บทที่ 4
อนุกรมของจำนวนจริง

หัวข้อเรื่อง

4.1 บทนิยามของอนุกรม

4.2 การลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม

4.3 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมที่พจน์ไม่เป็นลบ

4.3.1 การทดสอบแบบเปรียบเทียบ

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต

4.4 อนุกรมสลับและการทดสอบ

4.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไข

4.5.1 การจัดอนุกรมให้อยู่ในรูปใหม่

4.6 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมทั่ว ๆ ไป

4.6.1 การทดสอบโดยการถอดกรณฑ์

4.6.2 การทดสอบอัตราส่วน

4.6.3 การทดสอบของราเบ

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 4 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. หาค่าผลบวกย่อยของอนุกรมที่กำหนดให้ได้
2. บอกคุณสมบัติของอนุกรมลู่เข้าและอนุกรมลู่ออกได้
3. ทดสอบการลู่เข้าหรือการลู่ออกของอนุกรมที่กำหนดให้ โดยการใช้แบบทดสอบที่เหมาะสมได้
4. ทดสอบการลู่เข้าหรือการลู่ออกของอนุกรมสลับได้
5. แสดงได้ว่าอนุกรมที่กำหนดให้มีการลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

บทที่ 4
อนุกรมของจำนวนจริง
(SERIES OF REAL NUMBERS)

4.1 บทนิยามของอนุกรม
(DEFINITION OF SERIES)

บทนิยาม 4.1.1 เมื่อ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ เป็นลำดับจำกัด และ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ว่า อนุกรม (series)

อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัด เรียกว่า อนุกรมจำกัด (finite series) และอนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์ เรียกว่า อนุกรมอนันต์ (infinite series)

สำหรับอนุกรม $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ หรือ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$

เรียก a_1 ว่า พจน์ที่ 1 ของอนุกรม

a_2 ว่า พจน์ที่ 2 ของอนุกรม

a_3 ว่า พจน์ที่ 3 ของอนุกรม

....

....

a_n ว่า พจน์ที่ n ของอนุกรม

เพื่อความสะดวกในการเขียนอนุกรม จะใช้สัญลักษณ์ $\sum$ แทนการบวก

กล่าวคือ เขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ด้วย $\sum_{i=1}^{n} a_i$

และ เขียนแทน $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ด้วย $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$,

ตัวอย่าง 4.1.1 ตัวอย่างของอนุกรมจำกัด

1) $\sum_{n=1}^{4} (2n-1) = 1+3+5+7$

2) $\sum_{k=1}^{100} b_k = b_1+b_2+\ldots+b_{100}$

ตัวอย่าง 4.1.2 ตัวอย่างของอนุกรมอนันต์

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} k_n = k_1+k_2+k_3+\ldots+k_n+\ldots$

บทนิยาม 4.1.2 ผลบวกย่อย (partial sums) ของอนุกรมก็คือ ผลรวมของพจน์ตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม มักเขียนแทนด้วย S_n เรียก S_n ว่าผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม

เช่น

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1+a_2$$
$$S_3 = a_1+a_2+a_3$$

$$S_i = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_i$$

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

และจะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า ลำดับของผลบวกย่อย

ตัวอย่าง 4.1.3

จาก $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$

$\therefore\ S_2 = 1+\frac{1}{2}$

และ $S_5 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$

หมายเหตุ

(1) คำว่า อนุกรม ต่อไปนี้จะหมายถึงอนุกรมอนันต์เท่านั้น

(2) อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ กับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ จะเรียกว่าเป็นอนุกรมเดียวกัน ถ้า $a_n = b_n$ สำหรับแต่ละค่าของ $n \geqslant 1$

4.2 การลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม
(CONVERGENCE AND DIVERGENCE OF SERIES)

บทนิยาม 4.2.1

i) ถ้าลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ของอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่เข้า และถ้า $\lim_{n\to\infty} S_n = L$ แล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ จะลู่เข้าสู่ L โดยจะกล่าวว่า L เป็นผลบวกของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เขียนเป็น

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

ii) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ไม่ลู่เข้า จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออก

นั่นคือ ถ้าลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ลู่ออกแล้ว จะกล่าวได้ว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ลู่ออกด้วย และ $\lim_{n\to\infty} S_n$ ไม่มี หรือ $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ หรือ $-\infty$ ดังนั้น จึงหาผลบวกของอนุกรมไม่ได้

นั่นแสดงว่า การลู่เข้าหรือการลู่ออกของอนุกรมนั้นขึ้นอยู่กับการลู่เข้าหรือการลู่ออกของลำดับของผลบวกย่อยนั่นเอง คือ ถ้าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนั้นลู่เข้าแล้ว อนุกรมนั้นก็ย่อมลู่เข้าด้วย แต่ถ้าลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรมนั้นลู่ออกแล้ว อนุกรมนั้นก็จะลู่ออกด้วย

ตัวอย่าง 4.2.1 จงแสดงว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ลู่เข้า พร้อมทั้งหาผลบวกอนุกรมด้วย

$$\because \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots$$

$$\therefore \quad a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

ดังนั้น $S_1 = a_1 = \frac{1}{1.3} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)$

$S_2 = a_1+a_2 = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{5}\right)$

$S_3 = a_1+a_2+a_3 = \frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)$

$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{7}\right)$

....

$$S_n = a_1+a_2+\ldots+a_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

นั่นคือ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ ลู่เข้า

และผลบวกของอนุกรม คือ $\frac{1}{2}$

นั่นคือ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}$

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ย่อมลู่เข้าด้วย

และ $$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n + \sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

พิสูจน์ ให้ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

T_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\because$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง S และ T ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ และ $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ ตามลำดับ

$$\because \quad \lim_{n\to\infty}(S_n+T_n) = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n$$

$$= S+T$$

$\therefore$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ ลู่เข้า และผลบวกก็คือ ผลบวกระหว่างอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ กับ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ซึ่งก็คือ $S+T$ นั่นเอง #

หมายเหตุ เพื่อความสะดวกต่อไปนี้โดยทั่วไปจะเขียนแทน $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ด้วย $\sum a_n$

ทฤษฎีบท 4.2.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว อนุกรม $\sum ca_n$ ย่อมลู่เข้า และ $\sum ca_n = c\sum a_n$

พิสูจน์ ให้ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม $\sum a_n$

$\because$ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า ดังนั้นจะมีจำนวนจริง S ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

$$\because \quad \lim_{n\to\infty} cS_n = c\left(\lim_{n\to\infty} S_n\right)$$

$$= cS \qquad \text{สำหรับ} \quad c \in R$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum ca_n$ ย่อมลู่เข้า และผลบวกของอนุกรมคือ cS #

ทฤษฎีบท 4.2.3 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า และอนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออกแล้ว อนุกรม $\sum(a_n+b_n)$ ย่อมลู่ออก

พิสูจน์ $b_n = (a_n+b_n)-a_n$

เนื่องจากอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า

ดังนั้น ถ้าอนุกรม $\sum(a_n+b_n)$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum b_n$ จะลู่เข้าด้วย (ตาม ท.บ. 4.2.1) ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับสมมติฐานของทฤษฎีบท

ดังนั้น อนุกรม $\sum(a_n+b_n)$ ต้องลู่ออก #

ข้อสังเกต ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และอนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออกทั้งคู่แล้ว $\sum(a_n+b_n)$ อาจจะลู่ออกหรือลู่เข้าก็ได้

ตัวอย่าง 4.2.2

1) ถ้า $a_n = 5$ และ $b_n = 10$ ทุกค่าของ n จะเห็นว่าอนุกรม $\sum a_n$ และอนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออกทั้งคู่ และ $\sum(a_n+b_n)$ ก็ลู่ออกด้วย

2) ถ้า $a_n = 3$ และ $b_n = -3$ ทุกค่าของ n จะเห็นว่าอนุกรม $\sum a_n$ และอนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออกทั้งคู่ แต่อนุกรม $\sum(a_n+b_n)$ ลู่เข้า

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\lim\limits_{n\text{-}m} a, = 0$

พิสูจน์ สมมติว่าอนุกรม $\sum a,$ เป็นอนุกรมลู่เข้าสู่ S แล้ว

$$S_n = a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

$$\ldots \quad \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

และ $$S_{n-1} = a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$$

$$.. \quad \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$$

$$\because \quad a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$.. \quad \lim_{n\text{--}r\text{-}} a, = \lim_{``\text{- -}} (S, \quad S_{n-1})$$

$$= s - s$$

$$= o$$

นั่นคือ ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ #

ข้อสังเกต

1. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ แล้ว อนุกรม Σa_n อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ เช่น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมที่ลู่ออก (ซึ่งจะแสดงภายหลัง)

2. ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า $\sum a_n$ ย่อมลู่ออก (ข้อนี้ใช้เป็นหลักการทดสอบอนุกรมที่ลู่ออกได้)

ตัวอย่างที่ 4.2.3 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้ลู่ออก

1. $\sum \frac{2n+1}{2n-1}$ 2 . $\sum(-1)^n$

3. $\sum n$

วิธีทำ 1) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{2n-1}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}}$$

$$= 1 \neq 0$$

$\therefore$ อนุกรม $\sum \frac{2n+1}{2n-1}$ ลู่ออก

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \neq 0$

$\therefore$ อนุกรม $\sum(-1)^n$ ลู่ออก

3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n \neq 0$

$\therefore$ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.2.5 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เป็นลบแล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ จาก

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$\ldots = \ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$
$$\because \quad a_n \geqslant 0$$
$$\therefore \quad S_1 \leqslant S_2 \leqslant S_3 \leqslant \ldots \leqslant S_n \leqslant \ldots$$

ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวชนิดลำดับไม่ลด

จากทฤษฎีบท 3.4.3 กล่าวว่า ลำดับทางเดียวใด ๆ จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ดังนั้นจึงได้ว่า อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า #

จากทฤษฎีบท 4.2.5 ทำให้กล่าวต่อไปได้อีกว่า อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่ออกถ้าลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตจำกัด

บทนิยาม 4.2.2 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)

อนุกรมเรขาคณิตคือ อนุกรม $\sum ar^{n-1}$ เมื่อ $a \neq 0$ และ r คืออัตราส่วนระหว่างพจน์ใด ๆ กับพจน์ก่อนพจน์นั้น

ทฤษฎีบท 4.2.6 อนุกรมเรขาคณิต $\sum ar^{n-1}$ จะลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ โดยมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ และจะลู่ออกถ้า $|r| \geqslant 1$

พิสูจน์

1) เมื่อ $|r| \geqslant 1$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0 \qquad (\because a \neq 0)$

ดังนั้น เมื่อ $|r| \geqslant 1$ อนุกรม $\sum ar^{n-1}$ จะลู่ออก

2) เมื่อ $|r| < 1$

$$\because \quad S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1}$$

และ

$$rS_n = ar + ar^2 + \dots + ar^n$$

$$\therefore S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

เมื่อ $|r| < 1$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a}{1-r}$$

$\therefore$ อนุกรม $\sum ar^{n-1}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{a}{1-r}$

นั่นคือ ผลบวกของอนุกรม $\Sigma\, ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$ #

ตัวอย่าง 4.2.4 จะแสดงว่า อนุกรม $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ ลู่เข้า และหาผลบวกของอนุกรมด้วย

วิธีทำ อนุกรม $3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต มี $a = 3,\ r = \frac{1}{3}$

โดยทฤษฎีบท 4.2.5 จะได้ว่า อนุกรมนี้ลู่เข้า

และมีผลบวกของอนุกรม $= \dfrac{3}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{9}{2}$

บทนิยาม 4.2.3 อนุกรมฮาร์มอนิก (Harmonic series)

อนุกรมฮาร์มอนิก คือ อนุกรม $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

ทฤษฎีบท 4.2.6 อนุกรมฮาร์มอนิกเป็นอนุกรมที่ลู่ออก

วิธีทำ จาก $\Sigma \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ จะได้ว่า

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

ดังนั้นโดยทั่ว ๆ ไป โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$S_{2n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$$

ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตจำกัด จึงกล่าวได้ว่า อนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก

#

อนึ่ง จากเรื่องราวของอนุกรมนี้ จะนำไปสู่การแสดงถึงการเขียนทศนิยมแทนจำนวนจริงได้ คือ สำหรับจำนวนทศนิยมบวกใด ๆ จะสามารถเขียนเป็นอนุกรมในรูป

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} + \ldots$$

ซึ่งสามารถเขียนเป็นทศนิยมได้เป็น $a_0 \cdot a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$ เมื่อ a_0 เป็น 0 หรือจำนวนเต็มบวกใด ๆ และ $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ สำหรับแต่ละ $n \in N$

ทฤษฎีบท 4.2.7 สำหรับทุก ๆ จำนวนทศนิยมบวกย่อมสามารถเขียนแทนจำนวนจริงบวกได้ (คือลู่เข้าสู่จำนวนจริงบวก)

พิสูจน์ พิจารณาจำนวนทศนิยมซึ่งเขียนอยู่ในรูป

$$a_0 \cdot a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

โดย $S_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant a_0 + \frac{9}{10}$

$$S_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leqslant a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} = a_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10}\right)$$

$$S_3 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} \leqslant a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3}$$

และ $a_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} = a_0 + \frac{9}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2}\right)$

โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์ จะได้ว่า

$$S_n \leqslant a_0 + \frac{9}{10}\left(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\ldots+\frac{1}{10^{n-1}}\right)$$

$$\leqslant a_0 + \frac{9}{10}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right) = a_0+1$$

และลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ และมีขอบเขตบนคือ a_0+1 โดย ท.บ. 3.4.1 ดังนั้น ลำดับ $\{S_n\}$ จึงลู่เข้าสู่ a_0+1 ดังนั้น $a_0 \cdot a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ จึงสามารถเขียนแทนจำนวนจริงได้ #

ทฤษฎีบท 4.2.8 สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวกย่อมมีจำนวนทศนิยมบวกที่เขียนแทนได้

พิสูจน์ กำหนดให้ $a \geqslant 0$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ เราสร้างอนุกรมดังนี้

ให้ a_0 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ซึ่ง $\leqslant a$

a_1 เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ซึ่ง $a_0 + \frac{a_1}{10} \leqslant a$

....

a_n เป็นจำนวนเต็มบวกที่มากที่สุด ซึ่ง $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n} \leqslant a$

....

จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า

i) $a_0 \cdot a_1a_2 \ldots a_n \ldots$ เป็นทศนิยมซึ่ง $a_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ สำหรับแต่ละ $n \in \mathbb{N}$ และ

ii) $a = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

i) $\because a_0 + \frac{0}{10} \leqslant a$ ดังนั้น $a_1 \geqslant 0$

และ $\frac{a_1}{10} \leqslant a - a_0 < 1$ ด้วย ดังนั้น $a_1 < 10$

เพราะฉะนั้น $0 \leqslant a_1 \leqslant 9$

โดยการอุปมานอาจกล่าวได้ว่า จะได้ $0 \leqslant a_n \leqslant 9$

ii) จะต้องแสดงให้ได้ว่า $a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) < \frac{1}{10^n}$

เพราะถ้า $a - \left(a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}\right) \geqslant \frac{1}{10^n}$

แล้วจะได้ว่า $a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{10^n} \leqslant a$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้งกับคุณสมบัติของ a_n

เพราะฉะนั้น $\left|a-\left(a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}\right)\right| < \frac{1}{10^n}$

นั่นแสดงว่า $a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{10^k} = a$ นั่นเอง #

ถึงอย่างไรก็ตาม การจับคู่จากทศนิยมไปยังจำนวนจริง ก็ไม่เป็นแบบหนึ่งต่อหนึ่งเสมอไป คือ มีจำนวนจริงบางจำนวนที่สามารถเขียนแทนได้ด้วยทศนิยม 2 จำนวน เช่น $\frac{1}{2}$ สามารถเขียนแทนได้ด้วย 0.5 และ 0.49999... นอกจากจะเขียนแทนจำนวนจริงด้วยจำนวนทศนิยมได้แล้ว ยังใช้ผลในทำนองเดียวกันนี้เขียนแทนจำนวนจริงในแบบ p – adic สำหรับ $p \varepsilon N$ ที่กำหนดให้ใด ๆ โดย $p \geqslant 2$ นั่นคืออนุกรมอยู่ในรูป

$$a_0+\frac{a_1}{p}+\frac{a_2}{p^2}+\ldots+\frac{a_n}{p^n}+\ldots$$

เมื่อ $a_n \varepsilon \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$

แล้วจะเขียนแทนอนุกรมนั้นได้ด้วย

$$a_0 \cdot a_1a_2 \ldots a_n \ldots \text{ (p – adic)}$$

เช่น รูปทวิภาค (binary) ก็เขียนได้เป็น

$$a_0 \cdot a_1a_2 \ldots a_n \ldots = a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\ldots+\frac{a_n}{2^n}+\ldots$$

เมื่อ $a_n \varepsilon \{0, 1\}$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ เช่น $0.101 = \frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{5}{8}$

หรือรูปไตรภาค (ternary) ก็เขียนได้เป็น

$$a_0 \cdot a_1a_2 \ldots a_n \ldots = a_0+\frac{a_1}{3}+\frac{a_2}{3^2}+\ldots+\frac{a_n}{3^n}+\ldots$$

เมื่อ $a_n \varepsilon \{0, 1, 2\}$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ เช่น $0.101 = \frac{1}{3}+\frac{1}{27} = \frac{10}{27}$ เป็นต้น

แบบฝึกหัด 4.2.1

จงพิจารณาว่าอนุกรมแต่ละข้อต่อไปนี้ลู่ออกหรือลู่เข้า ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น ๆ ด้วย

1. $\sum \frac{2n+3}{5n}$
2. $\sum 2n^2+1$
3. $\sum \left(\frac{1}{3}\right)$
4. $\sum (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
5. $\sum \sqrt[n]{3}$
6. $\sum 4^n$
7. $\sum (-1)^n$
8. $\sum \frac{1}{2^n}$
9. $\sum \frac{1}{n(n+1)}$
10. $\sum \frac{1}{n^2+n}$

4.3 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมที่พจน์ไม่เป็นลบ (TESTS FOR CONVERGENCE AND DIVERGENCE OF SERIES WITH NONNEGATIVE TERMS)

ต่อไปจะพิจารณาถึงอนุกรม $\sum a_n$ เมื่อ $a_n > 0$ ทุก ๆ ค่าของ $n \varepsilon N$ ในกรณีเช่นนี้พบว่า ลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ย่อมเป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ ดังนั้นโดย ท.บ. 3.4.1 จะได้ว่า อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้า ถ้าลำดับ $\{S_n\}$ มีขอบเขตบน และถ้าลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ ไม่มีขอบเขตบน อนุกรม $\sum a_n$ ก็จะลู่ออก ในการทดสอบว่าอนุกรมลู่เข้าหรือไม่โดยการใช้ผลบวกย่อยพิจารณาโดยตรงนั้น บางครั้งก็ยุ่งยากมาก จึงจำเป็นจะต้องหาวิธีอื่น ๆ มาช่วยในการทดสอบเพื่อให้การทดสอบนั้นง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น การทดสอบที่สำคัญมากที่สุดอันหนึ่งก็คือ การเปรียบเทียบอนุกรม $\sum a_n$ กับอนุกรมที่ทราบแล้วว่ามันเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าหรือลู่ออก ดังจะกล่าวต่อไป

4.3.1 การทดสอบเปรียบเทียบ (Comparison Test)

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้อนุกรม $\sum a_n$ และอนุกรม $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่ $a_n \geqslant 0$ และ $b_n \geqslant 0$ ซึ่ง $a_n \leqslant b_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

i) ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ii) ถ้า $\sum a_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum b_n$ ย่อมลู่ออกด้วย

พิสูจน์ ให้ S_n เป็นผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum a_n$

และ T_n เป็นผลบวกย่อยของอนุกรม $\sum b_n$

โดยลำดับ $\{S_n\}$ และ $\{T_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด

i) สมมติว่า $\sum b_n$ ลู่เข้า

$$\because \quad a_n \leqslant b_n$$

$$\therefore \quad S_n \leqslant T_n$$

ดังนั้น $\{T_n\}$ จะเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด (จาก ท.บ. 3.4.3) สมมติว่ามี M เป็นขอบเขตข้างบน

$\therefore$ ลำดับ $\{S_n\}$ ก็จะเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดด้วย

$$\because \quad S_n \leqslant T_n \leqslant M$$

ดังนั้น $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า (จาก ท.บ. 3.4.3)

เพราะฉะนั้น อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า

ii) ถ้า $\sum a_n$ ลู่ออก

สมมติว่า $\sum b_n$ ลู่เข้า ก็จะได้ว่า $\sum a_n$ ลู่เข้าด้วย (จากกรณี i) ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะขัดแย้งกับสมมติฐานของทฤษฎีบท

$\therefore$ อนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออก #

กล่าวโดยสรุป คือ

i) ถ้าอนุกรมที่จะเปรียบเทียบนั้นมีทุกพจน์น้อยกว่าหรือเท่ากับอนุกรมที่ทราบว่าลู่เข้า แล้วอนุกรมนั้น ๆ ย่อมลู่เข้าด้วย

ii) ถ้าอนุกรมที่จะเปรียบเทียบนั้นมีทุกพจน์มากกว่าหรือเท่ากับอนุกรมที่ทราบว่าลู่ออก แล้วอนุกรมนั้น ๆ ย่อมลู่ออกด้วย

ทฤษฎีบท 4.3.2 (ทฤษฎีบทของอนุกรม p)

สำหรับอนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ เมื่อ p คือ ค่าคงที่ จะได้ว่า

i) ถ้า $p > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ย่อมลู่เข้า

ii) ถ้า $p \leqslant 1$ แล้ว อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ย่อมลู่ออก

(เมื่อ $p = 1$ เรียกว่า อนุกรมฮาร์มอนิก (harmonic series))

พิสูจน์ แยกเป็น 3 กรณี

1) เมื่อ $p \leqslant 0$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^p} \neq 0$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก เมื่อ $p \leqslant 0$

2) เมื่อ $0 < p \leqslant 1$

จะได้ว่า $\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$

และเพราะว่า อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ลู่ออกด้วย (ตาม ท.บ. 4.3.1)

3) เมื่อ $p > 1$

$S_1 = 1$

$S_3 = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$

$S_7 = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) + \left(\frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}\right) < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$

$< 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right.$

และอนุกรม $\sum \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{n-1}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต ซึ่งมี $r = \frac{1}{2^{p-1}} < 1$ เมื่อ $p > 1$ ดังนั้น อนุกรมนี้จึงลู่เข้า และทราบว่าลำดับ $\{S_{2^n-1}\}$ เป็นลำดับไม่ลด และมีขอบเขตบนเป็น $\frac{2^{p-1}}{2^{p-1}-1}$

$\therefore$ ลำดับ $\{S_{2^n-1}\}$ จึงลู่เข้า (ท.บ. 3.4.3)

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าด้วย เพราะทุก ๆ ลำดับทางเดียวที่มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าแล้ว มันย่อมลู่เข้าด้วย

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า เมื่อ $p > 1$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมต่อไปนี้

1) $\sum \frac{1}{2^n+3}$

2) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

วิธีทำ 1) $\sum \frac{1}{2^n+3}$

$\because \frac{1}{2^n+3} < \frac{1}{2^n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$

แต่ $\sum \frac{1}{2^n}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{1}{2^n+3}$ ลู่เข้า

2) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

$\because \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$

และอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ คือ อนุกรมฮาร์มอนิก ซึ่งเป็นอนุกรมที่ลู่ออก

∴ อนุกรม $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต

(The Comparison Test in its Limit Form)

ทฤษฎีบท 4.3.3 ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม ซึ่ง $a_n \geqslant 0$ และ $b_n \geqslant 0$

1) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = t \ (t \neq 0)$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าหรือลู่ออกย่อมแล้วแต่อนุกรม $\sum b_n$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก

กล่าวคือ ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้า ก็ได้ว่า $\sum a_n$ ลู่เข้าด้วย

แต่ ถ้า $\sum b_n$ ลู่ออก ก็ได้ว่า $\sum a_n$ ลู่ออกด้วย

2) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้า แล้ว $\sum a_n$ จะลู่เข้าด้วย

3) ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \infty$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\sum b_n$ ลู่ออก แล้ว $\sum a_n$ จะลู่ออกด้วย

พิสูจน์ 1) สมมติให้ $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = t(t \neq 0)$ แล้ว จะมี $n_0 \varepsilon N$ ซึ่งทำให้

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - t\right| < \frac{t}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant n_0$$

ดังนั้น $$0 < \frac{t}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3t}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant n_0$$

เพราะฉะนั้นจะได้

i) $a_n < \frac{3t}{2} b_n$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_0$

ดังนั้น จาก ท.บ. 4.3.1 ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_n$ ก็ลู่เข้าด้วย

ii) $a_n > \frac{t}{2} b_n$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_0$

ดังนั้น จาก ท.บ. 4.3.1 ถ้า $\sum b_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum b_n$ ก็ลู่ออกด้วย #

สำหรับ 2) และ 3) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ 1) จึงให้นักศึกษาพิสูจน์เอง

ตัวอย่าง 4.3.2 จงทดสอบการลู่เข้าหรือการลู่ออกของอนุกรมต่อไปนี้ โดยการใช้การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต

1) $\sum \frac{3n}{4n^2+5n-10}$

2) $\sum \frac{\ln n}{n^2}$

วิธีทำ 1) ให้ $a_n = \frac{3n}{4n^2+5n-10}$

และ $b_n = \frac{1}{n}$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{b_n} = \frac{3n^2}{4n^2+5n-10}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{3}{4} > 0$$

เนื่องจากอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{3n}{4n^2+5n-10}$ ลู่ออกด้วย

2) ให้ $a_n = \frac{\ln n}{n^2}$

และ $b_n = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{b_n} = n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\sqrt{n}} = 0$$

เนื่องจากอนุกรม $\sum \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ ลู่เข้า

ดังนั้นอนุกรม $\sum \frac{\ln n}{n^2}$ จึงลู่เข้าด้วย

แบบฝึกหัด 4.3.1

จงพิจารณาทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมดังต่อไปนี้

1. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\sum \frac{5n}{6n^3+7n-3}$
3. $\sum \frac{n-1}{n^5+3}$
4. $\sum \frac{1}{n2^n}$
5. $\sum \frac{1}{4n^2-3}$
6. $\sum \frac{\ln n}{2n^3-3}$
7. $\sum \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-3}$
8. $\sum \frac{n^2}{2^n}$
9. $\sum \frac{n+2}{(n+1)(\sqrt{n+3})}$
10. $\sum \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}}{n}$

4.4 อนุกรมสลับ (ALTERNATING SERIES)

บทนิยาม 4.4.1 ถ้า $a_n > 0$ สำหรับทุก ๆ n แล้ว จะเรียกอนุกรม $\sum(-1)^{n+1}a_n$ ว่า อนุกรมสลับ

นั่นคือ $\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 \ldots + (-1)^{n+1}a_n + \ldots$ เช่น

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \ldots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \ldots \quad \text{เป็นต้น}$$

การทดสอบอนุกรมสลับ

ทฤษฎีบท 4.4.1 ถ้า $\sum(-1)^{n+1}a_n$ เป็นอนุกรมสลับ ซึ่ง

1) $a_{n+1} \leqslant a_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

และ 2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

แล้วอนุกรมสลับนี้จะลู่เข้า และจะได้ว่า $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$ (หรือ $S_n \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ และ $S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่) เมื่อ S เป็นผลบวกของอนุกรม และ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n

พิสูจน์

กรณีที่ 1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ สมมติให้ $n = 2m$

$$\because \quad S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \ldots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

และ $S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) \ldots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}$

และเนื่องจากทุกจำนวนในวงเล็บไม่มีจำนวนใดเป็นจำนวนลบ

ดังนั้นจึงได้ว่า

$$S_{2m} > 0, \quad S_2 < S_4 < S_6 < \ldots < S_{2m} < a_1$$

นั่นคือ $\{S_{2m}\}$ เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขตจำกัด จึงสามารถหาค่าลิมิตได้

สมมติเป็น S คือ $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2m} = S$

กรณีที่ 2 ถ้า n เป็นจำนวนคี่ ให้ $n = 2m+1$ ในทำนองเดียวกันจะได้ด้วยว่า

$$S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty}(S_{2m+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} a_{2m+1}$$

$$= S + 0 \qquad (\because \lim_{n\to\infty} a_{2m+1} = 0 \text{ ตามข้อสมมติ})$$

$$= S$$

นั่นคือ อนุกรมดังกล่าวลู่เข้า

กล่าวคือ ลำดับ $\{S_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่ จะเป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ที่มีขอบเขตจำกัด และลู่เข้าไปสู่ l.u.b. ของลำดับ $\{S_n\}$ คือ S

และลำดับ $\{S_n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่ ก็จะเป็นลำดับลดโดยแท้ที่มีขอบเขตจำกัดและลู่เข้าสู่ g.l.b. ของลำดับ $\{S_n\}$ คือ S (เดียวกัน)

นั่นคือ $S_2 < S_4 < S_6 < \ldots S_{2m} < S$

และ $S \leqslant S_{2m+1} < \ldots < S_3 < S_1$

$\therefore \quad S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m+1}$

$\therefore \quad S_{2m} \leqslant S \leqslant S_{2m} + a_{2m+1}$

หรือเมื่อ n เป็นจำนวนคู่ จะได้

$$S_n \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ในทำนองเดียวกัน

$$S_{2m+1} - a_{2m+2} \leqslant S \leqslant S_{2m+1}$$

หรือเมื่อ n เป็นจำนวนคี่ จะได้

$$S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

จาก (1) และ (2) รวมได้เป็น

$$S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1}$$

นั่นคือ $|S - S_n| \leqslant a_{n+1}$ #

ตัวอย่าง 4.4.1 จงแสดงว่า อนุกรมสลับ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{1}{2n}$ และ $a_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)}$

$$\therefore \quad a_n - a_{n+1} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n(n+1)} > 0$$

$$\therefore \quad a_{n+1} < a_n$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$

ดังนั้น อนุกรมสลับ $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$ ลู่เข้า

และอาจกล่าวได้ว่า ค่าความแตกต่างระหว่างผลบวกของอนุกรมนี้กับผลบวกย่อย 4 พจน์แรก จะน้อยกว่าหรือเท่ากับ $\frac{1}{10}$

แบบฝึกหัด 4.4.1

จงพิจารณาว่า อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$
2. $\sum (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
3. $\sum \frac{(-1)^{n}}{n\sqrt{n}}$
4. $\sum \frac{(-1)^{n+1}n}{3n-1}$
5. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n}{2n-1}$

4.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไข (ABSOLUTE CONVERGENCE AND CONDITIONAL CONVERGENCE)

บทนิยาม 4.5.1 อนุกรม $\sum a_n$ จะเรียกว่า ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้า

บทนิยาม 4.5.2 อนุกรม $\sum a_n$ จะเรียกว่า ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.5.1 อนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ย่อมลู่เข้า (นั่นคือ ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย)

พิสูจน์ กำหนดให้ $\sum |a_n|$ ลู่เข้า

ให้ $S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_m$

และ $T_m = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_m|$

$$\therefore\ S_m + T_m = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \ldots + (a_m + |a_m|)$$
$$\leqslant 2|a_1| + 2|a_2| + \ldots + 2|a_m|$$

$\because$ $\sum |a_n|$ ลู่เข้า และเพราะว่า $a_n + |a_n| \geqslant 0$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จึงได้ว่า ลำดับของผลบวกย่อย $\{S_m + T_m\}$ เป็นลำดับไม่ลดที่มีขอบเขตจำกัด

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} (S_m + T_m)$ จะต้องมีค่า

แต่ $\lim\limits_{n\to\infty} (T_m)$ มีค่า (เพราะเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ตามสมมติฐาน)

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} (S_m) = \lim_{n\to\infty} (S_m + T_m - T_m)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (S_m + T_m) - \lim_{n\to\infty} T_m \quad \text{จะต้องมีค่าด้วย}$$

นั่นคือ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า

ตัวอย่าง 4.5.1 จงพิจารณาว่า อนุกรม $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือแบบมีเงื่อนไข

1) อนุกรม $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ เป็นอนุกรมสลับ

โดย $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$

$$\therefore\ a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

$$\therefore\ a_{n+1} < a_n$$

และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore$ อนุกรม $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ จึงลู่เข้า

2) อนุกรม $\sum \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right|$ คือ อนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมฮาร์มอนิกและลู่ออก

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ จึงเป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

สำหรับอนุกรม $\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ถ้าแยกออกเป็น 2 อนุกรม คือ อนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนบวกกับอนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนลบ โดยให้ อนุกรม $\sum p_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n + \ldots$ เป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนบวก และ อนุกรม $\Sigma q_n = q_1 + q_2 + \ldots + q_n + \ldots$ เป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนลบโดยที่อนุกรมทั้งคู่นี้ยังคงมีการเรียงลำดับแต่ละพจน์ตามอนุกรมเดิมแล้ว จะพิจารณาสิ่งแตกต่างที่สำคัญอันหนึ่งระหว่างอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ กับอนุกรมที่ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขดังนี้

สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ ใด ๆ

ให้ $p_n = a_n$ ถ้า $a_n > 0$

และ $p_n = 0$ ถ้า $a_n \leqslant 0$

(เช่น สำหรับอนุกรม $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, ก็ให้ $p_1 = 1,\ p_3 = \frac{1}{3}, \ldots,$
$p_{2n-1} = \frac{1}{2n-1}$ และ $p_2 = p_4 \ldots = 0$)

และในทำนองเดียวกัน ก็ให้

$q_n = a_n$ ถ้า $a_n \leqslant 0$

และ $q_n = 0$ ถ้า $a_n > 0$

ดังนั้น p_n จึงเป็นนิพจน์ที่เป็นบวกของ $\sum a_n$ (รวมกับบางนิพจน์ที่เป็น 0) โดยที่ q_n เป็นนิพจน์ที่เป็นลบ ซึ่งอาจกล่าวได้ว่า

$p_n = \max(a_n, 0)$ คือ ค่าที่สูงที่สุดระหว่าง a_n กับ 0

และ $q_n = \min(a_n, 0)$ คือ ค่าที่ต่ำที่สุดระหว่าง a_n กับ 0

ดังนั้นจากสูตรที่ว่า สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ

$$\max(a, b) = \frac{|a-b| + a + b}{2}$$

และ
$$\min(a, b) = \frac{-|a-b| + a + b}{2}$$

ทำให้ได้ว่า

$$2p_n = a_n + |a_n| \quad \text{และ} \quad 2q_n = a_n - |a_n|$$

และจะเห็นว่า $a_n = p_n + q_n$ ด้วย

สิ่งต่าง ๆ ที่กล่าวมานี้จะนำไปช่วยพิสูจน์ทฤษฎีบทต่อไป

ทฤษฎีบท 4.5.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว ทั้งอนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย

พิสูจน์ ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว อนุกรม $\sum (a_n + |a_n|)$ ย่อมลู่เข้าด้วย (ท.บ. 4.2.1)

ดังนั้น อนุกรม $\sum p_n$ จึงลู่เข้า ($\because 2p_n = a_n + |a_n|$)

นั่นจะได้ว่า อนุกรม $\sum p_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย (ท.บ. 4.2.2)

นอกจากนี้อาจแสดงว่า อนุกรม $\sum q_n$ ลู่เข้าได้ในทำนองเดียวกัน

จึงกล่าวได้ว่า ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว อนุกรม $\sum p_n$ และอนุกรม $\sum q_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย #

ทฤษฎีบท 4.5.3 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขแล้ว อนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ย่อมลู่ออกทั้งคู่

พิสูจน์ สมมติว่าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่ออก

$$\because \quad |a_n| = 2p_n - a_n$$

$$\therefore \quad \text{อนุกรม} \quad \sum |a_n| = \sum (2p_n - a_n)$$

ถ้าอนุกรม $\sum p_n$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum (2p_n - a_n)$ ก็ลู่เข้า

ดังนั้นจึงได้ว่า อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าด้วย ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมติ นั่นแสดงว่าอนุกรม $\sum p_n$ ลู่เข้าไม่ได้

จึงกล่าวได้ว่า อนุกรม $\sum p_n$ ต้องลู่ออก

อนึ่ง จะสามารถแสดงได้ในทำนองเดียวกันว่า อนุกรม $\sum q_n$ ก็ลู่ออกด้วย

จึงกล่าวสรุปได้ว่า ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขแล้ว อนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ย่อมลู่ออกทั้งคู่ #

ทฤษฎีบท 4.5.4 ถ้าอนุกรม $\sum p_n$ และอนุกรม $\sum q_n$ ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

พิสูจน์

$$\because \quad p_n = \frac{a_n+|a_n|}{2} \quad \text{และ} \quad q_n = \frac{a_n-|a_n|}{2}$$

จึงได้ว่า $|a_n| = p_n - q_n$

ดังนั้น ถ้าอนุกรม $\sum p_n$ และอนุกรม $\sum q_n$ ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว อนุกรม $\sum |a_n|$ ย่อมลู่เข้าด้วย

แสดงว่าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ #

การจัดอนุกรมให้อยู่ในรูปใหม่ (Rearrangements of Series)

สมมติว่า มีอนุกรม $\sum a_n$ แล้วจะนำเอาอนุกรม $\sum a_n$ นี้มาจัดให้อยู่ในรูปใหม่ เป็นอนุกรม $\sum b_n$ โดยอนุกรม $\sum b_n$ ที่เกิดขึ้นใหม่นี้จะมีนิพจน์แต่ละนิพจน์เหมือนกันกับอนุกรม $\sum a_n$ เดิม เพียงแต่ว่ามันจะอยู่ในตำแหน่งที่หรือลำดับที่ต่างกันเท่านั้น

บทนิยาม 4.5.3 ให้ $\{n_i\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก โดยแต่ละ n_i จะเป็นจำนวนเต็มบวกได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ เป็นอนุกรม โดยที่ $b_i = a_{n_i}$ สำหรับทุก ๆ $i \varepsilon N$ แล้ว จะเรียกอนุกรม $\sum b_n$ ว่าเป็นอนุกรมที่ได้จากการจัดให้อยู่ในรูปใหม่ของอนุกรม $\sum a_n$

ทฤษฎีบท 4.5.5 ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว อนุกรมที่ได้จากการจัดอนุกรม $\sum a_n$ ใหม่ก็ยังคงลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ไปยังค่าเดียวกัน (คือลู่เข้าสู่ $\sum a_k$)

พิสูจน์ ถ้าเราให้ $S = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ แล้ว

$$\sum_{k=1}^{n} |a_{n_k}| \leqslant S \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \varepsilon N$$

นั่นคือ อนุกรมที่เกิดจากการจัดรูปใหม่ใด ๆ ย่อมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ด้วย

ถ้าเราให้ $t = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ แล้ว

กำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ให้แล้ว จะมี $m \varepsilon N$ ซึ่งทำให้

$$\left|t - \sum_{k=1}^{m+1} a_k\right| < \varepsilon \quad \text{และ} \quad \left|S - \sum_{k=1}^{m+1} |a_k|\right| < \varepsilon \quad \text{ด้วย}$$

เลือก $m' \varepsilon N$ ซึ่ง $m'+1$ นิพจน์แรกของอนุกรม $\sum a_{n_i}$ จะอยู่ใน $m+1$ นิพจน์แรกของอนุกรม $\sum a_i$

แล้ว $\left|t-\sum_{k=1}^{n} a_{n_k}\right| < \left|t-\sum_{k=1}^{m+1} a_k\right| + \sum_{k=m+2}^{\infty} |a_k|$

$< 2\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n > m'$

นั่นคือ อนุกรม $\sum a_{n_k}$ ลู่เข้าสู่ t ด้วย #

ทฤษฎีบท 4.5.6 สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ ใด ๆ ซึ่งมีอนุกรม $\sum p_n$ และลู่เข้า $\sum q_n$ ที่ลู่ออกทั้งคู่ และ $a_n \to 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะสามารถจัดรูปใหม่ให้ลู่เข้าไปยังจำนวนจริงที่กำหนดให้ใด ๆ ก็ได้ หรือให้ลู่ออกก็ได้

พิสูจน์ พิจารณา $b \varepsilon R$

ให้ n_1 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรก ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n_1} p_k > b$

ให้ m_1 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรก ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k < b$

ให้ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรกที่มากกว่า n_1 ซึ่ง

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > b$$

ให้ m_2 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรกที่มากกว่า m_1 ซึ่ง

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k < b$$

กระทำในทำนองเดียวกันนี้ไปเรื่อย ๆ

เนื่องจาก $a_n \to 0$ ดังนั้น อนุกรมที่จัดรูปใหม่ของอนุกรม $\sum a_n$ นี้ย่อมลู่เข้าสู่ค่า b

ต่อไปจะสร้างอนุกรมที่จัดรูปใหม่ของอนุกรม $\sum a_n$ ที่ลู่ออกทางบวก

ให้ n_1 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรก ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n_1} p_k > 1$

และ ให้ n_2 เป็นจำนวนเต็มบวกจำนวนแรกที่มากกว่า n ซึ่ง

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k + q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > 2$$

กระทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

จะได้ว่า อนุกรมที่จัดรูปใหม่ของอนุกรม $\sum a_n$ นั้น ลู่ออกทางบวก #

ข้อสังเกต อนุกรมที่สอดคล้องกับ ท.บ. 4.5.6 **นี้ก็คือ** อนุกรมที่ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขนั่นเอง

ดังนั้นอาจกล่าวได้ว่า ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว จะสามารถจัดอนุกรม $\sum a_n$ เสียใหม่ให้ลู่เข้าไปสู่ b ได้เสมอ ทำได้โดยนำเอาเฉพาะนิพจน์ที่เป็นบวกจากอนุกรมที่กำหนดให้มาจนกระทั่งได้ผลบวกย่อยมากกว่า b แล้วก็นำเอาเฉพาะนิพจน์ที่เป็นลบจากอนุกรมที่กำหนดให้มาจนกระทั่งได้ผลบวกย่อยน้อยกว่า b ฯลฯ เพราะว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ จึงไม่เป็นการยากที่จะแสดงว่าอนุกรมที่ได้จากการจัดใหม่ซึ่งลู่เข้าไปสู่ b นั้นสามารถสร้างขึ้นมาได้

แบบฝึกหัด 4.5.1

จงทดสอบว่า อนุกรมต่อไปนี้ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข หรือลู่ออก

1. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$
2. $\sum(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n^2}$
3. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}$
4. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n-1}$
5. $\sum\frac{(-1)^n}{n\ln n}$
6. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n!}$
7. $\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$
8. $\sum(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$
9. ถ้า $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ ลู่เข้าไปสู่ S แล้ว

   จงแสดงว่าอนุกรมที่จัดให้อยู่ในรูปใหม่คือ

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\ldots = \frac{3}{2}S$$

4.6 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมทั่ว ๆ ไป
(TESTS FOR CONVERGENCE AND DIVERGENCE OF GENERAL SERIES)

4.6.1 การทดสอบโดยการถอดกรณฑ์ (Root Test)

ทฤษฎีบท 4.6.1 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ มี $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = L$ แล้ว จะได้ว่า

1) $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L < 1$
2) $\sum a_n$ จะลู่ออก ถ้า $L > 1$
3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

พิสูจน์

1) ถ้า $L < 1$ จะมีเลขจำนวนจริง r โดยที่ $L < r < 1$ และจะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant N_0$$

$$\therefore\ |a_n| < r^n \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant N_0$$

เนื่องจากอนุกรม $\sum r^n$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต

$\because\ r < 1$

$\therefore$ อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้า (โดยการเปรียบเทียบ)

นั่นคือ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2) ถ้า $L > 1$ จะมีเลขจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้

$$\sqrt[n]{|a_n|} > 1 \ , \quad n \geqslant N_0$$

$$\therefore\ |a_n| > 1 \ , \quad n \geqslant N_0$$

ดังนั้น $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$

นั่นคือ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก

3) พิจารณาอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ และ $\sum \frac{1}{n^2}$ ซึ่งจะเห็นว่า

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ ของทั้งสองอนุกรมเป็น 1

แต่อนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก และอนุกรม $\sum \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

แสดงว่า $L = 1$ สรุปผลไม่ได้ #

ตัวอย่าง 4.6.1 จงแสดงว่า อนุกรม $\sum \frac{1}{n^n}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ให้

$$a_n = \frac{1}{n^n}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{1}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1$$

ดังนั้น อนุกรม $\frac{1}{n^n}$ ลู่เข้า (แบบสัมบูรณ์)

4.6.2 การทดสอบโดยอัตราส่วน (Ratio Test)

ทฤษฎีบท 4.6.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ มี $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้ว จะได้ว่า

1) อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L < 1$
2) อนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก ถ้า $L > 1$
3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

พิสูจน์

1) สมมติว่า $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$ แล้ว สำหรับจำนวนจริง r ใด ๆ เมื่อ $L < r < 1$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant N_0$$

$$\therefore \quad |a_{n+1}| < r|a_n|$$

$$|a_{n+2}| < r|a_{n+1}| < r^2|a_n|$$

....

และ $|a_{n+k}| < r^k|a_n|$, เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$

$\because$ อนุกรม $\sum |a_n| r^k$ เป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้าเนื่องจากมี $r < 1$

$\therefore$ อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (จากการเปรียบเทียบ)

2) สมมติ $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ แล้ว สำหรับจำนวนจริง r ใด ๆ หรือ $L > r > 1$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r > 1 \qquad \text{ทุกค่าของ} \quad n \geqslant N_0$$

เลือก $\varepsilon = L - r$

$$\therefore \quad \left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - L\right| < L - r \qquad \text{ทุกค่า} \quad n \geq N_0$$

$$-(L-r) < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - L < L - r$$

$$r < \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 2L - r$$

นั่นคือ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > r$

ในทำนองเดียวกันกับ 1) ย่อมได้ว่า

$$|a_n| r^k < |a_{n+k}| \quad , \qquad k \geq 1$$

แต่ $r > 1$ จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$

ดังนั้น อนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก

3) พิจารณาอนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ และอนุกรม $\sum \frac{1}{n^2}$ จะพบว่าอนุกรมทั้งสองมี $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$

แต่อนุกรม $\sum \frac{1}{n}$ ลู่ออก และอนุกรม $\sum \frac{1}{n^2}$ ลู่เข้า

แสดงว่า $L = 1$ สรุปผลไม่ได้ #

ตัวอย่าง 4.6.2 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{n(n+1)}{2n!}$ ลู่เข้า

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{n(n+1)}{2n!}$ และ $a_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)!}$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)(n+2)}{2(n+1)!} \cdot \frac{2n!}{n(n+1)!}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{n+2}{n^2+n}\right|$$

$$= 0 < 1$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{n(n+1)}{2n!}$ ลู่เข้า

ตัวอย่างที่ 4.6.3 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{n!}{2^n}$ ลู่ออก

วิธีทำ ให้ $a_n = \frac{n!}{2^n}$ และ $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{2^{n+1}}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)!}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n!} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty > 1$$

ดังนั้น อนุกรม $\sum \frac{n!}{2^n}$ ลู่ออก

4.6.3 การทดสอบของราเบ (Raabe's Test)

ทฤษฎีบท 4.6.3 สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ ใด ๆ จะได้ว่า

1) ถ้ามีจำนวนจริง $a > 1$ และจำนวนธรรมชาติ K ซึ่ง

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqslant 1 - \frac{a}{n} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant K \quad \text{แล้ว}$$

อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2) ถ้ามีจำนวนจริง $a \leqslant 1$ และจำนวนธรรมชาติ K ซึ่ง

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geqslant 1 - \frac{a}{n} \quad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant K \quad \text{แล้ว}$$

อนุกรม $\sum a_n$ จะไม่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ (คืออาจจะลู่ออกหรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข)

พิสูจน์

1) สมมติว่า $\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \leqslant 1 - \frac{a}{k}$ สำหรับ $k \geqslant K$ และ $a > 1$

$$k|a_{k+1}| \leqslant (k-a)\,|a_k|$$

$$k|a_{k+1}| \leqslant (k-1)\,|a_k| - (a-1)\,|a_k| \quad \text{สำหรับ} \quad k \geqslant K$$

เพราะว่า $a > 1$ แล้ว $a - 1 > 0$ และ

$$(k-1)|a_k| - k|a_{k+1}| \geqslant (a-1)|a_k| > 0 \quad \text{สำหรับ} \quad k \geqslant K$$

$\because$ ลำดับ $\{k|a_{k+1}|\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มสำหรับ $k \geqslant K$ แทนค่า $k = K, \ldots, n$ แล้ว บวกกันจะได้เป็น

$$(K-1)|a_K| - n|a_{n+1}| \geqslant (a-1)\,(|a_K| + \ldots + |a_n|)$$

นั่นแสดงว่าผลบวกย่อยของ $\sum(|a_n|)$ มีขอบเขตจำกัด

ดังนั้น อนุกรม $\sum a_n$ จึงลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2) จาก $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 - \frac{a}{n}$ เมื่อ $n \geqslant K,\ a \leqslant 1$

จะได้ $n|a_{n+1}| \geqslant (n-a)|a_n| \geqslant (n-1)|a_n|$

เพราะว่าลำดับ $\{n|a_{n+1}|\}$ เป็นลำดับไม่ลดสำหรับ $n \geqslant K$ แล้ว จะมีจำนวนธรรมชาติ c ซึ่ง $|a_{n+1}| > c/n$ สำหรับ $n \geqslant K$

เพราะว่า อนุกรมฮาร์มอนิก $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก ดังนั้นอนุกรม Σa_n จึงไม่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ #

บทแทรก ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรม โดย

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = L$$

1) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L > 1$

2) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่ออกหรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ถ้า $L < 1$

3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

พิสูจน์

1) ถ้าลิมิต L มีจริง และ $L > 1$

ให้ L_1 เป็นจำนวนใด ๆ ซึ่ง $L > L_1 > 1$ แล้ว จะมีจำนวนธรรมชาติ K ซึ่ง

$$L_1 < n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) \quad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant K$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 - \frac{L_1}{n}$ สำหรับ $n \geqslant K$

จาก ท.บ. 4.6.3 จึงได้ว่า เมื่อ $L > 1$ อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ และในทำนองเดียวกัน ในกรณีที่ $L < 1$ ก็จะไม่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ #

ตัวอย่าง 4.6.4 จงแสดงว่า อนุกรม

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1.4}{3.6}\right)^2 + \left(\frac{1.4.7}{3.6.9}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1.4.7\ldots(3n-2)}{3.6.9\ldots(3n)}\right)^2 + \ldots$$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

วิธีทำ ถ้าใช้การทดสอบแบบอัตราส่วนจะไม่ได้ผล

เพราะว่า $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2 = 1$$

แต่ถ้าใช้การทดสอบของราเบจะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(1 - \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^2\right)$$

$$= \frac{4}{3} > 1$$

ดังนั้น อนุกรมนี้ลู่เข้า

ข้อสังเกต การทดสอบของราเบมักจะใช้บ่อย ๆ เมื่อใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน (Ratio Test) ไม่ได้ผล

แบบฝึกหัด 4.6.1

1. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้โดยการใช้ทดสอบแบบการถอดกรณฑ์

1.1) $\sum \frac{3^n}{n^3}$

1.2) $\sum \frac{(\sqrt{5}-1)^n}{n^2+1}$

1.3) $\sum \frac{1}{n^n}$

1.4) $\Sigma \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

2. จงทดสอบอนุกรมต่อไปนี้โดยการใช้การทดสอบอัตราส่วน

2.1) $\sum \frac{3^n}{n^3}$

2.2) $\sum \frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$

2.3) $\sum \frac{(-1)^n 2^{3n}}{3^{2n}}$

2.4) $\sum \frac{n!}{n^n}$

2.5) $\sum \frac{n}{e^n}$

3. จงทดสอบอนุกรมข้อ 2. โดยใช้การทดสอบของราเบ

บทสรุปทบทวน
บทที่ 4 อนุกรมของจำนวนจริง

4.1 บทนิยามของอนุกรม

บทนิยาม 4.1.1 เมื่อ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ เป็นลำดับจำกัด และ $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$ เป็นลำดับอนันต์ จะเรียกการแสดงผลบวกของพจน์ทุกพจน์ของลำดับในรูป $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ หรือ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ ว่า อนุกรม (series)

อนุกรมที่ได้จากลำดับจำกัดเรียกว่า อนุกรมจำกัด

อนุกรมที่ได้จากลำดับอนันต์เรียกว่า อนุกรมอนันต์

โดยจะเขียนแทน $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ ด้วย $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

และเขียนแทน $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots$ ด้วย $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ หรือ $\sum a_n$

บทนิยาม 4.1.2 ผลบวกย่อยของอนุกรม คือ ผลรวมของพจน์ตั้งแต่พจน์ที่ 1 ถึงพจน์ที่ n ของอนุกรม เขียนแทนด้วย S_n เรียก S_n ว่า ผลบวกย่อยที่ n ของอนุกรม

4.2 การลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรม

บทนิยาม 4.2.1

i) ถ้าลำดับของผลรวมย่อย $\{S_n\}$ ของอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว จะกล่าวว่า อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า และถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$ แล้วจะกล่าวว่า อนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าสู่ L ซึ่งกล่าวได้ว่า L เป็นผลบวกของอนุกรม Σa_n เขียนแทนด้วย $\Sigma a_n = L$

ii) ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ไม่ลู่เข้า จะกล่าวว่าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.2.1 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum(a_n+b_n)$ ย่อมลู่เข้าด้วย

และ $\quad \sum(a_n+b_n) = \sum a_n + \sum b_n$

ทฤษฎีบท 4.2.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า และ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว อนุกรม $\sum ca_n$ ย่อมลู่เข้า

และ $\quad \sum ca_n = c\sum a_n$

ทฤษฎีบท 4.2.3 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า และอนุกรม $\sum b_n$ ลู่ออกแล้ว อนุกรม $\sum (a_n + b_n)$ ย่อมลู่ออก

ข้อสังเกต ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ ลู่ออกทั้งคู่แล้ว อนุกรม $\sum (a_n + b_n)$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

ทฤษฎีบท 4.2.4 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแล้ว $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

ข้อสังเกต

1) จาก ท.บ. 4.2.4 ได้หลักการทดสอบอนุกรมที่ลู่ออกว่า

ถ้า $\lim_{n \to \infty} a_n \neq 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ ย่อมลู่ออก

2) ถ้า $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ อาจจะลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

ทฤษฎีบท 4.2.5 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีค่าไม่เป็นลบแล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

บทนิยาม 4.2.2 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series)

อนุกรมเรขาคณิตคือ อนุกรม $\sum ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ เมื่อ $a \neq 0$ และ r คือ อัตราส่วนระหว่างพจน์ใด ๆ กับพจน์นำหน้าพจน์นั้น

ทฤษฎีบท 4.2.5 อนุกรมเรขาคณิต $\sum ar^{n-1}$ จะลู่เข้า ถ้า $|r| < 1$ โดยมีผลบวกเป็น $\frac{a}{1-r}$ และจะลู่ออกถ้า $|r| \geqslant 1$

บทนิยาม 4.2.3 อนุกรมฮาร์มอนิก (Harmonic series)

อนุกรมฮาร์มอนิก คือ อนุกรม $\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

ทฤษฎีบท 4.2.6 อนุกรมฮาร์มอนิก $\sum \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.2.7 สำหรับทุก ๆ จำนวนทศนิยมบวกย่อมสามารถเขียนแทนจำนวนจริงบวกได้ (คือลู่เข้าสู่จำนวนจริงบวก)

ทฤษฎีบท 4.2.8 สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก ย่อมมีจำนวนทศนิยมบวกที่เขียนแทนได้

4.3 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมที่พจน์ไม่เป็นลบ

4.3.1 การทดสอบแบบเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้อนุกรม $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรมที่ $a_n \geqslant 0$ และ $b_n \geqslant 0$ ซึ่ง $a_n \leqslant b_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

(1) ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย

(2) ถ้า $\sum a_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum b_n$ ย่อมลู่ออกด้วย

ทฤษฎีบท 4.3.2 ทฤษฎีบทของอนุกรมพี (P – seires)

สำหรับอนุกรม$\Sigma \frac{1}{n^p}$ เมื่อ p คือค่าคงที่ จะได้ว่า

(1) ถ้า $p > 1$ แล้ว อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ย่อมลู่เข้า

(2) ถ้า $p \leqslant 1$ แล้ว อนุกรม $\sum \frac{1}{n^p}$ ย่อมลู่ออก

4.3.2 การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต

ทฤษฎีบท 4.3.3 ให้ $\sum a_n$ และ $\sum b_n$ เป็นอนุกรม ซึ่ง $a_n \geqslant 0$ และ $b_n \geqslant 0$

(1) ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = t\,(t \neq 0)$ แล้ว

อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าหรือลู่ออกย่อมแล้วแต่อนุกรม $\sum b_n$ ว่าลู่เข้าหรือลู่ออก (กล่าวคือ ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้า ก็จะได้ว่า $\sum a_n$ ลู่เข้าด้วย แต่ถ้า $\sum b_n$ ลู่ออก ก็จะได้ว่า $\sum a_n$ ลู่ออกด้วย

(2) ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\sum b_n$ ลู่เข้าแล้ว $\sum a_n$ จะลู่เข้าด้วย

(3) ถ้า $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \infty$ แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\sum b_n$ ลู่ออกแล้ว $\sum a_n$ จะลู่ออกด้วย

4.4 อนุกรมสลับ

บทนิยาม 4.4.1 ถ้า $a_n > 0$ สำหรับทุก ๆ n แล้วจะเรียกอนุกรม

$\sum(-1)^n a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots$ ว่า อนุกรมสลับ

การทดสอบอนุกรมสลับ

ทฤษฎีบท 4.4.1 ถ้า $\sum(-1)^{n+1} a_n$ เป็นอนุกรมสลับ ซึ่ง

1) $a_{n+1} \leqslant a_n$ ทุก ๆ ค่าของ n

และ 2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

แล้วอนุกรมสลับนี้จะลู่เข้า และได้ว่า $|S-S_n| \leqslant a_{n+1}$ เมื่อ S เป็นผลบวกย่อยของอนุกรม และ S_n เป็นผลบวกย่อยที่ n ใด ๆ

หรือ $S_n \leqslant S \leqslant S_n + a_{n+1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนคู่

และ $S_n - a_{n+1} \leqslant S \leqslant S_n$ เมื่อ n เป็นจำนวนคี่

4.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์และแบบมีเงื่อนไข

บทนิยาม 4.5.1 อนุกรม $\sum a_n$ จะเรียกว่า ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้า

บทนิยาม 4.5.2 อนุกรม $\sum a_n$ จะเรียกว่าลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 4.5.1 อนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ย่อมลู่เข้า (นั่นคือ ถ้าอนุกรม $\sum |a_n|$ ลู่เข้าแล้ว อนุกรม $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย)

อนึ่ง สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ สามารถแยกออกเป็น 2 อนุกรม คือ อนุกรม $\sum p_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนบวก กับอนุกรม $\sum q_n$ ซึ่งเป็นอนุกรมที่มีแต่ละพจน์เป็นจำนวนลบ

ทฤษฎีบท 4.5.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว ทั้งอนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ย่อมลู่เข้าด้วย

ทฤษฎีบท 4.5.3 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไขแล้ว อนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ย่อมลู่ออกทั้งคู่

ทฤษฎีบท 4.5.4 ถ้าอนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ลู่เข้าทั้งคู่แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ ย่อมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

บทนิยาม 4.5.3 ให้ $\{n_i\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็มบวก โดยแต่ละ n_i จะเป็นจำนวนเต็มบวกได้เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ เป็นอนุกรมโดยที่ $b_i = a_{n_i}$ สำหรับทุก ๆ $i \varepsilon N$ แล้วจะเรียกอนุกรม $\sum b_n$ ว่าเป็นอนุกรมที่ได้จากการจัดให้อยู่ในรูปใหม่ของอนุกรม $\sum a_n$

ทฤษฎีบท 4.5.5 ให้ Σa_n เป็นอนุกรมที่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์แล้ว อนุกรมที่ได้จากการจัดอนุกรม Σa_n ใหม่ ก็ยังคงลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ไปยังค่าเดียวกัน

ทฤษฎีบท 4.5.6 สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ ใด ๆ ซึ่งมีอนุกรม $\sum p_n$ และ $\sum q_n$ ที่ลู่ออกทั้งคู่ และ $a_n \to 0$ แล้ว อนุกรม $\sum a_n$ จะสามารถจัดรูปใหม่ให้ลู่เข้าไปยังจำนวนจริงที่กำหนดให้ใด ๆ ก็ได้ หรือให้ลู่ออกก็ได้

4.6 การทดสอบการลู่เข้าและการลู่ออกของอนุกรมทั่ว ๆ ไป

4.6.1 การทดสอบโดยการถอดกรณฑ์

ทฤษฎีบท 4.6.1 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ มี $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ แล้ว จะได้ว่า

1) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L < 1$
2) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่ออก ถ้า $L > 1$
3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

4.6.2 การทดสอบโดยอัตราส่วน

ทฤษฎีบท 4.6.2 ถ้าอนุกรม $\sum a_n$ มี $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ แล้ว ได้ว่า

1) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L < 1$
2) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่ออก ถ้า $L > 1$
3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

4.6.3 การทดสอบของราเบ

ทฤษฎีบท 4.6.3 สำหรับอนุกรม $\sum a_n$ ใด ๆ จะได้ว่า

1) ถ้ามีจำนวนจริง $a > 1$ และจำนวนธรรมชาติ K ซึ่ง

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant 1 - \frac{a}{n} \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant K \quad \text{แล้ว}$$

อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

2) ถ้ามีจำนวนจริง $a \leqslant 1$ และจำนวนธรรมชาติ K ซึ่ง

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geqslant 1 - \frac{a}{n} \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geqslant K \quad \text{แล้ว}$$

อนุกรม $\sum a_n$ จะไม่ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

บทแทรก ให้ $\sum a_n$ เป็นอนุกรม โดย

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1 - \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right) = L \quad \text{แล้ว}$$

1) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่เข้าแบบสัมบูรณ์ ถ้า $L > 1$
2) อนุกรม $\sum a_n$ จะลู่ออกหรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข ถ้า $L < 1$
3) สรุปผลไม่ได้ ถ้า $L = 1$

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 4.3.1

1. ลู่ออก
2. ลู่เข้า
3. ลู่เข้า
4. ลู่เข้า
5. ลู่เข้า
6. ลู่เข้า
7. ลู่เข้า
8. ลู่เข้า
9. ลู่ออก
10. ลู่เข้า

คำตอบแบบฝึกหัด 4.4.1

1. ลู่เข้า
2. ลู่เข้า
3. ลู่เข้า
4. ลู่เข้า
5. ลู่ออก

คำตอบแบบฝึกหัด 4.5.1

1. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข
2. ลู่ออก
3. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
4. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
5. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข
6. ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
7. ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข
8. ลู่ออก

คำตอบแบบฝึกหัด 4.6.1

1.
   1.1) ลู่ออก
   1.2) ลู่ออก
   1.3) ลู่เข้า
   1.4) ลู่เข้า
2.
   2.1) ลู่ออก
   2.2) ลู่เข้า
   2.3) ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์
   2.4) ลู่เข้า
   2.5) ลู่เข้า