จากตัวอย่างนี้ได้ข้อสังเกตอย่างหนึ่งคือ $gof \neq fog$

1.14 ลักษณะพิเศษของฟังก์ชัน

(1) ให้ $f : A \to B$ ดังนั้นเรียก f ว่าฟังก์ชันคงที่ (constant function) เมื่อและก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิก $a \in A$ จะมี $b_o \in B$ ซึ่ง $f(a) = b_o$ (เรนจ์มีเพียงตัวเดียว)

(2) ฟังก์ชัน $i_A : A \to A$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าทุก ๆ $a \in A$ $i_A(a) = a$ เรียกว่าฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)

(3) ถ้า $f : X \to Y$ และ $A \subseteq X$ แล้วฟังก์ชัน $f|_A : A \to Y$ เรียกว่าการกำกัดของ f (restriction) ไปยัง A ถ้า $f|_A(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$

(4) ถ้า $f : A \to B$, $A \subseteq X$ ถ้ามี $g : X \to B$ โดยที่ $g|_A = f$ แล้วจะเรียก g ว่าเป็นการขยาย (extension) ของ f ไปยัง x

(5) ถ้า $x_1, x_2, \ldots, x_n$ เป็นเซต n เซต และ $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$ เป็นผลคูณคาร์ทีเซียน แล้วฟังก์ชัน

$$\P_i : X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to X_i$$

โดยที่ สำหรับทุก ๆ $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$

$$\P_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$$

แล้วเรียก $\P_i$ ว่าเป็น โพรเจคชัน (projection) ที่ i ของ $x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n$

1.15 ระบบจำนวนจริง (Real Number System)

ในการศึกษาระบบจำนวนจริง R ต้องคำนึงถึงตัวดำเนินการ 2 ตัวคือการบวก และการคูณ ซึ่งสำหรับ $x, y \in R$ แทนการบวกด้วย $x + y$ และแทนผลคูณด้วย xy และการบวก การคูณมีคุณสมบัติปิดบน R

พิจารณาการบวกและการคูณบนจำนวนจริงจะได้สัจพจน์ต่อไปนี้

ให้ $x, y, z \in R$

สัจพจน์ 1 กฎการสลับที่ (commutative law)

$x + y = y + x$

$xy = yx$

สัจพจน์ 2 กฎการเปลี่ยนกลุ่มได้ (associative law)

$x + (y + z) = (x + y) + z$

$x(yz) = (xy)z$

สัจพจน์ 3 กฎการกระจาย (distributive law)

$x(y + z) = xy + xz$

สัจพจน์ 4 การมีเอกลักษณ์

สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมีจำนวนจริง 2 จำนวน คือ 0,1 ซึ่ง

$x + 0 = 0 + x = x$

$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$

สัจพจน์ 5 การมีนิเสธ

สำหรับทุก ๆ $x \in R$ จะมี $y \in R$ ซึ่ง $x + y = y + x = 0$

สัจพจน์ 6 การมีตัวผกผัน (inverse)

สำหรับทุก ๆ $x \in R - \{0\}$ จะมี $y \in R$ ซึ่ง $xy = yx = 1$

โดยอาศัยสัจพจน์ทั้ง 6 ข้อ ข้างต้นจะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2 ถ้า $a + b = a + c$ ดังนั้น $b = c$

พิสูจน์ ให้ $a + b = a + c$

จากสัจพจน์ 5 จะได้ว่ามีจำนวนจริง y ซึ่ง $y + a = 0$

แต่ $y + (a + b) = y + (a + c)$

โดยอาศัยสัจพจน์ 2 จะได้

$$(y + a) + b = (y + a) + c$$

$$0 + b = 0 + c$$

จากสัจพจน์ 4 $0 + b = b$ และ $0 + c = c$

ดังนั้น $b = c$ ∎

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้วจะมี x เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง

$x + a = b$ (x ในที่นี้คือ $b - a$)

พิสูจน์ ให้ $a, b \in R$

เพราะฉะนั้นจะมี y ซึ่ง $y + a = 0$

ให้ $x = b + y$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} x + a &= (b + y) + a \\ &= b + (y + a) \\ &= b + 0 \\ &= b \end{aligned}$$

จะต้องพิสูจน์ว่ามี x เพียงตัวเดียวเท่านั้น สมมุติว่ามี x' ซึ่ง

$x' + a = b$

เพราะฉะนั้น $x + a = x' + a$

ใช้ทฤษฎีบท 1.2 จะได้ $x = x'$ ∎

ทฤษฎีบท 1.4 $b - a = b + (-a)$

พิสูจน์ ให้ $x = b - a$ และ $y = b + (-a)$

ต้องการแสดงว่า $x = y$

จากทฤษฎีบท 1.2 จะได้ว่า $x + a = b$

เพราะว่า $y + a = (b + (-a)) t\ a$

$= b + ((-a) + a)$

$= b + 0$

$= b$

เพราะฉะนั้น $x + a = y + a$

จะได้ $x = Y$ ∎

ทฤษฎีบท 1.5 $-(-a) = a$

พิสูจน์ เพราะว่า $a\ t\ (-a) = 0$

และ $-4-a) + (-a) = 0$

ดังนั้น $a + (-a) = -(-a) + (-a)$

จะได้ว่า $a = -(-a)$ ∎

ทฤษฎีบทต่อไปนี้ใช้การพิสูจน์แบบข้างต้นโดยอาศัยสัจพจน์ทั้ง 6 ข้อให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 1.6 $a(b - c) = ab - ac$

ทฤษฎีบท 1.7 $0.a = a.0 = 0$

ทฤษฎีบท 1.8 ถ้า $ab = ac$ และ $a \neq 0$ แล้วจะได้ $b = c$

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า a,b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ แล้วจะมี x เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $ax = b$ (x ในที่นี้คือ $\frac{b}{a}$)

เรียก $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ว่า ตัวผกผันของ a

ทฤษฎีบท 1.10 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $\frac{b}{a} = ba^{-1}$

ทฤษฎีบท 1.11 ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $(a^{-1})^{-1} = a$

<u>ทฤษฎีบท 1.12</u> ถ้า $ab = 0$ ดังนั้น $a = 0$ หรือ $b = 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.13</u> $(-a)b = -ab$ และ

$(-a)(-b) = ab$

<u>ทฤษฎีบท 1.14</u> $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.15</u> $(\frac{a}{b})(\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$ เมื่อ $b \neq 0, d \neq 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.16</u> $\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{ad}{bc}$ เมื่อ $b \neq 0$, $c \neq 0$ และ $d \neq 0$

สำหรับจำนวน a,b ใด ๆ เรามีความสัมพันธ์ระหว่าง a,b คือเท่ากับและไม่เท่ากับ สำหรับความสัมพันธ์ไม่เท่ากับนั้นมีใช้อยู่ 4 แบบคือ น้อยกว่า มากกว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ มากกว่าหรือเท่ากับ โดยใช้สัญลักษณ์ $<$, $>$, $\leq$ และ $\geq$ ซึ่งมีความหมายดังนี้

$x < y$ หมายถึง $y - x$ มีค่าบวก

$x > y$ หมายถึง $y < x$

$x \leq y$ หมายถึง $x < y$ หรือ $x = y$

$x \geq y$ หมายถึง $y \leq x$

ดังนั้นเราจะได้ว่า $x > 0$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ x มีค่าบวก ถ้า $x < 0$ เราจะบอกได้ว่า x เป็นค่าลบ ถ้า $x \geq 0$ กล่าวได้ว่า x ไม่เป็นค่าลบ

จากความสัมพันธ์ข้างบนเราได้สัจพจน์ต่อไปนี้

<u>สัจพจน์ 7</u> ถ้า $x > 0$, $y > 0$ แล้ว $x + y > 0$, $xy > 0$

<u>สัจพจน์ 8</u> สำหรับ $x \in R$, $x \neq 0$ แล้ว $x > 0$ หรือ $x < 0$

โดยใช้สัจพจน์ 7-8 จะได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.17 (Trichotomy law)

สำหรับ $a, b \in R$ แล้ว $a < b$ หรือ $a > b$ หรือ $a = b$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ $x = b - a$

ถ้า $x = 0$ ดังนั้น $b - a = a - b = 0$ จะได้ว่า $a = b$

ถ้า $x \neq 0$ โดยสัจพจน์ 8 จะได้ว่า $x > 0$ หรือ $x < 0$

ดังนั้น $b - a > 0$ หรือ $b - a < 0$

นั่นคือ $a < b$ หรือ $a > b$ ∎

ทฤษฎีบท 1.18 (กฎการถ่ายทอด)

ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

พิสูจน์ ถ้า $a < b$ และ $b < c$ ดังนั้น $b - a > 0$ และ $c - b > 0$

โดยใช้สัจพจน์ 7 จะได้ว่า

$$(b - a) + (c - b) > 0$$

$$c - a > 0$$

นั่นคือ $a < c$ ∎

ทฤษฎีบท 1.19 ถ้า $a < b$ แล้ว $a + c < b + c$

พิสูจน์ ให้ $a < b$

ดังนั้น $b - a > 0$

ให้ $x = a + c,\ y = b + c$

ดังนั้น $y - x = b - a > 0$

จะได้ว่า $x < y$

นั่นคือ $x + c < b + c$ ∎

ในทำนองเดียวกันโดยใช้สัจพจน์ และทฤษฎีข้างต้น จะพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไปนี้ได้

<u>ทฤษฎีบท 1.20</u> ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$

<u>ทฤษฎีบท 1.21</u> ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

<u>ทฤษฎีบท 1.22</u> ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.23</u> $1 > 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.24</u> ถ้า $a < b$ แล้ว $-a > -b$

โดยเฉพาะอย่างยิ่ง ถ้า $a < 0$ แล้ว $-a > 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.25</u> ถ้า $ab > 0$ แล้ว $a > 0$, $b > 0$ หรือ $a < 0$, $b < 0$

<u>ทฤษฎีบท 1.26</u> ถ้า $a < c$ และ $b < d$ แล้ว $a + b < c + d$

1.16 ขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ค่าสูงสุด ค่าต่ำสุด

(Upper bound, Lower bound, maximum element, minimum element)

นิยาม 1.27 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า u เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \leq u$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ แล้วเรียก u ว่าขอบเขตบน (upper bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ u.b.S

ถ้า u_o เป็นขอบเขตบนของ S และ $u_o \leq u$ สำหรับทุกค่า u ซึ่งเป็นขอบเขตบนของ S แล้วเรียก u_o ว่า ขอบเขตบนต่ำสุด (least upper bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ l.u.b.S

นิยาม 1.28 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า l เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \geq l$ สำหรับทุก ๆ $x \in S$ แล้วเรียก l ว่าขอบเขตล่างของ (lower bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ l.b.S

ถ้า l_o เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l_o \geq l$ สำหรับทุกค่า l ซึ่งเป็นขอบเขตล่างของ S แล้วเรียก l_o ว่าขอบเขตล่างสูงสุด (greastest lower bound) ของ S เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ g.l.b.S

นิยาม 1.29 ถ้า u เป็นขอบเขตบนของ S และ $u \in S$ แล้วเรียก u ว่า ค่าสูงสุด (maximum element) ของ S แทนด้วย

$$u = \max.S$$

ถ้า l เป็นขอบเขตล่างของ S และ $l \in S$ แล้วเรียก l ว่า ค่าต่ำสุด (minimum element) ของ S แทนด้วย

$$l = \min.S$$

__ตัวอย่าง__ 1.14 กำหนด $S = [0,1]$, $T = (0,1)$

จงหาค่าของขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด

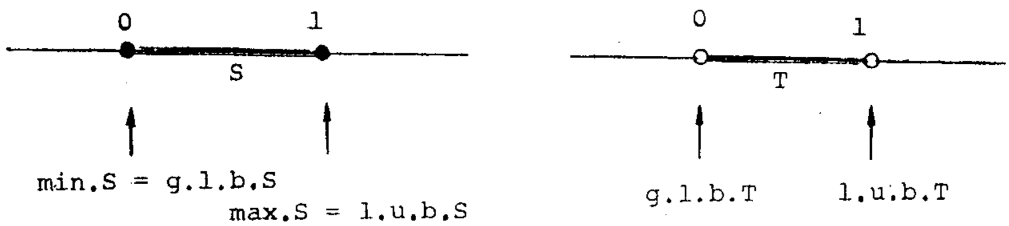
__วิธีทำ__ ขอบเขตบนของ S คือจำนวนจริงซึ่งมากกว่าหรือเท่ากับ 1

ขอบเขตล่างของ S คือจำนวนจริงซึ่งน้อยกว่าหรือเท่ากับ 0

$$\text{l.u.b.S} = 1$$

$$\text{g.l.b.S} = 0$$

สำหรับเซต T มีขอบเขตบนขอบเขตล่าง l.u.b.T , g.l.b.T เท่ากับของ S แต่แตกต่างกันเพียงเซต S มีค่าสูงสุดคือ 1 มีค่าต่ำสุดคือ 0 แต่ T ไม่มีทั้งค่าสูงสุด และค่าต่ำสุด ■



รูป 1.7

<u>หมายเหตุ</u> บางครั้งจะใช้สัญลักษณ์ sup S (supremum of S) แทน l.u.b.S และ inf S (infimum of S) แทน g.l.b.S

ทฤษฎี 1.27 ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ แล้วขอบเขตบนต่ำสุดของ S (ถ้ามี) จะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น (และขอบเขตล่างสูงสุดของ S มีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น)

<u>พิสูจน์</u> ให้ u_1, u_2 เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ S

โดยสัจพจน์จะได้ว่า $u_1 < u_2$ หรือ $u_2 < u_1$ หรือ $u_1 = u_2$

ถ้า $u_1 < u_2$ เพราะว่า u_2 เป็นขอบเขตบนต่ำสุด

ดังนั้น u_1 ไม่เป็นขอบเขตบน ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ในทำนองเดียวกัน $u_2 < u_1$ ก็เป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $u_1 = u_2$ ■

เซตโดยทั่ว ๆ ไปถ้าเป็นสับเซตของ R อาจมีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง หรือไม่มีขอบเขตบน ขอบเขตล่างก็ได้ ถ้ามีทั้งขอบเขตบน ขอบเขตล่าง เรียกว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตจำกัด (bounded set) แต่อย่างไรก็ตาม ถ้า S เป็นเซตที่มีขอบเขตบน แล้ว S จะมีขอบเขตบนต่ำสุด ถ้า S มีขอบเขตล่างแล้ว S จะมีขอบเขตล่างสูงสุด

<u>ตัวอย่าง</u> 1.15 จงยกตัวอย่างเซตที่มีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง ไม่มีขอบเขตบน ไม่มีขอบเขตล่าง

<u>วิธีทำ</u>
(1) $[0,7)$ มีขอบเขตบน ขอบเขตล่าง
(2) $(-3,\infty)$ มีขอบเขตล่าง ไม่มีขอบเขตบน
(3) $(-\infty, 7]$ มีขอบเขตบน ไม่มีขอบเขตล่าง
(4) $(-\infty,\infty)$ ไม่มีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง ∎

1.17 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value)

นิยาม 1.30 ถ้า x เป็นจำนวนจริง ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) ของ x คือค่าจำนวนจริงบวก ใช้สัญลักษณ์ $|x|$ นิยามดังนี้

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

<u>ข้อสังเกต</u>
1. $|x| \geq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$

ทฤษฎีบท 1.28 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ

(1) $|-x| = |x|$

(2) $|xy| = |x||y|$

(3) $-|x| \leq x \leq |x|$

(4) ถ้า $a \geq 0$ แล้ว $|x| \leq a$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$

พิสูจน์ ข้อ (1), (2) และ (3) พิสูจน์โดยการแบ่งกรณี และใช้นิยามให้ทำเป็นแบบฝึกหัดข้อ(4) เรามีประโยคที่ต้องพิสูจน์ 2 ประโยคคือ

ถ้า $|x| \leq a$ แล้ว $-a \leq x \leq a$ และ $-a \leq x \leq a$ แล้ว $|x| \leq a$

($\Rightarrow$) ให้ $|x| \leq a$

ดังนั้น $-a \leq -|x|$

แต่จาก (3) $-|x| \leq x \leq |x|$

ดังนั้น $-a \leq -|x| \leq x \leq |x| \leq a$

นั่นคือ $-a \leq x \leq a$

($\Leftarrow$) ให้ $-a \leq x \leq a$

ดังนั้น เมื่อ $x \geq 0$, $|x| = x \leq a$

และเมื่อ $x < 0$, $|x| = -x \leq a$

ทั้ง 2 กรณีสรุปได้ว่า $|x| \leq a$ ∎

ทฤษฎีบท 1.29 (Triangle Inequality)

สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ $|x + y| \leq |x| + |y|$

พิสูจน์ จาก $-|x| \leq x \leq |x|$

$-|y| \leq y \leq |y|$

เพราะฉะนั้น $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$

โดยทฤษฎีบท 1.28 (4) จะได้ว่า

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| \qquad \blacksquare$$

ถ้าให้ $x = a - c$, $y = c - b$ ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$|a - b| \leqslant |a - c| + |c - b|$$

ซึ่งความสัมพันธ์อันนี้มีประโยชน์มากในการพิสูจน์ทางการวิเคราะห์จำนวนจริง ___

ทฤษฎีบท 1.30 สำหรับจำนวนจริง $a_1, a_2, \ldots, a_n$ จะได้ว่า

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|$$

โดยที่ $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

<u>พิสูจน์</u> เราพิสูจน์โดยใช้วิธีการอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ อสมการเป็นจริงเพราะว่า $|a_1| \leqslant |a_1|$

สมมุติให้จริงที่ $n = p$ ต้องการแสดงว่าอสมการเป็นจริงเมื่อ $n = p + 1$

นั่นคือ $\left|\sum_{k=1}^{p} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k|$

พิจารณา
$$\left|\sum_{k=1}^{p+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_k + a_{p+1}\right| \leqslant \left|\sum_{k=1}^{p} a_k\right| + |a_{p+1}|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{p} |a_k| + |a_{p+1}|$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} |a_k|$$

แสดงว่า $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ สำหรับทุกค่า n ∎

ทฤษฎีบท 1.31 (Cauchy - Schwarz Inequality)

ถ้า $a_1, a_2, \ldots, a_n$ และ $b_1, b_2, \ldots, b_n$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

จะได้ว่า $$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) \qquad \ldots.(*)$$

พิสูจน์ เราทราบว่า $(a_k x + b_k)^2 \geq 0$ สำหรับ $k = 1,2,3,\ldots,n$ และสำหรับทุก x

เพราะฉนั้น $$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \quad 0$$

ดังนั้น ถ้าให้ $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ $B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ และ

$$C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

ดังนั้น $$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = Ax^2 + 2Bx + C \geq 0 \qquad \ldots.(**)$$

ถ้า $A = 0$ จะได้ $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$ จะได้ $a_k = 0$ สำหรับแต่ละค่า k

ดังนั้นสมการ $(*)$ เป็นจริง

ถ้า $A \neq 0$ ดังนั้น

$$Ax^2 + 2Bx + C = A\left(x + \frac{B}{A}\right)^2 + \frac{AC - B^2}{A}$$

ซึ่งทางซ้ายมือของสมการมีค่าน้อยที่สุด เมื่อ $x = -\frac{B}{A}$

แทน $x = -\frac{B}{A}$ ใน (**) จะได้

$A(-\frac{B}{A})^2 + 2B(-\frac{B}{A}) + C \geqslant 0$

$-\frac{B^2}{A} + C \geqslant 0$

$B^2 \leqslant AC$ (เพราะว่า $A > 0$)

แทนค่า $(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_k^2)(\sum_{k=1}^{n} b_k^2)$ ∎

1.18 คุณสมบัติของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 1.32 คุณสมบัติอาร์คีมีเดียนของจำนวนจริง (Archimedean property)

กำหนดให้ $x \in R$ และ $x > 0$ แล้วจะมี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$

<u>พิสูจน์</u> สมมุติว่าไม่มี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$

แสดงว่าทุก ๆ $n \in N$, $n \leqslant x$

ดังนั้น x เป็นขอบเขตบนของ N

แต่เมื่อ N มีขอบเขตบน N จะมีขอบเขตบนต่ำสุด

ให้ u_o เป็นขอบเขตบนต่ำสุดของ N

แต่สำหรับ $n \in N$, $n + 1 \in N$ ด้วย

เพราะฉะนั้น $n + 1 \leqslant u_o$

$n \leqslant u_o - 1$

ดังนั้น $u_o - 1$ เป็นขอบเขตบนของ N ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น จะมี $n \in N$ ซึ่ง $x < n$ ∎

บทแทรก ถ้า $x \in R$ ซึ่ง $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$ แล้ว $x = 0$

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 1.32 และการพิสูจน์หาข้อขัดแย้ง ■

นอกจากคุณสมบัติอาร์คีมีเดียนของจำนวนจริงแล้ว ในระบบจำนวนจริงยังมีคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ ซึ่งไม่ได้แสดงการพิสูจน์ไว้ในที่นี้ ดังนี้

(1) สำหรับ $a > 0$ ใด ๆ จะมี $x > 0$ ซึ่ง $x^2 = a$

(2) ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวนย่อมมีจำนวนตรรกยะ

(3) ระหว่างจำนวนตรรกยะ 2 จำนวนย่อมมีจำนวนอตรรกยะ

(4) ระหว่างจำนวนจริง 2 จำนวน ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ

แบบฝึกหัด 1

เซต

1. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

 (1) $\{x \mid x \in I \text{ , } x^2 - 2x + 1 = 0\}$

 (2) $\{x \mid x \in N, 4 \leqslant x \leqslant 10\}$

 (3) $\{x \mid x \in N, x^2 < 10\}$

2. จงเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไข

 (1) $\{1,2,3\}$

 (2) $\{1,2,4,8,16,32,...\}$

3. จงเขียนสับเซตทั้งหมดของ $\{1,2,3,4\}$

4. กำหนด U = เซตของตัวอักษรภาษาอังกฤษทั้งหมด $A = \{a,e,i,o,u\}$

$B = \{c,d,e,i,r\}$, $C = \{x,y,z\}$ จงหา

(1) A' (2) $A \cup B$

(3) $(A \cup B) \cup C$ (4) $A - B$

(5) $B - A$ (6) $A \cap B$

(7) $A' \cap C$ (8) $U - [(A \cup B) \cup C]$

(9) $(A \cap B) \cup C$

5. จงใช้แผนภาพเวนน์แสดงว่า กฎของการกระจาย และกฎของเดอ มอร์กอง เป็นจริง

6. จงพิสูจน์ว่า $A \cap B' = A - B$ และ $(A - B) \cap B = \Phi$

วิธีการพิสูจน์

7. จงพิสูจน์ว่า $(A \cup B) \cap B' = A$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \Phi$

8. จงพิสูจน์ว่า $A \subseteq B$ เมื่อและก็ต่อเมื่อ $B' \subseteq A'$

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$, $n = 1,2,3,\ldots$

แล้ว $S_n = \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ เมื่อ $|r| < 1$

10. ถ้า $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$ จงพิสูจน์ว่า

$$S_n = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1)$$

11. จงแสดงว่า $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

ความสัมพันธ์

12. ให้ $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$ และ $C = \{c,d\}$ จงหาค่าของ

(1) $(A \times B) \cup (A \times C)$ (3) $A \times (B \cup C)$

(2) $A \times (B \cap C)$

13. กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ และ $B = \{1,4,6\}$ r แทนความสัมพันธ์ "<" จาก A ไปยัง B

(1) จงแจกแจงสมาชิกของ r

(2) เขียนกราฟในระนาบ xy

14. กำหนดความสัมพันธ์ $r = \{(a,a),(b,c),(c,b)\}$ บน $x = \{a,b,c\}$ แล้ว จงหาว่า r มีคุณสมบัติใดต่อไปนี้

(1) คุณสมบัติสะท้อน

(2) คุณสมบัติสมมาตร

(3) คุณสมบัติถ่ายทอด

15. กำหนดให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลย์ บน A จงพิสูจน์ว่า ถ้า $c\ r\ a$ และ $c\ r\ b$ แล้ว $a\ r\ b$ สำหรับ $a,b,c, \varepsilon A$

ฟังก์ชัน

16. ถ้า F เป็นฟังก์ชันนิยามบน R โดยที่ $y = F(x) = 1 + x^2$ จงหา $F(1)$, $F(-1)$ และ $F(\frac{1}{2})$

17. ให้ $F : N \to N$ นิยามโดย $F(n) = n^2 + 3$ จงแสดงว่า F เป็นฟังก์ชันชนิดหนึ่งต่อหนึ่ง แต่ไม่เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

18. พิจารณาฟังก์ชัน $F : N \to N$ โดยที่ $F(n) = n + 1$ และ $G : N \to N$ โดยที่ $G(n) = n^2$ จงหาฟังก์ชันประกอบ FoF , FoG และ GoG

19. ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปบน B และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก B ไปยัง A จงแสดงว่า

$$(fog)^{-1} = g^{-1}of^{-1}$$

20. ให้ $A = \{1,2,3,4\}$ และพิจารณา

$f = \{(1,3),(3,3),(4,1),(2,2)\}$

$g = \{(1,4),(2,1),(3,1),(4,2)\}$

(1) f และ g เป็นฟังก์ชันหรือไม่

(2) จงหาเรนจ์ของ f และ g

21. จงพิสูจน์ว่า $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

22. จงพิสูจน์ว่า $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$

23. ข้อความนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างที่ไม่จริง

$$f(A - B) = f(A) - f(B)$$

จำนวนจริง

24. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) $-0 = 0$

(2) $1^{-1} = 1$

(3) $-(a + b) = -a - b$

(4) $-(a - b) = -a + b$

(5) $(a - b) + (b - c) = a - c$

(6) ถ้า $a \neq 0$, $b \neq 0$ แล้ว $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$

25. จงพิสูจน์ว่าไม่มี $x \in R$ ซึ่ง $x^2 + 1 = 0$

26. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

(1) ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$ และถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$

(2) ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

(3) ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$

(4) ถ้า $a r b$ และ $b d c$ และ $a = c$ แล้ว $b = c$

27. สำหรับเซต S ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาขอบเขตบน ขอบเขตล่าง l.u.b.S และ g.l.b.S

(1) $S = \{1,3,5\}$

(2) $S = ix \mid 0 \leqslant x < 7\}$

(3) $S = \{\frac{n}{n+1} \mid n \in N\}$

(4) $S = \{x \mid x \in R+,\ 0 < x^2 - 1 \leqslant 21$

(5) $S = \{x \mid x \in R,\ \frac{x-1}{x-3} \leqslant 0\}$

28. ถ้า $A \subseteq B \subseteq R$ และ B มีขอบเขตจำกัด คือมีทั้งขอบเขตบน และขอบเขตล่าง แล้ว $Sup. A \leqslant Sup. B$ และ $inf.\ A \geqslant inf.\ B$

29. จงหาจำนวนจริง x ซึ่งสอดคล้องกับอสมการ

(1) $|x - 2| \leqslant 8$

(2) $|x - 2| > 1$

30. จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนจริง xy ใด ๆ

(1) $|x - y| = |y - x|$

(2) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

★ ★ ★