บทที่ 7
การอินทิเกรต

หัวข้อเรื่อง

7.1 รีมันน์อินทิกรัล
7.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้
7.3 ฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้บางจำพวก
7.4 ทฤษฎีบทพื้นฐานของคัลคูลัส
7.5 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ
   7.5.1 ฟังก์ชันบนช่วงกึ่งอนันต์ $[a, +\infty)$ และ $(-\infty\ a]$
   7.5.2 ฟังก์ชันบนช่วงครึ่งเปิดทางขวา $[a, b)$ และครึ่งเปิดทางซ้าย $(a, b]$
   7.5.3 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 7 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. เขียนพื้นที่เป็นรีมันน์อินทิกรัลได้
2. แสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้สามารถหาอินทิกรัลได้หรือไม่
3. แสดงคุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้
4. บอกลักษณะเฉพาะของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้
5. บอกความแตกต่างของอนุพันธ์กับอินทิเกรตซึ่งมีความสัมพันธ์กันในทฤษฎีบทพื้นฐานทางคัลคูลัสได้
6. แสดงการหาค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันบนช่วง $[a, +\infty)$, $(-\infty\ a]$ $[a, b)$ และ $(a, b]$ ได้
7. บอกได้ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่กำหนดให้ลู่เข้าหรือลู่ออก
8. บอกได้ว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันที่กำหนดให้ที่ลู่เข้านั้น ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

บทที่ 7
การอินทิเกรต
(INTEGRATION)

ในบทนี้จะศึกษาวิเคราะห์ความคิดพื้นฐานทางคัลคูลัสต่อไปโดยการพิจารณาถึงอินทิกรัลเชิงรีมันน์ คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถอินทิเกรตได้ตลอดจนทฤษฎีบทพื้นฐานทางคัลคูลัสและอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

7.1 อินทิกรัลเชิงรีมันน์ (THE RIEMANN INTEGRAL)

ในเรื่องนี้จะกล่าวถึงเฉพาะเซตของฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัดเท่านั้นและก่อนจะกล่าวถึงนิยามของอินทิกรัลนั้นก็จำเป็นจะต้องกล่าวถึงสิ่งที่เป็นพื้นฐานเสียก่อน คือ

บทนิยาม 7.1.1 สำหรับช่วงปิด $S = [a,b]$ ใด ๆ ความยาวของช่วง S ซึ่งเขียนแทนด้วย $|S|$ ก็คือ $b-a$

บทนิยาม 7.1.2 สำหรับผลแบ่งกั้น (partition) $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของช่วง $[a,b]$ ใด ๆ จะเรียกช่วงย่อย

$$I_k = [x_{k-1}, x_k] \quad \text{เมื่อ} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

ว่า "ช่วงย่อยที่ k ของผลแบ่งกั้น P"

บทนิยาม 7.1.3 ถ้า P และ P' ต่างก็เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ จะกล่าวว่า P' เป็นรีไฟน์เมนต์ (refinement) ของผลแบ่งกั้น P ถ้า $P' \supseteq P$ (หรือ $P \subseteq P'$)

บทนิยาม 7.1.4 ให้ P เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ สำหรับช่วงย่อยที่ k ของผลแบ่งกั้น P

กำหนดให้ $M_k(f) = \text{l.u.b.}\ \{f(x) : x \in I_k\}$

และ $m_k(f) = \text{g.l.b.}\ \{f(x) : x \in I_k\}$

สำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

บทนิยาม 7.1.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[a,b]$ จะเรียก

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)\,|I_k|$$

และ $$L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)\,|I_k|$$

ว่าผลรวมรีมันน์บน (upper Riemann sums) และผลรวมรีมันน์ล่าง (lower Riemann sums) ของ f ซึ่งสอดคล้องกับผลแบ่งกั้น P ตามลำดับ

จะเห็นได้โดยง่ายว่า $m_k(f) \leqslant M_k(f)$

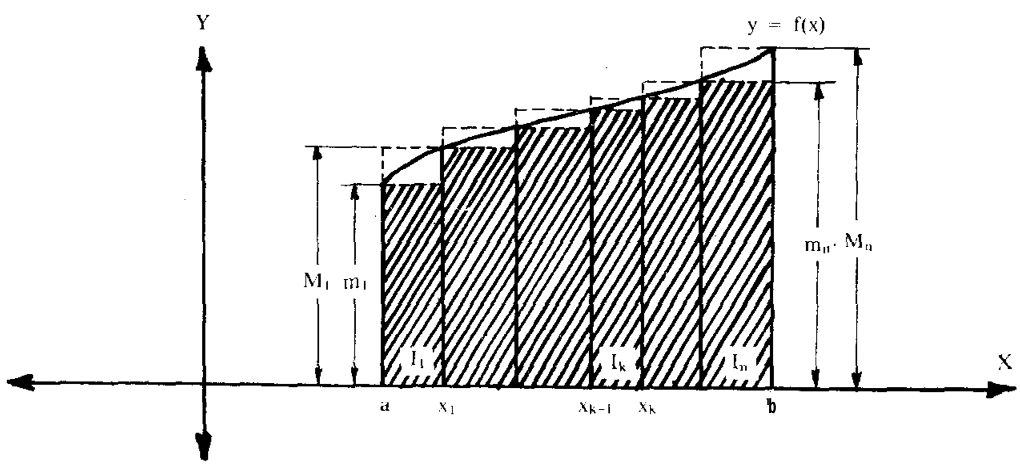
สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ดังนั้น $L(P,f) \leqslant U(P,f)$

ข้อสังเกต ถ้า f มีความต่อเนื่องและมีค่าไม่เป็นลบบน $[a,b]$ แล้ว U(P,f) ก็คือ ผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป ซึ่งแต่ละรูปมีช่วงย่อย I_k เป็นฐานเมื่อ $k = 1, 2, \ldots, n$ (รูปที่ 1 ก็มี I_1 เป็นฐาน, รูปที่ 2 ก็มี I_2 เป็นฐาน...) และความสูงของแต่ละรูปเท่ากับ "ค่าสูงสุดของ f(x) เมื่อ $x \varepsilon I_k$"

นั่นคือ U(P,f) ก็คือ ผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าแนบนอกหรือเขียนล้อม f (circumscribed rectangles) ดังเช่นรูปในหนังสือคัลคูลัสทั่ว ๆ ไป ในทำนองเดียวกัน L(P,f) ก็คือ ผลรวมของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าเขียนแนบใน f (inscribed rectangles) นั่นเอง

ดูรูป 7.1.1



รูป 7.1.1

อนึ่งจะพบว่าความสัมพันธ์ระหว่างผลรวมรีมันน์บน (Upper Riemann sums) กับผลรวมรีมันน์ล่าง (Lower Riemann sums) ซึ่งสอดคล้องกับผลแบ่งกั้นของ $[a,b]$ ที่ต่างกันมีดังนี้

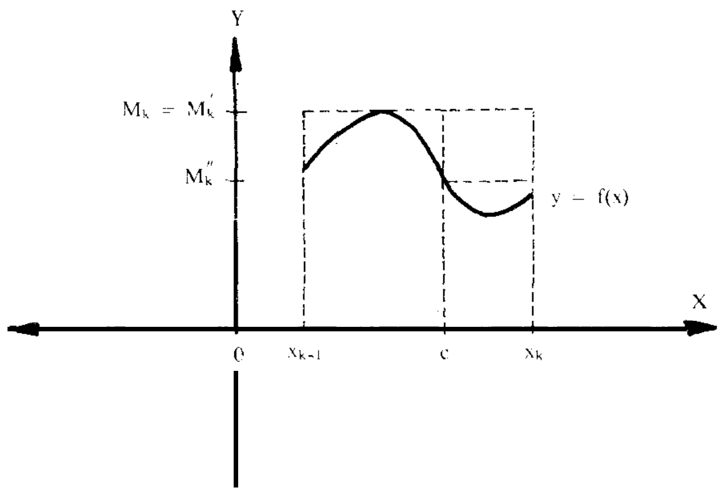
ทฤษฎีบท 7.1.1 สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$

1) $U(P',f) \leq U(P,f)$ และ $L(P',f) \geq L(P,f)$ สำหรับทุก ๆ $P' \supseteq P$

2) $L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$ สำหรับผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ใด ๆ

พิสูจน์

1) พิจารณาเมื่อ $P' = P \cup \{c\}$ โดยสมมุติว่า $c \varepsilon I_k$ ก็เป็นการเพียงพอแล้ว พิจารณารูป 7.1.2 ซึ่งแสดงถึงฟังก์ชัน f บนช่วงย่อยที่ k ของ P



รูป 7.1 2

ถ้าให้ $M_k' = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \varepsilon [x_{k-1}, c]\}$

และ $M_k'' = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \varepsilon [c, x_k]\}$

แล้ว $M_k' \leq M_k$ และ $M_k'' \leq M_k$

และดังนั้น $M'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c) \leq M_k(x_k - x_{k-1})$

เพราะฉะนั้น $U(P',f) \leq U(P,f)$

ในทำนองเดียวกันก็อาจจะพิสูจน์ได้ว่า $L(P',f) \geq L(P,f)$

2) พิจารณาผลแบ่งกั้น $P = P_1 \cup P_2$ แล้ว

$$P \supseteq P_1 \quad \text{และ} \quad P \supseteq P_2$$

และจาก 1) เราจะได้ว่า

$$L(P_1,f) \leqslant L(P,f) \leqslant U(P,f) \leqslant U(P_2,f)$$

บทแทรก สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน [a,b]

ถ้า $M = \text{l.u.b.} \{f(x) : x \varepsilon [a,b]\}$

และ $m = \text{g.l.b.} \{f(x) : x \varepsilon [a,b]\}$

แล้ว $m(b-a) \leqslant L(P_1,f) \leqslant U(P_2,f) \leqslant M(b-a)$

สำหรับผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ใด ๆ ของ [a,b]

จากบทแทรกนี้ทำให้ทราบว่า

เซต $\{U(P,f)$: สำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น P ของ $[a,b]\}$

และเซต $\{L(P,f)$: สำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น P ของ $[a,b]\}$ ย่อมมีขอบเขตจำกัด

บทนิยาม 7.1.6 สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน [a,b] จะเรียก

$\overline{\int} f =$ g.l.b. $\{U(P,f)$: สำหรับผลแบ่งกั้น P ทั้งหมดของ $[a,b]\}$ และ

$\underline{\int} f =$ l.u.b. $\{L(P,f)$: สำหรับผลแบ่งกั้น P ทั้งหมดของ $[a,b]\}$

ว่าอินทิกรัลเชิงรีมันน์บน (upper Riemann integral) และอินทิกรัลเชิงรีมันน์ล่าง (lower Riemann integral) ของ f ตามลำดับ

เนื่องจาก $L(P_1,f) \leqslant U(P_2,f)$ สำหรับผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ใด ๆ จึงได้ว่า

$$\underline{\int} f \leqslant \overline{\int} f$$

บทนิยาม 7.1.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน [a,b] แล้วจะกล่าวว่า f สามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ (Riemann integrable) บน [a,b] ได้ถ้า $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ ซึ่งจะเขียนแทนด้วย $\int f$ และเรียกว่าอินทิกรัลเชิงรีมันน์ของ f บน [a,b]

หมายเหตุ

1) จะใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f$ ถ้าต้องการเน้นเฉพาะช่วงซึ่ง f ถูกกำหนดคือ เฉพาะบนช่วง [a,b] เท่านั้น

2) จะใช้สัญลักษณ์ $\int_a^b f(x)\,dx$ เมื่อสนใจในความสัมพันธ์ของอินทิกรัลกับอนุพันธ์

ตัวอย่าง 7.1.1 จงทดสอบว่าฟังก์ชัน f บน [0,a] เมื่อ $a>0$ และ $f(x) = x^2$ สามารถหาอินทิกรัลได้หรือไม่ ?

พิจารณาผลแบ่งกั้น P_n ของ [0,a] ซึ่งแบ่ง [0,a] ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน

แล้วเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

$$\therefore\ M_k(f) = \left(\frac{ka}{n}\right)^2$$

และ $m_k(f) = \left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2$ สำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$U(P_n,f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{ka}{n}\right)^2 \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{1}{6} n\,(n+1)(2n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}a^3 \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\to \frac{1}{3}a^3 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

และ $$L(P_n,f) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(k-1)a}{n}\right)^2 \frac{a}{n}$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^2$$

$$= \frac{a^3}{n^3} \left(\frac{1}{6} n\,(n-1)(2n-1)\right)$$

$$= \frac{1}{6}a^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\to \frac{1}{3}a^3 \text{ ขณะที่ } n \to \infty$$

เพราะฉะนั้น $\overline{\int} f \leqslant \frac{a^3}{3}$ และ $\underline{\int} f \geqslant \frac{a^3}{3}$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\underline{\int} f = \overline{\int} f = \frac{a^3}{3}$

นั่นแสดงว่า f สามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ได้ และ $\int_0^a f = \frac{a^3}{3}$

ตัวอย่าง 7.1.2 จงทดสอบว่าฟังก์ชัน f บน $[0,1]$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

สามารถหาอินทิกรัลได้หรือไม่ ?

พิจารณาผลแบ่งกั้น P ใด ๆ ของ [0,1]

เนื่องจากจำนวนอตรรกยะและจำนวนตรรกยะมีอยู่อย่างหนาแน่นในจำนวนจริงจึงได้ว่า $M_k(f) = 1$

และ $m_k(f) = 0$ สำหรับแต่ละ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} 1.|I_k| = 1$$

และ

$$L(P,f) = \sum_{k-1}^{n} 0.|I_k| = 0$$

เพราะฉะนั้น $\int^{-} f = 1$ และ $\int_{-} f = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า f ไม่สามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ได้

หมายเหตุ ต่อไปนี้จะเรียกอินทิกรัลเชิงรีมันน์เพียงสั้น ๆ ว่า อินทิกรัล

ทฤษฎีบท 7.1.2 เงื่อนไขของรีมันน์ (Riemann's Condition)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน [a,b] แล้ว f จะสามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ได้ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมีผลแบ่งกั้น P_o ของ [a,b] ซึ่ง

$$U(P_o,f) - L(P_o,f) < \varepsilon$$

พิสูจน์

i) สมมุติว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขว่า สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมี P_o ซึ่ง $U(P_o,f) - L(P_o,f) < \varepsilon$

แล้ว $\int^{-} f \leqslant U(P_o,f) < L(P_o,f) + \varepsilon \leqslant \int_{-} f + \varepsilon$

ดังนั้น $0 \leqslant \int^{-} f - \int_{-} f \leqslant \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\int^{-} f = \int_{-} f$

นั่นคือ f สามารถหาอินทิกรัลได้

ii) ถ้า f สามารถหาอินทิกรัลได้ คือ $\int^{-} f = \int_{-} f$

ดังนั้น สำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะมีผลแบ่งกั้น P_o' ซึ่ง

$$U(P,f) < \int^{-} f + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad P \supseteq P_o'$$

และจะมีผลแบ่งกั้น P_o'' ซึ่ง

$$L(P,f) > \int_{-} f - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad P \supseteq P_o''$$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $P_o = P_o' \cup P_o''$

$$U(P_o,f) - L(P_o,f) < \varepsilon$$

ตัวอย่าง 7.1.3 สามารถใช้ทฤษฎีบท 7.1.2 กับตัวอย่าง 7.1.1 แสดงว่าฟังก์ชัน f สามารถหาอินทิกรัลได้โดยไม่ต้องหาค่าของอินทิกรัลโดยได้ว่า

$$\begin{aligned} U(P_n,f) \qquad L(P_n,f) &= \frac{a^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}(k^2 - (k-1)^2) \\ &= \frac{a^3}{n^3}\,n^2 \\ &= \frac{a^3}{n} \\ &\to 0 \quad \text{ขณะที่} \quad n \to \infty \end{aligned}$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 7.1.2 (เงื่อนไขของรีมันน์) จึงได้ว่าฟังก์ชัน f สามารถหาค่าอินทิกรัลได้

แบบฝึกหัด 7.1.1

1. ให้ $f(x) = x$ บนช่วง $[0,1]$ และให้ $P = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0,1]$ จงคำนวณหา $U(P,f)$ และ $L(P,f)$
2. จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน f บน $[0,a]$ เมื่อ $a>0$ โดย $f(x) = x^3$ สามารถหาอินทิกรัลได้ และ

   $\int_o^a f = \frac{1}{4} a^4$

   $$(\text{โดย } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2}{4} (n+1)^2)$$

3. จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันไซน์ (sine) ที่จำกัดอยู่ในช่วง $[0,a]$ เมื่อ $0<a\leqslant 1$ สามารถหาอินทิกรัลได้ และ $\int_o^a \sin x = 1 - \cos a$

   $$(\text{โดย } \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{n+1}{2} x \sin\frac{n}{2} x}{\sin\frac{x}{2}}$$ เมื่อ $x \neq 2m\pi$ สำหรับ m ที่เป็นจำนวนเต็มใด ๆ)

4. จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันชี้กำลังที่จำกัดอยู่ในช่วง $[0,a]$ เมื่อ $0<a\leqslant 1$ สามารถหาอินทิกรัลได้ และ $\int_o^a \exp = \exp a - 1$

   $$(\text{โดย } \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{ka}{n}} = e^{\frac{a}{n}} \frac{e^a - 1}{e^{\frac{a}{n}} - 1})$$

5. จงพิสูจน์ว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันขั้นบันได (step function) บน $[a,b]$ แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ และจงหา $\int_a^b f$

7.2 · คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้

(PROPERTIES OF INTEGRABLE FUNCTIONS)

ทฤษฎีบท 7.2.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้ว ฟังก์ชัน $f+g$ และฟังก์ชัน kf สำหรับ $k \varepsilon R$ ใด ๆ ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้ด้วย และ

i) $\int (f+g) = \int f + \int g$

ii) $\int (kf) = k \int f$

พิสูจน์

i) สำหรับผลแบ่งกั้น P ใด ๆ ของ $[a,b]$

จะได้ว่า $M_k(f+g) \leqslant M_k(f) + M_k(g)$

($\because$ ถ้า I_k เป็นช่วงย่อยใด ๆ ใน $[a,b]$ และถ้า $x \varepsilon I_k$ แล้วจะได้ว่า

$f(x) + g(x) \leqslant M_k(f) + M_k(g)$)

และจะได้ด้วยว่า $m_k(f+g) \geqslant m_k(f) + m_k(g)$

สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$

เพราะฉะนั้น $U(P,f+g) \leqslant U(P,f) + U(P,g)$

และ $L(P,f+g) \geqslant L(P,f) + L(P,g)$

เนื่องจาก f และ g สามารถหาอินทิกรัลได้ ดังนั้นโดย ท.บ. 7.1.2 (เงื่อนไขของรีมันน์) จะได้ว่า

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ ย่อมมีผลแบ่งกั้น P_o ของ $[a,b]$ ซึ่ง

$$U(P_o,f) - L(P_o,f) < \varepsilon$$

และ
$$U(P_o,g) - L(P_o,g) < \varepsilon$$

แล้ว
$$\begin{aligned} L(P_o,f) + L(P_o,g) &\leqslant L(P_o,f+g) \leqslant U(P_o,f+g) \\ &\leqslant U(P_o,f) + U(P_o,g) \\ &< L(P_o,f) + L(P_o,g) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $U(P_o,f+g) - L(P_o,f+g) < 2\varepsilon$

โดย ท.บ. 7.1.2 จึงกล่าวได้ว่าฟังก์ชัน $f+g$ สามารถหาอินทิกรัลได้ และ

$$L(P_o,f) + L(P_o,g) \leqslant \int (f+g) \leqslant L(P_o,f) + L(P_o,g) + 2\varepsilon$$

$$L(P_o,f) + L(P_o,g) \leqslant \int f + \int g \leqslant L(P_o,f) + L(P_o,g) + 2\varepsilon$$ ด้วย

เพราะฉะนั้น

$$\left| \int(f+g) - \left(\int f + \int g\right) \right| < 2\varepsilon$$

นั่นคือ $\int(f+g) = \int f + \int g$ #

ii) ให้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 7.2.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้ และ $f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$ แล้ว $\int f \leqslant \int g$

พิสูจน์ สำหรับผลแบ่งกั้น P ใด ๆ ของ $[a,b]$

$\because$ $M_k(f) \leqslant M_k(g)$ สำหรับแต่ละ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

เพราะฉะนั้น $U(P,f) \leqslant U(P,g)$

ดังนั้นจึงได้ว่า $\overline{\int} f \leqslant \overline{\int} g$

เนื่องจากทั้ง f และ g สามารถหาอินทิกรัลได้

จึงกล่าวได้ว่า $\int f \leqslant \int g$

ทฤษฎีบท 7.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้ว $|f|$ ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ และ $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$

พิสูจน์ สำหรับพาร์ติชัน P ใด ๆ ของ $[a,b]$

$$M_k(f) - m_k(f) = \text{l.u.b.}\{f(x) - f(y) : x,y \varepsilon I_k\}$$

สำหรับแต่ละ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

แต่สำหรับ $x,y \varepsilon I_k$ ใด ๆ

$$\big| |f(x)| - |f(y)| \big| \leqslant |f(x) - f(y)|$$

เพราะฉะนั้น $M_k(|f|) - m_k(|f|) \leqslant M_k(f) - m_k(f)$

และ $U(P,|f|) - L(P,|f|) \leqslant U(P,f) - L(P,f)$

แต่เนื่องจาก f สามารถหาอินทิกรัลได้ ดังนั้นโดย ท.บ.7.1.2 (เงื่อนไขของรีมันน์) จึงได้ว่า $|f|$ ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย

และเนื่องจาก $\pm f \leqslant |f|$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\left|\int f\right| \leqslant \int |f|$

ข้อสังเกต บทกลับของทฤษฎีบท 7.2.3 นี้ ไม่เป็นจริงเสมอไป เช่น ฟังก์ชัน f บน $[0,1]$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ -1, & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

จะเห็นว่า $|f(x)| = 1$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [0,1]$

ดังนั้น $|f|$ สามารถหาอินทิกรัลได้ แต่ f ไม่สามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้ว f^2 ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย

พิสูจน์ สำหรับผลแบ่งกั้น P ใด ๆ ของ $[a,b]$

$$M_k(f^2) = M_k(|f|)^2$$

และ $m_k(f^2) = m_k(|f|)^2$ สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} M_k(f^2) - m_k(f^2) &= \left(M_k(|f|)^2 - m_k(|f|)^2\right. \\ &= \left(M_k(|f|) + m_k(|f|)\right)\left(M_k(|f|) - m_k(|f|)\right) \\ &\leqslant 2M\,|M_k(|f|) - m_k(|f|) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\} \end{aligned}$$

เมื่อ $M = \text{l.u.b.}\ \{|f(x)| : x \varepsilon [a,b]\}$

ดังนั้น $U(P,f^2) - L(P,f^2) \leqslant 2M\ U(P,|f|) - L(P,|f|)$

จาก ท.บ.7.2.3 และเงื่อนไขของรีมันน์

จึงกล่าวได้ว่า f^2 สามารถหาอินทิกรัลได้ #

ทฤษฎีบท 7.2.5 ถ้า f และ g สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้ว fg ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย

พิสูจน์ จากความจริงที่ว่า $2fg = (f+g)^2 - g^2 - f^2$

โดย ท.บ.7.2.4 จึงได้ว่า fg สามารถหาอินทิกรัลได้

หมายเหตุ พิจารณาเซตของฟังก์ชันที่สามารถอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้ซึ่งจะเขียนแทนด้วยเซต $R[a,b]$ จากทฤษฎีบท 7.2.1 กล่าวว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้ว $f+g$ และ kf ซึ่ง $k \varepsilon R$ ย่อมเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้ด้วย จึงสามารถแสดงได้ด้วยว่าเซต $R[a,b]$ มีคุณสมบัติเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงจริง (real vectar space) ภายใต้การดำเนินการบวกกันของฟังก์ชันและการคูณฟังก์ชันด้วยจำนวนจริง ยิ่งกว่านั้นจากทฤษฎีบท 7.2.5 จะได้ว่า fg ก็เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้ด้วยจึงสามารถแสดงต่อไปได้อีกว่า $R[a,b]$ มีคุณสมบัติเป็นพีชคณิตสลับที่เชิงจริง (real commutative algebra) ภายใต้นิยามการคูณกันของฟังก์ชัน (ดูภาคผนวก)

ต่อไปจะศึกษาถึงการบวกกันของอินทิกรัลซึ่งสอดคล้องกับช่วงของการอินทิเกรต

ทฤษฎีบท 7.2.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a,b]$ และ $a<c<b$ และ f สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,c]$ และบน $[c,b]$ ได้แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้และ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

พิสูจน์ กำหนดให้ $\varepsilon>0$ จะมีผลแบ่งกั้น P_o' ของ [a,c] และ P_o'' ของ [c,b] ซึ่ง

$$U(P_o',f) - L(P_o',f) < \varepsilon$$

และ $U(P_o'',f) - L(P_o'',f) < \varepsilon$

พิจารณาผลแบ่งกั้น P_o ของ [a,b] โดย $P_o = P_o' \cup P_o''$

แล้ว $L(P_o,f) = L(P_o',f) + L(P_o'',f)$

และ $U(P_o,f) = U(P_o',f) + U(P_o'',f)$

ซึ่งจะได้ว่า $U(P_o,f) - L(P_o,f) < 2\varepsilon$

ดังนั้น f สามารถหาอินทิกรัลบน [a,b] ได้

แต่ $L(P_o,f) \leqslant \int_a^c f + \int_c^b f < L(P_o,f) + 2\varepsilon$

และ $L(P_o,f) \leqslant \int_a^b f < L(P_o,f) + 2\varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\left| \int_a^b f - (\int_a^c f + \int_c^b f)\right| < 2\varepsilon$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

นอกจากนี้ถ้า f สามารถหาอินทิกรัลบน [a,b] ได้แล้ว จะกล่าวได้ว่า

i) $\int_b^a f = -\int_a^b f$

และ

ii) $\int_a^a f = 0$

แบบฝึกหัด 7.2.1

1) ถ้าฟังก์ชัน f บน [a,b] สามารถหาอินทิกรัลได้ จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ ย่อมมีฟังก์ชันขั้นบันได g_1 และ g_2 บน [a,b] ซึ่ง

$g_2(x) \leqslant f(x) \leqslant g_1(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$ แล้ว

$\int (g_1 - f) < \varepsilon$ และ $\int (f - g_2) < \varepsilon$

2) สำหรับฟังก์ชัน f บน [a,b] ใด ๆ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้แล้วจะมีฟังก์ชันขั้นบันได g_1 และ g_2 บน [a,b] ซึ่ง $g_2(x) \leqslant f(x) \leqslant g_1(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$ และ $\int (g_1 - g_2) < \varepsilon$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า f สามารถหาอินทิกรัลได้

3) ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน [a,b] ได้ จงพิสูจน์ว่า f ย่อมมีอินทิกรัลบน [a,c] สำหรับทุก ๆ $c \varepsilon [a,b]$

7.3 ฟังก์ชันบางชนิดที่สามารถหาอินทิกรัลได้
(SOME CLASSES OF INTEGRABLE FUNCTIONS)

ทฤษฎีบท 7.3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวบน [a,b] แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

พิสูจน์ ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะในกรณีที่ f มีค่าเพิ่มขึ้นบน [a,b] พิจารณาผลแบ่งกั้น P_n ของ [a,b] ซึ่งได้จากการแบ่ง [a,b] ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน แล้ว $M_k(f) = f(x_k)$ และ $m_k(f) = f(x_{k-1})$ สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

เพราะฉะนั้น $U(P_n,f) = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)$

และ $L(P_n,f) = \dfrac{b-a}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_{k-1})$

จึงได้ว่า

$$U(P_n,f) - L(P_n,f) = \frac{b-a}{n} \{f(b) - f(a)\}$$

ซึ่งจะทำให้มีค่าน้อยเท่าไรก็ได้ สำหรับค่า $n \varepsilon N$ ที่ใหญ่พอ

ดังนั้น โดยเงื่อนไขของรีมันน์ (ท.บ. 7.1.2) จึงกล่าวได้ว่า f สามารถหาอินทิกรัลได้

ตัวอย่าง 7.3.1 พิจารณาฟังก์ชัน f บน [0,1] ซึ่ง

$f(x) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ เมื่อ $\dfrac{1}{2^n} < x \leqslant \dfrac{1}{2^{n-1}}$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ และ $f(0) = 0$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้น

ดังนั้น f สามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน [a,b] แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

พิสูจน์ โดยคุณสมบัติการปกคลุมแน่นของฟังก์ชันต่อเนื่อง f ซึ่งมีขอบเขตจำกัดบน [a,b] และโดยทฤษฎีบทของไฮเน (ท.บ.5.5.2) f ย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน [a,b] นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon>0$ ที่กำหนดให้จะมี $\delta>0$ ซึ่ง

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ สำหรับทุก ๆ } |x-y| < \delta$$

ถ้าเลือก $n \varepsilon N$ ซึ่ง $\dfrac{b-a}{n} < \delta$ และพิจารณาผลแบ่งกั้น P_n ของ [a,b] ซึ่งได้จากการแบ่ง [a,b] ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กันแล้ว

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ สำหรับ } x,y \,\varepsilon\, I_k \text{ แต่ละ } k \,\varepsilon\, \{1, 2, \ldots, n\}$$

และ $M_k(f) - m_k(f) \leqslant \varepsilon$ สำหรับแต่ละ $k \varepsilon \{1, 2, \ldots, n\}$

ดังนั้น $U(P_n,f) - L(P_n,f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} (M_k(f) \quad m_k(f))$

$$\leqslant \left(\frac{b-a}{n}\right) n\varepsilon = (b-a)\,\varepsilon$$

ดังนั้น โดยเงื่อนไขของรีมันน์ (ท.บ.7.1.2) จึงกล่าวได้ว่า f สามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.3 สำหรับ f ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ ให้ D เป็นเซต ของจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f บน $[a,b]$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon>0$ มีช่วงย่อยเปิด $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ซึ่ง $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ และ $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$ แล้ว *f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน* $[a,b]$ ได้

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon>0$ ใด ๆ ให้

เนื่องจาก f มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$

ดังนั้นจะมี $M>0$ ซึ่ง $|f(x)| \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a,b]$

เลือกช่วงเปิด $I_1, I_2, \ldots, I_k$ ซึ่ง $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ และ $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \frac{\varepsilon}{4M}$

สมมุติว่า $I_1, I_2, \ldots, I_k$ เป็นช่วงต่างสมาชิก *(disjoint)* กัน

ดังนั้น $[a,b] - \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ เป็นผลผนวก (union) ของช่วงปิด $J_1, J_2, \ldots, J_m$ ที่ต่างสมาชิกกันด้วย

เนื่องจาก $J_i \cap D = \Phi$ เมื่อ $i = 1, 2, \ldots, m$

$\therefore$ f มีความต่อเนื่องบนแต่ละ J_i

ดังนั้น f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบนแต่ละช่วง J_i ได้

เพราะฉะนั้น จึงสามารถหาผลแบ่งกั้น P_i ของ J_i ซึ่งทำให้

$$U(P_i,f) - L(P_i,f) < \frac{\varepsilon}{2m}$$

ให้ P เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ซึ่งประกอบด้วยจุดทุก ๆ จุดของ P_i และจุดสิ้นสุดของช่วง I_j จะเห็นว่า

$$U(P,f) - L(P,f) < \sum_{i=1}^{m} (U(P_i,f) - L(P_i,f)) + \sum_{j=1}^{k} M|I_j| - \sum_{j=1}^{k} (-M)|I_j|$$

$$< m \cdot \frac{\varepsilon}{2m} + 2M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \varepsilon$$

จากเงื่อนไขของรีมันน์จึงกล่าวได้ว่า f สามารถหาอินทิกรัลได้

บทแทรก ถ้าฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a,b]$ มีจำนวนจุดที่ไม่ต่อเนื่องอยู่จำนวนจำกัดแล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a,b]$ ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$ ยกเว้นสำหรับบางจุดใน $[a,b]$ ที่มีจำนวนจำกัดแล้ว g ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้และ $\int g = \int f$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน $g-f$ บน $[a,b]$

จะพบว่า $(g-f)(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$ ยกเว้นสำหรับบางจุดใน $[a,b]$ ที่มีจำนวนจำกัด

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ เลือกผลแบ่งกั้น P ของ $[a,b]$ ซึ่งในช่วงย่อยมีจุดที่ $(g-f)(x) \neq 0$ อยู่จำนวนจำกัดและมีความยาวรวมน้อยกว่า ε และพบว่า $g-f$ มีขอบเขตจำกัด นั่นคือ จะมี $M > 0$ ซึ่ง

$|(g-f)(x)| \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$

เพราะฉะนั้น $|U(P,g-f)| < 2M$

และ $|L(P,g-f)| < 2M$

ดังนั้น $g-f$ สามารถหาอินทิกรัลได้ และ $\int (g-f) = 0$

แต่ $g = (g-f) + f$,

ดังนั้น g ก็สามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย และ

$$\int g = \int (g-f) + \int f$$
$$= \int f$$

ตัวอย่างที่ 7.3.1 พิจารณาฟังก์ชัน f บน $[0,a]$ เมื่อ $a > 2$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

จะเห็นว่าฟังก์ชัน g บน $[0,a]$ นั้นกำหนดได้โดย

$$g(x) = x+2$$

ซึ่ง $g(x) = f(x)$ ยกเว้นที่จุด ๆ หนึ่งคือจุด $x = 2$ และ g มีความต่อเนื่องบน $[0,a]$ ดังนั้นมันจึงสามารถหาอินทิกรัลได้เพราะฉะนั้น f สามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย และ $\int f = \int g$

แบบฝึกหัด 7.3.1

1) สำหรับฟังก์ชัน f บน [0,1] ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{สำหรับจำนวนตรรกยะ } x = \frac{p}{q} \text{ (โดย p และ q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน)} \\ 0 & \text{สำหรับ x ที่เป็นจำนวนอตรรกยะ} \\ 1 & \text{สำหรับ } x = 0 \end{cases}$$

จงแสดงว่า f สามารถหาอินทิกรัลได้ และจงหา $\int f$

2) จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุก ๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน [a,b] จะมี $c \in [a,b]$ ซึ่ง $\int_a^b f = (b-a)\, f(c)$

(ให้ใช้คุณสมบัติการไม่ขาดตอนของฟังก์ชันต่อเนื่อง)

7.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของคัลคูลัส

(THE FUNDAMENTAL THEOREM OF CALCULUS)

ในตอนนี้จะมาพิจารณาสิ่งสองสิ่งซึ่งแตกต่างกันคือ การหาอนุพันธ์กับการอินทิเกรต ซึ่งมีความสัมพันธ์กันในทฤษฎีบทหลักมูลของคัลคูลัส โดยจะกล่าวถึงทฤษฎีบทเหล่านั้นต่อไป

ทฤษฎีบท 7.4.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้แล้วฟังก์ชัน $F : [a,b] \to R$ ซึ่งกำหนดโดย

$$F(x) = \int_a^x f \quad \text{ย่อมมีความต่อเนื่องบน } [a,b]$$

พิสูจน์ จากแบบฝึกหัด 7.2 ข้อ 3 ได้ว่า f สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,x]$ ได้สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a,b]$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |F(x) - F(y)| &= \left| \int_a^x f - \int_a^y f \right| \\ &= \left| \int_x^y f \right| \\ &\leqslant M|x-y| \end{aligned}$$

เมื่อ $M = \text{l.u.b.} \{|f(x)| : x \varepsilon [a,b]\}$
นั่นจึงกล่าวได้ว่า F มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $[a,b]$

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 7.4.1 นี้ทำให้ทราบว่า ถึงแม้ว่า f จะไม่ต่อเนื่องที่จุดใน $[a,b]$ แต่ฟังก์ชัน F ซึ่งเราเรียกว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) ของ f ก็จะมีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ เสมอ

ตัวอย่าง 7.4.1 ฟังก์ชัน f บน $[0,2]$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } 0 \leqslant x < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

ได้ว่า f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $x = 1$

แต่ $F : [0,2] \to R$ ซึ่ง

$$F(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } 0 \leqslant x < 1 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

จะได้ว่า F มีความต่อเนื่องบน $[0,2]$

ทฤษฎีบท 7.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้และ f มีความต่อเนื่องที่ $c \varepsilon (a,b)$ แล้วฟังก์ชัน $F : [a,b] \to R$ ซึ่งกำหนดโดย $F(x) = \int_a^x f$ ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ c ได้ และ $F'(c) = f(c)$

พิสูจน์ เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ c

กำหนดให้ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่ง

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |x-c| < \delta$$

ดังนั้น $\int_c^x |f-f(c)| < |x-c|\,\varepsilon$ เมื่อ $|x-c| < \delta$

เพราะฉะนั้น $\left| \dfrac{F(x)-F(c)}{x-c} - f(c) \right| < \varepsilon$ เมื่อ $0 < |x-c| < \delta$

ข้อสังเกต จะเห็นว่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) F อาจจะสามารถหาอนุพันธ์ที่ $c \,\varepsilon\, (a,b)$ ได้ ขณะที่ f ไม่มีความต่อเนื่องและ $F'(c) \neq f(c)$

ตัวอย่าง 7.4.2 พิจารณาฟังก์ชัน f บน $[0,4]$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x \neq 2 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 2 \end{cases}$$

ในที่นี้ $F : [0,4] \to R$ อยู่ในรูปของ

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$$

และ F สามารถหาอนุพันธ์ที่ $x = 2$ ได้

แต่ $F'(2) = 4 \neq f(2) = 0$

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงทฤษฎีบทหลักมูลที่นำมาใช้สำหรับการหาค่าอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 7.4.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a,b]$ ได้และ F มีความต่อเนื่องบน $[a,b]$ และสามารถหาอนุพันธ์บน (a,b) ได้ และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \,\varepsilon\, (a,b)$ แล้ว $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

พิสูจน์ สำหรับผลแบ่งกั้น P_n ของ $[a,b]$ ใด ๆ

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} (F(x_k) - F(x_{k-1}))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} F'(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยเมื่อ $t_k \,\varepsilon\, (x_{k-1}, x_k)$

สำหรับแต่ละ $k \,\varepsilon\, \{1, 2, \ldots, n\}$

ดังนั้น

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

แต่ $L(P,f) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant U(P,f)$

ดังนั้น $L(P,f) \leqslant F(b) - F(a) \leqslant U(P,f)$

เนื่องจาก f สามารถหาอินทิกรัลบน [a,b] ได้

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น P_o ซึ่ง

$$U(P_o,f) < \int_a^b f + \varepsilon$$

และ
$$L(P_o,f) > \int_a^b f - \varepsilon$$

จึงได้ว่า
$$\left|F(b) - F(a) - \int_a^b f\right| < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น
$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

หมายเหตุ ฟังก์ชัน F ตาม ท.บ.7.4.3 นี้เราเรียกว่า อินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral)

ตัวอย่าง 7.4.2 จงคำนวณหาค่าของ $\int_1^2 x^2\,dx$

ถ้า $f(x) = x^2$ เมื่อ $1 \leqslant x \leqslant 2$ แล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องบน [1,2] ยิ่งกว่านั้น ถ้า $F(x) = \frac{x^3}{3}$ เมื่อ $1 \leqslant x \leqslant 2$ แล้ว

$F'(x) = f(x)$ เมื่อ $1 < x < 2$

ดังนั้น
$$\int_1^2 f(x) = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}$$

อย่างไรก็ดีจะสังเกตเห็นว่ายังมีฟังก์ชันอนุพันธ์บางฟังก์ชันที่ไม่สามารถหาอนุพันธ์ได้ เช่น

ตัวอย่าง 7.4.3 พิจารณาฟังก์ชัน f บน [−1,1] ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x^2} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

ในที่นี้ f สามารถหาอนุพันธ์บนช่วง (−1,1) ได้และ

$$f'(x) = \begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

แต่ f' ไม่มีขอบเขตจำกัด ดังนั้นจึงไม่สามารถหาอินทิกรัลบนช่วงย่อยปิดใด ๆ ของช่วง (−1,1) ซึ่งมี 0 อยู่ด้วยได้

แบบฝึกหัด 7.4.1

1) ถ้าฟังก์ชัน g สามารถหาอนุพันธ์บน R ได้ และกำหนดฟังก์ชัน F บน R โดย

$F(x) \quad = \quad \int_0^{g(x)} t^2\,dt$ จงพิสูจน์ว่า F สามารถหาอนุพันธ์บน R และ

$F'(x) \quad = \quad g^2(x)\,g'(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

2) ถ้าฟังก์ชัน h สามารถหาอนุพันธ์บน R ได้ และเรากำหนดฟังก์ชัน G บน R โดย

$G(x) \quad = \quad \int_{h(x)}^{g(x)} t^2\,dt$ จงพิสูจน์ว่า G สามารถหาอนุพันธ์บน R ได้ และจงกำหนดฟังก์ชันอนุพันธ์ G' บน R

3) ฟังก์ชัน $F : [-1,1] \to R$ กำหนดโดย $F(x) \;=\; \int_0^x (1+\sin(\sin t))\,dt$ จงพิสูจน์ว่า มี F^{-1} และสามารถหาอนุพันธ์บน $F(-1,1)$ ได้ และจงหาค่าของ $(F^{-1})'(0)$

4) จงกำหนดฟังก์ชัน f บน R และค่าคงที่ $c \varepsilon R$ ซึ่ง

$\int_c^x f \quad = \quad \cos x - \frac{1}{2}$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

7.5 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (IMPROPER INTEGRALS)

ในการศึกษาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ ได้พิจารณาการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเฉพาะฟังก์ชันที่โดเมนนิยามบนช่วงปิด $S = [a,b]$ ใด ๆ ต่อไปนี้จะขยายความคิดของการหาค่าอินทิกรัลไปยังฟังก์ชันที่กำหนดบนช่วงโดเมนแบบอื่น ๆ (โดยที่ฟังก์ชันนั้น ๆ ยังสามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ (Riemann integral) บนทุก ๆ ช่วงปิดย่อยที่อยู่ในโดเมน นั้นได้) ฟังก์ชันนี้อาจจะไม่มีขอบเขตจำกัด และช่วงของโดเมนอาจจะไม่เป็นช่วงปิด และ/หรือ อาจจะไม่มีขอบเขตจำกัด กรณีเช่นนี้ เรียกว่า "อินทิกรัลไม่ตรงแบบ หรือ อิมปรอบเปอร์ อินทิกรัล" (improper integrals) ซึ่งฟังก์ชันที่มีลักษณะดังกล่าวนี้ไม่สามารถหาอินทิกรัลตามความหมายของรีมันน์ได้ ในที่นี้จะกล่าวถึงโดยสนใจที่ชนิดช่วงโดเมนของฟังก์ชันซึ่งจะแยกกล่าวได้ดังต่อไปนี้

7.5.1 ฟังก์ชันบนช่วงกึ่งอนันต์ $[a,+\infty)$ **และ** $(-\infty,a]$

บทนิยาม 7.5.1 พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $[a,+\infty)$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิด $[a,x]$ ได้ สำหรับทุก ๆ $x>a$ และกำหนดฟังก์ชัน F บน $[a,+\infty)$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

ถ้าค่าลิมิตของ $F(x)$ ขณะที่ $x \to +\infty$ มีค่าแล้วจะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ของ f มีค่า หรือ ลู่เข้า (converge) บนช่วง $[a,+\infty)$ โดยจะกำหนดค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ด้วยค่าลิมิตนี้และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^{+\infty} f$

$$\text{นั่นคือ} \quad \int_a^{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} \int_a^x f$$

และถ้า $F(x) \to +\infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to +\infty$ จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่ออกทางบวก (ทางลบ)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $(-\infty,a]$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลได้บนทุก ๆ ช่วงปิด $[x,a]$ สำหรับทุก ๆ $x<a$ กำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ของ f เป็น

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x\to-\infty} \int_x^a f$$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบ ของ f บน $[1,+\infty)$ โดย $f(t) = \frac{1}{t^p}$ สำหรับ $p \varepsilon R$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ว่าลู่เข้าหรือไม่

จาก f ที่กำหนดให้จะพบว่า f มีความต่อเนื่อง ดังนั้น f จึงสามารถหาอินทิกรัลบนช่วง $[1,x]$ ได้ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x>1$

สำหรับ $p \neq 1,\ \int_1^x \frac{dt}{t^p} = \left(\frac{1}{1-p}\right) \cdot \left(\frac{1}{t^{p-1}}\right) \Big]_1^x$

$$= \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{x^{p-1}} - 1\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} \to \frac{1}{p-1} & \text{ขณะที่ } x \to +\infty \text{ เมื่อ } p > 1 \\ \to +\infty & \text{ขณะที่ } x \to +\infty \text{ เมื่อ } p < 1 \end{array}\right\}$$

สำหรับ $p = 1$, $\int_1^x \frac{dt}{t} = \ln t \Big]_1^x$

$$= \ln x$$

$$\to +\infty \text{ ขณะที่ } x \to +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\int_1^\infty \frac{dt}{t^p}$ จึงลู่เข้าเมื่อ $p > 1$ และลู่ออกเมื่อ $p \leq 1$

พิจารณาฟังก์ชัน f บน R เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดใน R ได้ ถ้ามีบาง $c \varepsilon R$ ซึ่งทำให้ $\int_c^{+\infty} f$ และ $\int_{-\infty}^c f$ มีค่าทั้งคู่แล้ว จะกล่าวว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f มีค่าบน R และกำหนดค่านั้นได้ด้วยผลบวกทั้งคู่ของมัน โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_{-\infty}^{+\infty} f$

นั่นคือ $\int_{-\infty}^{+\infty} f = \int_{-\infty}^{c} f + \int_c^{+\infty} f$ (โดย c จะมีค่าเท่าไรก็ได้)

$$= \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f$$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงพิจารณาว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f บน R ซึ่ง $f(t) = \frac{dt}{t^2+1}$ ลู่เข้าหรือไม่

จะพบว่า f ที่กำหนดให้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นมันจึงสามารถหาอินทิกรัลทุก ๆ ช่วงปิดใน R ได้

สำหรับ $x > 0$

$$\int_0^x f = \int_0^x \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \arctan t \Big|_0^x$$

$$= \arctan x - \arctan 0$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \text{ขณะที่} \quad x \to +\infty$$

และสำหรับ $x < 0$

$$\int_x^0 f = \int_x^0 \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= \arc \tan t\Big]_x^0$$

$$= \arc \tan 0 - \arc \tan x$$

$$= \frac{\pi}{2} \quad \text{ขณะที่} \quad x \to -\infty$$

เพราะฉะนั้น $\int_{-\infty}^{+\infty} = \pi$

ดังนั้น $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2+1} dt$ จึงลู่เข้า

อนึ่งทฤษฎีบทของอินทิกรัลไม่ตรงแบบนี้ ก็คล้ายคลึงกับทฤษฎีบทของอนุกรม จึงสามารถนำมาปรับปรุงใช้กันได้ เช่น อาจกล่าวได้ว่า ถ้า $\int_a^{+\infty} f$ และ $\int_a^{+\infty} g$ ต่างก็ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว $\int_a^{+\infty} (f \pm g)$ ก็จะลู่เข้าด้วย และจะได้ด้วยว่า

$$\int_a^{+\infty} (f \pm g) = \int_a^{+\infty} f \pm \int_a^{+\infty} g$$

ซึ่งอาจจะพิสูจน์ได้โดยวิธีเดียวกันกับ ท.บ. 4.2.1 เรื่องอนุกรม หรืออาจกล่าวได้ว่า $\int_a^{+\infty} |f|$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์แล้ว $\int_a^{+\infty} f$ ย่อมลู่เข้าด้วย เป็นต้น ดังนั้นจึงสามารถทดสอบการลู่เข้าสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบได้เช่นเดียวกันกับการทดสอบอนุกรม โดยเฉพาะการทดสอบสำหรับฟังก์ชันที่มีค่าบวกนั้น ก็คล้ายคลึงกับการทดสอบโดยเปรียบเทียบสำหรับอนุกรมที่พจน์ต่าง ๆ เป็นบวกนั่นเอง

ทฤษฎีบท 7.5.1 (การทดสอบโดยเปรียบเทียบ) ฟังก์ชัน f และ g บน $[a, +\infty)$ ซึ่งสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดในโดเมนได้ และ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \geqslant a$ ถ้า

i) $\int_a^{+\infty} g$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^{+\infty} f$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ii) $\int_a^{+\infty} f$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^{+\infty} g$ ย่อมลู่ออกด้วย

พิสูจน์ พิจารณาจากอสมการ $0 \leqslant \int_a^x f \leqslant \int_a^x g$ สำหรับทุก ๆ $x \geqslant a$ ก็จะได้ผลตามทฤษฎีบท #

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f และ g บน $(-\infty, a]$ ก็สอดคล้องกับ ท.บ. 7.5.1 นี้ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่าง 7.5.3 จงพิจารณาว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน $[1, +\infty)$ ซึ่ง $f(t) = e^{t}$ ลู่เข้าหรือไม่

จะพบว่าฟังก์ชัน f ที่โจทย์กำหนดให้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นมันจึงสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิด $[1, x]$ สำหรับทุก ๆ $x > 1$

$$\int_1^x e^{-t}dt = -e^{-t}\Big]_1^x$$

$$= e^{-1} - e^{-x}$$

$$\to \frac{1}{e} \quad \text{ขณะที่} \quad x \to +\infty$$

เพราะฉะนั้น $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ จึงลู่เข้า

ตัวอย่าง 7.5.4 จงพิจารณาว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน $[1, +\infty)$ ซึ่ง $f(t) = e^{-t^2}$ ลู่เข้าหรือไม่ ?

จะพบว่า f นี้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจึงสามารถหาอินทิกรัลบนช่วงปิด $[1, x]$ ได้สำหรับทุก ๆ $x > 1$

จึงได้ว่า $0 \leqslant e^{-t^2} \leqslant e^{-t}$ สำหรับทุก ๆ $t \geqslant 1$

จากตัวอย่าง 7.5.3 ทราบว่า $\int_1^{+\infty} e^{-t}dt$ ลู่เข้า

ดังนั้น โดย ท.บ. 7.5.1 จึงกล่าวได้ว่า

$$\int_1^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \text{ ก็ลู่เข้าด้วย}$$

อนึ่ง จะสามารถนำเอาความรู้จากอินทิกรัลไปใช้พิจารณาถึงการลู่เข้าหรือการลู่ออกของอนุกรมได้อีกด้วย โดยที่มักจะเรียกกันว่า การทดสอบอินทิกรัล (Integral test) สำหรับอนุกรมนั่นเอง

ทฤษฎีบท 7.5.2 (การทดสอบอินทิกรัล)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่ลดลงบนช่วง $[1, \infty)$ ซึ่ง $f(x) \geqslant 0$ แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

จะลู่เข้า ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ จะลู่ออก ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

พิสูจน์ สำหรับ $n \varepsilon N$ ใด ๆ จะได้ว่า

$$f(n) \geqslant f(x) \geqslant f(n+1) \quad \text{สำหรับ} \quad n \leqslant x \leqslant n+1$$

เนื่องจาก f มีค่าไม่ลดลง จึงอินทิเกรตจาก n ถึง n+1 ได้เป็น

$$\int_n^{n+1} f(n)dx \geqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant \int_n^{n+1} f(n+1)dx$$

หรือ
$$f(n) \geqslant \int_n^{n+1} f(x)dx \geqslant f(n+1)$$

ดังนั้น สำหรับ $M \varepsilon N$ จึงได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{M-1} f(n) \geqslant \int_1^{M} f(x)dx \geqslant \sum_{n=1}^{M-1} f(n+1) = \sum_{k=2}^{M} f(k) \qquad \text{..........(1)}$$

ดังนั้น ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้าไปยัง A แล้ว จาก (1) ก็จะได้ว่า

$$\sum_{k=2}^{M} f(k) \leqslant \int_1^{M} f(x)dx \leqslant A$$

นั่นแสดงว่า ผลบวกย่อย $\sum_{k=2}^{M} f(k)$ มีขอบเขตบน จึงกล่าวได้ว่าอนุกรม $\sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ ลู่เข้า ดังนั้นอนุกรม $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาจากอสมการ (1) ด้านซ้ายมือ ก็จะได้ว่าถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออกแล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ ก็จะลู่ออกด้วย #

ข้อสังเกต ท.บ. 7.5.2 นี้จะเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันบนช่วง $[a, \infty)$ ด้วย

ตัวอย่าง 7.5.5 จงแสดงว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ถ้าให้ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ สำหรับ $1 \leqslant x < \infty$ แล้ว

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

$$= \lim_{M-m} \int_I^M \frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left(1 - \frac{1}{M}\right)$$

$$= 1$$

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ ลู่เข้า จึงกล่าวได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ตัวอย่าง 7.5.6 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับ $1 \leqslant x < \infty$ แล้ว

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^\infty f(n)$$

เนื่องจาก $\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{dx}{x}$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_1^M \frac{dx}{x}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \ln M \quad \text{(ซึ่งไม่มีค่าลิมิต)}$$

$\therefore$ $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ จึงลู่ออก และอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ก็จะลู่ออกด้วย

7.5.2 ฟังก์ชันบนช่วงกึ่งเปิดทางขวา $[a, b)$ และกึ่งเปิดทางซ้าย $(a, b]$

บทนิยาม 7.5.2 พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b)$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิด $[a, x]$ ได้สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon (a, b)$ จะกำหนดฟังก์ชัน F บน $[a, b)$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

ถ้าค่าลิมิตของ $F(x)$ ขณะที่ $x \to b$ มีค่าแล้ว จะกล่าวว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ (improper integral) ของ f มีค่าหรือลู่เข้าบน $[a, b)$ และจะกำหนดค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ด้วยค่าลิมิตนี้ โดยเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^{b^-} f$

นั่นคือ $\int_a^{b^-} f = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f$

และถ้า $F(x) \to +\infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to b$ แล้ว จะกล่าวว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่ออกทางบวก (ทางลบ) ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f บน (a, b] เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลได้บนทุก ๆ ช่วงปิด [x, b] สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon (a, b)$ จะกำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f เป็น

$$\int_{a^+}^{b} f = \lim_{x \to a^+} \int_{x}^{b} f$$

ตัวอย่าง 7.5.5 จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน (0, 1] ซึ่ง $f(t) = \frac{1}{t^p}$ สำหรับ $p \varepsilon R$ ใด ๆ ว่าลู่เข้าหรือไม่

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจึงสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดในช่วง (0, 1] ได้

สำหรับ $p \neq 1$

$$\int_{x}^{1} \frac{dt}{t^p} = \frac{1}{1-p}\left(1 - \frac{1}{x^{p-1}}\right)$$

$$\to \frac{1}{1-p} \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad p < 1$$

$$\to \infty \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 0 \quad \text{เมื่อ} \quad p > 1$$

สำหรับ $p = 1$

$$\int_{x}^{1} \frac{dt}{t} = \ln x$$

$$\to \infty \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 0$$

เพราะฉะนั้น $\int_{0^+}^{1} \frac{dt}{t^p}$ ลู่เข้า เมื่อ $p < 1$ และลู่ออกเมื่อ $p \geqslant 1$

พิจารณาฟังก์ชัน f บน (a, b) เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดใน (a, b) ถ้ามีบาง $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่งทำให้ $\int_{a^+}^{c} f$ และ $\int_{c}^{b^-} f$ มีค่าทั้งคู่แล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f มีค่าบน (a, b) และจะกำหนดค่านั้นด้วยผลบวกทั้งคู่ของมัน โดยจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\int_{a^+}^{b^-} f$$

นั่นคือ $\int_{a^+}^{b^-} f = \int_{a^+}^{c} f + \int_{c}^{b^-} f$ โดย c จะมีค่าเท่าไรก็ได้

อนึ่ง ก็จะมีการทดสอบโดยเปรียบเทียบสำหรับอินทิกรัลไม่ตรงแบบชนิดนี้ด้วยเช่นกัน

ทฤษฎีบท 7.5.3 (การทดสอบโดยเปรียบเทียบ) ฟังก์ชัน f และ g บน $[a, b)$ ซึ่งสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดในโดเมนได้ และ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a, b)$ ถ้า

i) $\int_a^{b^-} g$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^{b^-} f$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ii) $\int_a^{b^-} f$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^{b^-} g$ ย่อมลู่ออกด้วย

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f และ g บน $(a, b]$ ก็สอดคล้องกับทฤษฎีบท 7.5.3 ด้วย

ตัวอย่าง 7.5.6 จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน $[0, 1)$ ซึ่ง $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ ว่าลู่เข้าหรือไม่

∴ เราพบว่า f นี้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจึงสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดใน $[0, 1)$ ได้

และ $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{(1-t)(1+t)}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ สำหรับทุก ๆ $t \varepsilon [0, 1)$

แต่สำหรับ $x \varepsilon (0, 1)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} &= -2\sqrt{1-t}\Big]_0^x \\ &= 2(1-\sqrt{1-x}) \\ &\to 2 \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 1 \end{aligned}$$

ดังนั้น $\int_0^{1^-} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t}}$ ลู่เข้า

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 7.5.3 จึงได้ว่า

$\int_0^{1^-} \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ ย่อมลู่เข้าด้วย

7.5.3 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

เช่นเดียวกันกับอนุกรม ดังนั้นจึงสามารถหาการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไขของอินทิกรัลได้ สมมติว่าจะพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f บนบางช่วงโดเมน ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f และของ $|f|$ ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว จะกล่าวว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้า แต่อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ $|f|$ ลู่ออกแล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

ตัวอย่าง 7.5.7 จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชันบน $[1, +\infty)$ ซึ่ง $f(t) = \frac{\cos t}{t^2}$ ว่าลู่เข้าแบบไหน ?

เนื่องจาก f นี้มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจึงสามารถหาอินทิกรัลได้บนทุก ๆ ช่วงปิดใน $[1, +\infty)$

และ $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ สำหรับ $t \geqslant 1$

เนื่องจาก $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ ลู่เข้า (ดูตัวอย่าง 7.5.1)

ดังนั้น โดย ท.บ. 7.5.1 จึงได้ว่า $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\, dt$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ดังนั้น f จึงลู่เข้าด้วย (ท.บ. 4.5.1)

ตัวอย่าง 7.5.8 จงพิจารณาอินทิกรัลไม่ตรงแบบของฟังก์ชัน f บน $(0, 1]$ ซึ่ง

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \frac{1}{t}$$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่อง ดังนั้นจึงสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดใน $(0, 1]$ ได้

และ $$\left|\frac{1}{\sqrt{t}} \sin \frac{1}{t}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \text{สำหรับ} \quad t \,\varepsilon\, (0, 1]$$

$$\therefore \quad \int_x^1 \frac{dt}{t} = 2\sqrt{t}\Big]_x^1$$

$$= 2(1 - \sqrt{x})$$

$$\to 2 \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 0$$

ดังนั้น โดย ท.บ. 7.5.2 จึงได้ว่า

$\int_{0^+}^1 \frac{1}{t} \sin \frac{1}{t} dt$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

ตัวอย่าง 7.5.9 จงแสดงว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f บน $[0, +\infty)$ ซึ่ง

$$f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{ถ้า} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า} \quad t = 0 \end{cases}$$

ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

จากรีมันน์อินทิกรัลทำให้ทราบว่า $\int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt$ มีค่า ....(1)

และโดยการอินทิเกรตทีละส่วน (integrating by parts)

จะได้
$$\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt = -\frac{\cos t}{t}\Big]_1^x + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
$$= \cos 1 - \frac{\cos x}{x} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2}\,dt$$
$$\to \cos 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt \quad \text{ขณะที่} \quad x \to +\infty$$

แต่ $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ ลู่เข้า (ตัวอย่าง 7.5.7)

นั่นจึงได้ว่า $\int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt$ ลู่เข้า ขณะที่ $x \to +\infty$ ....(2)

จาก (1) และ (2) จึงกล่าวได้ว่า

$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ลู่เข้า

ถ้าให้ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ จะได้

$$\int_0^{n\pi} \frac{\sin t}{t}\,dt = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt + \int_{\pi}^{2\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt + \ldots + \int_{(n-1)}^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$$
$$= \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du + \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+\pi}\right| du + \ldots + \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin u}{u+(n-1)\pi}\right| du$$

(โดยให้ $t = u + n\pi$)

$$= \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,du + \ldots + \int_0^{\pi} \frac{\sin}{u+(n-1)}$$
$$> \frac{2}{\pi} + \frac{2}{2\pi} + \frac{2}{3\pi} + \ldots + \frac{2}{(n-1)\pi}$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right)$$

แต่อนุกรม $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1}$ ลู่ออก

ดังนั้น $\int_0^{n\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ จึงลู่ออกด้วย

นั่นคือ $\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right| dt$ ลู่ออก

แสดงว่า $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

แบบฝึกหัด 7.5.1

1. จงตรวจสอบการลู่เข้าของอินทิกรัลไม่ตรงแบบต่อไปนี้

1.1) $\int_{0^+}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$

1.2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$

1.3) $\int_{1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}}}{t^2} dt$

1.4) $\int_{1}^{\infty} \frac{dt}{(t+3)^4}$

1.5) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x}$

1.6) $\int_{0}^{1} \ln(1-x)dx$

2. จงแสดงว่า $\int_{0}^{\pi} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} dx$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

3. จงแสดงว่า $\int_{0}^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

4. สำหรับฟังก์ชัน f บน $(0, 1]$ ซึ่ง $f(x) = x^{-\frac{3}{4}}$

จงแสดงว่า อินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{0^+}^{1} f$ ลู่เข้า

แต่อินทิกรัลไม่ตรงแบบ $\int_{0^+}^{1} f^2$ ลู่ออก

5. ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนช่วง $[a, b]$ โดยที่ $a, b \varepsilon R$ ถ้า $f(x)$ มีขอบเขตไม่จำกัด เมื่อ $x = c$ และ $\int_{a}^{b} f(x)dx$ ไม่มีค่า แต่สามารถหา $\lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{a}^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)dx \right]$ ได้ และเรียกค่าลิมิตที่ได้โดยวิธีนี้ว่า ค่าหลักโคชี (Cauchy Principle Value) ของอินทิกรัล $\int_{a}^{b} f(x)dx$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ C.P.V. $\int_{a}^{b} f(x)dx$ แล้ว จงคำนวณหา

5.1) C.P.V. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-1}$

5.2) C.P.V. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$

5.3) C.P.V. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-2)^5}$

5.4) C.P.V. $\int_{-7}^{2} \frac{dx}{(x-1)^{\frac{5}{3}}}$

6. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบอินทิกรัล

6.1) $\sum \frac{n^2}{2n^3-1}$

6.2) $\sum \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$

6.3) $\sum \frac{n}{2^n}$

6.4) $\sum \frac{1}{n^p}$

6.5) $\sum \frac{1}{n^2+1}$

บทสรุปทบทวน
บทที่ 7 การอินทิเกรต

7.1 อินทิกรัลเชิงรีมันน์

บทนิยาม 7.1.1 สำหรับช่วงปิด $S = [a, b]$ ใด ๆ ความยาวของช่วง S เขียนแทนด้วย $|S|$ ก็คือ $b - a$

บทนิยาม 7.1.2 สำหรับผลแบ่งกั้น $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x\}$ ของช่วง $[a, b]$ ใด ๆ จะเรียกช่วงย่อย $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ เมื่อ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ว่า "ช่วงย่อยที่ k ของผลแบ่งกั้น P"

บทนิยาม 7.1.3 ถ้า P และ P′ ต่างก็เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ จะกล่าวว่า P′ เป็นรีไฟน์เมนต์ (refinement) ของผลแบ่งกั้น P ถ้า $P' \supseteq P$ (หรือ $P \subseteq P'$)

บทนิยาม 7.1.4 ให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ และ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ สำหรับช่วงย่อยที่ k ของผลแบ่งกั้น P

กำหนดให้ $M_k(f) = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \varepsilon I_k\}$

และ $m_k(f) = \text{g.l.b.}\{f(x) : x \varepsilon I_k\}$

สำหรับแต่ละ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

บทนิยาม 7.1.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[a, b]$ จะเรียก

$$U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(f)|I_k|$$

และ

$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(f)|I_k|$$

ว่า ผลรวมรีมันน์บนและผลรวมรีมันน์ล่างของ f ซึ่งสอดคล้องกับผลแบ่งกั้น P ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 7.1.1 สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ จะได้ว่า

(1) $U(P', f) \leqslant U(P, f)$ และ $L(P', f) \geqslant L(P, f)$ สำหรับทุก ๆ $P' \supseteq P$

(2) $L(P_1, f) \leqslant U(P_2, f)$ สำหรับผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ใด ๆ

บทแทรก สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$

ถ้า $M = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \varepsilon [a, b]\}$

และ $m = \text{g.l.b.}\{f(x) : x\&[a, b]\}$

แล้ว $m(b-a) \leqslant L(P_1, f) \leqslant U(P_2, f) \leqslant M(b-a)$

สำหรับผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ใด ๆ ของ $[a, b]$

บทนิยาม 7.1.6 สำหรับฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ จะเรียก

$$\overline{\int} f = \text{g.l.b.}\{U(P, f) : \text{สำหรับผลแบ่งกั้น } P \text{ ทั้งหมดของ } [a, b]\}$$

และ $$\underline{\int} f = \text{l.u.b.}\{L(P, f) : \text{สำหรับผลแบ่งกั้น } P \text{ ทั้งหมดของ } [a, b]\}$$

ว่าอินทิกรัลเชิงรีมันน์บนและอินทิกรัลเชิงรีมันน์ล่างของ f ตามลำดับ และได้ว่า

$$\underline{\int} f \leqslant \overline{\int} f$$

บทนิยาม 7.1.7 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ แล้ว จะกล่าวว่า f สามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์บน $[a, b]$ ได้ ถ้า $\underline{\int} f = \overline{\int} f$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\int f$ และเรียกว่าอินทิกรัลเชิงรีมันน์ของ f บน $[a, b]$

ทฤษฎีบท 7.1.2 เงื่อนไขของรีมันน์ (Riemann's Condition)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ แล้ว f จะสามารถหาอินทิกรัลเชิงรีมันน์ได้ ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมีผลแบ่งกั้น P_0 ของ $[a, b]$ ซึ่ง

$$U(P_0, f) - L(P_0, f) < \varepsilon$$

7.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.2.1 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้แล้ว ฟังก์ชัน $f+g$ และฟังก์ชัน kf สำหรับ $k \varepsilon R$ ใด ๆ ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้ด้วย และ

1) $\int (f+g) = \int f + \int g$
2) $\int kf = k \int f$

ทฤษฎีบท 7.2.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้ และ $f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a, b]$ แล้ว $\int f \leqslant \int g$

ทฤษฎีบท 7.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้แล้ว $|f|$ ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ และ $|\int f| \leqslant \int |f|$

ทฤษฎีบท 7.2.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้แล้ว f^2 ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย

ทฤษฎีบท 7.2.5 ถ้า f และ g สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้แล้ว fg ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ด้วย

ทฤษฎีบท 7.2.6 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a, b]$ และ $a < c < b$ และ f สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, c]$ และบน $[c, b]$ ได้แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้ และ

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

7.3 ฟังก์ชันบางชนิดที่สามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวบน $[a, b]$ แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.3 สำหรับ f ซึ่งเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ ให้ D เป็นเซตของจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f บน $[a, b]$ ถ้าสำหรับแต่ละ $\varepsilon > 0$ มีช่วงย่อยเปิด $I_1, I_2, I_3, \ldots, I_k$ ซึ่ง $D \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ และ $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$ แล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้

บทแทรก ถ้าฟังก์ชัน f ที่มีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a, b]$ มีจำนวนจุดที่ไม่ต่อเนื่องอยู่จำนวนจำกัดแล้ว f ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้

ทฤษฎีบท 7.3.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน $[a, b]$ ซึ่ง $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a, b]$ ยกเว้นสำหรับบางจุดใน $[a, b]$ ที่มีจำนวนจำกัดแล้ว g ย่อมสามารถหาอินทิกรัลได้ และ

$$\int g = \int f$$

7.4 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส

ทฤษฎีบท 7.4.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้แล้ว ฟังก์ชัน $F : [a, b] \to R$ ซึ่งกำหนดโดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

ย่อมมีความต่อเนื่องบน $[a, b]$

ทฤษฎีบท 7.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้ และ f มีความต่อเนื่องที่ $c\varepsilon(a, b)$ แล้ว ฟังก์ชัน $F : [a, b] \to R$ ซึ่งกำหนดโดย $F(x) = \int_a^x f$ ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ c ได้ และ $F'(c) = f(c)$

ทฤษฎีบท 7.4.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลบน $[a, b]$ ได้ และ F มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์บน (a, b) ได้ และ $F'(x) = f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x\varepsilon(a, b)$ แล้ว $\int_a^b f = F(b) - F(a)$

7.5 อินทิกรัลไม่ตรงแบบ

บทนิยาม 7.5.1 พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, +\infty)$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิด $[a, x]$ ได้ สำหรับทุก ๆ $x > a$ และกำหนดฟังก์ชัน F บน $[a, +\infty)$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

ถ้าค่าลิมิตของ $F(x)$ ขณะที่ $x \to +\infty$ มีค่าแล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f มีค่าหรือลู่เข้าบน $[a, +\infty]$ โดยจะกำหนดค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ด้วยค่าลิมิตนี้ เขียนแทนด้วย $\int_a^{+\infty} f$

นั่นคือ
$$\int_a^{+\infty} f = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f$$

และถ้า $F(x) \to +\infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to +\infty$ จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่ออกทางบวก (ทางลบ)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $(-\infty, a]$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลได้บนทุก ๆ ช่วงปิด $[x, a]$ สำหรับทุก ๆ $x < a$ กำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f เป็น

$$\int_{-\infty}^a f = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f$$

ทฤษฎีบท 7.5.1 การทดสอบโดยเปรียบเทียบ

ฟังก์ชัน f และ g บน $[a, +\infty]$ ซึ่งสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดในโดเมนได้ และ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \geqslant a$ ถ้า

1) $\int_a^{+\infty} g$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^{+\infty} f$ ย่อมลู่เข้าด้วย

2) $\int_a^{+\infty} f$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^{+\infty} g$ ย่อมลู่ออกด้วย

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f และ g บน $(-\infty, a]$ ก็คล้องตาม ท.บ. 7.5.1 นี้ด้วย

ทฤษฎีบท 7.5.2 การทดสอบอินทิกรัล (Integral Test)

ให้ f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าไม่ลดลงบนช่วง $[1, \infty)$ ซึ่ง $f(x) \geqslant 0$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ จะลู่เข้า ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่เข้า และอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f(x)$ จะลู่ออก ถ้า $\int_1^{\infty} f(x)dx$ ลู่ออก

บทนิยาม 7.5.2 พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $[a, b)$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิด $[a, x]$ ได้ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon (a, b)$ จะกำหนดฟังก์ชัน F บน $[a, b)$ โดย

$$F(x) = \int_a^x f$$

ถ้าค่าลิมิตของ F(x) ขณะที่ $x \to b$ มีค่าแล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f มีค่าหรือลู่เข้าบน $[a, b)$ และจะกำหนดค่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ด้วยค่าลิมิตนี้ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\int_a^b f$

นั่นคือ
$$\int_a^{b^-} f = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f$$

และถ้า $F(x) \to +\infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to b$ แล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบลู่ออกทางบวก (ทางลบ)

ในทำนองเดียวกัน เมื่อพิจารณาฟังก์ชัน f บน $(a, b]$ เมื่อ f สามารถหาอินทิกรัลได้บนทุก ๆ ช่วงปิด $[x, b]$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon (a, b)$ จะกำหนดอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f เป็น

$$\int_{a^+}^b f = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f$$

ทฤษฎีบท 7.5.3 การทดสอบโดยเปรียบเทียบ

ฟังก์ชัน f และ g บน $[a, b)$ ซึ่งสามารถหาอินทิกรัลบนทุก ๆ ช่วงปิดในโดเมนได้ และ $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon [a, b)$ ถ้า

1) $\int_a^{b^-} g$ ลู่เข้าแล้ว $\int_a^{b^-} f$ ย่อมลู่เข้าด้วย

2) $\int_a^{b^-} f$ ลู่ออกแล้ว $\int_a^{b^-} g$ ย่อมลู่ออกด้วย

หมายเหตุ สำหรับฟังก์ชัน f และ g บนช่วง (a, b] ก็คล้องตาม ท.บ. 7.5.3 นี้ด้วย

7.5.3 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และการลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขของอินทิกรัลไม่ตรงแบบ

ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f และ |f| ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ แต่ถ้าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้า แต่อินทิกรัลไม่ตรงแบบของ |f| ลู่ออกแล้ว จะกล่าวว่าอินทิกรัลไม่ตรงแบบของ f ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 7.1.1

1. $U(P, f) = \frac{2}{3}$, $L(P, f) = \frac{1}{3}$

5. $\int_a^b = \sum_{k=1}^{n} c_k|I_k|$

คำตอบแบบฝึกหัด 7.3.1

1. $\int f = 0$

คำตอบแบบฝึกหัด 7.4.1

3. 1

4. $f(x) = -\sin x$ เมื่อ $x \varepsilon R$ และ $c = \frac{1}{2}$

คำตอบแบบฝึกหัด 7.5.1

1.

1.1) ลู่เข้า	1.2) ลู่เข้า
1.3) ลู่เข้า	1.4) ลู่เข้า
1.5) ลู่ออก	1.6) ลู่ออก

5.

5.1) $-\frac{\ln 3}{2}$	5.2) 0
5.3) 0	5.4) $-\frac{9}{8}$