บทที่ 5
ลิมิตและความต่อเนื่อง

หัวข้อเรื่อง

5.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

5.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

5.3 คุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง

5.3.1 คุณสมบัติการไม่ขาดตอนของฟังก์ชันต่อเนื่อง

5.3.2 คุณสมบัติการปกคลุมแน่นของฟังก์ชันต่อเนื่อง

5.4 ฟังก์ชันพิเศษบางชนิด

5.4.1 ฟังก์ชันทางเดียว

5.4.2 ฟังก์ชันผกผัน

5.4.3 ฟังก์ชันชี้กำลัง

5.5 ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 5 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

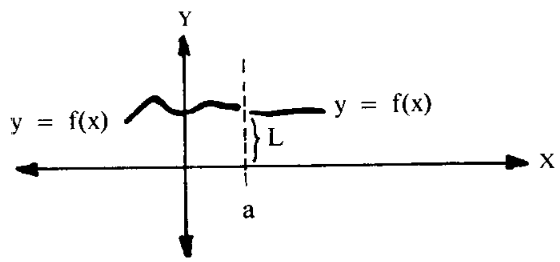
1. แสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีค่าลิมิตหรือไม่มีได้
2. บอกคุณสมบัติทางพีชคณิตของลิมิตได้
3. แสดงได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่จุดใดจุดหนึ่งหรือไม่
4. บอกได้ว่าลักษณะของฟังก์ชันที่ไม่ต่อเนื่องนั้นมีลักษณะเป็นแบบใด และจะแก้ไขเสียใหม่ให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องได้อย่างไรหรือไม่
5. บอกคุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่องได้
6. แสดงการต่อเนื่องของฟังก์ชันทางเดียว ฟังก์ชันผกผัน และฟังก์ชันชี้กำลังได้
7. บอกถึงความแตกต่างระหว่างความต่อเนื่องกับความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอของฟังก์ชันได้
8. แสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอหรือไม่ได้

บทที่ 5
ลิมิตและความต่อเนื่อง
(LIMITS AND CONTINUITY)

5.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (LIMIT OF FUNCTIONS)

ในกระบวนวิชานี้จะศึกษาเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงบนช่วงที่กำหนดให้ โดยอาศัยทฤษฎีบทลิมิตของลำดับที่ได้กล่าวมาแล้วในบทที่ 3 เป็นสำคัญ

บทนิยาม 5.1.1 สำหรับฟังก์ชัน f บน R และ $a \in R$ จะกล่าวว่า f(x) มีลิมิตเป็น L ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to L$ ดูรูป 5.1.1 ประกอบ

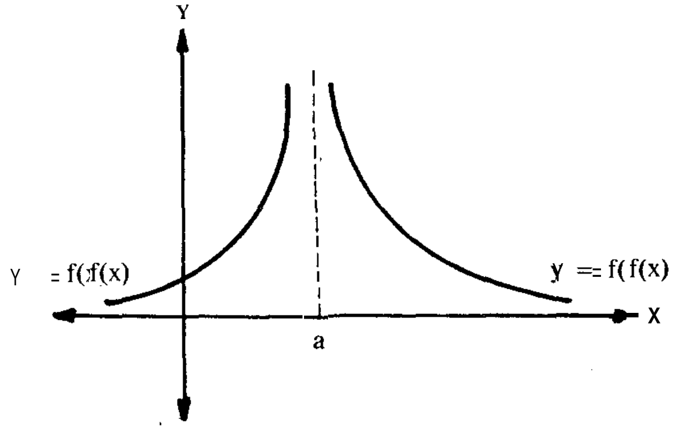


รูป 5.1.1

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{“}\lim_{x\to a} f(x) = L\text{”} \quad \text{หรือ} \quad \text{“}f(x) \to L \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a\text{”}$$

บทนิยาม 5.1.2 สำหรับฟังก์ชัน f(x) ใด ๆ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f(x) ลู่ออกทางบวก (diverges positively) ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to \infty$ ดูรูป 5.1.2 ประกอบ



รูป 5.1.2

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{“}\lim_{x\to a} f(x) = \infty\text{''} \quad \text{หรือ} \quad \text{“}f(x) \to \infty \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a\text{''}$$

บทนิยาม 5.1.3 สำหรับฟังก์ชัน f(x) ใด ๆ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f(x) สู่ออกทางลบ (diverges negatively) ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to -\infty$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\text{“}\lim_{x\to a} f(x) = -\infty\text{''} \quad \text{หรือ} \quad f(x) \to -\infty \quad \text{ขณะที่} \quad x \to a\text{''}$$

เมื่อสนใจที่จะศึกษาถึงพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชัน f ณ ที่จุด a ใด ๆ ก็จะทดสอบดูว่าฟังก์ชัน f จับคู่ไปยังจุดต่าง ๆ ในย่าน (neighborhood) ของจุด a อย่างไร สิ่งสำคัญก็คือ จะต้องเลือก $x_n \neq a$ หมายความว่าจะไม่เกี่ยวข้องกับการจับคู่ของจุด a ไปยังตัวของมันเอง เพราะว่าจะทำให้สามารถตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชัน f ณ ที่จุด a เมื่อ f ไม่นิยาม ณ ที่จุดนี้ได้ ทั้งนี้เมื่อมีเงื่อนไขว่า มีจุดต่าง ๆ ในโดเมนซึ่งสามารถสร้างลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \to a$ ได้

ต่อไปนี้จะพิจารณาถึงลิมิตของฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่จุด a เมื่อ $a \varepsilon S$ (a อยู่ในช่วง S) และ f นิยามบน $S-\{a\}$ (โดย a อาจจะเป็นจุดภายในหรือจุดสิ้นสุดของช่วง S ก็ได้)

นั่นคือ สนใจที่จะพิจารณาลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon S-\{a\}$ และ $x_n \to a$ นั่นเอง

ตัวอย่าง 5.1.1 จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = 3$ ของฟังก์ชัน f บน R ซึ่งนิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 3 \\ 2 & \text{เมื่อ} \quad x = 3 \end{cases}$$

จะพบว่า สำหรับ $x \neq 3$ จะได้

$$f(x) = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)} = x+3$$

ดังนั้น สำหรับลำดับ $\{x_n\}$ ทั้งหมด เมื่อ $x_n \to 3$ และ $x_n \neq 3$

แล้ว $f(x_n) = x_n + 3$ นั่นคือ $f(x_n) \to 6$

$$\therefore \lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

อนึ่ง ในการหาค่าลิมิตนี้ ถ้าจะไม่เกี่ยวข้องกับค่าของ f ที่ x = 3 คือ ไม่จำเป็นต้องนิยาม f ณ ที่จุด 3 จะได้ว่า

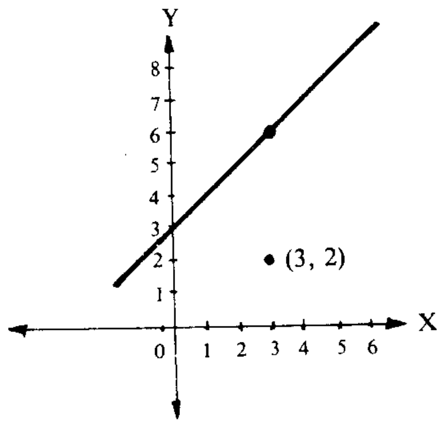
สำหรับ f บน $R - \{3\}$ กำหนดโดย

$$f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

ก็ยังคงได้ว่า

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

พิจารณากราฟ f(x) จากรูป 5.1.3



รูป 5.1.3

ตัวอย่างที่ 5.1.2 จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ x = 0 ของฟังก์ชัน f บน R^+ ซึ่งนิยามโดย $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$

$$\text{พิจารณา} \quad \sin x = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ} \quad x = 0 \quad \text{หรือ} \quad x = \pi \\ 1 & \text{เมื่อ} \quad x = \frac{\pi}{2} \\ -1 & \text{เมื่อ} \quad x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

และ $\sin(2\pi + x) = \sin x$ ทุก ๆ $x \in R$

และ $|\sin x| \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

$$\therefore \quad \left|x \sin \frac{1}{x}\right| \leqslant |x| \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x \varepsilon R^+$$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \to 0$ และ $x_n > 0$

เพราะว่า $|f(x_n)| = \left|x_n \sin \frac{1}{x_n}\right| \leqslant |x_n|$

จึงได้ว่า $f(x_n) \to 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

อนึ่ง วิธีที่สะดวกในการที่จะแสดงว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิต ณ ที่จุด a ก็คือ เลือกลำดับทางเดียวสองลำดับ คือลำดับ $\{x_n\}$ และลำดับ $\{x_n'\}$ เมื่อ $x_n \to a$ และ $x_n' \to a$ โดย $x_n, x_n' \neq a$ แล้วจะได้ลำดับ $\{f(x_n)\}$ และ $\{f(x_n')\}$ ซึ่ง $f(x_n) \to L$ และ $f(x_n') \to L'$ โดย $L \neq L'$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ ไม่มีลิมิตที่ $x = 0$

จะสังเกตเห็นว่า $f(x) = \sin\frac{1}{x} = -1$ เมื่อ $\frac{1}{x} = \frac{(4n-1)\pi}{2}$

นั่นคือ $x = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

และ $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ จะมีค่ามากที่สุดเป็น 1

คือ $f(x) = \sin\frac{1}{x} = 1$ เมื่อ $\frac{1}{x} = \frac{(4n-3)\pi}{2}$

นั่นคือ $x = \frac{2}{(4n-3)\pi}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

กรณีที่ 1) พิจารณาลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n = \frac{2}{(4n-1)\pi}$ จะเห็นว่าขณะที่ $x_n \to 0$ และ $x_n \neq 0$ แล้ว $f(x_n) = \sin\frac{1}{x} = \sin\frac{(4n-1)\pi}{2} = -1$ สำหรับ $n \varepsilon N$

ดังนั้น $f(x_n) \to -1$

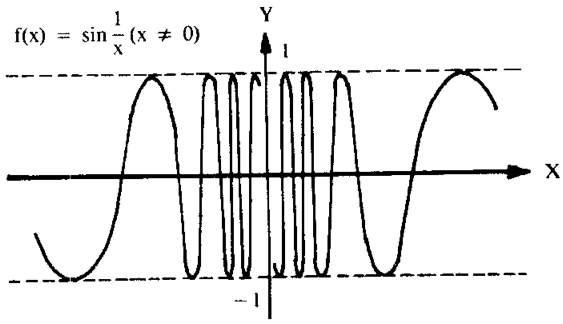
นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -1$

กรณีที่ 2) แต่ถ้าพิจารณาลำดับ $\{x_n'\}$ เมื่อ $x_n' = \frac{2}{(4n-3)\pi}$ แล้วจะพบว่า $x_n' \to 0$ และ $x_n' \neq 0$ แล้ว $f(x_n') = \sin\left(\frac{4n-3}{2}\right)\pi = 1$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

ดังนั้น $f(x_n') \to 1$ คือ $\lim\limits_{x' \to o} f(x') = 1$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} f(x) \neq \lim_{x' \to 0} f(x')$

นั่นคือ $\lim_{x \to 0} f(x)$ หรือ $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ ไม่มีค่า (not exist) บนช่วง R ดังรูป 5.1.4



รูป 5.1.4

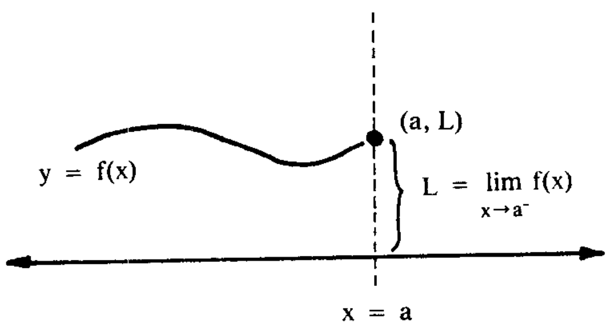
จากรูป 5.1.4 แสดง $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ ไม่มีค่าเป็นจำนวนจริง นั่นคือกราฟของ f(x) มันแกว่งกวัด (Oscillate) ขณะที่ x เข้าใกล้ 0 จนทำให้ไม่สามารถจะคาดคะเนได้ว่าค่าที่แน่นอนของ f(x) ณ ที่ x เข้าใกล้ 0 นั้นเป็นค่าใดนั่นเอง (หรือกล่าวว่าขณะที่ x เข้าใกล้ 0 นั้นฟังก์ชัน f(x) มันแกว่งกวัดจนหาส่ำมิได้)

อนึ่ง เมื่อพิจารณาพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชัน f บน R ณ ที่จุด a นั้น บางทีก็เป็นการสะดวกที่จะตรวจสอบดูพฤติกรรมลิมิตข้างเดียว (One – side limit) ของฟังก์ชัน f ณ ที่จุด a

บทนิยาม 5.1.4 ลิมิตด้านซ้าย (Left – hand limit) ของ f ที่ a หมายถึง ลิมิตของฟังก์ชันกำกัด $f|_{(-\infty,a)}$ ที่ a

นั่นคือ พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง $(-\infty, a)$ และตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของลำดับ $\{f(x_n)\}$ สำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ที่มีค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$ ถ้า f มีลิมิตด้านขวา ณ ที่ a เป็น L แล้ว จะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to a^-$" ดูรูป 5.1.5 ประกอบ



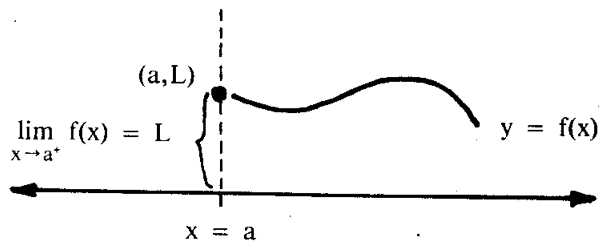
รูป 5.1.5

บทนิยาม 5.1.5 ลิมิตด้านขวา (right-hand limit) ของ f ที่ a หมายถึงลิมิตของฟังก์ชัน กำกัด $f|_{(a,\infty)}$ ที่ a

นั่นคือ พิจารณาฟังก์ชัน f บนช่วง (a,∞) และตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของลำดับ $\{f(x_n)\}$ สำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ที่มีค่าลดลงเมื่อ $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$ ถ้า f มีลิมิตด้านขวา ณ ที่ a เป็น L แล้วจะเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์

"$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$ หรือ $f(x)\to L$ ขณะที่ $x\to a^+$"

ดูรูป 5.1.6 ประกอบ

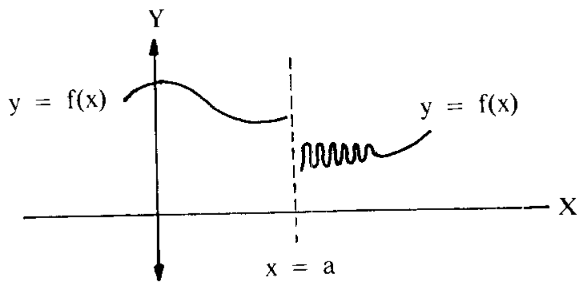


รูป 5.1.6

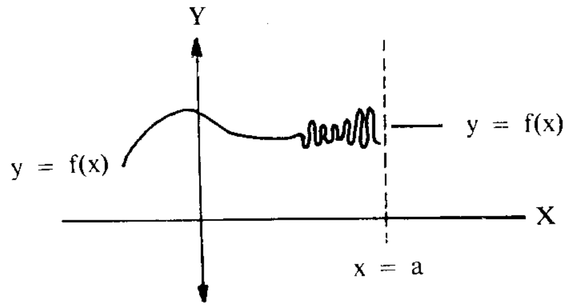
หมายเหตุ

1. ถ้า $f|_{(-\infty,a)}(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to a$
   จะเขียนแทนด้วย $f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to a^-$
2. ถ้า $f|_{(a,\infty)}(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to a$
   จะเขียนแทนด้วย $f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to a^+$

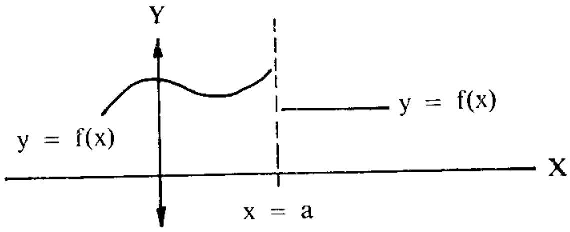
บางครั้งเมื่อทำการตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชัน f ที่จุด $a \in R$ จะสังเกตเห็นว่า แม้ว่าลิมิตของ f ที่ a ไม่มีหรือหาค่าไม่ได้ แต่ลิมิตข้างเดียวทางซ้ายหรือลิมิตข้างเดียวทางขวาข้างหนึ่งข้างใดอาจจะมีหรืออาจจะมีทั้งสองข้างก็ได้ (ดูรูป 5.1.7, 5.1.8, 5.1.9) เป็นที่น่าสังเกตว่า ลิมิตของ f ที่ a จะมีก็ต่อเมื่อลิมิตข้างเดียวทั้งทางซ้ายและทางขวาของ f ที่ a จะต้องมีและต้องมีค่าเท่ากันด้วย (ดูรูป 5.1.10) ประกอบ)



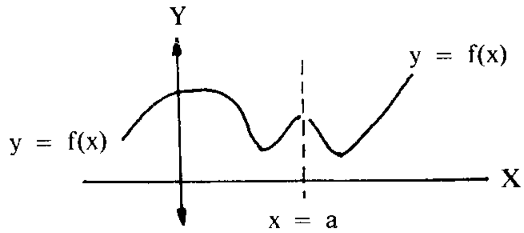
รูป 5.1.7



รูป 5.1.8



รูป 5.1.9



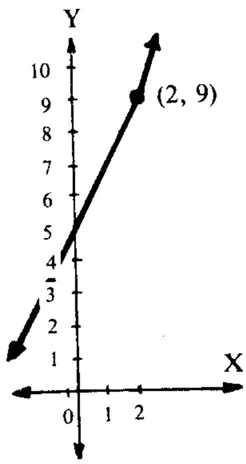
รูป 5.1.10

ตัวอย่างที่ 5.1.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{เมื่อ} \quad x \leqslant 2 \\ 4x+1 & \text{เมื่อ} \quad x > 2 \end{cases}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 9 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 9$ (ดูรูป 5.1.11 ประกอบ)



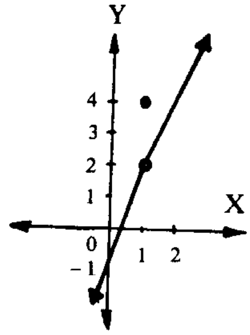
รูป 5.1.11

ตัวอย่างที่ 5.1.5 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{ถ้า} \quad x < 1 \\ 4 & \text{ถ้า} \quad x = 1 \\ 2x & \text{ถ้า} \quad x > 1 \end{cases}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2 = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ (ดูรูป 5.1.12 ประกอบ)



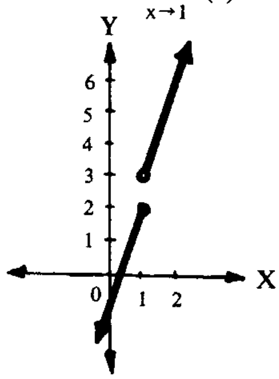
รูป 5.1.12

ตัวอย่างที่ 5.1.6 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

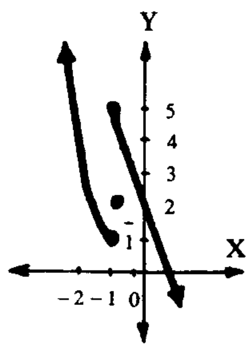
$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{ถ้า} \quad x \leqslant 1 \\ 3x & \text{ถ้า} \quad x > 1 \end{cases}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 2$ และ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่มี (does not exist) (ดูรูป 5.1.13 ประกอบ)



รูป 5.1.13



รูป 5.1.14

ตัวอย่างที่ 5.1.7 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า} \quad x < -1 \\ 2 & \text{ถ้า} \quad x = -1 \\ -3x+2 & \text{ถ้า} \quad x > -1 \end{cases}$$

จะพบว่า $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 5$

ดังนั้น จึงได้ว่า $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ ไม่มี (ดูรูป 5.1.14 ประกอบ)

สำหรับฟังก์ชันที่ช่วงของโดเมนไม่มีขอบเขตจำกัด ลิมิตของฟังก์ชันจะเป็นอีกแบบหนึ่ง ซึ่งเรียกว่า "ลิมิตที่อนันต์" (limit at infinity) ซึ่งจะกล่าวถึงต่อไป

บทนิยาม 5.1.6 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะเรียกว่า f(x) มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to b$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ หรือ $f(x) \to b$ ขณะที่ $x \to \infty$"

บทนิยาม 5.1.7 จะเรียก f(x) ว่าเป็นฟังก์ชันลู่ออกทางบวก (ทางลบ) ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to \infty(-\infty)$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to \infty$"

บทนิยาม 5.1.8 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะเรียกว่า f(x) มีลิมิตเป็น c ขณะที่ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to c$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = c$ หรือ $f(x) \to c$ ขณะที่ $x \to -\infty$"

บทนิยาม 5.1.9 จะเรียก f(x) ว่าเป็นฟังก์ชันลู่ออกทางบวก (ทางลบ) ขณะที่ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to \infty(-\infty)$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

"$f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to -\infty$"

ตัวอย่างที่ 5.1.8 จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดของฟังก์ชัน f บน R^+ ซึ่ง $f(x) = \frac{1}{x}$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ โดยคุณสมบัติของอาร์คีมีดีสได้ว่า จะมี $n_0 \varepsilon N$ ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

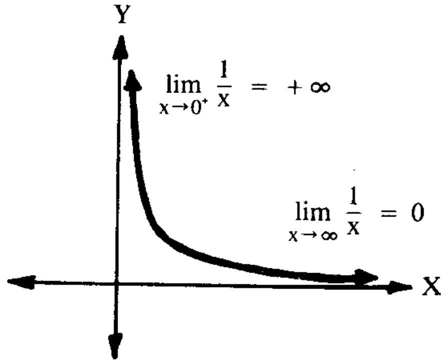
สำหรับแต่ละลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด จะมี $m \varepsilon N$ ซึ่ง $x_n > n_0$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant m$

$$\therefore \quad \frac{1}{x} < \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant m$$

นั่นคือ $f(x_n) \to 0$

จึงสรุปได้ว่า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

(ดูรูป 5.1.15 ประกอบ)



รูป 5.1.15

จากที่กล่าวมาแล้วเป็นการอธิบายค่าลิมิตของฟังก์ชันโดยอาศัยลำดับ นอกจากนี้ยังมีการอธิบายถึงค่าลิมิตของฟังก์ชันอีกแบบหนึ่ง คือ การอธิบายค่าลิมิตโดยใช้ ε, δ ซึ่งเคยศึกษากันมาแล้วในวิชาแคลคูลัส ดังจะกล่าวในรูปทฤษฎีบทดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.1 ฟังก์ชัน f บน R จะมีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to b$

พิสูจน์ สมมติว่า f มีลิมิตเป็น b ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a และมีลำดับ $\{x_n\}$ ที่ $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$ ซึ่งทำให้ลำดับ $\{f(x_n)\}$ ไม่ลู่เข้าสู่ b แล้วจะมี $r > 0$ และมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ของลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง

$$|f(x_{n_k}) - b| \geqslant r \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad k \varepsilon N$$

ถ้าสำหรับ $r > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ มี $m \varepsilon N$ ซึ่งทำให้

$|f(x_n) - b| < r$ สำหรับ $n > m$ แล้วลำดับ $\{f(x_n)\}$ จะลู่เข้าสู่ b

ดังนั้น จะมี $r > 0$ บางค่าซึ่งจะทำให้ไม่สามารถหา $m \varepsilon N$ ได้

นั่นคือ จะมีลำดับย่อย $\{f(x_{n_k})\}$ เสมอ ซึ่ง $|f(x_{n_k}) - b| \geqslant r$ สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon N$

เมื่อลำดับ $\{x_{n_k}\}$ ลู่เข้าสู่ a แล้วจะมีลำดับย่อย $\{x_{n_{k_i}}\}$ ที่เป็นลำดับทางเดียวและลู่เข้าสู่ a ด้วย (จากความรู้ที่ว่า ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ a แล้ว จะมีลำดับย่อย $\{a_{n_k}\}$ ที่เป็นลำดับทางเดียวและลู่เข้าสู่ a ด้วย)

แต่ $|f(x_{n_{k_i}}) - b| \geqslant r$ สำหรับทุก ๆ $i \in N$

ดังนั้น ลำดับ $\{f(x_{n_{k_i}})\}$ จึงไม่ลู่เข้าสู่ b

ซึ่งแย้งกับข้อสมมติที่ว่า f มีลิมิตเป็น b ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a

ดังนั้นจึงจะต้องมีลำดับ $\{f(x_n)\}$ ที่ $f(x_n) \to b$ #

ทฤษฎีบท 5.1.2 ฟังก์ชัน f บน R จะมีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(x) - b| < \varepsilon$ เมื่อ

$$0 < |x - a| < \delta$$

พิสูจน์

1) สมมติว่า f สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ a

นั่นคือ เมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x - a| < \delta$$

พิจารณาลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$ แล้ว สำหรับ $\delta > 0$ จะมี $m \in N$ ซึ่ง

$$0 < |x_n - a| < \delta \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant m$$

แล้วทำให้ $|f(x_n) - b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant m$

นั่นคือ $f(x_n) \to b$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

2) สมมติว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ a แล้ว จะมี $r > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $n \in N$ จะมี x_n ซึ่งทำให้

$$|f(x_n) - b| \geqslant r \quad \text{และ} \quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$$

ถ้าสำหรับ $r > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ไม่มี x_n ซึ่งทำให้

$$|f(x_n) - b| \geqslant r \quad \text{และ} \quad 0 < |x_n - a| < \frac{1}{n} \quad \text{แล้ว}$$

ย่อมได้ว่า $|f(x) - b| < r$ สำหรับทุก ๆ x เมื่อ $0 < |x - a| < \frac{1}{n}$

ในกรณีนี้เลือก $\delta = \frac{1}{n}$ จะเกิดข้อขัดแย้งกับข้อสมมติที่ว่า f ไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่ a แล้วสำหรับลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$,

โดย $x_n \to a$ และ $x_n \neq a$

แต่เมื่อ $|f(x_n) - b| \geqslant r$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

จึงได้ว่า $f(x_n) \not\to b$

ดังนั้น f ไม่มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x เข้าใกล้ a #

ข้อสังเกต เงื่อนไขที่ว่า "$0 < |x-a|$" นั้น แสดงว่าไม่ต้องเกี่ยวข้องกับฟังก์ชัน ณ ที่จุด $x = a$ ก็ได้

ตัวอย่าง 5.1.9 ถ้า $f(x) = 2x-1$ จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 5$$

วิธีทำ สมติว่า $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนที่กำหนดมาให้

ขั้นแรกต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $5-\varepsilon < 2x-1 < 5+\varepsilon$

เมื่อไรก็ตามที่ $3-\delta < x < 3+\delta$ และ $x \neq 3$ เสียก่อน

พิจารณา $5-\varepsilon < 2x-1 < 5+\varepsilon$

จะได้ว่า $6-\varepsilon < 2x < 6+\varepsilon$

หรือ $3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}$

$\therefore$ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ถ้าเลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ จะได้ว่า

$$3-\frac{\varepsilon}{2} < x < 3+\frac{\varepsilon}{2}$$

หรือ $6-\varepsilon < 2x < 6+\varepsilon$

หรือ $-\varepsilon < (2x-1)-5 < \varepsilon$

นั่นคือ $|f(x)-5| < \varepsilon$

ดังนั้นจึงได้ว่า $\lim_{x\to 3} f(x) = 5$

ตัวอย่างที่ 5.1.10 จงแสดงว่าฟังก์ชัน f บน $R-\{0\}$ ซึ่ง $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ไม่มีลิมิตที่ $x = 0$

สมมติว่า $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ มีลิมิตที่ $x = 0$

นั่นแสดงว่า จะมีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = L$

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon = 1$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$\left|\sin\frac{1}{x} - L\right| < 1 \quad \text{เมื่อ} \quad 0 < |x| < \delta \qquad \text{..........(1)}$$

$\because \quad \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{(4n+1)\pi}{2} = 1$ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ

ดังนั้น $\sin\frac{1}{x} = 1$ สำหรับ $x = \frac{2}{(4n+1)\pi}$ และ $x \,\varepsilon\, (0, \delta)$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{(4n+1)\pi} = 0$

ดังนั้นจาก (1) จึงได้ว่า

$$|1 - L| < 1 \qquad \text{..........}(2)$$

ในทำนองเดียวกัน

$\sin\left(2n\pi + \frac{3\pi}{2}\right) = -1$ สำหรับจำนวนเต็ม n ใด ๆ แล้ว จะมี $x \,\varepsilon\, (0, \delta)$

ซึ่งทำให้ $\sin\frac{1}{x} = -1$ ดังนั้นจาก (1) จึงได้อีกว่า

$$|-1-L| < 1 \qquad \text{..........}(3)$$

จาก (2) กับ (3) ให้ข้อขัดแย้งซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ ไม่มี (does not exist)

นอกจากนี้ยังสามารถใช้ความรู้จากทฤษฎีบทที่ 5.1.1 ช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทที่ 5.1.3 และทฤษฎีบทที่ 5.1.4 ได้อีกด้วย ขอให้นักศึกษาพิสูจน์เอง

ทฤษฎีบท 5.1.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะกล่าวว่า f(x) มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัด ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมี $n_0 \,\varepsilon\, N$ ซึ่ง $|f(x) - b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x > n_0$

อนึ่ง จะได้ผลลัพธ์ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชัน f บน R เมื่อ x มีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎีบท 5.1.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน R, f(x) จะลู่ออกทางบวก (ทางลบ) (diverges positively (negatively)) ขณะที่ x เข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมี $n_0 \,\varepsilon\, N$ ซึ่ง $f(x) > \varepsilon(-f(x) > \varepsilon)$ สำหรับทุก ๆ $x > n_0$

ตัวอย่างที่ 5.1.11 จงแสดงว่า $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

วิธีทำ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะต้องหา $N_0 \,\varepsilon\, N$

ซึ่ง $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ เมื่อ $x > N_0$

จาก $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ จะได้ว่า $\frac{1}{x} < \sqrt{\varepsilon}$ ดังนั้น $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

นั่นคือ ถ้าให้ $N_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ ก็จะได้ว่า $\left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

จึงกล่าวได้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$

อนึ่ง เราสามารถที่จะหาค่าลิมิตของฟังก์ชันที่มีจำนวนหลาย ๆ ฟังก์ชันได้โดยการใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับพีชคณิตของลิมิต ดังจะกล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.1.5 ทฤษฎีบทพีชคณิตของลิมิต (Algebra of Limits Theorem)
สำหรับ $a \varepsilon S$ เมื่อ S เป็นช่วงปิด ; f และ g เป็นฟังก์ชันบน $S-\{a\}$
และให้ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ และ $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ แล้ว ย่อมได้ว่า

i) $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = b+c$

ii) $\lim\limits_{x \to a} (kf)(x) = kb$ สำหรับ $k \varepsilon R$ ใด ๆ

iii) $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = bc$

iv) $\lim\limits_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S-\{a\}$ และ $c \neq 0$

พิสูจน์

i) สำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon S-\{a\}$ และ $x_n \to a$ จะมี $f(x_n) \to b$ และ $g(x_n) \to c$

จากทฤษฎีบทพีชคณิตของลิมิตสำหรับลำดับ (ท.บ. 3.5.3) ได้ว่า

$$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \to b+c$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) = b+c$ #

ข้อ ii) ถึง iv) ก็พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน

หมายเหตุ สำหรับค่าลิมิตที่อนันต์ (limit at infinity) ก็มีคุณสมบัติสอดคล้องกับ ท.บ. 5.1.5 ด้วย

ตัวอย่างที่ 5.1.12 จงพิจารณาพฤติกรรมลิมิตของฟังก์ชัน f บนช่วง $[1, \infty)$ ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x*-2x+1}{x^2-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$$

1) ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด, และ 2) ที่จุด $x = 1$

1) เมื่อ $x \neq 1$, $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$

$$= \frac{(x-1)}{(x+1)}$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{1 - \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}}$$

$$= 1$$

และ 2) $$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{\lim_{x\to 1}(x-1)}{\lim_{x\to 1}(x+1)}$$

$$= 0$$

แบบฝึกหัด 5.1.1

1. จงแสดงว่า

1.1) $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0$

1.2) $\lim_{x\to 1} \sqrt{x+3} = 2$ (โดยใช้ ท.บ. 5.1.1)

2. สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \leqslant 0 \\ \sin\frac{1}{x} & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

จงหา $\lim_{x\to 0} f(x)$

3. จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตที่ $x = \frac{1}{2}$ ของ f บน (0, 1) ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ } \frac{p}{q} \quad (p, q \text{ เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน}) \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

4. สำหรับฟังก์ชัน $f(x) = 2x+1$ บนช่วง [0, 1] จงหา

$\lim_{x\to 0^-} f(x)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0} f(x)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ และ $\lim_{x\to 1} f(x)$

ถ้าหาค่าได้จะมีค่าเท่าไร, ถ้าหาไม่ได้จงให้เหตุผลเพราะอะไร

5 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้สามารถหาค่าลิมิตเมื่อ x ย่างเข้าสู่ 0 ได้หรือไม่ ถ้าได้มีค่าเท่าไร

5.1) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{ถ้า } x \leqslant 0 \\ 2x & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$

5.2) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

6. จงหาค่าของ $\lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4}$ สำหรับฟังก์ชัน f(x) ต่อไปนี้

6.1) $f(x) = 4x$

6.2) $f(x) = x^3$

6.3) $f(x) = x^2$

6.4) $f(x) = \sqrt{x}$

7. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันบน R และ $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ และ g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตจำกัดบน R จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) = 0$

8. พิจารณาฟังก์ชัน f บน R ที่ $a \varepsilon R$ เมื่อ

   8.1) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$

   8.2) $\lim\limits_{x \to a} |f(x)| = |b|$

   จงพิสูจน์ว่า ถ้า 8.1) เป็นจริงแล้ว 8.2) จะเป็นจริงด้วย และจงแสดงโดยการยกตัวอย่างว่า ถ้า 8.2) เป็นจริงแล้ว 8.1) ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงด้วย

9. พิจารณาฟังก์ชัน f บน R ที่ $a \varepsilon R$ เมื่อ

   9.1) $\lim\limits_{x \to 0} |f(a+x) - f(a)| = 0$

   9.2) $\lim\limits_{x \to 0^+} |f(a+x) - f(a-x)| = 0$

   จงพิสูจน์ว่า ถ้า 9.1) เป็นจริงแล้ว 9.2) ย่อมเป็นจริงด้วย และจงแสดงโดยการยกตัวอย่างว่า ถ้า 9.2) เป็นจริงแล้ว 9.1) ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงด้วย

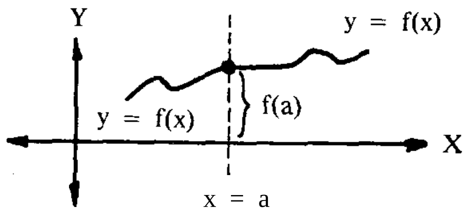
10. สำหรับฟังก์ชัน f บน R จงพิสูจน์ว่า f(x) มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดก็ต่อเมื่อกำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ มาให้ จะมี $N_0 \varepsilon N$ ซึ่ง $|f(x) - b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x > N_0$

5.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (CONTINUITY OF FUNCTIONS)

จากที่เคยศึกษามาแล้วว่า ค่าลิมิตของฟังก์ชัน f(x) เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a นั้น ไม่จำเป็นจะต้องเกี่ยวข้องกับค่าของฟังก์ชัน ณ ที่ x = a หรือ f(a) เลย นั่นคือ f(a) อาจจะไม่นิยามก็ได้ แต่ก็ยังคงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของ f(x) เมื่อ x ย่างเข้าสู่ a ได้

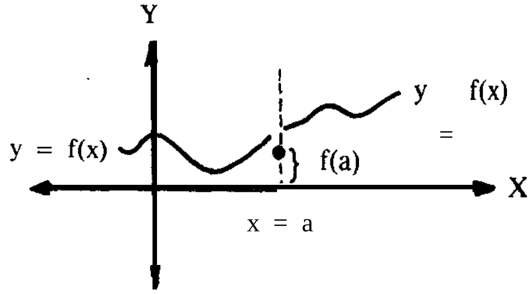
อนึ่ง ลองมาพิจารณาว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ กับค่า f(a) ว่าจะมีความสัมพันธ์ต่าง ๆ กันได้อย่างไรบ้าง อาจกล่าวได้ว่า $\lim_{x \to a} f(x)$ กับ f(a) มีความสัมพันธ์ซึ่งแยกได้เป็น 5 กรณีด้วยกัน คือ

กรณีที่ 1) $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า (exist) และ f(a) นิยาม (difined) และมีค่าเท่ากันด้วย ดังรูป 5.2.1



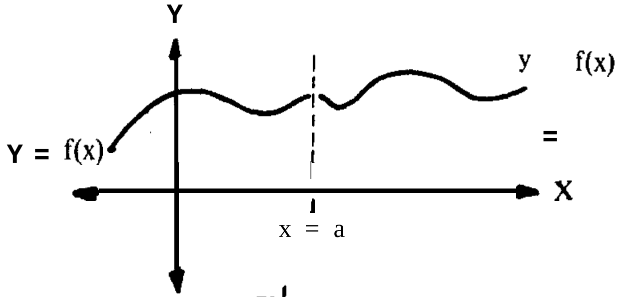
รูป 5.2.1

กรณีที่ 2) $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า (exist) และ f(a) นิยาม แต่มีค่าไม่เท่ากัน ดังรูป 5.2.2



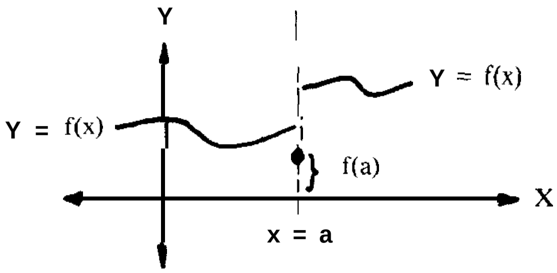
รูป 5.2.2

กรณีที่ 3) $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่า (exist) และ f(a) ไม่นิยาม (undefined) ดังรูป 5.2.3



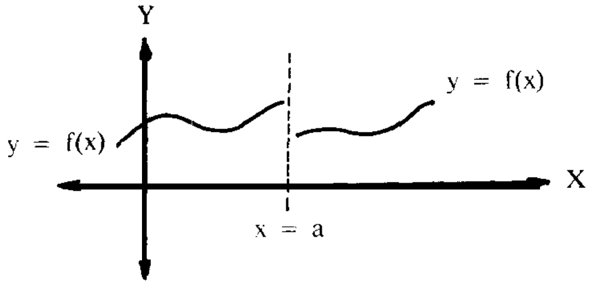
รูป 5.2.3

กรณีที่ 4) $\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า และ $f(a)$ นิยาม ดังรูป 5.2.4



รูป 5.2.4

กรณีที่ 5) $\lim_{x \to a} f(x)$ ไม่มีค่า และ $f(a)$ ไม่นิยาม ดังรูป 5.2.5



รูป 5.2.5

จากทั้ง 5 กรณีจะเห็นว่า ในกรณีที่ 1 นั้นเป็นกรณีที่ไม่เพียงแต่ $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่าเท่านั้น แต่มันยังมีค่าเท่ากับ $f(a)$ อีกด้วย ฟังก์ชัน $f(x)$ ใด ๆ ที่มีลักษณะพิเศษเฉพาะอย่างนี้ เรียกว่า "ฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่อง (continuous) ที่ $x = a$" และอาจกล่าวได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน $f(x)$ มีความต่อเนื่องแล้ว กราฟของ $f(x)$ จะไม่ขาดตอนหรือไม่มีช่องโหว่เลย นั่นคือ จะสามารถเขียนกราฟของ $f(x)$ ได้โดยไม่ต้องยกปากกาออกจากกระดาษเลย ดังนั้นจากรูปในกรณีที่ 2), 3), 4) และ 5) จะกล่าวได้ว่า ฟังก์ชัน $f(x)$ ไม่ต่อเนื่องที่ $x = a$ เนื่องจากในกราฟมันขาดตอนหรือมีช่องโหว่ที่ $x = a$ นั่นเอง ต่อไปจะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันในแง่ของบทนิยามทางคณิตศาสตร์

บทนิยาม 5.2.1 สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f บนช่วงปิด S ใด ๆ จะมีความต่อเนื่องที่จุด a ถ้าคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

i) a อยู่ในโดเมนของ f

ii) f มีลิมิต ณ ที่จุด a (คือ $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริง)

iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

มิฉะนั้นจะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด a

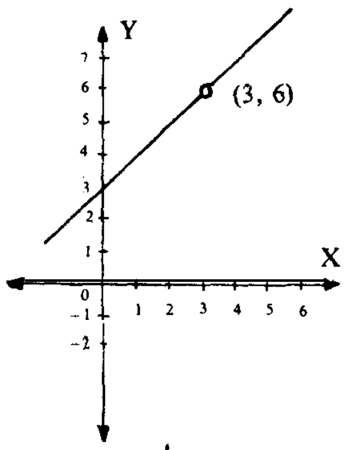
ดังนั้น f จะต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ (S เป็นช่วงปิด)

ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon S$ และ $x_n \to a$ ย่อมมีลำดับ $\{f(x_n)\}$ ที่ $f(x_n) \to f(a)$

เนื่องจากกล่าวถึงพฤติกรรมของฟังก์ชันที่ใกล้ ๆ จุด a และที่จุด a ด้วย ดังนั้นจึงไม่จำเป็นจะต้องยกเว้นสำหรับ $x_n = a$

ตัวอย่างที่ 5.2.1 สำหรับฟังก์ชัน f บน $R - \{3\}$ ซึ่ง $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$

จะได้ว่า $\lim_{x \to 3} f(x) = 6$ แต่ f(3) ไม่นิยาม ดังนั้น f(x) จึงไม่ต่อเนื่องที่ $x = 3$ (ดูรูป 5.2.6)



รูป 5.2.6

ถ้ากำหนดให้ $f(3) = 6$ แล้ว f จะต่อเนื่องที่ $x = 3$ (และ $f(x) = x + 3$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$)

บทนิยาม 5.2.2 ถ้าฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ a แล้วจะเรียก a ว่า เป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f

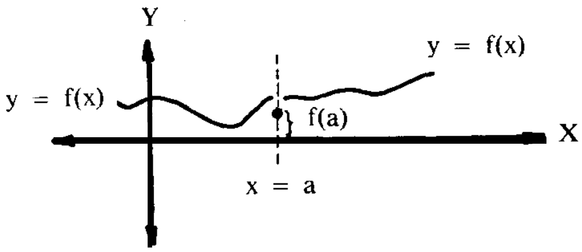
นั่นคือ เมื่อฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่จุด a แล้ว กราฟของ f ก็จะขาดตอนหรือมีช่องโหว่ที่จุด $x = a$ นั่นเอง

บทนิยาม 5.2.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน S ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ จะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ a "แบบที่หนึ่ง" ถ้า

i) หาค่าลิมิตที่ a ได้ แต่ไม่เท่ากับ f(a)

นั่นคือ $$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

ซึ่งจะเรียก f ในกรณีนี้ว่า มีความไม่ต่อเนื่องแบบที่ขจัดได้ (removable discontinuity) ที่ a (ดูรูป 5.2.7)

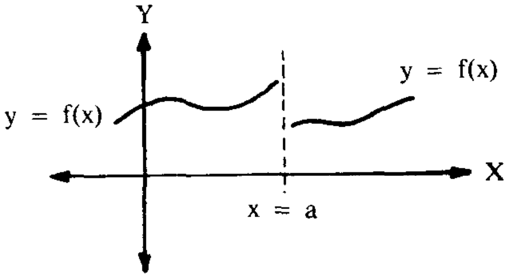


รูป 5.2.7

หรือ ii) ลิมิตแต่ละข้างที่ a หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

นั่นคือ $$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

ซึ่งจะเรียก f ในกรณีนี้ว่า มีความไม่ต่อเนื่องแบบค่ากระโดด (jump dicontiuity) ที่ a (ดูรูป 5.2.8)



รูป 5.2.8

ตัวอย่างที่ 5.2.2 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$$

จะได้ว่า $$\lim_{x \to 3} f(x) = 6$$

แต่ $f(3) = 0$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 3} f(x) \neq f(3)$$

ดังนั้น f มีความไม่ต่อเนื่องแบบที่ขจัดได้ ณ ที่ 3

ตัวอย่างที่ 5.2.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ} \quad x > 0 \\ x & \text{เมื่อ} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า

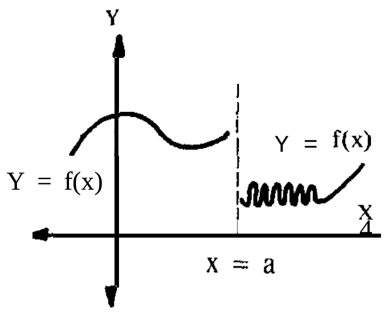
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

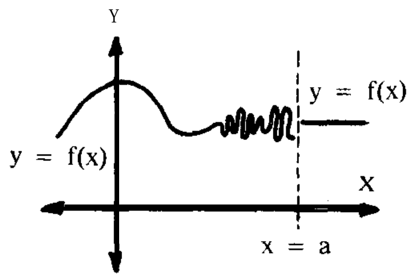
และ $\quad f(0) = 0$

ดังนั้น f มีความไม่ต่อเนื่องแบบค่ากระโดด ณ ที่ 0

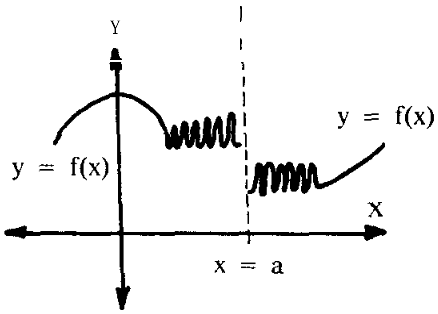
บทนิยาม 5.2.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน S ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ จะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ a "แบบที่สอง" ถ้าลิมิตข้างใดข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างของ f หาค่าที่ a ไม่ได้ (ดูรูป 5.2.9, รูป 5.2.10, รูป 5.2.11)



รูป 5.2.9



รูป 5.2.10



รูป 5.2.11

ตัวอย่างที่ 5.2.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน $[0, \infty)$

ซึ่ง
$$f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{เมื่อ} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ} \quad x = 0 \end{cases}$$

จากตัวอย่างที่ 5.1.3 ได้ว่า

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องแบบที่สอง ณ ที่ 0

ตัวอย่างที่ 5.2.5 จงตรวจสอบความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f บน $[0, 1]$

ซึ่ง $$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

พิจารณาสำหรับ $a \varepsilon [0, 1]$ ที่กำหนดให้ใด ๆ

เมื่อจำนวนตรรกยะมีอยู่อย่างหนาแน่นใน R

จึงมีลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ เมื่อ x_n เป็นจำนวนตรรกยะ และ $\{x_n'\}$ เมื่อ x_n' เป็นจำนวนอตรรกยะ โดย $x_n \to a$ และ $x_n' \to a$ จะได้ว่า $f(x_n) = 1$ และ $f(x_n') = 0$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

ดังนั้น $f(x_n) \to 1$ และ $f(x_n') \to 0$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ จึงหาค่าไม่ได้ (not exist)

ดังนั้น $f(x)$ จึงไม่ต่อเนื่องแบบที่สองที่ทุก ๆ จุดของช่วง $[0, 1]$

เช่นเดียวกับเรื่องลิมิตก็มีวิธีอธิบายถึงความต่อเนื่องโดยไม่ต้องอาศัยลำดับได้ วิธีนั้นก็คือวิธีของ ε, δ ดังจะกล่าวในรูปทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 5.2.1 ฟังก์ชัน f บนช่วงปิด S จะต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad x \varepsilon S \quad \text{และ} \quad |x - a| < \delta$$

ข้อสังเกต ไม่จำเป็นต้องใช้เงื่อนไขที่ว่า "$0 < |x - a|$" อีกต่อไปแล้ว เพราะขณะที่พิจารณาถึงความต่อเนื่องที่จุด a ของฟังก์ชันนั้น ไม่ใช่พิจารณาที่จุดใกล้ ๆ จุด a เท่านั้น แต่ยังพิจารณา ณ ที่จุด a ด้วย

และจะกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนช่วง S ถ้า f ต่อเนื่องที่แต่ละจุด $x \varepsilon S$

ทฤษฎีบทที่ 5.2.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้วจะได้ว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้จะต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ด้วย คือ

(1) $f + g$

(2) fg

(3) kf โดยที่ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(4) $\dfrac{f}{g}$ ถ้า $g(a) \neq 0$

พิสูจน์

(1) $\because (f+g)(a) = f(a)+\&)$

$$\therefore \lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]$$

$$= \lim_{x-a} f(x) + \lim_{x-a} g(x)$$

$$= f(a) + g(a)$$

$$= (f+g)(a)$$

ดังนั้น $f+g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ #

ส่วนข้อ (2), (3), (4) ก็พิสูจน์ในทำนองเดียวกัน จึงให้นักศึกษาพิสูจน์เอง

ทฤษฎีบท 5.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $|f|$ ย่อมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

พิสูจน์ จากแบบฝึกหัด 2.4.1 ข้อ 34 ได้ว่า

สำหรับ $a, b \varepsilon R$ จะได้

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|$$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ x, y จึงได้

$$||f(x)| - |f(y)|| \leqslant |f(x)-f(y)|$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $x \varepsilon R$, สำหรับทุก ๆ $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|x-y| < \delta$ แล้ว

$$|f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

ซึ่งจะได้ด้วยว่า

$$||f(x)| - |f(y)|| < \varepsilon \quad \text{ด้วย}$$

ดังนั้น $|f|$ จึงเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x

ข้อสังเกต พิจารณาเซตของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] ซึ่งจะเขียนแทนด้วยเซต C[a, b] จาก ท.บ. 5.5.2 กล่าวว่า ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] แล้วฟังก์ชัน $f+g$ และ kf เมื่อ $k \varepsilon R$ ย่อมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] ด้วย จึงสามารถแสดงได้ว่า เซต C[a, b] มีคุณสมบัติเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงจริง (real vector space) ภายใต้การดำเนินการบวกกันของฟังก์ชัน และการคูณฟังก์ชันด้วยจำนวนจริง และยิ่งกว่านั้นยังมีว่า fg ก็เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a, b] ด้วย จึงสามารถแสดงต่อไปได้อีกว่า เซต C[a, b] มีคุณสมบัติเป็นพีชคณิตสลับที่เชิงจริง (real commutative algebra) ภายใต้การดำเนินการที่เพิ่มขึ้นมา คือ การคูณกันของฟังก์ชันอีกด้วย (ดูภาคผนวก)

แบบฝึกหัด 5.2.1

1. จงพิจารณาว่าฟังก์ชัน f บน R มีความต่อเนื่องที่ $x = 2$ หรือไม่ เมื่อ

1.1) $f(x) = x^2$

1.2) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

1.3) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

1.4) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+x-6}{x-2} & \text{ถ้า } x \neq 2 \\ 5 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$

2. จงหาว่าฟังก์ชัน f(x) ที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่ใดบ้าง

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{ถ้า } -3 \leqslant x < 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x = 0 \\ x-1 & \text{ถ้า } 0 < x < 1 \\ x^2-1 & \text{ถ้า } 1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases}$$

3. สำหรับฟังก์ชัน f บน $R-\{0\}$ ต่อไปนี้ จงกำหนดค่า f(0) ที่ทำให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องที่ $x = 0$

3.1) $f(x) = x \sin\frac{1}{x}$

3.2) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & \text{ถ้าเป็นจำนวนตรรกยะที่เขียนอยู่ในรูป } \dfrac{p}{q} \text{ โดย p และ q เป็นจำนวนเฉพาะต่อกัน} \\ 0 & \text{ถ้า x เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$

3.3) $f(x) = \dfrac{x^3+2x^2+3x}{\sin x}$

4. จงหาค่าคงที่ c และ k ที่ทำให้ฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง เมื่อ

4.1) $f(x) = \begin{cases} 3x+7 & \text{ถ้า } x \leqslant 4 \\ kx-1 & \text{ถ้า } 4 < x \end{cases}$

4.2) $f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \leqslant 1 \\ cx+k & \text{ถ้า } 1 < x < 4 \\ -2x & \text{ถ้า } 4 \leqslant x \end{cases}$

5. จงพิจารณาว่าสำหรับฟังก์ชัน f บน R ต่อไปนี้มีความไม่ต่อเนื่องชนิดใด ณ จุดที่กำหนดให้

5.1) ณ ที่ $x = 0$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 2 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

5.2) ณ ที่ $x = 2$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2} & \text{x\% } x \neq 2 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 2 \end{cases}$$

5.3) ณ ที $x = 0$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \leqslant 0 \\ \frac{1}{x} & \text{ถ้า } x > 0 \end{cases}$$

5.4) ณ ที่ $x = \pm 3$ เมือ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2-9} & \text{ถ้า } x \neq 3 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 3 \end{cases}$$

6. ให้ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบน R ถ้า $f(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon Q$ จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

7. ให้ฟังก์ชัน f และ g มีความต่อเนื่องบน R
ถ้า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon Q$ จงพิสูจน์ว่า $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

8. ฟังก์ชัน f บน R ใด ๆ เราจะเรียกมันว่า convex ถ้า สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon R$ แล้ว
$f(kx + (1-k)y) \leqslant k f(x) + (1-k) f(y)$ สำหรับทุก ๆ k เมื่อ $0 \leqslant k \leqslant 1$ จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันที่ convex เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

5.3 คุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง
(PROPERTIES OF CONTINUOUS FUNCTIONS)

5.3.1 คุณสมบัติการไม่ขาดตอน (Connectedness) ของฟังก์ชันต่อเนื่อง

คุณสมบัติการไม่ขาดตอนของฟังก์ชันต่อเนื่อง หมายถึง คุณสมบัติที่ฟังก์ชันต่อเนื่องจับคู่จากช่วงไปยังช่วงการพิสูจน์ คุณสมบัติข้อนี้ต้องอาศัยสัจพจน์แห่งความบริบูรณ์ของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 5.3.1 (Balzano's theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $S = [a, b]$ และ $f(a) < 0 < f(b)$ สำหรับ $a, b \varepsilon S$ แล้ว ย่อมมี $c \varepsilon S$ ซึ่ง $f(c) = 0$

พิสูจน์

พิจารณาเซต $E = \{x \varepsilon [a, b] : f(x) < 0\}$

เนื่องจาก $f(a) < 0$ ดังนั้นเซต E จึงไม่เป็นเซตเปล่า

และเนื่องจาก $0 < f(b)$ ดังนั้นเซต E จึงมีขอบเขตบน

เพราะฉะนั้นโดยสัจพจน์แห่งความบริบูรณ์จึงได้ว่า E จะต้องมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (E มี l.u.b.)

ให้ c เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ E

นั่นแสดงว่าย่อมมีลำดับเพิ่มโดยแท้ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \varepsilon E$ และ $x_n \rightarrow c$,

และย่อมมีลำดับลดโดยแท้ $\{y_n\}$ ซึ่ง $y_n \varepsilon E'$ และ $y_n \rightarrow c$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ c แล้ว $f(x_n) \rightarrow f(c)$ และ $f(y_n) \rightarrow f(c)$

แต่เนื่องจาก $x_n \varepsilon E$, $\therefore f(x_n) < 0$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

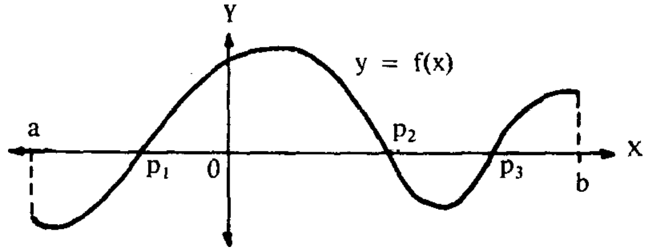
ดังนั้น $f(c) \leqslant 0$

และเนื่องจาก $y_n \varepsilon E'$, $\therefore f(y_n) > 0$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

ดังนั้น $f(c) \geqslant 0$

เพราะฉะนั้น $f(c) = 0$ #

ในแง่เรขาคณิตจะพบว่า กราฟของฟังก์ชัน f ซึ่งมีความต่อเนื่องบนช่วง $S = [a, b]$ นี้ จะมีจุดเริ่มต้นที่ $x = a$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่ใต้แกน X เพราะว่า $f(a) < 0$ และจะมีจุดปลายที่ $x = b$ ซึ่งเป็นจุดที่อยู่เหนือแกน X เพราะว่า $0 < f(b)$ ดังนั้นกราฟ f นี้จะต้องตัดแกน X อย่างน้อยหนึ่งจุด ดังรูป 5.3.1



รูป 5.3.1

ทฤษฎีบท 5.3.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S แล้ว f(S) ย่อมเป็นช่วงด้วย

พิสูจน์ พิจารณา $a, b \varepsilon S$ ซึ่ง $f(a) < f(b)$

และกำหนดให้ k เป็นค่าใด ๆ ซึ่ง $k \varepsilon (f(a), f(b))$

พิจารณาฟังก์ชัน g บน S ซึ่งกำหนดให้ $g(x) = f(x) - k$

ย่อมได้ว่า g มีความต่อเนื่องบน S เนื่องจาก g เป็นผลรวมของฟังก์ชันต่อเนื่องบน S และ $g(a) < 0 < g(b)$ ด้วย ดังนั้น โดย ท.บ. 5.3.1 จึงได้ว่า จะต้องมี $c \varepsilon [a, b]$ ซึ่ง $g(c) = 0$

ดังนั้นจึงได้ $f(c) = k$

เมื่อได้แสดงให้เห็นแล้วว่า สำหรับทุก ๆ $f(a), f(b), \varepsilon f(S)$

เมื่อ $f(a) < f(b)$ แล้ว ย่อมมี $k \varepsilon f(S)$ สำหรับทุก ๆ $k \varepsilon R$ ซึ่ง $f(a) < k < f(b)$

นั่นก็คือ f(S) ย่อมเป็นช่วง ๆ หนึ่งด้วย

หมายเหตุ คุณสมบัติการไม่ขาดตอนของฟังก์ชันต่อเนื่องนี้ บางทีเรียกว่า คุณสมบัติระหว่างกลาง (Intermediate value property)

5.3.2 คุณสมบัติการปกคลุมแน่น (Compactness) ของฟังก์ชันต่อเนื่อง

คุณสมบัติการปกคลุมแน่นของฟังก์ชันต่อเนื่อง หมายถึง คุณสมบัติที่พิสัยของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิดจะมีขอบเขตจำกัด และมีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดด้วย

ทฤษฎีบท 5.3.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f ย่อมมีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a, b]$

พิสูจน์ สมมติว่า พิสัยของ f ไม่มีขอบเขตจำกัด

แล้วจะมีลำดับ $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon [a, b]$ ซึ่ง $|f(x_n)| > n$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$

โดย ท.บ. 3.7.5 (The Compactness property of R)

เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขตจำกัด จึงมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ที่เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $x = \lim x_{n_k}$ จะเห็นว่า $x \in [a, b]$

แต่สามารถสร้างลำดับ $\{f(x_{n_k})\}$ ให้เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตจำกัดได้

ดังนั้น $f(x_{n_k}) \nrightarrow f(x)$

อย่างไรก็ตาม ก็ขัดแย้งกับความจริงที่ว่า f มีความต่อเนื่องที่ x

เพราะฉะนั้น f จึงต้องมีขอบเขตจำกัด #

ข้อสังเกต คุณสมบัติข้อนี้ (ท.บ. 5.3.3) ของฟังก์ชันต่อเนื่องจำกัดอยู่เฉพาะบนช่วงปิดเท่านั้น ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีช่วงของโดเมนในแบบอื่น ๆ ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f บนช่วง (0, 1) ซึ่ง $f(x) = \frac{1}{x}$ หรือเช่น ฟังก์ชัน f บนช่วง $[1, \infty]$ ซึ่ง $f(x) = x^2$

ทฤษฎีบท 5.3.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้วจะมี $c \in [a, b]$ ซึ่ง

$$f(c) = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

พิสูจน์ จาก ท.บ. 5.3.3 จะได้ว่า f มีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a, b]$

ดังนั้น โดยสัจพจน์แห่งความบริบูรณ์จึงได้ว่า

ย่อมมี $M = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \in [a, b]\}$

จากคุณสมบัติของขอบเขตบนค่าน้อยสุด จึงได้ว่าจะมีลำดับ $\{x_n\}$

เมื่อ $x_n \in [a, b]$ ซึ่ง $M - \frac{1}{n} < f(x_n)$ สำหรับแต่ละ $n \in N$ แล้ว $f(x_n) \to M$

โดย ท.บ. 3.7.5 เนื่องจากลำดับ $\{x_n\}$ มีขอบเขตจำกัด จึงมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ที่เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $c = \lim x_{n_k}$ จะสังเกตเห็นว่า $c \in [a, b]$

จึงได้ว่า $f(x_{n_k}) \to M$

แต่เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ c

ดังนั้น $f(x_{n_k}) \to f(c)$

เพราะฉะนั้น $f(c) = M$ #

ข้อสังเกต จาก ท.บ. 5.3.4 จะได้ว่า M เป็นค่าสูงสุดของพิสัยของ f บน $[a, b]$ หรือกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดนั่นเอง

ทฤษฎีบท 5.3.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้วจะมี $d \in [a, b]$ ซึ่ง $f(d) = \text{g.l.b.} \{f(x) : x \in [a, b]\}$

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกันกับทฤษฎีบท 5.3.4

ข้อสังเกต คุณสมบัติข้อนี้ (ท.บ. 5.3.4 และ 5.3.5) ของฟังก์ชันต่อเนื่องจำกัดอยู่เฉพาะบนช่วงปิดเท่านั้น ไม่จำเป็นจะต้องเป็นจริงสำหรับฟังก์ชันต่อเนื่องที่มีช่วงของโดเมนเป็นแบบอื่น ๆ ยกตัวอย่างเช่น ฟังก์ชัน f บนช่วง $(0, 1)$ ซึ่ง $f(x) = x$ เป็นฟังก์ชันที่ไม่มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เป็นต้น

แบบฝึกหัด 5.3.1

1. สำหรับ $k \in R^{+}$ และ $p \in N$ จงพิสูจน์ว่าจะมี $c \in R^{+}$ ซึ่ง $c^{p} = k$
2. จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุก ๆ ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บนช่วง $[0, 1]$ ไปยังช่วง $[0, 1]$ จะมี

   $$c \in [0, 1] \quad \text{ซึ่ง} \quad f(c) = c$$

   (เรียกว่า f มีคุณสมบัติจุดคงที่)
3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชันประกอบ fog และ gof เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R ด้วย
4. สมมติว่าอุณหภูมิบนเส้นศูนย์สูตรของโลกเปลี่ยนแปลงไปอย่างต่อเนื่อง จงพิสูจน์ว่า ณ ที่เวลาใด ๆ จะมีจุดซึ่งอยู่ตรงข้ามกันบนเส้นศูนย์สูตรของโลกที่มีอุณหภูมิเท่ากัน

5.4 ฟังก์ชันพิเศษบางชนิด

(SOME SPECIAL CLASSES OF FUNCTIONS)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันพิเศษบางชนิด

5.4.1 ฟังก์ชันทางเดียว (Monotonic functions)

เช่นเดียวกันกับลำดับที่เคยศึกษามาแล้วในบทที่ 3 จึงอาจกล่าวได้ว่า

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า เป็นฟังก์ชันทางเดียว (Monotonic functions) ถ้า

1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f (เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ฟังก์ชันเพิ่ม)

2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f (เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ฟังก์ชันลด)

และจะเรียกฟังก์ชัน f ว่า เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ (Strictly monotonic function) ถ้า

1) $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f (เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้) หรือ

2) $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f (เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่า ฟังก์ชันลดโดยแท้)

ทฤษฎีบท 5.4.1 สำหรับฟังก์ชันทางเดียว f บน R ค่าลิมิตข้างเดียวจะมีที่ทุก ๆ จุดในโดเมนของ f

พิสูจน์ สมมติให้ f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

พิจารณาพฤติกรรมลิมิตของ f ที่ $c \varepsilon R$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม ดังนั้นสำหรับทุก ๆ ลำดับที่มีค่าเพิ่มขึ้น $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \to c$, ลำดับ $\{f(x_n)\}$ ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นด้วย

แต่ $\{f(x_n)\}$ มีขอบเขตบนเป็น $f(c)$

ดังนั้น โดย ท.บ. 3.4.1 ลำดับ $\{f(x_n)\}$ จึงเป็นลำดับลู่เข้า

สมมติว่า สำหรับลำดับเพิ่ม $\{x'_n\}$ เมื่อ $x'_n \to c$ มี $f(x'_n) \to t'$ และสำหรับลำดับเพิ่ม $\{x''_n\}$

เมื่อ $x''_n \to c$ มี $f(x''_n) \to t''$

และ $t' < t''$

แล้วจะมี $m_1 \varepsilon N$ ซึ่ง $t' < f(x''_{m_1}) < t''$

และจะมี $m_2 \varepsilon N$ ซึ่ง $x''_{m_1} < x'_{m_2} < c$

และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่ม

$$\therefore \; t' < f(x''_{m_1}) < f(x'_{m_2}) < t''$$

ซึ่งขัดแย้งกับความจริงที่ว่า ลำดับ $\{f(x'_n)\}$ มีค่าเพิ่มขึ้น และ $f(x'_n) \to t'$

เพราะฉะนั้น $t' = t''$ และ $\lim\limits_{x \to c^-} f(x)$ หาค่าได้ (exists) #

ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาลำดับลด $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \to c$ ก็จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c^+} f(x)$ หาค่าได้เช่นกัน

ข้อสังเกต จาก ท.บ. 5.4.1 จึงอาจกล่าวได้ว่า ฟังก์ชันทางเดียวจะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องหรือมิฉะนั้นก็เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องแบบที่หนึ่ง (โดยไม่ต่อเนื่องแบบค่ากระโดด)

5.4.2 **ฟังก์ชันผกผัน** (Inverse Function)

ทฤษฎีบท 5.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ที่มีความต่อเนื่องบนช่วง S แล้วฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ย่อมเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ และมีความต่อเนื่องบนช่วง f(S) ด้วย

พิสูจน์ เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ และเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ดังนั้นจึงมี f^{-1} บน f(S) และเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ด้วย (ให้แสดงเป็นแบบฝึกหัด)

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน S โดยคุณสมบัติการไม่ขาดตอน (Connectedness) ของฟังก์ชันต่อเนื่อง จึงได้ว่า f(S) ก็เป็นช่วงด้วย

พิจารณา $f(a) \varepsilon f(S)$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ และฟังก์ชันทางเดียว $\{f(x_n)\}$ ใด ๆ เมื่อ $f(x_n) \varepsilon f(S)$ และ $f(x_n) \to f(a)$

โดยที่ $f^{-1}(f(x_n)) = x_n$ และเนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทางเดียว ดังนั้นลำดับ $\{x_n\}$ จึงเป็นลำดับทางเดียว และมี a เป็นขอบเขต

โดย ท.บ. 3.4.3 จึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $\{x_n\}$ ลู่เข้า สมมติว่าลู่เข้าสู่ค่า b

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ b, $f(x_n) \to f(b)$

แต่ $f(x_n) \to f(a)$ ดังนั้น $a = b$

เพราะฉะนั้น สำหรับลำดับทางเดียว $\{f(x_n)\}$ ใด ๆ

เมื่อ $f(x_n) \to f(a)$ นั้น $f^{-1}(f(x_n)) = x_n \to a$

นั่นคือ f^{-1} มีความต่อเนื่องที่ f(a)

จึงกล่าวสรุปได้ว่า f^{-1} มีความต่อเนื่องบน f(S) #

ตัวอย่างที่ 5.4.1 เนื่องจากฟังก์ชัน f บน R^+ ซึ่ง $f(x) = x^2$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ที่มีความต่อเนื่อง ดังนั้นโดย ท.บ. 5.4.2 จึงได้ว่าฟังก์ชัน f^{-1} บน R^+ ซึ่งกำหนดโดย $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ ย่อมเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ที่มีความต่อเนื่องด้วย

5.4.3 ฟังก์ชันชี้กำลัง (Exponential Function)

สำหรับจำนวนจริง $a > 1$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะสามารถคำนวณหาค่าของฟังก์ชัน $f : Q \to R$ ซึ่งกำหนดให้ $f(x) = a^x$ ได้ ในที่นี้จะมากำหนดและตรวจสอบดูคุณสมบัติความต่อเนื่องของฟังก์ชันยืดขยายของฟังก์ชันนี้ไปยัง R ซึ่งคือฟังก์ชัน $f : R \to R$ ซึ่งกำหนดให้ $f(x) = a^x$

พิจารณาเมื่อ $a > 1$ จะได้ว่า ถ้า $r, s \in Q$ และ $r < s$ แล้ว $a^r < a^s$ นั่นคือ $f : Q \to R$ ซึ่ง $f(x) = a^x$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

กำหนดให้ $a > 1$ และให้ $x \in R$, เซต $\{a^r \in R : r \in Q,\ r < x\}$ มีขอบเขตบนเป็น a^s เมื่อ $s \in Q$ และ $x < s$

โดยสัจพจน์แห่งความบริบูรณ์ของ R ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซตนี้ต้องมี

และกำหนดให้ $a^x = \text{l.u.b.}\{a^r \in R : r \in Q,\ r < x\}$

ถ้า $x, y \in R$ และ $x < y$ จะมี $r_1, r_2 \in Q$ ซึ่ง $x < r_1 < r_2 < y$ (เนื่องจากจำนวนตรรกยะมีอยู่หนาแน่นใน R)

กำหนดให้ $a > 1$ จะได้ว่า

$$a^x \leqslant a^{r_1} \leqslant a^{r_2} \leqslant a^y$$

ดังนั้น $\quad a^x < a^y$

นั่นคือ เมื่อกำหนด $a > 1$ มาให้ฟังก์ชัน $f : R \to R$ ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = a^x$ ย่อมเป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้ด้วย

นอกจากนั้นยังแสดงได้อีกว่า ฟังก์ชัน $f(x) = a^x$ นี้ ย่อมเป็นฟังก์ชันลดโดยแท้ เมื่อ $0 < a < 1$

ทฤษฎีบท 5.4.3

สำหรับ $a > 1$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ฟังก์ชัน f บน R ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = a^x$

i) ย่อมมีความต่อเนื่องที่ 0

ii) ย่อมสอดคล้องกับกฎการยกกำลังที่ว่า $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

iii) ย่อมมีความต่อเนื่องบน R

พิสูจน์

i) เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันทางเดียว ดังนั้นย่อมมีค่าลิมิตข้างเดียวที่ 0

และจะเห็นว่า เมื่อ $\frac{1}{n} \to 0$ แล้ว $a^{\frac{1}{n}} \to 1$

และเมื่อ $-\frac{1}{n} \to 0$ แล้ว $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$

ดังนั้น $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

เพราะฉะนั้น จึงกล่าวได้ว่า f มีความต่อเนื่องที่ 0

ii) สมมติว่า กฎการยกกำลังสอดคล้องสำหรับกำลังที่เป็นจำนวนตรรกยะ

นั่นคือ สำหรับ $r, s \varepsilon Q$

$$a^{r+s} = a^r \cdot a^s$$

จะแสดงว่าเป็นจริงสำหรับกำลังที่เป็นจำนวนจริงด้วย

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ 0

สำหรับ $r \varepsilon Q$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ และ $\varepsilon > 0$ จะมี $s \varepsilon Q$ ซึ่ง

$$|1-a^{s-r}| < \varepsilon$$

แล้ว $$|a^r - a^s| = a^r|1-a^{s-r}| < \varepsilon a^r$$

กำหนด $x, y \varepsilon R$ มาให้

เนื่องจากจำนวนตรรกยะมีอยู่อย่างหนาแน่นใน R

ดังนั้น จึงมี $r_1, r_2, s_1, s_2 \varepsilon Q$

เมื่อ $r_1 < x < s_1$ และ $r_2 < y < s_2$

ซึ่ง $a^{s_1+s_2} - a^{r_1+r_2} < \varepsilon a^{r_1+r_2}$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

$$\therefore \quad a^{r_1} < a^x < a^{s_1}$$

และ $a^{r_2} < a^y < a^{s_2}$

เพราะฉะนั้น $a^{r_1+r_2} < a^x \cdot a^y < a^{s_1+s_2}$ (1)

และเนื่องจาก $r_1 + r_2 < x+y < s_1+s_2$

เพราะฉะนั้น $a^{r_1+r_2} < a^{x+y} < a^{s_1+s_2}$ ด้วย (2)

จาก (1) และ (2) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |a^{x+y} - a^x \cdot a^y| &< a^{s_1+s_2} - a^{r_1+r_2} \\ &< \varepsilon a^{r_1+r_2} \\ &< \varepsilon a^{x+y} \end{aligned}$$

ซึ่งเป็นจริงสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้

เพราะฉะนั้น $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ #

iii) สำหรับ $x \varepsilon R$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ และ $h \varepsilon R$ ใด ๆ

จาก ii) ได้ว่า $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$

แต่ $\lim_{h \to 0} a^h = 1$ ดังนั้น $\lim_{h \to 0} a^{x+h} = a^x$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่ x

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า f มีความต่อเนื่องบน R #

แบบฝึกหัด 5.4.1

1. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f บน R^+ ต่อไปนี้มีความต่อเนื่อง

   1.1) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

   1.2) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x}$

2. สำหรับฟังก์ชัน f บน R^+ ซึ่ง $f(x) = \dfrac{2^{\frac{1}{x}} - 2^{-\frac{1}{x}}}{2^{\frac{1}{x}} + 2^{-\frac{1}{x}}}$

   2.1) จงตรวจสอบพฤติกรรมลิมิตของ f ที่ $x = 0$ และขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด

   2.2) จงแสดงว่า f มีความต่อเนื่อง

   2.3) จงนิยามค่าของ f(0) ที่จะทำให้ f มีความต่อเนื่องบน R^+

3. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f ซึ่งเป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่งและมีความต่อเนื่องบนช่วง S เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ (strictly monotonic function)

4. สำหรับ $a, b \in R^+$ และ $x \in R$ ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

   $$(a^b)^x = a^{bx}$$

   สมติว่า สำหรับ $r \in Q$ ใด ๆ $(a^b)^r = a^{br}$

5. ฟังก์ชันลอการิทึม (The Logarithmic Function) $\ln : R^+ \to R$

   นิยามโดย $\ln(x) = \lim n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$ จงพิสูจน์ว่า

   5.1) $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$ สำหรับทุก ๆ $x, y > 0$

   5.2) มีความต่อเนื่อง $x = 1$

   5.3) มีความต่อเนื่องบน R^+

   5.4) จะมี $e \in R$ ซึ่ง $1 < e \leqslant 3$ และ $\ln(e) = 1$

6. พิจารณาฟังก์ชัน $f : [-1, 1] \to R$ ซึ่งนิยามโดย $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ สำหรับ $x \in [-1, 1]$ ที่กำหนดให้และผลแบ่งกั้น (Partition) $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ $[x, 1]$

   และให้ $$p(P, f, x) = \sum_{k=1}^{n} \{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2\}^{\frac{1}{2}}$$

   6.1) จงแสดงว่า เซต $\{p(P, f, x) :$ สำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น P ของ $[x, 1]\}$ มี 4 เป็นขอบเขตบน

6.2) จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $S : [-1, 1] \to R$ ซึ่งนิยามโดย

$S(x) = \text{l.u.b.}\{p(P, f, x)$: สำหรับทุก ๆ ผลแบ่งกั้น P ของ $[x, 1]\}$

$S(1) = 0$

เป็นฟังก์ชันลดโดยแท้และมีความต่อเนื่องด้วย

6.3) ถ้าเขียนแทน $S(-1)$ ด้วย π และนิยามฟังก์ชันไซน์ (sine function) เป็น

$\sin : R \to R$ โดย $\sin s = \sin s(x) = f(x)$ โดย $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\sin(-s) = -\sin s$$

$$\sin(s + 2\pi) = \sin s$$

จงพิสูจน์ว่า

i) $0 \leqslant |\sin s| \leqslant 1$ ทุก ๆ $s \varepsilon R$

ii) $|\sin s| \leqslant s$ ทุก ๆ $s \varepsilon R$

iii) $\lim\limits_{s \to 0} \frac{\sin s}{s} = 1$

(**หมายเหตุ** นอกจากนี้ยังอาจนิยามฟังก์ชันโคไซน์ (cosine function) $\cos : R \to R$ โดย $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ และฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent function) $\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to R$ โดย $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$)

5.5 ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (UNIFORM CONTINUITY)

จากที่เคยศึกษานิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน f ณ ที่จุด a ใด ๆ มาแล้วในหัวข้อ 5.2 และตาม ท.บ. 5.2.1 ว่า "ฟังก์ชัน f จะต่อเนื่องที่จุด a ใด ๆ ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ โดยที่ $|x - a| < \delta$" ในความหมายนี้โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ค่า δ นั้นไม่ได้ขึ้นอยู่เฉพาะกับค่า ε เท่านั้น แต่ยังขึ้นอยู่กับจุด a ที่กำลังพิจารณาอีกด้วย ตัวอย่างเช่น สำหรับฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x^2$ ถ้ากำหนดให้ $\varepsilon = 2$ แล้ว

ข้อความ $|f(x) - f(a)| < 2$ โดยที่ $|x - a| < \frac{1}{2}$ จะเป็นจริง ถ้า $a = 1$ ....(1)

(คือสำหรับ $f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = x^2 - 1$ ถ้า $|x - 1| < \frac{1}{2}$ แล้ว $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ และจะได้ว่า $-\frac{3}{4} < f(x) - f(a) < \frac{5}{4}$)

ถึงอย่างไรก็ดี ข้อความ (1) นั้น จะเป็นเท็จถ้า $a = 10$

(คือเมื่อ $a = 10$ จะได้ $f(x) - f(a) = x^2 - 100$ ถ้า $x = 10\frac{1}{3}$ แล้ว $|x - a| < \frac{1}{2}$ แต่ $f(x) - f(a) = \left(10\frac{1}{3}\right)^2 - 10^2 = 6\frac{7}{9}$ ดังนั้น $|f(x) - f(a)| > 2$)

ดังนั้น ถึงแม้ว่า f จะมีความต่อเนื่องที่จุด $x = 10$ เช่นเดียวกับที่จุด $x = 1$ และสำหรับค่า $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$ นั้น สามารถใช้ได้ที่ $a = 1$ แต่ใช้ไม่ได้ที่ $a = 10$ ทั้ง ๆ ที่ค่า δ ที่ใช้นั้นก็สมนัยกับ $\varepsilon = 2$ เดียวกัน อนึ่งจะสามารถแสดงให้เห็นได้โดยง่ายว่า ไม่มี $\delta > 0$ ตัวใดเลย ซึ่งทำให้ข้อความ

$$|f(x) - f(a)| < 2 \quad \text{โดยที่} \quad |x - a| < \delta \qquad \text{..........(2)}$$

เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a

สำหรับ $f(x) - f(a) = x^2 - a^2 = (x - a)(x + a)$

สมมติว่ามี δ ซึ่งทำให้ข้อความ (2) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a แล้ว จะได้ว่า สำหรับ $a > 0$ และ $x = a + \frac{\delta}{2}$ แล้ว

$$|f(x) - f(a)| = |x - a| \cdot |x + a| = \frac{\delta}{2}\left|2a + \frac{\delta}{2}\right| < 2$$

นั่นอาจกล่าวได้ว่า $a\delta < 2$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $a > 0$ ซึ่งไม่จริง ดังนั้น สำหรับฟังก์ชัน f ที่สมนัยกับ $\varepsilon = 2$ จะไม่มี δ ที่ทำให้ข้อความ (2) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ a พร้อมกัน (แต่กระนั้น f ก็มีความต่อเนื่องที่แต่ละจำนวนจริง a ใด ๆ)

ถ้าฟังก์ชันต่อเนื่องใดซึ่งสำหรับ ε ที่กำหนดให้จะสามารถเลือก δ โดยที่ δ นั้นขึ้นอยู่กับเฉพาะ ε เท่านั้น โดยไม่ขึ้นอยู่กับ a ด้วยแล้ว จะเรียกฟังก์ชันนั้นว่ามี "ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ" (Uniform continuity) ซึ่งจะกล่าวเป็นนิยามได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 5.5.1 ฟังก์ชัน f บนช่วง S จะมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (uniform continuity) ถ้าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ เมื่อ $x, y \in S$ และ $|x - y| < \delta$

ข้อแตกต่างระหว่างความต่อเนื่อง ณ ที่จุดใด ๆ กับความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอก็คือ ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอนั้นแสดงว่า $\delta > 0$ นั้นขึ้นอยู่กับค่า ε เท่านั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับจุด x ใด ๆ ในโดเมน ส่วนความต่อเนื่อง ณ ที่จุด a ใด ๆ นั่นแสดงว่า $\delta > 0$ ขึ้นอยู่กับค่า ε และจุด $x = a$ ด้วย จากตัวอย่างข้างต้นจึงได้ว่า ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x^2$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ อย่างไรก็ตามก็จะมาพิจารณาถึงความสัมพันธ์ระหว่างความต่อเนื่องกับความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอกันต่อไป

ตัวอย่างที่ 5.5.1 จงแสดงว่า $f(x) = x^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $S = (0, 1)$

ให้ $\varepsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงที่กำหนดให้ จะต้องหา $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|x^2 - y^2| < \varepsilon$ เมื่อไรก็ตามที่ $|x - y| < \delta$ โดย δ ขึ้นอยู่กับ ε เท่านั้น ไม่ได้ขึ้นอยู่กับ x แต่อย่างใด เมื่อ $0 < x < 1$

สำหรับ $x, y \in S$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |x^2 - y^2| &= |x + y| \cdot |x - y| \\ &= |1 + 1| \cdot |x - y| \\ &= 2|x - y| \end{aligned}$$

ดังนั้น ถ้า $|x - y| < \delta$ แล้วจะได้ว่า

$$|x^2 - y^2| < 2\delta$$

จึงเลือกให้ $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$

ก็จะได้ว่า $|x^2 - y^2| < \varepsilon$

เมื่อ $|x - y| < \delta$ โดย δ ขึ้นอยู่กับ ε เท่านั้น หาได้ขึ้นอยู่กับ x ไม่

นั่นคือ $f(x) = x^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $S = (0, 1)$

• **ตัวอย่างที่ 5.5.2** จงแสดงว่า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $S = (0, 1)$

วิธีที่ 1 สมมติว่า $f(x)$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในช่วงที่กำหนดให้แล้ว สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะสามารถหา $\delta > 0$ ในที่นี้จะเลือก $0 < \delta < 1$ ซึ่ง

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |x - y| < \delta \quad \text{สำหรับ} \quad x, y \varepsilon S$$

ให้ $x = 6, \quad y = \dfrac{\delta}{1+\varepsilon}$ แล้ว

$$|x - y| = \left|\delta - \frac{\delta}{1+\varepsilon}\right| = \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\delta < \delta$$

และ $$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\varepsilon}{\delta}\right| = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon \qquad (\because 0 < \delta < 1)$$

ซึ่งขัดแย้งกับนิยาม จึงเป็นไปไม่ได้ ที่ $f(x) = \frac{1}{x}$ จะมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในช่วง S

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $S = (0, 1)$

วิธีที่ 2 ให้ x_0 และ $x_0 + \delta$ เป็นจุดสองจุดใด ๆ ในช่วง $(0, 1)$

แล้ว $$|f(x_0) - f(x_0 + \delta)| = \left|\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0 + \delta}\right| = \frac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}$$

ซึ่งจะสามารถทำให้ค่าของ $\dfrac{\delta}{x_0(x_0 + \delta)}$ มีค่ามากกว่าจำนวนบวกใด ๆ

ก็ได้โดยการเลือก x_0 ที่มีค่าเข้าใกล้ 0 อย่างเพียงพอ

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $S = (0, 1)$

ทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วง S มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอแล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องบน S ด้วย

พิสูจน์ ให้ f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \text{ เมื่อ } x, y \varepsilon S \text{ และ } |x - y| < \delta$$

พิจารณา $a \varepsilon S$

กำหนดลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ให้ เมื่อ $x_n \varepsilon S$ และ $x_n \to a$, จะมี $m \varepsilon N$ ซึ่งทำให้ $|x_n - a| < \delta$ สำหรับทุก ๆ $n > m$

และ $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n > m$

นั่นคือ $f(x_n) \to f(a)$

นั่นแสดงว่า $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

นั่นก็คือ f มีความต่อเนื่องที่ a

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบน S #

ข้อสังเกต โดยทั่ว ๆ ไปแล้ว ฟังก์ชันต่อเนื่องไม่จำเป็นจะต้องมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ เช่น ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x^2$ มีความต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด $a \varepsilon R$ แต่ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอเป็นต้น

ทฤษฎีบท 5.5.2 (Heine's Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ มีความต่อเนื่องแล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

พิสูจน์ ถ้า f ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ย่อมจะมี $r > 0$ และลำดับ $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ เมื่อ $x_n, y_n \varepsilon [a, b]$ ซึ่ง $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ แต่ $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant r$

โดยคุณสมบัติการปกคลุมแน่น (Compactness) ของจำนวนจริง, ลำดับ $\{x_n\}$ ย่อมมีลำดับย่อย $\{x_{n_k}\}$ ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $x = \lim x_{n_k}$ และ $x \varepsilon [a, b]$

แต่สำหรับลำดับย่อย $\{y_{n_k}\}$ ของ $\{y_n\}$

มีว่า $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ สำหรับแต่ละ $k \varepsilon N$

และเนื่องจาก $|y_{n_k} - x| \leqslant |y_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x|$

จึงได้ว่า $y_{n_k} \to x$

เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องที่ x, $f(x_{n_k}) \to f(x)$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมี $m \varepsilon N$ ซึ่งทำให้

$$|f(x_{n_k}) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } \quad k > m$$

เนื่องจาก $$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geqslant r \quad \text{สำหรับทุก ๆ } \quad k \varepsilon N$$

และ $$\begin{aligned} |f(y_{n_k}) - f(x)| &\geqslant |f(y_{n_k}) - f(x_{n_k})| - |f(x_{n_k}) - f(x)| \\ &> r - \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } \quad k > m \end{aligned}$$

ดังนั้น ถึงแม้ว่า $\{y_{n_k}\}$ จะลู่เข้าสู่ x แต่ $\{f(y_{n_k})\}$ ก็ไม่ลู่เข้าสู่ $f(x)$

ซึ่งขัดกับความจริงที่ว่า f มีความต่อเนื่องที่ x

ดังนั้น f จึงต้องมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ #

สิ่งสำคัญที่น่าสนใจของฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอก็คือ **ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วงที่มีขอบเขตจำกัด สามารถประมาณค่าได้ด้วยฟังก์ชันขั้นบันได** (step function)

อนึ่ง สำหรับช่วงปิด $[a, b]$ จะเรียกเซตจำกัด (finite set) P ซึ่ง

$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$$

เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

ว่าผลแบ่งกั้น (partition) ของช่วง $[a, b]$ และจะเรียกฟังก์ชัน $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ ว่าฟังก์ชันขั้นบันได ถ้ามีผลแบ่งกั้น $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของ $[a, b]$ และค่าคงที่ $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ซึ่ง $f(x) = c_k$ เมื่อ $x_{k-1} < x < x_k$ สำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

ทฤษฎีบท 5.5.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมีฟังก์ชัน g บน $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x \in [a, b]$$

พิสูจน์ เนื่องจาก f มีความต่อเนื่องบน $[a, b]$ โดย ท.บ. 5.5.2 จึงย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอด้วย

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$

เมื่อ $x, y \in [a, b]$ และ $|x - y| < \delta$

เลือก $n \in \mathbf{N}$ ซึ่ง $\frac{1}{n}(b-a) < \delta$

และพิจารณาผลแบ่งกั้น $\{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ของ $[a, b]$

เมื่อ $x_k = a + \frac{k}{n}(b-a)$ สำหรับแต่ละ $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$

และสำหรับแต่ละ $k \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ จะได้ว่า

$$|f(x) - f(x_{k-1})| < \varepsilon \qquad \text{เมื่อ} \quad x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$$

เนื่องจาก $\qquad |x_k - x_{k-1}| = \frac{1}{n}(b-a) < \delta$

ดังนั้น จึงนิยามฟังก์ชันขั้นบันได g บน $[a, b]$ โดยให้

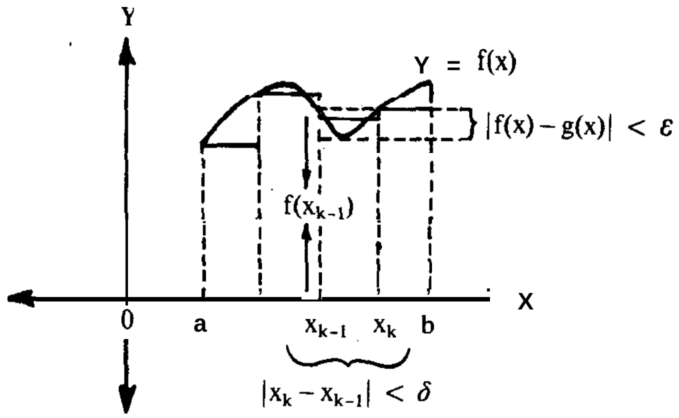
$$g(x) = f(x_{k-1}) \qquad \text{เมื่อ} \quad x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k$$

$$\text{สำหรับ} \quad k \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$$

$$= f(x_{n-1}) \qquad \text{เมื่อ} \quad x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n$$

แล้วเราจึงได้ว่า $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x \in [a, b]$ #

พิจารณารูป 5.5.1



รูป 5.5.1

แบบฝึกหัด 5.5.1

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน f บน R ซึ่ง $f(x) = x^2$ มีความต่อเนื่อง แต่ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

2. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน $\left(0, \frac{1}{\pi}\right)$ ซึ่ง $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอหรือไม่

3 จงแสดงว่า $f(x) = x^3$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วง $0 < x < 2$ และ $0 \leqslant x \leqslant 2$

4. จงพิสูจน์ว่า ฟังก์ชัน f ที่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนช่วงที่มีขอบเขตจำกัด ย่อมมีขอบเขตจำกัด

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f มีความต่อเนื่องบน R^+ และ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ แล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

6. ถ้า f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว $\{f(x_n)\}$ ย่อมเป็นลำดับโคชีด้วย

7. สำหรับฟังก์ชันต่อเนื่อง f บน (a, b) จงพิสูจน์ว่า f มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน (a, b) ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ สามารถหาค่าได้ (exist)

8. สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันเชิงเส้น (linear function) ถ้าสำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon R$ และ $k \varepsilon R$ แล้ว

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

และ

$$f(kx) = kf(x)$$

จงพิสูจน์ว่า

8.1) ทุก ๆ ฟังก์ชันเชิงเส้น f บน R ย่อมอยู่ในรูป $f(x) = ax$ สำหรับบาง $a \varepsilon R$

8.2) ทุก ๆ ฟังก์ชันเชิงเส้น f บน R ย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

บทสรุปทบทวน
บทที่ 5 ลิมิตและความต่อเนื่อง

5.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

บทนิยาม 5.1.1 สำหรับฟังก์ชัน f บน R และ $a \in R$ จะกล่าวว่า f(x) มีลิมิตเป็น L ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to L$ เขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to a$"

บทนิยาม 5.1.2 สำหรับฟังก์ชัน f(x) ใด ๆ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f(x) ลู่ออกทางบวก ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to \infty$ เขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ หรือ $f(x) \to \infty$ ขณะที่ $x \to a$"

บทนิยาม 5.1.3 สำหรับฟังก์ชัน f(x) ใด ๆ จะกล่าวว่า ฟังก์ชัน f(x) ลู่ออกทางลบ ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to -\infty$ เขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$ หรือ $f(x) \to -\infty$ ขณะที่ $x \to a$"

บทนิยาม 5.1.4 ลิมิตด้านซ้ายของ f ที่ a หมายถึงลิมิตของฟังก์ชันกำกัด $f|_{(-\infty,\ a)}$ ที่ a เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to a^-$

บทนิยาม 5.1.5 ลิมิตด้านขวาของ f ที่ a หมายถึง ลิมิตของฟังก์ชันกำกัด $f|_{(a,\ \infty)}$ ที่ a เขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ หรือ $f(x) \to L$ ขณะที่ $x \to a^+$

บทนิยาม 5.1.6 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะเรียกว่า f(x) มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x) \to b$ เขียนแทนด้วย "$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ หรือ $f(x) \to b$ ขณะที่ $x \to \infty$"

บทนิยาม 5.1.7 จะเรียก f(x) ว่าเป็นฟังก์ชันลู่ออกทางบวก (ลบ) ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าเพิ่มขึ้นอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to \infty(-\infty)$ เขียนแทนด้วย "$f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to \infty$" ตามลำดับ

บทนิยาม 5.1.8 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะเรียกว่า f(x) มีลิมิตเป็น c ขณะที่ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าลดลงอย่างไม่

มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to c$ เขียนแทนด้วย "$\lim_{x \to -\infty} f(x) = c$ หรือ $f(x) \to c$ ขณะที่ $x \to -\infty$"

บทนิยาม 5.1.9 จะเรียก $f(x)$ ว่าเป็นฟังก์ชันลู่ออกทางบวก (ทางลบ) ขณะที่ x มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัด ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ถ้า $\{x_n\}$ มีค่าลดลงอย่างไม่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $f(x_n) \to \infty(-\infty)$ เขียนแทนด้วย "$f(x) \to \infty(-\infty)$ ขณะที่ $x \to -\infty$" ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 5.1.1 ฟังก์ชัน f บน R จะมีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x ย่างเข้าสู่ a ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ ลำดับ $\{x_n\}$ ซึ่ง $x_n \neq a$ ถ้า $x_n \to a$ แล้ว $f(x_n) \to b$

ทฤษฎีบท 5.1.2 ฟังก์ชัน f บน R จะมีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ จะมี $\delta > 0$ ที่ทำให้ $|f(x)-b| < \varepsilon$

เมื่อ $0 < |x-a| < \delta$

ทฤษฎีบท 5.1.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน R จะกล่าวว่า $f(x)$ มีค่าลิมิตเป็น b ขณะที่ x มีค่าเพิ่มขึ้นโดยไม่มีขอบเขตจำกัดก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมี $n_0 \varepsilon N$ ซึ่ง $|f(x)-b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $x > n_0$

ทฤษฎีบท 5.1.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน R, $f(x)$ จะลู่ออกทางบวก (ทางลบ) ขณะที่ x เข้าใกล้ a ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมี $n_0 \varepsilon N$ ซึ่ง

$$f(x) > \varepsilon(-f(x) > \varepsilon) \text{ สำหรับทุก ๆ } x > n_0$$

ทฤษฎีบท 5.1.5 ทฤษฎีบทพีชคณิตของลิมิต (Algebra of Derivative Theorem)

สำหรับ $a \varepsilon S$ เมื่อ S เป็นช่วงปิด, f และ g เป็นฟังก์ชันบน $S-\{a\}$

และให้ $\lim_{x \to a} f(x) = b$ และ $\lim_{x \to a} g(x) = c$ แล้ว ย่อมได้ว่า

1) $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = b+c$

2) $\lim_{x \to a} (kf)(x) = kb$ สำหรับ $k \varepsilon R$ ใด ๆ

3) $\lim_{x \to a} (fg)(x) = bc$

4) $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{b}{c}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$ สำหรับทุก ๆ $S-\{a\}$ และ $c \neq 0$

5.2 ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

บทนิยาม 5.2.1 สำหรับฟังก์ชันค่าจริง f บนช่วงปิด S ใด ๆ จะมีความต่อเนื่องที่จุด a ถ้าคล้องตามเงื่อนไขต่อไปนี้ คือ

1) a อยู่ในโดเมนของ f

2) f มีลิมิต ณ ที่จุด a คือ $\lim_{x \to a} f(x)$ มีค่าเป็นจำนวนจริง

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

มิฉะนั้นจะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่จุด a

ดังนั้น f จะต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ ถ้าสำหรับทุก ๆ ลำดับทางเดียว $\{x_n\}$ เมื่อ $x_n \varepsilon S$ และ $x_n \to a$ ย่อมมีลำดับ $\{f(x_n)\}$ ที่ $f(x_n) \to f(a)$

บทนิยาม 5.2.2 ถ้าฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ a แล้ว จะเรียก a ว่าเป็นจุดที่ไม่ต่อเนื่องของ f

บทนิยาม 5.2.3 สำหรับฟังก์ชัน f บน S ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ จะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ a "แบบที่หนึ่ง" ถ้า

1) หาค่าลิมิตที่ a ได้ แต่ไม่เท่ากับ f(a)

นั่นคือ $$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

ซึ่งเรียก f ในกรณีนี้ว่า มีความไม่ต่อเนื่องแบบที่ขจัดได้

2) ลิมิตแต่ละข้างที่ a หาค่าได้ แต่ไม่เท่ากัน

นั่นคือ $$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

ซึ่งเรียก f ในกรณีนี้ว่า มีความไม่ต่อเนื่องแบบค่ากระโดด

บทนิยาม 5.2.4 สำหรับฟังก์ชัน f บน S ซึ่งไม่ต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ จะกล่าวว่า f ไม่ต่อเนื่องที่ a "แบบที่สอง" ถ้าลิมิตข้างใดข้างหนึ่งหรือทั้งสองข้างของ f หาค่าที่ a ไม่ได้

ทฤษฎีบท 5.2.1 ฟังก์ชัน f บนช่วงปิด S จะต่อเนื่องที่ $a \varepsilon S$ ก็ต่อเมื่อสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ เมื่อ $x \varepsilon S$ และ $|x - a| < \delta$

ทฤษฎีบท 5.2.2 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $x = a$ แล้วจะได้ว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ ด้วย คือ

(1) $f + g$

(2) fg

(3) kf โดยที่ k เป็นจำนวนจริงใด ๆ

(4) $\frac{f}{g}$ ถ้า $g(a) \neq 0$

ทฤษฎีบท 5.2.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว $|f|$ ย่อมเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องด้วย

5.3 คุณสมบัติของฟังก์ชันต่อเนื่อง

5.3.1 คุณสมบัติการไม่ขาดตอนของฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 5.3.1 ทฤษฎีบทของบอลซาโน (Balzano's theorem)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $S = [a, b]$ และ $f(a) < 0 < f(b)$ สำหรับ $a, b \varepsilon S$ แล้ว ย่อมมี $c \varepsilon S$ ซึ่ง $f(c) = 0$

ทฤษฎีบท 5.3.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง S แล้ว f(S) ย่อมเป็นช่วง

5.3.2 คุณสมบัติการปกคลุมแน่นของฟังก์ชันต่อเนื่อง

ทฤษฎีบท 5.3.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว f ย่อมมีขอบเขตจำกัดบนช่วง $[a, b]$

ทฤษฎีบท 5.3.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะมี $c \varepsilon [a, b]$ ซึ่ง $f(c) = \text{l.u.b.}\{f(x) : x \varepsilon [a, b]\}$

ทฤษฎีบท 5.3.5 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ แล้ว จะมี $d \varepsilon [a, b]$ ซึ่ง $f(d) = \text{g.}\ell\text{.b. } \{f(x) : x \varepsilon [a, b]\}$

5.4 ฟังก์ชันพิเศษบางชนิด

5.4.1 ฟังก์ชันทางเดียว

ฟังก์ชัน f จะเรียกว่าฟังก์ชันทางเดียว ถ้า

1) $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่าฟังก์ชันเพิ่ม

2) $f(x_1) \geqslant f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่าฟังก์ชันลด

และจะเรียกฟังก์ชัน f ว่าเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ ถ้า

1) $f(x_1) < f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่าฟังก์ชันเพิ่มโดยแท้

2) $f(x_1) > f(x_2)$ สำหรับทุก ๆ $x_1 < x_2$ ที่อยู่ในโดเมนของ f เรียกฟังก์ชัน f นี้ว่าฟังก์ชันลดโดยแท้

ทฤษฎีบท 5.4.1 สำหรับฟังก์ชันทางเดียว f บน R ค่าลิมิตข้างเดียวจะมีที่ทุก ๆ จุดในโดเมนของ f

ทฤษฎีบท 5.4.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้บนช่วง S แล้ว ฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ย่อมเป็นฟังก์ชันทางเดียวโดยแท้ และมีความต่อเนื่องบนช่วง f(S) ด้วย

ทฤษฎีบท 5.4.3 สำหรับ $a > 1$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ ฟังก์ชัน f บน R ซึ่งกำหนดโดย $f(x) = a^x$ จะได้ว่า

1) ฟังก์ชัน f ย่อมมีความต่อเนื่องที่ 0
2) ฟังก์ชัน f ย่อมสอดคล้องกับกฎการยกกำลัง
   คือ $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
3) ฟังก์ชัน f ย่อมมีความต่อเนื่องบน R

5.5 ความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

บทนิยาม 5.5.1 ฟังก์ชัน f บนช่วง S จะมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ถ้าทุก ๆ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ เมื่อ $x, y \in S$ และ $|x - y| < \delta$

ทฤษฎีบท 5.5.1 ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วง S มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอแล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องบน S ด้วย

ทฤษฎีบท 5.5.2 ทฤษฎีบทของไฮเน (Heine's Theorem)

ถ้าฟังก์ชัน f บนช่วงปิด $[a, b]$ มีความต่อเนื่องแล้ว f ย่อมมีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ

ทฤษฎีบท 5.5.3 ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a, b]$ แล้ว สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้จะมีฟังก์ชันขั้นบันได g บน $[a, b]$ ซึ่งทำให้

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad x \in [a, b]$$

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 5.1.1

2. ไม่มี

3. 0

4. ไม่มี, 1, ไม่มี, 3, ไม่มี, ไม่มี ตามลำดับ

5. 5.1) หาไม่ได้ 5.2) 0

6.
   6.1) 4
   6.2) 8
   6.3) 48
   6.4) 4

คำตอบแบบฝึกหัด 5.2.1

1.
   1.1) ต่อเนื่อง
   1.2) ไม่ต่อเนื่อง
   1.3) ไม่ต่อเนื่อง
   1.4) ต่อเนื่อง

2. ต่อเนื่องบนช่วง $[-3, 0]$ และบนช่วง $[0, 2]$

3.
   3.1) $f(0) = 0$
   3.2) $f(0) = 0$
   3.3) $f(0) = 3$

4.
   4.1) $k = 5$
   4.2) $k = 4$ และ $c = -3$

5.
   5.1) มีความไม่ต่อเนื่องแบบขจัดได้
   5.2) มีความไม่ต่อเนื่องแบบค่ากระโดด
   5.3) แบบที่สอง
   5.4) แบบที่สอง

คำตอบแบบฝึกหัด 5.4.1

2.
   2.3) $f(0) = 1$