บทที่ 6
การหาอนุพันธ์

หัวข้อเรื่อง

6.1 อนุพันธ์

6.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

6.3 การประมาณโดยพหุนาม

6.4 การคำนวณค่าลิมิต

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 6 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. ตรวจสอบการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ได้
2. ใช้ทฤษฎีบทหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดได้
3. บอกคุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้
4. แสดงการประมาณค่าของฟังก์ชันโดยใช้พหุนามแบบเทย์เลอร์ได้
5. ใช้กฎของโลพิทาลแบบต่าง ๆ คำนวณหาค่าลิมิตได้

บทที่ 6
การหาอนุพันธ์
(DIFFERENTIATION)

6.1 อนุพันธ์ (THE DERIVATIVE)

บทนิยาม 6.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด S จะเรียกฟังก์ชัน f ว่าสามารถหาอนุพันธ์ได้ หรือสามารถดิฟเฟอเรนชิเอตได้ (differentiable) ที่ $a \varepsilon S$ ถ้า

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{สามารถหาค่า (ที่เป็นจำนวนจริง) ได้ (exist)}$$

ถ้าลิมิตนี้มีค่าที่ a จะเขียนแทนด้วย $f'(a)$ ซึ่งเรียกว่า "ค่าอนุพันธ์ของ f ที่ a"

ข้อสังเกต จะเห็นว่าความหมายของ $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ กับ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a + h) - f(a)}{h}$ นั้นมีความหมายเหมือนกัน

ถ้า f หาอนุพันธ์ที่ a ได้ และนิยามฟังก์ชัน θ_a บน R โดยให้

$$\theta_a(x) = f(x) - \{f'(a)(x - a) + f(a)\}$$

แล้ว $\quad f(x) = f'(a)(x - a) + f(a) + \theta_a(x)$

เมื่อ $\quad \dfrac{\theta_a(x)}{x - a} \to 0 \quad$ ขณะที่ $\quad x \to a$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f จะหาอนุพันธ์ที่ a ได้ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชันเชิงเส้น g บน R ซึ่ง f(x) ถูกประมาณค่าได้ด้วย $g(x - a) + f(a)$ โดยมีพจน์ $\theta_a(x)$ เป็นพจน์คลาดเคลื่อนซึ่งสอดคล้องกับเงื่อนไขที่ว่า

$$\frac{\theta_a(x)}{x - a} \to 0 \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a$$

ตัวอย่างที่ 6.1.1 จงตรวจสอบว่า f บน R ซึ่ง $f(x) = |x|^3$ สามารถหาอนุพันธ์ที่ $x = 0$ ได้หรือไม่

สำหรับ $x \neq 0$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{|x|^3}{x}$

$$= \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ} \quad x > 0 \\ -x^2 & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

$\rightarrow \quad 0$ ขณะที่ $x \rightarrow 0$

เพราะฉะนั้น f สามารถหาอนุพันธ์ที่ 0 ได้ และ $f'(0) = 0$

ตัวอย่างที่ 6.1.2 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันไซน์ (sine function) บน R หาอนุพันธ์ได้หรือไม่

พิจารณา $a \varepsilon R$

ให้ $x = a+h$ เมื่อ $h \neq 0$

$$\therefore \frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} = \frac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$$

$$= \cos a \frac{\sin h}{h} + \sin a \frac{\cos h - 1}{h}$$

แต่ $\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{-2\sin^2 \frac{h}{2}}{h}$

$$-\left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)^2 \frac{h}{2}$$

$\rightarrow 0$ ขณะที่ $h \rightarrow 0$

เนื่องจาก $\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$\frac{\sin(x)-\sin(a)}{x-a} \rightarrow \cos a \quad \text{ขณะที่} \quad x \rightarrow a$$

เพราะฉะนั้น ฟังก์ชันไซน์สามารถหาอนุพันธ์บน R ได้ และ $\sin'(x) = \cos x$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

สำหรับฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด S เพื่อความสะดวกบางครั้งจะพิจารณาพฤติกรรมลิมิตด้านซ้ายและลิมิตด้านขวา $x = a$ ของฟังก์ชันผลหาร (quotient function) ซึ่งกำหนดโดย

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{บนช่วง} \quad S-\{a\}$$

ถ้าลิมิตด้านซ้ายมีค่าจะเขียนแทนด้วย $f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

และ ถ้าลิมิตด้านขวามีค่าจะเขียนแทนด้วย $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

โดยจะเรียก $f'_-(a)$ ว่า อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ a และเรียก $f'_+(a)$ ว่าอนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ a

บางทีเมื่อทำการตรวจสอบการหาอนุพันธ์ของ f ที่ $a \in S$ จะสังเกตเห็นว่า ถึงแม้ว่า f อาจจะไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ก็ตาม แต่อนุพันธ์ด้านซ้ายหรืออนุพันธ์ด้านขวาข้างใดข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างอาจจะมีค่าหรือสามารถหาค่าได้ก็ได้ และจะกล่าวว่า f สามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ก็ต่อเมื่อทั้งอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาจะต้องสามารถหาค่าได้และมีค่าเท่ากันด้วย

ต่อไปนี้จะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องกับการมีอนุพันธ์

ทฤษฎีบท 6.1.1 ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด S สามารถหาอนุพันธ์ที่ $a \in S$ ได้แล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องที่ a

พิสูจน์

จาก $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ดังนั้น สำหรับ $x \neq a$

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a)$$

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = \lim_{x \to a} \frac{\big(f(x) - f(a)\big)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a)$$

$$= f'(a) \cdot 0$$

$$= 0$$

เพราะฉะนั้น $$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

นั่นก็คือ f มีความต่อเนื่องที่ a #

จาก ท.บ. 6.1.1 นี้ อาจกล่าวได้ว่า ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดใด ๆ แล้ว f ย่อมจะไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่จุดนั้น ๆ ได้ ถึงอย่างไรก็ตาม บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงด้วย คือ แม้ f ไม่สามารถหาอนุพันธ์ที่จุดนั้น แต่อาจจะมีความต่อเนื่องที่จุดนั้นก็ได้

ตัวอย่างที่ 6.1.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = |x|$ จะได้ว่า

$$f_-'(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$$

และ $$f_+'(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = +1$$

นั่นแสดงว่า f ไม่มีอนุพันธ์ที่ $x = 0$ ($\because f_-'(0) \neq f_+'(0)$)

แต่ถึงอย่างไรก็ดี ฟังก์ชัน f นี้ก็มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$ ด้วย (ให้นักศึกษาแสดงเอง)

ทฤษฎีบท 6.1.2 ทฤษฎีบทพีชคณิตของอนุพันธ์ (Algebra of Derivation Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด S โดย f และ g สามารถหาอนุพันธ์ที่ a&S ได้แล้ว f +g, kf เมื่อ $k \in R$ และ fg ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ได้ด้วย และได้ว่า

i) $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$

ii) $(kf)'(a) = kf'(a)$

iii) $(fg)'(a) = f'(a)g(a)+g'(a)f(a)$

ถ้า $g(a) \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{g}$ ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ และ

iv) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

v) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

พิสูจน์

i) สำหรับ x f a

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \frac{g(x) \quad g(a)}{x-a}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{(f+g)(x)-(f+g)(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} + \lim_{x\to a} \frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$ (จาก ท.บ. **5.1.4)**

นั่นคือ $(f+g)'a = f'(a)+g'(a)$ #

ii) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

iii) สำหรับ x f a

$$\frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)+f(x)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$\lim_{\substack{x-a\\ L\ a}} \frac{(fg)(x)-(fg)(a)}{x-a} = \lim_{x-a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot g(a)+\lim_{x\to a} f(x)\cdot\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

นั่นคือ $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$

(โดย ท.บ. 5.1.4 และความจริงที่ว่า f มีความต่อเนื่องที่ a) #

iv) เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ที่ a ได้ ดังนั้นจึงมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย จึงกล่าวได้ว่า

จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \, \varepsilon \, (a-\delta, a+\delta)$

ดังนั้น $\frac{1}{g}$ จะถูกนิยามบน $(a-\delta, a+\delta)$ ด้วย

สำหรับ $x \neq a$

$$\therefore \quad \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \cdot \frac{1}{g(a)\, g(x)}$$

$$\therefore \lim_{x \to a} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(x) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{x - a} = -\left(\lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\right) \cdot \left(\lim_{x \to a} \frac{1}{g(a)\; g(x)}\right)$$

นั่นคือ $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

(โดย ท.บ. 5.1.4 และความจริงที่ว่า $\frac{1}{g}$ มีความต่อเนื่องที่ a) #

v) ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ต่อไปนี้จะกล่าวถึงกฎที่สำคัญกฎหนึ่ง ซึ่งจะใช้กับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ (composite function) กฎนั้นก็คือ กฎลูกโซ่ (chain rule) ซึ่งจะกล่าวในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1.3 กฎลูกโซ่สำหรับการหาอนุพันธ์ (chain rule for differentiation)

ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(x) = goh(x) = g(h(x))$ โดย g และ h เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า f ย่อมเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ด้วย

และ $f'(a) = g'(h(a)) \cdot h'(a)$

หรือ $f'(a) = g'(h)\, h'(a)$

พิสูจน์ สมมติว่ามี $\delta > 0$ ซึ่ง $h(x) \neq h(a)$ สำหรับ $x \, \varepsilon \, (a-\delta, a+\delta)$ แล้ว สำหรับ $x \, \varepsilon \, (a-\delta, a+\delta)$ และ $x \neq a$

จะได้ว่า
$$\frac{goh(x) - goh(a)}{x - a} = \frac{g(h(x)) - g(h(a))}{h(x) \quad h(a)} \cdot \frac{h(x) - h(a)}{x - a}$$
$$\to g'(h(a)) \cdot h'(a) \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a$$

(โดย ท.บ. 5.1.4 และความจริงที่ว่า h มีความต่อเนื่องที่ a)

สมมติว่าไม่มี $\delta > 0$ แล้ว จะมีลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$ ซึ่ง $h(x_n) = h(a)$ สำหรับทุก ๆ $n \, \varepsilon \, N$

เนื่องจาก h สามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ จึงได้ว่า $h'(a) = 0$

สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ นี้ มีว่า $g \circ h(x_n) = g \circ h(a)$

ดังนั้น $\dfrac{goh(x_n) - goh(a)}{x_n - a} \to 0$

แต่สำหรับลำดับ $\{x_n'\}$ ใด ๆ เมื่อ $x_n' \to a$ และ $h(x_n') \neq h(a)$ แล้ว

$$\frac{goh(x_n') - goh(a)}{x_n' - a} = \frac{g(h(x_n')) - g(h(a))}{h(x_n') - h(a)} \cdot \frac{h(x_n') - h(a)}{x_n' - a}$$

$$\to 0$$

เนื่องจาก h มีความต่อเนื่องที่ a และ $h'(a) = 0$

เพราะฉะนั้น ในกรณีนี้ goh สามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ด้วย

และเนื่องจาก $(goh)'(a) = 0$ จึงได้ว่า goh สอดคล้องกับกฎลูกโซ่ดังกล่าว #

ต่อไปจะศึกษาถึงความสัมพันธ์ระหว่างการมีอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อเนื่องแบบหนึ่งต่อหนึ่งกับผกผันของฟังก์ชันนี้ ซึ่งจะกล่าวไว้ในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.1.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ซึ่งนิยามอยู่บนช่วงเปิด S และ f หาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon S$ ได้ และ $f'(a) \neq 0$ แล้ว f^{-1} ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ f(a) ได้

และ $$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$$

พิสูจน์ ให้ $b = f(a)$ และ $y = f(x)$

สำหรับ $x \neq a$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}$$

$$= \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

เนื่องจาก f สามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ จึงมีความต่อเนื่องที่ a ด้วย และจาก ท.บ. 5.4.2 จึงได้ว่า f^{-1} มีความต่อเนื่องที่ b

นั่นคือ $f^{-1}(y) \to f^{-1}(b)$ ขณะที่ $y \to b$

หรือ $x \to a$ ขณะที่ $y \to b$

เนื่องจาก $f'(a) \neq 0$ จาก ท.บ. 5.1.4 จึงได้ว่า

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} \to \frac{1}{f'(a)} \quad \text{ขณะที่} \quad y \to b$$ #

อนึ่ง ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด S หาอนุพันธ์ที่ทุก ๆ $x \varepsilon S$ ได้แล้ว จะกล่าวว่า f มี อนุพันธ์บน S และจะเรียก f ว่าเป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์บน S ได้

ข้อสังเกต พิจารณาเซตของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ ซึ่งจะเขียนแทนด้วยเซต $C(a, b)$ จาก *ท.บ. 6.1.2* กล่าวว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้แล้ว ฟังก์ชัน $f+g$ และ kf เมื่อ $k \varepsilon R$ ย่อมสามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ด้วย จึงสามารถแสดงได้ว่า เซต C(a, b) มีคุณสมบัติเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงจริง (real vector space) ภายใต้การดำเนินการบวกกันของฟังก์ชันและคูณฟังก์ชันด้วยจำนวนจริง และยิ่งกว่านั้นยังมีว่า fg ก็สามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ด้วย จึงสามารถแสดงต่อไปได้อีกว่า เซต C(a, b) มีคุณสมบัติเป็นพีชคณิตสลับที่เชิงจริง (real commutative algebra) ภายใต้การดำเนินการที่เพิ่มขึ้นมา คือ การคูณกันของฟังก์ชันอีกด้วย (ดูภาคผนวก)

แบบฝึกหัด 6.1.1

1. จงตรวจสอบการมีอนุพันธ์ที่ $x = 0$ ของฟังก์ชัน f บน R ต่อไปนี้

   1.1) $f(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & . \; x = 0 \end{cases}$

   1.2) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0 & , \; x = 0 \end{cases}$

   1.3) $f(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

2. สำหรับแต่ละข้อต่อไปนี้ ณ จุด a ที่กำหนดให้ จงหา $f'_-(a)$, $f'_+(a)$ แล้วพิจารณาว่า $f'(a)$ มีหรือไม่ ถ้ามีมีค่าเท่าไร ?

   2.1) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $a = 1$

   2.2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ถ้า } x \leqslant 0 \\ 2x, & \text{ถ้า } x > o \end{cases}$ เมื่อ $a = 0$

   2.3) $f(x) = |x-3|$ เมื่อ $a = 3$

   2.4) $f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x < 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x^2 & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$ เมื่อ $a = 0$

3. จงหาค่าของ a และ b ซึ่งทำให้ $f'(1)$ มีค่า ถ้า

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x < 1 \\ ax+b & \text{ถ้า } x \geqslant 1 \end{cases}$$

4. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x^n$ สำหรับ $n \varepsilon N$ ที่กำหนดให้ใด ๆ หาอนุพันธ์บน R ได้ และจะได้ว่า $f'(x) = nx^{n-1}$ สำหรับแต่ละ $x \varepsilon R$

5. จงพิสูจน์ว่า ทุก ๆ โพลิโนเมียลฟังก์ชันบน R ย่อมหาอนุพันธ์บน R ได้

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบหนึ่งต่อหนึ่งบนช่วงเปิด S จงพิสูจน์ว่า ถ้า f มีอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon S$ และ $f'(a) = 0$ แล้ว f^{-1} จะไม่มีอนุพันธ์ที่ $f(a)$

7. จงพิสูจน์ว่า ถ้าฟังก์ชัน f บน R สามารถหาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon R$ ได้แล้ว $|f|$ ย่อมหาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon R$ ได้ด้วย (เมื่อ $f(a) \neq 0$)

6.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้
(PROPERTIES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS)

ต่อไปนี้จะศึกษาถึงคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ ของฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

ทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด S และ f มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่ $a \varepsilon S$ และมีอนุพันธ์ที่ a แล้ว $f'(a) = 0$

พิสูจน์ เนื่องด้วย f มีอนุพันธ์ที่ a

$$\therefore \quad f'_-(a) = f'_+(a)$$

สมมติว่า f มีค่าสูงสุดที่ a

นั่นคือ $f(x) \leqslant f(a)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$

สำหรับ $x < a$

จะได้ว่า $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ และดังนั้น $f'_-(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$

และสำหรับ $x > a$

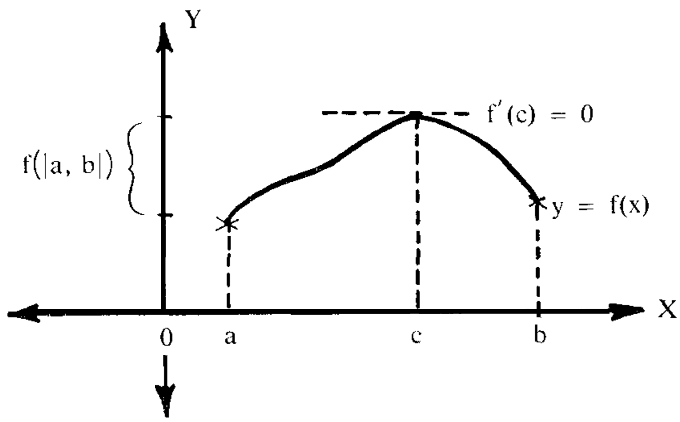
จะได้ว่า $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ และดังนั้น $f'_+(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$

เพราะฉะนั้น $f'(a) = 0$ #

สำหรับกรณีที่ f มีค่าต่ำสุด เว้นไว้เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 6.2.2 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ และ $f(a) = f(b)$ แล้ว จะมีจุด $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$



รูป 6.2.2

พิสูจน์ โดยคุณสมบัติการปกคลุมแน่น (compactness) ของฟังก์ชันต่อเนื่อง ดังนั้น $f([a, b])$ ย่อมมีค่าสูงสุดและต่ำสุด

สมมติว่า f มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ $c \varepsilon (a, b)$ แล้ว โดย ท.บ. 6.2.1 จึงได้ว่า $f'(c) = 0$

สมมติว่า f มีค่าสูงสุดและต่ำสุดที่ a และ b เนื่องจาก $f(a) = f(b)$, ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันคงที่ และ $f'(c) = 0$ สำหรับ $c \varepsilon (a, b)$ ใด ๆ #

ตัวอย่างที่ 6.2.1 ให้ $f(x) = 4x^3 - 9x$ จงแสดงว่า เงื่อนไขในข้อสมมติของทฤษฎีบทของโรลล์สอดคล้องกับช่วง $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$, $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ และ $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ พร้อมทั้งหาค่า c ที่เหมาะสมซึ่ง $f'(c) = 0$ สำหรับในแต่ละช่วง

วิธีทำ จาก

$$f(x) = 4x^3 - 9x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 12x^2 - 9$$

แสดงว่า $f'(x)$ มีค่าสำหรับทุก ๆ x จึงได้ว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้บน $(-\infty, +\infty)$ และดังนั้นจึงมีความต่อเนื่องบน $(-\infty, +\infty)$ ด้วย

จึงกล่าวได้ว่า ข้อสมมติของทฤษฎีบทของโรลล์จึงเป็นจริงเสมอบนช่วงใด ๆ ก็ได้

และถ้าให้ $f(x) = 0 = 4x\left(x^2 - \frac{9}{4}\right)$

$$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}$$

แสดงว่า ถ้าให้ $a = -\frac{3}{2}$, $b = 0$ ทฤษฎีบทของโรลล์จะเป็นจริงบนช่วง $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$

ในทำนองเดียวกันก็จะเป็นจริงบนช่วง $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ และ $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ด้วย

ต่อไปจะหาค่า c ซึ่ง $f'(c) = 0$

จาก $12c^2 - 9 = 0$ จึงได้ว่า $c = -\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\sqrt{3}$

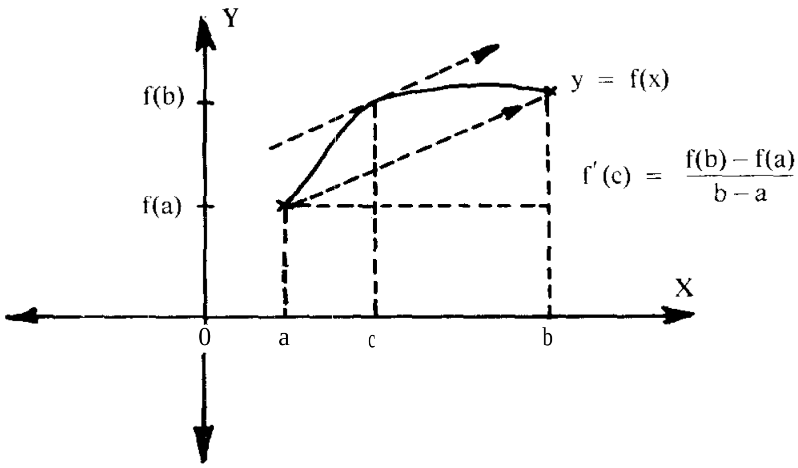
ดังนั้นในช่วง $\left[-\frac{3}{2}, 0\right]$ ค่า c ที่เหมาะสมคือ $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

ดังนั้นในช่วง $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ค่า c ที่เหมาะสมคือ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

ดังนั้นในช่วง $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ ค่า c ที่เหมาะสมคือ $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ และ $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

ทฤษฎีบท 6.2.3 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัด $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้แล้ว จะมีจุด $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$



รูป 6.2.2

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน g บน $[a, b]$ ซึ่งกำหนดให้

$$g(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\cdot(x-a)$$

จะเห็นว่า g มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บน (a, b) ด้วย

และ $\qquad g(a) = g(b) = f(a)$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $g'(c) = 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$$

$$\therefore \quad f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ #

ตัวอย่างที่ 6.2.2 ให้ $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ จงแสดงว่าข้อสมมติของทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยสอดคล้องสำหรับ $a = 1,\ b = 3$ และจงหาค่าของ c ในช่วงเปิด $(1, 3)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

วิธีทำ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันโพลิโนเมียล f จึงมีความต่อเนื่องและสามารถหาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ ค่าของ x

และ $f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$

$\because \; f(1) = -7, \quad f(3) = -27$

$$\therefore \; \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-27 - (-7)}{2}$$

$$= \; 10$$

ให้ $f'(c) = -10$

$$\therefore \; 3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$(3c-7)(c-1) = 0$$

$$\therefore \; c = \frac{7}{3}, 1$$

แต่ 1 ไม่ได้อยู่ในช่วง (1, 3)

ดังนั้น ค่า c ที่เป็นไปได้ คือ $\frac{7}{3}$ เพียงค่าเดียว

บทนิยาม 6.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์บนช่วงเปิด S ได้แล้ว จะเรียกฟังก์ชัน f' ว่าฟังก์ชันอนุพัทธ์ (derived function) บน S เมื่อ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ f ที่แต่ละ $x \varepsilon S$

ข้อสังเกต จะสังเกตเห็นว่าฟังก์ชันอนุพัทธ์อาจจะไม่ต่อเนื่องก็ได้

ตัวอย่างที่ 6.2.3 พิจารณาฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

สำหรับ $x \varepsilon R - \{0\}$, $f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$

และ $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ ไม่มีค่า (not exist)

ถึงอย่างไรก็ตาม ก็จะได้ว่า $f'(0) = 0$

ดังนั้นจะเห็นว่า f หาอนุพันธ์บน R ได้ แต่ f' ไม่มีความต่อเนื่อง (แบบที่สอง) ที่ 0

ต่อไปจะแสดงว่า ถึงแม้ฟังก์ชันอนุพัทธ์จะไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่มันก็มีคุณสมบัติการไม่ขาดตอน (connectedness) ด้วย ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด S แล้ว $f'(S)$ ย่อมเป็นช่วงด้วย

พิสูจน์ **พิจารณา** $a, b \in S$ เมื่อ $a < b$

และสมมติว่า $f'(a) < 0 < f'(b)$ จะแสดงว่า

จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$

ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ ดังนั้น โดยคุณสมบัติการปกคลุมแน่นของฟังก์ชันต่อเนื่อง, $f([a, b])$ จึงมีค่าต่ำสุด

เนื่องจาก $f'(a) < 0$ จะมี x' ซึ่ง $a < x' < b$ และ $f(x') < f(a)$

และเนื่องจาก $f'(b) > 0$ จะมี x'' ซึ่ง $a < x'' < b$ และ $f(x'') < f(b)$

เพราะฉะนั้น f จึงมีค่าต่ำสุดที่จุด $c \in (a, b)$ ดังนั้น $f'(c) = 0$

ต่อไปจะพิจารณากรณีทั่ว ๆ ไปของ $a, b \in S$ เมื่อ $a < b$ และ $f'(a) < f'(b)$ โดยจะแสดงว่า สำหรับทุก ๆ $k \in R$ ซึ่ง $f'(a) < k < f'(b)$ จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = k$

พิจารณาฟังก์ชัน g บน S ซึ่งกำหนดให้ $g(x) = f(x) - kx$ แล้ว $g'(a) < 0 < g'(b)$

และจากกรณีที่กล่าวแล้วข้างต้น จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $g'(c) = 0$

นั่นแสดงว่า $f'(c) = k$

ในกรณีของ $a, b \in S$ เมื่อ $a < b$

และ $f'(a) > f'(b)$ ก็แสดงในทำนองเดียวกัน

แบบฝึกหัด 6.2.1

1. สำหรับ $f(x) = 3x^2+6x$ บนช่วง $[-3, 0]$ จงหาจุดต่ำสุดของ f

2. สำหรับแต่ละ f(x) ต่อไปนี้ จงแสดงว่าสอดคล้องกับสมมติฐานของทฤษฎีบทของโรลล์บนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่า c ที่เหมาะสมตามทฤษฎีบทของโรลล์ด้วย

   2.1) $f(x) = 2x(x-1), [0, 1]$

   2.2) $f(x) = x^4-2x^2-8, [-2, 2]$

   2.3) $f(x) = x^3-2x^2-x+2$

3. สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่ง $f(x) = 4x^3+12x^2-x-3$ จงหาช่วง $[a, b]$ สามช่วงซึ่งสอดคล้องกับข้อสมมติฐานของทฤษฎีบทของโรลล์ พร้อมทั้งหาค่า c ในแต่ละช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $f'(c) = 0$

4. สำหรับแต่ละ f(x) ต่อไปนี้ จงแสดงว่าสอดคล้องกับข้อสมมติของทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยบนช่วงที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาค่า c ที่สอดคล้องกับทฤษฎีบทนี้ด้วย

   4.1) $f(x) = x^2+2x-1, [0, 1]$

   4.2) $f(x) = x^{2/3}, [0, 1]$

   4.3) $f(x) = \dfrac{x^2-3x-4}{x+5}, [-1, 4]$

5. จงแสดงว่า สำหรับ $f(x) = x^{2/3}$ จะไม่มีค่า c ในช่วงเปิด $(-2, 2)$ ซึ่ง

$$f'(c) = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)}$$

   พร้อมทั้งหาด้วยว่า เงื่อนไขใดของทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยไม่เป็นจริง เมื่อ $a = -2,\ b = 2$

6. สำหรับฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์ f บน R ซึ่ง $f'(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$ จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันคงที่บน R

7. จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด S และ $f'(x) > 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$ แล้ว f ย่อมเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing)

8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์และเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้บนช่วง S แล้ว $f'(x) \geqslant 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$

9. ฟังก์ชัน f บน R จะเรียก convex ถ้าสำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon R$ แล้ว

$$f(kx+(1-k)y) < kf(x)+(1-k)f(y) \quad \text{สำหรับทุก ๆ } k$$

   เมื่อ $0 \leqslant k \leqslant 1$

9.1) จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f บน R เป็น convex ก็ต่อเมื่อสำหรับ $x, y, z \varepsilon R$ ใด ๆ เมื่อ $x < y < z$, แล้ว

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

9.2) จงพิสูจน์ว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บน R และ f' เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้นบน R แล้ว f ย่อมเป็นฟังก์ชัน convex

9.3) จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน convex บน R มีอนุพันธ์ด้านซ้ายและอนุพันธ์ด้านขวาที่ทุก ๆ จุดใน R

10. ถ้าฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วงเปิด S มีอนุพันธ์บน $S-\{a\}$ เมื่อ $a \varepsilon S$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim_{x \to a} f'(x)$ สามารถหาค่าได้แล้ว f ย่อมมีอนุพันธ์ที่ a และ $f'(a) = \lim_{x \to a} f'(x)$

6.3 การประมาณโดยพหุนาม
(POLYNOMIAL APPROXIMATION)

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด S ได้ ถ้าฟังก์ชันอนุพัทธ์ (derived function) f' บน S สามารถหาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon S$ ได้ จะเรียก f ว่าสามารถหาอนุพันธ์ครั้งที่สองที่ a ได้ และจะเรียกอนุพันธ์ของ f' ที่ a ว่าอนุพันธ์อันดับที่สอง (second derivative) ของ f ที่ a และมักเขียนแทนด้วย $f''(a)$ ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชัน f อาจจะสามารถหาอนุพันธ์ครั้งที่ n ที่ a ได้ สำหรับ $n \varepsilon N$ และเขียนแทนอนุพันธ์อันดับที่ n ของ f ที่ a ด้วย $f^{(n)}(a)$ ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด S มีฟังก์ชัน $f^{(n)}$ ที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน S แล้ว จะกล่าวว่า f อยู่ในชั้น (class) C^n บน S นั่นก็แสดงว่า ถ้า f อยู่ในชั้น C^n บน S แล้ว f ย่อมอยู่ในชั้น C^k บน S สำหรับทุก ๆ $k \leqslant n$

ตัวอย่างที่ 6.3.1 ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^{n+1} & \text{เมื่อ} \quad x \geqslant 0 \quad \text{สำหรับ } n \varepsilon N \text{ ที่กำหนดให้} \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x < 0 \end{cases}$$

สำหรับ $n \varepsilon N$ ใด ๆที่กำหนดให้ จะได้ว่า f ย่อมอยู่ในชั้น C^n แต่ไม่อยู่ในชั้น C^{n+1} บน R

ถ้า f มีฟังก์ชันอนุพัทธ์ของทุก ๆ อันดับบน S แล้ว จะกล่าวว่า f อยู่ในชั้น C^∞ บน S นั่นหมายความว่า ถ้า f อยู่ในชั้น C^∞ บน S แล้ว ฟังก์ชันอนุพัทธ์ของมันทั้งหมดย่อมต่อเนื่องบน S

ในระหว่างฟังก์ชัน f บน R ด้วยกันแล้ว ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) เป็นแบบของฟังก์ชันที่มีโครงสร้างที่ง่ายที่สุดที่เราต้องการ คือ สามารถคำนวณค่าภาพ (image) ของจุดในโดเมนของมันได้ โดยใช้แต่เพียงวิธีการบวกกับการคูณซ้ำ ๆ กันในจำนวนครั้งที่จำกัดเท่านั้น สำหรับฟังก์ชันอื่นทั่ว ๆ ไปก็มักจะพบกับการที่จะต้องพิจารณาปัญหาในการคำนวณค่าภาพของจุดในโดเมนทั้งสิ้น อย่างไรก็ดี ถ้าเป็นไปได้แล้วจะหาฟังก์ชันพหุนามซึ่งให้ค่าประมาณที่ใกล้เคียงกับจุดที่กำหนดให้ของฟังก์ชันนั้น ๆ โดยสามารถสร้างตารางการประมาณค่าพิสัยของฟังก์ชันที่ใกล้ ๆ จุดนั้น หลักการแก้ปัญหาที่สำคัญของการประมาณโดยพหุนามถูกกำหนดโดยชั้นของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้ ดังจะกล่าวในรูปทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.3.1 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด S ได้ และ $a, b \varepsilon S$ แล้ว

$$f(b) = f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

สำหรับบาง c ที่อยู่ระหว่าง a กับ b

พิสูจน์ พิจารณา $a < b$ และให้ $M \varepsilon R$ โดย

$$f(b) = f(a) + \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a) + \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}\right\}$$

จะต้องแสดงว่า จะมี $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $f^{(n+1)}(c) = M$

พิจารณาฟังก์ชัน g บน S (ซึ่งเป็นฟังก์ชันนำมาช่วยในการพิสูจน์) ซึ่งกำหนดโดย

$$g(x) = -f(b)+f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k)}(x) + \frac{M(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

โดยที่ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์บน (a, b) ได้ และ $g(a) = g(b) = 0$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบทของโรลล์จะมี $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $g'(c) = 0$

$$\therefore\ g'(x) = f'(x)+\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{(b-x)^k}{k!}f^{(k+1)}(x) - \frac{(b-x)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k)}(x)\right\} - \frac{M(b-x)^n}{n!}$$

$$= \frac{(b-x)^n}{n!}\cdot\{f^{(n+1)}(x)-M\} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x\varepsilon(a, b)$$

เพราะฉะนั้น $f^{(n+1)}(c) = M$ #

อนึ่ง จะเรียกพหุนาม P_n บน R เมื่อ

$$P_n(x) = f(a)+(x-a)f'(a)+\ldots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

ว่า พหุนามแบบเทย์เลอร์ (Taylor polynomial) ระดับขั้น (degree) n สำหรับ f ที่ a

สำหรับพหุนามแบบเทย์เลอร์ P_n บน R จะเห็นว่า

$$P_n(a) = f(a)$$

และ $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ สำหรับ $k \varepsilon \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

นั่นคือ $P_n(x)$ และ $f(x)$ และอนุพันธ์ n ตัวแรก (first n derivatives) ของมันจับคู่กันที่ a ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า สามารถประมาณค่าฟังก์ชัน f ด้วยพหุนาม P_n ของมันที่จุดใกล้ ๆ a

อนึ่ง การที่จะใช้ค่า $P_n(b)$ เป็นตัวประมาณที่ดีของ $f(b)$ เมื่อ b อยู่ใกล้ ๆ กับ a ได้หรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับขนาดของเศษ $R_n(b)$ เมื่อ

$$R_n(b) = f(b)-P_n(b)$$

$$= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

$R_n(b)$ ก็คือ ค่าคลาดเคลื่อน (error) ในการประมาณค่า f(b) ด้วย $P_n(b)$ นั่นเอง

กรณีที่สนใจเป็นพิเศษก็คือ การประมาณค่าฟังก์ชัน f ในย่านของ 0 ในกรณีนี้พหุนามแบบเทย์เลอร์จะอยู่ในรูป

$$P_n(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

และค่าคลาดเคลื่อนในการประมาณค่า f(b) ด้วย $P_n(b)$ เมื่อ b อยู่ใกล้ ๆ กับ 0 ถูกกำหนดโดย

$$R_n(b) = \frac{b^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 < |c| < |b|$$

ตัวอย่างที่ 6.3.2 โดยการใช้สามเทอมแรกที่ไม่เป็นศูนย์ของพหุนามแบบเทย์เลอร์ที่ **x = 0,** สำหรับฟังก์ชันไซน์ (sine function) บน R จงแสดงว่า sin($) = 0.47943 โดยมีเศษคลาดเคลื่อนไม่เกิน 0.00002

ฟังก์ชันไซน์อยู่ในชั้น C^∞ บน R

เรามี

$$\begin{array}{llll}
\sin'(x) = \cos x & & \sin'(O) & = 1 \\
\sin'(x) = \sin x & . & \sin''(O) & = 0 \\
\sin'''(x) = -\cos x & \therefore & \sin^{(3)}(0) & = -1 \\
\sin^{(4)}(x) = \sin x & & \sin^{(4)}(0) & = 0 \\
\sin^{(5)}(x) = \cos x & . & \sin^{(5)}(0) & = 1 \\
\sin^{(6)}(x) = -\sin x & \therefore & \sin^{(6)}(0) & = 0
\end{array}$$

ดังนั้น $$P_6(x) = x \quad \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

เพราะฉะนั้น P"(f) = 0.47943

$$R_6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^7}{7!}(-\cos c) \qquad \text{สำหรับบาง} \quad c \; \varepsilon \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

จึงได้ว่า

$$\left|R_6\left(\frac{1}{2}\right)\right| < \frac{1}{7!}\left(\frac{1}{2}\right)^7 < 0.00002$$

บทนิยาม 6.3.1 ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ในชั้น C^∞ บนช่วงเปิด S แล้ว อนุกรมกำลัง (power series) บน R นิยามโดย

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f(")(a) + \ldots$$

สำหรับ $a \varepsilon S$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ซึ่งเรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor series) สำหรับฟังก์ชัน f ที่ a

ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ในชั้น C^{∞} บนช่วงเปิด S แล้ว สำหรับ $x \varepsilon S$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะได้ว่า

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n)$$

เมื่อ c_n อยู่ระหว่าง a กับ x, สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

ถ้าในช่วง $K \subseteq S$

$$R_{(n)}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_n)$$

$$\to 0$$

แล้วพหุนามแบบเทย์เลอร์ P_n จะให้ค่าประมาณที่ดีกว่าสำหรับฟังก์ชัน f ขณะที่ n มีค่าเพิ่มมากขึ้น

นั่นคือ สำหรับลำดับ $\{P_n\}$ จะมี $P_{(n)}(x) \to f(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon K$

ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f มีนิรูปอนุกรมกำลัง (power series representation) ที่ a บน K และสามารถเขียนได้เป็น

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon K$

ตัวอย่างที่ 6.3.3 ฟังก์ชันไซน์อยู่ในชั้น C^{∞} บน R จากตัวอย่างที่ 6.3.2 ได้ว่า ที่ $x = 0$

$$P_{(n)}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

และ $|R_n(x)| \leqslant \dfrac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

เนื่องจาก $|\sin^{(n)}(x)| \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$ และ $x \varepsilon R$

และสามารถแสดงได้ว่า $\dfrac{a^n}{n!} \to 0$ สำหรับ $a \varepsilon R$ ใด ๆ

ดังนั้น $R_n(x) \to 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

ดังนั้น ฟังก์ชันไซน์มีนิรูปอนุกรมกำลังที่ $x = 0$ บน R และ

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งอยู่ในชั้น C^∞ บน R กับอนุกรมเทย์เลอร์ที่ x = a ซึ่งถูกกำหนดโดย

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$$

อาจจะเป็นที่น่าสงสัยว่า ค่าของ x ซึ่งอนุกรมยกกำลังลู่เข้านั้นเป็นค่าสำหรับ $R_{(n)} \to 0$ หรือไม่ ถึงแม้ว่าจะเป็นเช่นนี้จริงบ่อย ๆ ก็ตาม แต่ก็ไม่จริงเสมอไป อาจจะเป็นไปได้ว่าจะมีฟังก์ชัน f บน R ซึ่งอนุกรมแบบเทย์เลอร์ลู่เข้าที่จุด $b \in R$ แต่ไม่ได้ลู่เข้าสู่ f(b) ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x = 0 \end{cases}$$

จะเห็นว่า f อยู่ในชั้น C^∞ บน R และ $f^{(n)}(0) = 0$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$ (ดูแบบฝึกหัด 6.3.1 ข้อ 10)

เพราะฉะนั้น อนุกรมเทย์เลอร์สำหรับ f ที่ x = 0 ลู่เข้าสู่ฟังก์ชันศูนย์บน R แต่ $f(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \in R - \{0\}$

แบบฝึกหัด 6.3.1

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชันโคไซน์บน R และจงแสดงว่ามันแทนฟังก์ชันโคไซน์ได้สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$
2. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชันชี้กำลัง และจงแสดงว่ามันแทนฟังก์ชันชี้กำลังได้สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$
3. จงใช้หกเทอมแรกของอนุกรมเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชันชี้กำลังแสดงว่า $e \simeq 2.718$ (ให้ถูกต้องทศนิยมสามตำแหน่ง)
4. จงใช้การประมาณพหุนามแบบเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชันชี้กำลังบน R พิสูจน์ว่า ฟังก์ชันประกอบระหว่างฟังก์ชันลอการิทึมกับฟังก์ชันชี้กำลัง คือ $\ln \circ \exp : R \to R$ เป็นฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function) บน R
5. โดยการใช้แบบฝึกหัดข้อ 4 จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $a \neq 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ $a^x = e^{x \ln a}$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$
6. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชัน f บน $(-1, \infty)$ ซึ่ง $f(x) = \ln(1+x)$ และจงแสดงด้วยว่ามันแทน f บน $\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$
7. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชัน g บน $(-\infty, 1)$ ซึ่ง $g(x) = \ln(1-x)$ และจงแสดงด้วยว่ามันแทน g บน $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$
8. จงหาอนุกรมที่แทนสำหรับฟังก์ชัน h บน $(-1, 1)$ เมื่อ $h(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$ และแสดงว่ามันแทน h บน $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
9. จงใช้การประมาณพหุนามที่ $x = 0$ แสดงว่า $\ln 2 \simeq 0.6931$ (โดยถูกต้องทศนิยม 4 ตำแหน่ง)
10. โดยการใช้การประมาณพหุนามแบบเทย์เลอร์ที่ $x = 0$ สำหรับฟังก์ชันชี้กำลัง จงพิสูจน์ว่าสำหรับฟังก์ชัน f บน R^+ ซึ่ง

    $f(x) = \frac{1}{x^n} e^{-\frac{1}{x^2}}$ สำหรับ $n \varepsilon N$ ที่กำหนดให้ เราจะได้ว่า

    $$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

    และจงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

    $$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{เมื่อ } x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \end{cases}$$

    อยู่ในชั้น C^∞ บน R และ $f^{(n)}(0) = 0$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

6.4 การคำนวณค่าของลิมิต (COMPUTATION OF LIMITS)

สิ่งที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นแบบทั่ว ๆ ไปของทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

ทฤษฎีบท 6.4.1 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของโคชี (The Cauchy Mean Value Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ แล้วจะมี $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน h บน $[a, b]$ ซึ่ง

$$h(x) = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) & 1 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix}$$

ซึ่ง h มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และมีอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) และ

$$h(a) = h(b) = 0$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.2.2 (ทฤษฎีบทของโรลล์) จะมี $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $h'(c) = 0$

นั่นคือ
$$\begin{vmatrix} f'(c) & g'(c) & 0 \\ f(a) & g(a) & 1 \\ f(b) & g(b) & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\therefore \quad f'(c)[g(a) - g(b)] - g'(c)[f(a) - f(b)] = 0$$

นั่นคือ
$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$ #

ทฤษฎีบท 6.4.1 (The Cauchy Mean Value Theorem) นี้ ทำให้ได้เทคนิคที่เป็นประโยชน์อย่างมากสำหรับการคำนวณหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 6.4.2 กฎของโลปิตาล (De l' Hopital's Rule)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บนช่วง $S - \{a\}$ เมื่อ S เป็นช่วงใด ๆ และ $a \varepsilon S$ โดย $f(x), g(x) \to 0$ ขณะที่ $x \to a$ และ $g(x), \ g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S - \{a\}$ และ $\lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ มีค่าด้วยแล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ ย่อมมีค่าด้วย และ

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $f(x), g(x) \to 0$ ขณะที่ $x \to a$

จึงสามารถกำหนดฟังก์ชัน f_1, g_1 ซึ่งเป็นฟังก์ชันขยายของฟังก์ชัน f และ g ตามลำดับ ซึ่ง f_1 และ g_1 มีความต่อเนื่องบน S แล้ว $f_1(a) = g_1(a) = 0$

จะเห็นว่า พฤติกรรมลิมิตของ $\frac{f_1}{g_1}$ ที่ a เหมือนกันกับของ $\frac{f}{g}$ ที่ a (พึงระลึกเสมอว่า เมื่อกล่าวถึงพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชันที่ a นั้น จะหลีกเลี่ยงหรือไม่พิจารณาค่าของฟังก์ชันที่ a)

พิจารณาลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon S-\{a\}$ และ $x_n \to a$ จาก ท.บ. 6.4.1 (Cauchy Mean Value Theorem) สำหรับทุก ๆ x_n จะมี c_n ระหว่าง a กับ x_n ซึ่ง

$$f_1'(c_n)[g_1(x_n)-g_1(a)] = g_1'(c_n)[f_1(x_n)-f_1(a)]$$

เนื่องจาก $f_1(a) = g_1(a) = 0$ และ $g(x), g'(x) \neq 0$

สำหรับ $x \varepsilon S-\{a\}$ จึงได้ว่า

$$\frac{f}{g}(x_n) = \frac{f'}{g'}(c_n)$$

ในขณะที่ $x_n \to a$ จะได้ $c_n \to a$

แต่ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ มีค่า

ดังนั้น $\frac{f'}{g'}(c_n) \to \lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$

และเพราะฉะนั้น $\frac{f}{g}(x) \to \lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$

จึงได้ว่า $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ มีค่า และ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ #

ตัวอย่างที่ 6.4.1 จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 0$ ของฟังก์ชัน h บน R^+ ซึ่งกำหนดโดย $h(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}$

ในที่นี้ให้ฟังก์ชัน f และ g บน R^+ นิยามโดย

$f(x) = 1-\cos x$ และ $g(x) = \sqrt{x}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $R^+ \cup \{0\}$ และมีอนุพันธ์บน R^+ และ $f(0) = g(0) = 0$

แต่สำหรับ $x \neq 0$, $\frac{f'}{g'}(x) = \frac{\sin x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2\sqrt{x}\sin x \to 0$ ขณะที่ $x \to 0$

ดังนั้น โดย ท.บ. 6.4.2 จึงกล่าวได้ว่า

$$\lim_{x \to a} h(x) = 0$$

นอกจากนี้ยังมี de l' Hopital's Rule แบบต่าง ๆ ที่มีประโยชน์อีก เช่น

ทฤษฎีบท 6.4.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บนช่วง $S-\{a\}$ เมื่อ S เป็นช่วงใด ๆ และ $a \varepsilon S$ และ $f(x), g(x) \to \infty$ ขณะที่ $x \to a$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S-\{a\}$ และ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ มีค่าแล้ว $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ ย่อมมีค่าด้วย และ

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$$

พิสูจน์ ให้ $t = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$

นั่นแสดงว่า กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$f(x), g(x) > 0$$

และ $\left| \frac{f'}{g'}(x) - t \right| < \varepsilon$ เมื่อ $x \varepsilon S$

และ $0 < |x-a| < \delta_1$

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะด้านขวาของ a โดยเลือก x และ x_1 ซึ่ง

$$a < x < x_1 < a + \delta_1$$

โดย ท.บ. 6.4.1 จะมี $c \, \varepsilon \, (x, x_1)$ ซึ่งทำให้

$$\frac{f(x) \quad f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'}{g'}(c)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{1 \quad \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 \quad \frac{f(x_1)}{f(x)}} = \frac{f'}{g'}(c)$$

เนื่องจาก $f(x), g(x) \to \infty$ ขณะที่ $x \to a$

พิจารณาให้ x_1 คงที่ จะได้

$$\frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 \frac{f(x_1)}{f(x)}} \to 1 \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a$$

ดังนั้นจะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งทำให้

$$\left| \frac{1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}}{1 - \frac{f(x_1)}{f(x)}} - 1 \right| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad x \varepsilon S \quad \text{และ} \quad 0 < |x-a| < \delta_2$$

ซึ่งจะได้ว่า

$$\left| \frac{f}{g}(x) - t \right| < \varepsilon(1 + \varepsilon + |t|) \quad \text{เมื่อ} \quad x \varepsilon S$$

และ $0 < |x-a| < \delta$ เมื่อ δ เท่ากับค่าที่น้อยที่สุดระหว่าง (δ_1, δ_2)

นั่นคือ $$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = t$$ #

ตัวอย่างที่ 6.4.2 จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 0$ ของฟังก์ชัน h บน R^+ ซึ่ง

$$h(x) = x \ln x$$

ให้ฟังก์ชัน f และ g บน R^+ เป็น $f(x) = \ln x$ และ $g(x) = \frac{1}{x}$ มีอนุพันธ์บน R^+ และ $f(x), g(x) \to \infty$ ขณะที่ $x \to 0$

แต่สำหรับ $x \neq 0$

$$\frac{f'}{g'}(x) = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= -x$$

$$\to 0 \quad \text{ขณะที่} \quad x \to 0$$

ดังนั้น โดย ท.บ. 6.4.3 จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 0} h(x) = 0$$

แบบฝึกหัด 6.4.1

1. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 0$ ของฟังก์ชัน f บน $(0, 1)$ ต่อไปนี้

   1.1) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

   1.2) $f(x) = \dfrac{\tan 6x}{\sin x}$

   1.3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sqrt{x}}$

   1.4) $f(x) = x^2 \ln x$

2. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 1$ ของฟังก์ชัน f บน $(0, 2)-\{1\}$ ต่อไปนี้

   2.1) $f(x) = \dfrac{x^3+x-2}{x^2-3x+2}$

   2.2) $f(x) = \dfrac{1-2\sin^2 \frac{\pi}{6}x}{1-x^2}$

3. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดของฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x(\sqrt{x^2+1}-x)$

   (*ข้อเสนอแนะ* : ควรให้ $x = \dfrac{1}{y}$)

4. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 0$ ของฟังก์ชัน f บน R^+ ต่อไปนี้

   4.1) $f(x) = x^a \ln x$

   4.2) $f(x) = x^x$

5. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตขณะที่ $x \to \infty$ ของฟังก์ชัน f บน R^+ เมื่อ

   $$f(x) = \frac{\ln x}{x^a} \quad \text{สำหรับ} \quad a \varepsilon R^+ \quad \text{ใด ๆ}$$

6. สำหรับฟังก์ชัน f ซึ่งสามารถหาอนุพันธ์บน R^+ ได้ จงพิสูจน์ว่า

   6.1) ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a$ และ $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = b$ แล้ว $b = 0$

   6.2) ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = a \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{ax} = 1$

   6.3) ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$ แล้ว $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$

   (*ข้อเสนอแนะ* : ควรใช้ฟังก์ชัน g บน R ซึ่ง $g(x) = x - f(x)$)

บทสรุปทบทวน
บทที่ 6 การหาอนุพันธ์

6.1 อนุพันธ์

บทนิยาม 6.1.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด S จะเรียกว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ หรือสามารถดิฟเฟอเรนชิเอตได้ที่ $a \varepsilon S$ ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ สามารถหาค่าได้

ถ้าลิมิตมีค่าที่ a จะเขียนแทนด้วย $f'(a)$ อ่านว่า "ค่าอนุพันธ์ของ f ที่ a"

อนึ่ง ถ้าลิมิตด้านซ้ายมีค่า จะเขียนแทนด้วย $f'_{-}(a) = \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

เรียก $f'_{-}(a)$ ว่า อนุพันธ์ด้านซ้ายของ f ที่ a

และถ้าลิมิตด้านขวามีค่า จะเขียนแทนด้วย $f'_{+}(a) = \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

เรียก $f'_{+}(a)$ ว่า อนุพันธ์ด้านขวาของ f ที่ a

ทฤษฎีบท 6.1.1 ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงเปิด S สามารถหาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon S$ ได้แล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องที่ a

ทฤษฎีบท 6.1.2 ทฤษฎีบทพีชคณิตของอนุพันธ์ (Algebra of Derivative Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด s โดย f และ g สามารถหาอนุพันธ์ที่ a&S ได้แล้ว f tg, kf เมื่อ k&R และ f g ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ได้ด้วย และได้ว่า

1) $(f+g)'(a) = f'(a)+g'(a)$

2) $(kf)'(a) = kf'(a)$

3) $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$

ถ้า $g(a) \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{g}$ ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ a ได้ และ

4) $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$

5) $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$

ทฤษฎีบท 6.1.3 กฎลูกโซ่ (chain rule)

ถ้า f, g และ h เป็นฟังก์ชันโดยที่ $f(x) = g \circ h(x) = g(h(x))$ โดย g และ h เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้แล้ว จะได้ว่า f ย่อมเป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ด้วย

และ $f'(a) = g'(h(a))\cdot h'(a)$

หรือ $f'(a) = g'(h)\, h'(a)$

ทฤษฎีบท 6.1.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแบบหนึ่งต่อหนึ่งซึ่งนิยามอยู่บนช่วงเปิด S และ f หาอนุพันธ์ที่ $a \varepsilon S$ ได้ และ $f'(a) \neq 0$ แล้ว f^{-1} ย่อมสามารถหาอนุพันธ์ที่ $f(a)$ ได้

และ $$(f^{-1})'\left(f(a)\right) = \frac{1}{f'(a)}$$

6.2 คุณสมบัติของฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์ได้

ทฤษฎีบท 6.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันบนช่วงเปิด S และ f มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดที่ $a \varepsilon S$ และมีอนุพันธ์ที่ a แล้ว $f'(a) = 0$

ทฤษฎีบท 6.2.2 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้ และ $f(a) = f(b)$ แล้ว จะมีจุด $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$

ทฤษฎีบท 6.2.3 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งต่อเนื่องบนช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัด $[a, b]$ และสามารถหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้แล้ว จะมีจุด $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

บทนิยาม 6.2.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์บนช่วงเปิด S ได้แล้ว จะเรียกฟังก์ชัน f' ว่าฟังก์ชันอนุพัทธ์ (derived function) บน S เมื่อ $f'(x)$ เป็นอนุพันธ์ของ f ที่แต่ละ $x \varepsilon S$

ทฤษฎีบท 6.2.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีอนุพันธ์บนช่วงเปิด S แล้ว $f'(S)$ ย่อมเป็นช่วงด้วย

6.3 การประมาณโดยพหุนาม

ทฤษฎีบท 6.3.1 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์อันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด S ได้ และ $a, b \varepsilon S$ แล้ว

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

สำหรับบาง c ที่อยู่ระหว่าง a กับ b

บทนิยาม 6.3.1 ถ้าฟังก์ชัน f อยู่ในชั้น C^{∞} บนช่วงเปิด S แล้ว อนุกรมกำลังบน R นิยามโดย

$$f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

สำหรับ $a \varepsilon S$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ ซึ่งเรียกว่าอนุกรมเทย์เลอร์สำหรับฟังก์ชัน f ที่ a

6.4 การคำนวณค่าลิมิต

ทฤษฎีบท 6.4.1 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของโคชี (The Cauchy Mean Value Theorem)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ และหาอนุพันธ์บนช่วงเปิด (a, b) ได้แล้ว จะมี $c \varepsilon (a, b)$ ซึ่ง

$$f'(c)[g(b) - g(a)] = g'(c)[f(b) - f(a)]$$

ทฤษฎีบท 6.4.2 กฎของโลปิตาล (De l' Hopital's Rule)

ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บนช่วง $S - \{a\}$ เมื่อ S เป็นช่วงใด ๆ และ $a \varepsilon S$ โดย $f(x), g(x) \to 0$ ขณะที่ $x \to a$ และ $g(x), g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ มีค่าด้วยแล้ว $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ ย่อมมีค่าด้วยแล้ว

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$$

ทฤษฎีบท 6.4.3 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์บนช่วง $S - \{a\}$ เมื่อ S เป็นช่วงใด ๆ และ $a \varepsilon S$ และ $f(x), g(x) \to \infty$ ขณะที่ $x \to a$ และ $g'(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S - \{a\}$ และ $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$ มีค่าแล้ว $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x)$ ย่อมมีค่าด้วย และ

$$\lim_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \lim_{x \to a} \frac{f'}{g'}(x)$$

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 6.1.1

1.

1.1) ไม่มี

1.2) มี, $f'(0) = 0$

1.3) มี, $f'(0) = 1$

2:

2.1) $f'_-(1) = f'_+(1) = f'(1) = -1$

$f'(1)$ มีค่า

2.2) $f'_-(0) = 0,\ f'_+(0) = 2$

$f'(0)$ ไม่มีค่า

2.3) $f'_-(3) = -1,\ f'_+(3) = 1$

.. $f'(3)$ ไม่มีค่า

2.4) $f'_-(0) = 1,\ f'_+(0) = 0$

. $f'(0)$ ไม่มีค่า

3. $a = 2$, b = จำนวนจริงใด ๆ

คำตอบแบบฝึกหัด 6.2.1

1. $x = -1$

2.

2.1) $c = \frac{1}{2}$

2.2) $c = 0, 1, -1$

2.3) $c = 1, -\frac{1}{3}$

3. $\left(-3, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-3, -\frac{1}{2}\right)$

และ $c_1 = \frac{-12-\sqrt{131}}{12}$, $c_2 = \frac{-12+\sqrt{131}}{12}$, $c_3 = \frac{-12\pm\sqrt{131}}{12}$ ตามลำดับ

4.

4.1) $c = \frac{1}{2}$

4.2) $c = \frac{8}{27}$

4.3) $c = 1$

คำตอบแบบฝึกหัด 6.3.1

1 . $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$

2. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$

6 . $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} +$

7 . $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots$

8. $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) + \ \ldots \ + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$

คำตอบแบบฝึกหัด 6.4.1

1. 1.1) 1

   1.2) 6

   1.3) 0

   1.4) 0

2. 2.1) -4

   2.2) $\frac{-\pi}{2\sqrt{3}}$