บทที่ 3
ลำดับของจำนวนจริง

หัวข้อเรื่อง

3.1 บทนิยามของลำดับ
3.2 ลิมิตของลำดับ
3.3 ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก
3.4 ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและลำดับทางเดียว
3.5 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่เข้า
3.6 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่ออก
3.7 ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ
3.8 ลำดับโคชีและทฤษฎีบทบอลซาโน-ไวแอร์สตราส

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 3 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. แสดงว่าลำดับที่กำหนดให้มีค่าลิมิตหรือไม่มีได้
2. แสดงว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับลู่เข้าหรือเป็นลำดับลู่ออกได้
3. บอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดหรือไม่
4. บอกได้ว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่
5. บอกคุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออกได้
6. แสดงได้ว่าลำดับที่กำหนดให้มีลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์หรือไม่ และถ้ามีสามารถหาได้ว่ามีค่าเป็นอย่างไร
7. แสดงความสัมพันธ์ระหว่างลำดับโคชี, ลำดับลู่เข้า และลำดับที่มีขอบเขตจำกัดได้
8. แสดงว่าลำดับที่กำหนดให้เป็นลำดับโคชีหรือไม่ได้

บทที่ 3
ลำดับของจำนวนจริง
(SEQUENCES OF REAL NUMBERS)

3.1 บทนิยามของลำดับ (DEFINITION OF SEQUENCE)

บทนิยาม 3.1.1 ลำดับของจำนวนจริง ก็คือฟังก์ชันชนิดหนึ่งซึ่งมีโดเมนเป็นสมาชิกในเซตของจำนวนธรรมชาติ $N = \{1, 2, 3, ...\}$ และมีพิสัยเป็นสมาชิกในเซต R (คือ มีพิสัยเป็นจำนวนจริง)

บทนิยาม 3.1.2 ถ้าฟังก์ชัน $f : N \to R$ มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3, ..., n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนที่นับได้ถ้วน จะเรียกลำดับนั้นว่า "ลำดับจำกัด" (finite sequence) แต่ถ้าลำดับมีโดเมนเป็นเซต N ทั้งหมด คือเซต $\{1, 2, 3, ...\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่า "ลำดับอนันต์" (infinite sequence)

นั่นคือ ถ้า f เป็นลำดับจำกัด พิสัยของ f ก็คือ $\{f(1), f(2), ..., f(n)\}$ แต่ถ้า f เป็นลำดับอนันต์แล้ว พิสัยของลำดับก็คือ $\{f(1), f(2), ..., f(n), ...\}$

ตัวอย่างที่ 3.1.1 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็น $\{1, 2, 3\}$ ซึ่ง $f(n) = 2n+1$ จะได้ว่า $f(1) = 3,\ f(2) = 5,\ f(3) = 7$

นั่นคือ f เป็นลำดับจำกัดที่มีพจน์ที่หนึ่งเป็น 3, พจน์ที่สองเป็น 5 และพจน์ที่สามเป็น 7

ตัวอย่างที่ 3.1.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, ...\}$ โดยกำหนดให้ว่า $f(n) = \frac{1}{n}$ จะเห็นว่า f เป็นลำดับอนันต์โดยมีพจน์ที่หนึ่งเป็น 1 พจน์ที่สองเป็น $\frac{1}{2}$ พจน์ที่สามเป็น $\frac{1}{3}, ...$ พจน์ที่ n เป็น $\frac{1}{n}, ...$

บทนิยาม 3.1.3 พจน์ทั่วไปของลำดับ หมายถึง พจน์ที่ n ของลำดับ ซึ่งเป็นพจน์ที่สามารถทำให้ทราบพจน์ต่าง ๆ ทั้งหมดของลำดับได้

ดังนั้น จากตัวอย่าง 3.1.2 จึงกล่าวได้ว่า พจน์ทั่วไปของลำดับอนันต์ก็คือ $f(n) = \frac{1}{n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

อนึ่ง คำว่าลำดับ ที่กล่าวถึงในหนังสือเล่มนี้ ต่อไปนั้นหมายถึง "ลำดับอนันต์" (infinite sequence) ของเลขจำนวนจริง ดังได้กล่าวแล้วว่า ลำดับก็คือ เซตของคู่อันดับ $\{(n, f(n)) : n \in N\}$ เนื่องจากโดเมนของลำดับใด ๆ ก็คือเซตของจำนวนธรรมชาติ (N) ทั้งนั้น ดังนั้นความแตกต่างของลำดับแต่ละลำดับจะขึ้นอยู่กับพจน์ต่าง ๆ ของลำดับ เพราะฉะนั้น ในการกล่าวถึงลำดับโดยทั่ว ๆ ไปจึงมักทำโดยการแสดงพจน์ต่าง ๆ ของลำดับเท่านั้น โดยมักจะเขียนในรูปทั่ว ๆ ไปเป็น {พจน์ที่ 1, พจน์ที่ 2, พจน์ที่ 3, ..., พจน์ที่ n, ...} หรือ {พจน์ที่ n} หรือ $\{f(n)\}$ หรือ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = f(n)$ ในที่นี้จะเขียนในรูป $\{a_n\}$ เพียงอย่างเดียว โดยให้ $\{a_n\}$ คือพจน์ที่ n ของลำดับใด ๆ

ตัวอย่าง 3.1.3 จงเขียน 3 พจน์แรกของลำดับ $\{n^2 - n\}$

พจน์ทั่วไปคือ $a_n = n^2 - n$

พจน์ที่หนึ่งคือ $a_1 = 1^2 - 1 = 0$

พจน์ที่สองคือ $a_2 = 2^2 - 2 = 2$

พจน์ที่สามคือ $a_3 = 3^2 - 3 = 6$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 จงหาพจน์ทั่วไปของลำดับ 1, 3, 7, 15, ...

จะได้ว่า พจน์ทั่วไปคือ $a_n = 2^n - 1$

บทนิยาม 3.1.4 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับแล้วจะได้ว่า

1) ผลบวกของลำดับคือ $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$

2) ผลต่างของลำดับคือ $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$

3) ผลคูณของลำดับคือ $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$

4) ผลหารของลำดับคือ $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ เมื่อ $b_n \neq 0$

ตัวอย่างที่ 3.1.4 ให้ $\{a_n\} = \{3, 6, 9, ..., 3n, ...\}$ และ $\{b_n\} = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots\ldots \frac{1}{2n}, \ldots\right\}$

ดังนั้น

1) $$\{a_n\} + \{b_n\} = \left\{3 + \frac{1}{2}, 6 + \frac{1}{4}, 9 + \frac{1}{6}, ..., 3n + \frac{1}{2n}, ...\right\}$$

$$= \left\{\frac{7}{2}, \frac{25}{4}, \frac{55}{6}, ..., \frac{6n^2+1}{2n}, ...\right\}$$

2) $$\{a_n\} - \{b_n\} = \left\{3 - \frac{1}{2}, 6 - \frac{1}{4}, 9 - \frac{1}{6}, ..., 3n - \frac{1}{2n}, ...,\right\}$$

$$= \left\{\frac{5}{2}, \frac{23}{4}, \frac{53}{6}, ..., \frac{6n^2-1}{2n}, ...\right\}$$

3) $\{a_n\}\{b_n\} \quad = \quad \{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \ldots\ldots, \frac{3}{2}, \ldots\ldots\}$

4) $$\frac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \{\frac{3}{\frac{1}{2}}, \frac{6}{\frac{1}{4}}, \frac{9}{\frac{1}{6}}, \ldots\ldots, \frac{3n}{\frac{1}{2n}}, \ldots\ldots\}$$

$$= \{6, 24, 54, \ldots\ldots, 6n^2, \ldots\ldots\}$$

บทนิยาม 3.1.5 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ และ $\{r_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนธรรมชาติ (นั่นคือ $r_n \varepsilon N$ ทุก ๆ n) ซึ่ง $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots\ldots < r_n < \ldots\ldots$ แล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_{r_n}\}$ ว่าเป็นลำดับย่อย (subsequence) ของลำดับ $\{a_n\}$

หรืออาจกล่าวได้อีกแบบหนึ่งว่า

บทนิยาม 3.1.6 ถ้า $A = \{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ และ $P = \{n_i\}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$ เป็นลำดับของจำนวนธรรมชาติที่มีค่าเพิ่มขึ้นเสมอแล้ว จะเรียกลำดับที่ได้จากฟังก์ชันประกอบ $A \circ P$ ว่าเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$

โดยสำหรับ $\quad i = 1, 2, 3, \ldots\ldots$

เรามี $\quad P(i) = n_i$

$$\therefore \; A \circ P(i) = A\,[P(i)]$$

$$= A(n_i)$$

ดังนั้น $\quad A \circ P = \{a_{n_i}\}$ เมื่อ $i \in N$

ตัวอย่าง 3.1.5 ให้ $\{a_n\} = \{(-1)^{n-1}\} = \{1, -1, 1, \ldots\ldots\}$

ให้ $\quad \{n_i\} = \{2i-1\} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\ldots\}$

ในที่นี้ $\quad n_1 = 1, \; n_2 = 3, \; n_3 = 5, \; \ldots\ldots$

และ $\quad a_1 = 1, \; a_2 = -1, \; a_3 = 1, \; \ldots\ldots$

ดังนั้น ลำดับย่อย $\quad A \circ P = \{a_1, a_3, a_5, \ldots\}$

$$= \{1, 1, 1, \ldots\ldots\}$$

นั่นคือ ลำดับ $\{1, 1, 1, \ldots\ldots\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 3.1.6 จากตัวอย่าง 3.1.5 ถ้ากำหนด $\{n_i\} = \{2i\}$ ก็จะได้ว่า ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ก็คือลำดับ $\{-1, -1, -1, \ldots\ldots\}$

ตัวอย่าง 3.1.7 จากตัวอย่าง 3.1.5 ถ้ากำหนดลำดับ $\{n_i\} = \{i\}$ ก็จะได้ว่า ลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ก็คือลำดับ $\{1, -1, 1, -1, \ldots\ldots\}$ นั่นเอง

นั่นคือ ลำดับใด ๆ ย่อมเป็นลำดับย่อยของตัวของมันเองด้วย

จากตัวอย่าง 3.1.5 ถึง 3.1.7 อาจกล่าวได้ว่า จากลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ใด ๆ อาจหาลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ได้มากมาย โดยลำดับย่อยจะอยู่ในรูปใดนั้นขึ้นอยู่กับลำดับ $\{n_i\}$ ที่เป็นตัวกำหนดนั่นเอง

ตัวอย่าง 3.1.8 จากลำดับ $\{a_n\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}, \ldots\ldots\}$ ถ้าลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ คือลำดับ $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \ldots\ldots, \frac{1}{2n}, \ldots\ldots\}$ แล้วจะได้ว่า ลำดับ $\{n_i\}$ ที่ทำให้ได้ลำดับย่อยนี้ก็คือ $\{2i\}$

แบบฝึกหัด 3.1.1

1. จงเขียนพจน์ทั่วไปของลำดับต่อไปนี้

    1.1) $-1, 1, -1, 1, \ldots..$

    1.2) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots..$

    1.3) $\sqrt{2}, 2, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \ldots..$

    1.4) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots..$

    1.5) 1, 3, 9, 27,

    1.6) 1, 0, 1, 0, 1, 0,

2. จงหา 6 พจน์แรกของลำดับต่อไปนี้

    2.1) $\{a_n\} = \{4(n-1)+3\}$

    2.2) $\{a_n\} = \{\frac{1}{2n+1}\}$

    2.3) $\{a_n\} = \{\frac{5n+1}{n^2}\}$

    2.4) $\{a_n\} = \{\frac{1-(-1)^n}{n^4}\}$

    2.5) $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\}$

3. จงหาผลบวก, ผลต่าง, ผลคูณ และผลหาร ระหว่าง

    3.1) ลำดับในข้อ 1.1 กับ 1.4

    3.2) ลำดับในข้อ 1.5 กับ 1.6

    3.3) ลำดับในข้อ 2.1 กับ 2.2

    3.4) ลำดับในข้อ 2.3 กับ 2.4

4. จากลำดับในข้อ 2 แต่ละข้อ จงหาลำดับย่อยที่ถูกกำหนดโดยลำดับของจำนวนธรรมชาติต่อไปนี้

    4.1) $\{n_i\} = \{3i\}$

    4.2) $\{n_i\} = \{2^i\}$

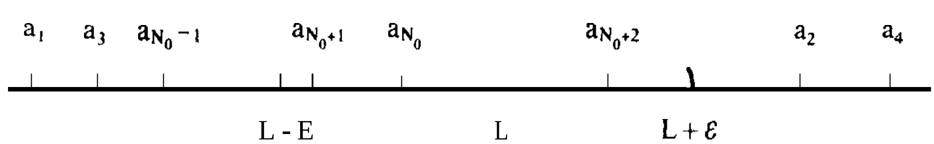
    4.3) $\{n_i\} = \{2i-1\}$

3.2 ลิมิตของลำดับ (LIMIT OF A SEQUENCE)

สำหรับลำดับอนันต์ซึ่งเป็นลำดับที่มีจำนวนพจน์ไม่จำกัดหรือเป็นลำดับที่ไม่มีพจน์สุดท้ายนั่นเอง ถ้าเราพิจารณาพจน์ถัดออกไปไกล ๆ โดยที่ไม่มีที่สิ้นสุดของลำดับดังกล่าวแล้วได้ว่า พจน์นั้น ๆ มีค่าเข้าสู่ (หรือมีค่าใกล้เคียง) จำนวนคงที่จำนวนหนึ่งแล้วจะกล่าวว่าจำนวนคงที่จำนวนนั้นก็คือ ลิมิตของลำดับนั้น ๆ นั่นเอง โดยจะเรียกลำดับชนิดนี้ว่าเป็นลำดับที่มีลิมิต แต่ถ้าลำดับใดเป็นลำดับที่พจน์ต่าง ๆ มีจำกัด หรือพจน์ต่าง ๆ มีค่าเพิ่มขึ้นบ้าง ลดลงบ้าง อย่างหาส่ำมิได้ ลักษณะอย่างนี้จะเรียกว่า ลำดับนั้นเป็นลำดับที่ไม่มีลิมิต ในตอนต่อไปนี้จะกล่าวถึงนิยามลิมิตของลำดับทางคณิตศาสตร์

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับแล้ว จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L (ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์) ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N_0 (อาจขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ หรือ $a_n \to L$ **ขณะที่** $n \to \infty$

อนึ่ง ค่า L ในบทนิยามนี้เป็นจำนวนจริง ดังนั้น ความหมายของ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ นั้น จึงหมายความว่า สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้แล้วอสมการ $L-\varepsilon < a_n < L+\varepsilon$ จะต้องเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ยกเว้นเมื่อ $n = 1, 2, \ldots\ldots, N_0 - 1$ หรือหมายความว่าเราจะสามารถเลือกค่า n ซึ่งทำให้ a_n มีค่าใกล้เคียงกับ L เพียงใดก็ได้ หรือ $|a_n - L|$ มีค่าน้อยมากนั่นเอง ค่าของ N_0 โดยทั่ว ๆ ไปอาจขึ้นอยู่กับค่าของ ε ดังนั้นสำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ที่กำหนดให้ใด ๆ ถ้าจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ จึงต้องเริ่มต้นจาก $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้แล้วหาค่าของ n ซึ่งทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ เป็นจริงเมื่อ $n \geqslant N_0$ ดังรูป 3.2.1 จะเห็นว่าทุก ๆ ค่าของ a_n ยกเว้นเมื่อ $n = 1, 2, \ldots\ldots, N_0 - 1$ จะต้องอยู่ภายในวงเล็บทั้งหมด



รูป 3.2.1

ตัวอย่าง 3.2.1 จงหาค่าของ N_0 ซึ่งทำให้ $|a_n - 2| < 0.0001$ เมื่อ $a_n = 2 - \frac{1}{n}$ สำหรับทุกค่าของ $n \geqslant N_0$

วิธีทำ ในที่นี้สิ่งที่ต้องการคือค่า N_0 ซึ่งจะทำให้ผลต่างระหว่าง 2 กับพจน์แต่ละพจน์หลังจากพจน์ที่ N_0 ไปแล้วมีค่าน้อยกว่า 0.0001 นั่นเอง

$$\because \quad |a_n - 2| = |2 - \frac{1}{n} - 2| = |-\frac{1}{n}| = \frac{1}{n}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{n} < 0.0001 \qquad \text{หรือ} \qquad n > \frac{1}{0.0001}$$

นั่นคือ $\quad n > 10{,}000$

$$\therefore \quad N_0 = 10{,}000 \qquad \text{หรือ} \qquad N_0 = 10^4$$

โดยจะเห็นว่าผลต่างระหว่าง 2 กับพจน์แต่ละพจน์หลังจากพจน์ที่ 10,000 เป็นต้นไปมีค่าน้อยกว่า 0.0001 หรือพจน์ที่อยู่หลังพจน์ที่ 10,000 จะมีค่าอยู่ระหว่าง $2-0.0001$ กับ $2+0.0001$ หรืออยู่ระหว่าง 1.9999 กับ 2.0001 นั่นเอง

จากตัวอย่าง 3.2.1 นี้ จำนวน 0.0001 ก็คือจำนวนจริงบวก ε ซึ่งเป็นตัวที่ทำหน้าที่กำหนดระดับความใกล้เคียงของ a_n กับ 2 นั่นเอง ดังนั้นถ้าต้องการให้ระดับความใกล้เคียงของ a_n กับ 2 มีค่ามากขึ้นหรือสูงขึ้น ก็กำหนดจำนวนจริงบวก ε ให้มีค่าน้อยลง

ตัวอย่าง 3.2.2 ให้ $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

วิธีทำ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ จะต้องหาจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่งทำให้

$$|\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \qquad (n \geqslant N_0)$$

นั่นคือ $\quad \frac{1}{n} < \varepsilon \qquad (n \geqslant N_0)$

ดังนั้น ถ้าเลือก N_0 ที่ทำให้ $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ แล้วจะทำให้ $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ด้วย เมื่อ $n \geqslant N_0$

เนื่องจาก $\quad \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N_0} \qquad$ ถ้า $\; n \geqslant N_0$

ดังนั้น $\quad \frac{1}{N_0} < \varepsilon \qquad$ ก็ต่อเมื่อ $\; N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$$\therefore \quad |\frac{1}{n} - 0| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{นั่นแสดงว่า} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ข้อสังเกต ค่าลิมิต 0 นี้ไม่เท่ากับพจน์ใด ๆ ของลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$ เลย

ตัวอย่าง 3.2.3 ให้ $\{a_n\} = \{\frac{2-n}{1+2n}\}$

จงแสดงว่า $\qquad \lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{2}$

วิธีทำ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะหาจำนวนเต็มบวก N_0

ซึ่งทำให้ $|a_n - (-\frac{1}{2})| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$

$$|\frac{2-n}{1+2n} + \frac{1}{2}| < \varepsilon \qquad \text{ถ้า} \quad n \geqslant N_0$$

$$\therefore \quad |\frac{4-2n+1+2n}{2(1+2n)}| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad |\frac{5}{2(1+2n)}| < \varepsilon$$

แต่ $$\frac{5}{2(1+2n)}| = \frac{5}{2}|\frac{1}{1+2n}|$$

$$\therefore \quad \frac{5}{2}|\frac{1}{2n+1}| < \varepsilon$$

$$\therefore \quad |\frac{1}{2n+1}| < \frac{2\varepsilon}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{|2n+1|} < \frac{2\varepsilon}{5}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2n+1} < \frac{2\varepsilon}{5}$$

$$\therefore \quad 2n+1 > \frac{5}{2\varepsilon}$$

$$\therefore \quad 2n > \frac{5}{2\varepsilon} - 1$$

$$n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

ดังนั้นเ ะ $$N_0 = \frac{5}{4\varepsilon}$$

$$\therefore \quad |a_n - (-\frac{1}{2})| < \varepsilon \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant N_0$$

นั่นคือ $$\lim_{n\to\infty} a, = -\frac{1}{2}$$

ตัวอย่าง 3.2.4 ให้ลำดับ $\{a_n\} = \{1, 1, 1, ...\}$

จงแสดงว่า $$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$

วิธีทำ ในที่นี้ จะสังเกตเห็นว่า $|a_n - L| = |1-1| = 0$

ดังนั้นสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ $|a_n - L| < \varepsilon$ $(n \geqslant 1)$ เสมอ

ดังนั้นในกรณีนี้ สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สามารถกำหนดให้ $N_0 = 1$ ก็จะได้ว่า $|a_n - L| < \varepsilon$ สำหรับ $n \geqslant 1$

นั่นแสดงว่า $\lim_{n \to \infty} 1 = 1$

ข้อสังเกต ตัวอย่างนี้เป็นกรณีพิเศษที่หายากอันหนึ่งที่ N_0 ไม่ขึ้นอยู่กับ ε

ตัวอย่าง 3.2.5 จงแสดงว่าลำดับ $\{a_n\} = \{n\}$ ไม่มีลิมิต

วิธีทำ สมมติว่าลำดับ $\{n\}$ มีลิมิตเป็น L สำหรับบาง L ที่เป็นจำนวนจริงแล้ว สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$
ถ้าเลือก $\varepsilon = 1$ ก็จะได้ว่า $|a_n - L| < 1$ หรือ $L - 1 < a_n < L + 1$ สำหรับ $n \geqslant N_0$
หรือ $L - 1 < n < L + 1$ สำหรับ $n \geqslant N_0$

นั่นแสดงว่าทุก ๆ ค่าของ n ที่มากกว่าหรือเท่ากับ N_0 จะอยู่ระหว่าง $L - 1$ กับ $L + 1$ เสมอ ซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับบาง $L \in R$

นั่นแสดงว่าลำดับ $\{a_n\} = \{n\}$ ไม่มีลิมิต

ตัวอย่าง 3.2.6 จงแสดงว่าลำดับ $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ ไม่มีลิมิต

วิธีทำ สมมติว่ามีบาง $L \in R$ ที่ทำให้ $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ แล้วสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะต้องมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$ ถ้าเลือก $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ก็จะได้ว่า

$$|(-1)^n - L| < \frac{1}{2} \qquad (n \geqslant N_0) \qquad \text{..........(1)}$$

จาก (1) สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคู่ จะได้ว่า $|1 - L| < \frac{1}{2}$ ....(2)

จาก (1) สำหรับ n ที่เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่า $|-1 - L| < \frac{1}{2}$ หรือ $|1 + L| < \frac{1}{2}$ ......(3)

จาก (2) และ (3) เกิดข้อขัดแย้งซึ่งเป็นไปไม่ได้สำหรับบาง $L \in R$

นั่นแสดงว่าลำดับ $\{(-1)^n\}$ ไม่มีลิมิต

แบบฝึกหัด 3.2.1

1. ให้ $\{a_n\} = \{\frac{3n-1}{4n+5}\}$

   จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{4}$

2. ให้ $\{a_n\} = \{\frac{3+(10)^n}{8+2(10)^n}\}$

   จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$

3. ให้ $\{a_n\} = \{\frac{2n}{n+4\sqrt{n}}\}$

   จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

4. ให้ $\{a_n\} = \{\frac{2n}{n+3}\}$

   จงแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$

5. จงแสดงว่าลิมิตของลำดับ $\{\frac{10^5}{n}\}$ คือ 0

6. จงหาจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $\left|\frac{2n}{n+3}-2\right| < \frac{1}{5}$ $(n \geqslant N_0)$

7. จงแสดงว่าลำดับ $\{\frac{n^2}{n+1}\}$ ไม่มีลิมิต

3.3 ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

(CONVERGENT SEQUENCES AND DIVERGENT SEQUENCES)

บทนิยาม 3.3.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้ว จะเรียกว่าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้า (Converge) สู่ L และเรียก $\{a_n\}$ นี้ว่าเป็นลำดับลู่เข้า (Convergent sequence)

นั่นคือ $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ สามารถหาค่าได้ (exist) นั่นเอง

บทนิยาม 3.3.2 ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นลำดับลู่ออก (Divergent sequence) ก็ต่อเมื่อลำดับนั้นไม่เป็นลำดับลู่เข้า

นั่นคือ $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับลู่ออกก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n$ หาค่าไม่ได้หรือไม่มีค่า (does not exist) นั่นเอง

ตัวอย่าง 3.3.1 จงแสดงว่า $\{a_n\} = \{\frac{1}{n}\}$ ลู่เข้าสู่ 0

จากตัวอย่าง 3.2.1 ได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าและลู่เข้าสู่ 0

ตัวอย่าง 3.3.2 จงแสดงว่า $\{a_n\} = \{1\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

จากตัวอย่าง 3.2.2 เราได้ว่า $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$

นั่นก็คือ ลำดับ $\{a_n\} = \{1\}$ มีลิมิตเป็น 1

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\} = \{1\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.3.3 จงแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\} = \{n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

จากตัวอย่าง 3.2.3 ได้ว่า ลำดับ $\{n\}$ ไม่มีลิมิต

ดังนั้น ลำดับ $\{n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

อนึ่ง สำหรับลำดับลู่ออกนั้น สามารถแยกกล่าวเป็นแบบต่าง ๆ ได้ดังต่อไปนี้

บทนิยาม 3.3.3 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับลู่ออกทางบวก (divergent positively) หรือลู่ออกไปยัง $+\infty$ ถ้ากำหนด $M > 0$ มาให้แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $a_n \geqslant M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N_0$

นั่นคือ ขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้น a_n ก็จะมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ไปโดยไม่มีขอบเขตจำกัด

เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = +\infty$

หรือเขียนเป็น $a_n \to \infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

ตัวอย่าง 3.3.4 ลำดับ $\{n\}$ เป็นลำดับลู่ออกทางบวกหรือลู่ออกไปยัง $+\infty$ เพราะว่า สำหรับ $M > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ จะสามารถเลือกจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $a_n \geqslant M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N_0$ ได้

นั่นแสดงว่า ลำดับ $\{n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$

บทนิยาม 3.3.4 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็น**ลำดับลู่ออกทางลบ** (divergent negatively) หรือลู่ออกไปยัง $-\infty$ ถ้ากำหนด $M > 0$ มาให้แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้ $a_n < -M$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \geqslant N_0$

นั่นคือ ขณะที่ n มีค่าเพิ่มขึ้น a_n จะมีค่าลดลงโดยไม่มีขอบเขตจำกัด

เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ หรือเขียนเป็น $a_n \to -\infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

ตัวอย่าง 3.3.5 ลำดับ $\{\ln\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลู่ออกทางลบหรือลู่ออกไปยัง $-\infty$ เพราะว่า สำหรับ $M > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ สามารถเลือกจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $\ln\frac{1}{n} < -M$ ซึ่ง $n \geqslant M_0$ ได้

จาก $\ln\frac{1}{n} < -M$ จะได้ว่า $\ln n > M$

นั่นคือ $n > e^M \quad (n \geqslant N_0)$

ดังนั้น ถ้าเลือกให้ $N_0 \geqslant e^M$ ก็จะได้ว่า $n > e^M \quad (n \geqslant N_0)$

นั่นคือ $\ln\frac{1}{n} < -M$ นั่นเอง

นั่นแสดงว่า ลำดับ $\{\ln\frac{1}{n}\}$ ลู่ออกไปยัง $-\infty$

บทนิยาม 3.3.5 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกโดยที่ไม่เป็นลำดับลู่ออกทางบวกหรือลำดับลู่ออกทางลบแล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่าเป็น**ลำดับแกว่งกวัด** (Oscillation sequence)

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว ลำดับย่อยใด ๆ ของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่เข้าสู่ค่า L เดียวกัน

พิสูจน์ จากลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L จะได้ว่า

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$

นั่นแสดงว่า a_n จะอยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ เมื่อ $n \geqslant N_0$ ให้ $\{a_n'\}$ เป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$

ซึ่ง $\{a_n'\} = \{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}, \ldots\ldots, a_{r_n}, \ldots\ldots\}$

เนื่องจาก $r_n \geqslant n$ ดังนั้น $r_n \geqslant N_0$ ทุก ๆ $n \geqslant N_0$

นั่นจึงได้ว่า a_{r_n} อยู่ในช่วง $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ ทุก $n \geqslant N_0$ ด้วย

นั่นแสดงว่า ลำดับย่อย $\{a_n'\}$ ลู่เข้าสู่ค่า L

จาก ท.บ. 3.3.1 กล่าวได้ว่า ถ้าลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ลู่เข้าสู่ค่าที่ต่างกันแล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ นั้นย่อมเป็นลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.3.2

1) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางบวกแล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่ออกทางบวกด้วย

2) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางลบแล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่ออกทางลบด้วย

พิสูจน์

1) ให้ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางบวก นั่นแสดงว่า ถ้ากำหนด $M > 0$ มาให้แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่งทำให้ $a_n \geqslant M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N_0$

ให้ $\{a_{r_n}\}$ เป็นลำดับย่อยใด ๆ ของลำดับ $\{a_n\}$

เนื่องจาก $r_n \geqslant n$ และ $n \geqslant N_0$ ดังนั้น $r_n \geqslant N_0$

จึงได้ว่า $a_{r_n} \geqslant M$ สำหรับทุก ๆ $r_n \geqslant N_0$ ด้วย

จึงกล่าวได้ว่า ลำดับย่อย $\{a_{r_n}\}$ ของลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางบวกด้วย

2) พิสูจน์ในทำนองเดียวกับ 1) (ให้เป็นแบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง 3.3.6 จงแสดงว่าลำดับ $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

วิธีทำ พิจารณาลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ สองลำดับคือ ลำดับ $\{1, 1, 1, ...\}$ กับลำดับ $\{-1, -1, -1, ...\}$ จะพบว่ามันลู่เข้าสู่ 1 และ -1 ตามลำดับ

นั่นแสดงว่า ลำดับย่อยของลำดับ $\{(-1)^n\}$ ลู่เข้าสู่ค่าลิมิตที่ต่างกัน จึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 3.3.7 ลำดับ $\{(-1)^n n\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด เพราะว่าลำดับ $\{(-1)^n n\} = \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, ...\}$ เป็นลำดับลู่ออก โดยที่ไม่ลู่ออกไปยัง $+\infty$ และไม่ลู่ออกไปยัง $-\infty$ ทั้งนี้เนื่องจากลำดับย่อยของ $\{(-1)^n n\}$ คือลำดับ $\{-1, -3, -5, ...\}$ ลู่ออกไปยัง $-\infty$ แต่ลำดับย่อยอีกลำดับหนึ่งคือ ลำดับ $\{2, 4, 6, ...\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ ดังนั้น โดยผลจากทฤษฎีบท 3.3.1 จึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $\{(-1)^n n\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัด

ข้อสังเกต

1) คำว่า "แกว่งกวัด" (Oscillate) ในที่นี้ ไม่ได้หมายความว่าค่าของพจน์ต่าง ๆ ของลำดับมีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ เท่านั้น เช่น ลำดับ $\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\}$ ซึ่งคือ ลำดับ $\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...\}$ ก็เป็นลำดับที่มีค่าขึ้น ๆ ลง ๆ แต่ลำดับนี้ลู่เข้าสู่ 0 จึงไม่ใช่ลำดับแกว่งกวัดดังกล่าว

2) ลำดับย่อยของลำดับลู่เข้าย่อมเป็นลำดับลู่เข้า แต่ลำดับย่อยของลำดับลู่ออกอาจจะเป็นลำดับลู่ออกหรือลู่เข้าก็ได้

แบบฝึกหัด 3.3.1

1. จากแบบฝึกหัด 3.2.1 จงบอกว่า ลำดับเหล่านั้นเข้าสู่ค่าใดบ้าง
2. จงแสดงว่า ลำดับต่อไปนี้ลำดับใดลู่เข้า, ลำดับใดลู่ออกไปยัง $+\infty$, ลำดับใดลู่ออกไปยัง $-\infty$, ลำดับใดเป็นลำดับแกว่งกวัด

   2.1) $\{3^{2n}\}$

   2.2) $\{1-2n\}$

   2.3) $\{(-2)^n\}$

   2.4) $\{1, 2, 1, 3, 1, 4, ...\}$

   2.5) $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, ...\}$

   2.6) $\{1, 0, 1, 0, ...\}$

   2.7) $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+n}\right\}$

3.4 ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและลำดับทางเดียว
(BOUNDED SEQUENCES AND MONOTONIC SEQUENCES)

บทนิยาม 3.4.1 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตบนก็ต่อเมื่อพิสัยของลำดับมีขอบเขตบน นั่นคือ มีจำนวนจริง M ที่ทำให้ $a_n \leqslant M$ ทุก ๆ ค่าของ n และเรียก M ว่าเป็นค่าขอบเขตบน (ค่าหนึ่ง) ของ $\{a_n\}$ ดังนั้น ถ้า $x \; \varepsilon \; R$ ซึ่ง $x \geqslant M$ แล้ว x เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ และถ้า M' เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ โดยมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ ค่าขอบเขตบน M ของ $\{a_n\}$ ได้ว่า $M' \leqslant M$ แล้ว จะเรียก M' ว่า เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound) ของลำดับ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ l.u.b.$\{a_n\}$

บทนิยาม 3.4.2 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตล่าง ก็ต่อเมื่อพิสัยของลำดับมีขอบเขตล่าง

นั่นคือ มีจำนวนจริง m ที่ทำให้ $m \leqslant a_n$ ทุก ๆ ค่าของ n และเรียกค่า m ว่าเป็นค่าขอบเขตล่าง (ค่าหนึ่ง) ของ $\{a_n\}$

ดังนั้น ถ้า $x \; \varepsilon \; R$ ซึ่ง $x \leqslant m$ แล้ว x เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$

และถ้า m' เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ โดยที่ทุก ๆ ค่าขอบเขตล่าง m ของ $\{a_n\}$ ได้ว่า $m \leqslant m'$ แล้ว จะเรียก m' ว่า เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound) ของ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ g.l.b.$\{a_n\}$

บทนิยาม 3.4.3 ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดก็ต่อเมื่อลำดับ $\{a_n\}$ มีทั้งค่าขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ตัวอย่าง 3.4.1 กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\} = \{\frac{n}{n+1}\}$

จะเห็นว่า $\{\frac{n}{n+1}\} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ จึงได้ว่า

เซตของขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ คือ $\{x \; \varepsilon \; R : x \leqslant \frac{1}{2}\}$

ขอบเขตล่างค่ามากสุด (g.l.b.) ของ $\{a_n\}$ คือ $\frac{1}{2}$

เซตของขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ คือ $\{x \; \varepsilon \; R : x \geqslant 1\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด (l.u.b.) ของ $\{a_n\}$ คือ 1

ดังนั้น $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ตัวอย่าง 3.4.2 กำหนดให้ลำดับ $\{a_n\} = \{n\}$

จะเห็นว่า $\{n\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ จึงได้ว่า

เซตของขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ คือ $\{x \; \varepsilon \; R : x \leqslant 1\}$

ขอบเขตล่างค่ามากสุด (g.l.b.) ของ $\{a_n\}$ คือ 1

แต่ $\{n\}$ ไม่มีค่าขอบเขตบนและขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ดังนั้น $\{n\}$ ไม่เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ข้อสังเกต ลำดับแกว่งกวัดอาจจะมีขอบเขตจำกัดหรือไม่ก็ได้ เช่น

1) ลำดับ $\{-1, 2, -3, 4, ...\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัดที่ไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

2) ลำดับ $\{-1, 1, -1, 1, ...\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัดที่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

3) ลำดับ $\{1, 2, 1, 3, 1, 4, ...\}$ เป็นลำดับแกว่งกวัดที่มีขอบเขตล่าง แต่ไม่มีขอบเขตบน

บทนิยาม 3.4.4 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่า ลำดับไม่ลด (nondecreasing or monotonic increasing) ถ้า $a_n \leqslant a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n และถ้า $a_n < a_{n+1}$ เสมอ แล้วจะเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับเพิ่มโดยแท้ (strictly increasing)

บทนิยาม 3.4.5 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่า ลำดับไม่เพิ่ม (nonincreasing or monotonic decreasing) ถ้า $a_n \geqslant a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n และถ้า $a_n \geqslant a_{n+1}$ เสมอ แล้วจะเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลดโดยแท้ (strictly decreasing)

บทนิยาม 3.4.6 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดหรือเป็นลำดับไม่เพิ่มแล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า ลำดับทางเดียว (Monotonic sequence)

ตัวอย่าง 3.4.3 ลำดับ $a_n = \{\frac{n}{n+1}\}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้

$$\because \quad a_n = \frac{n}{n+1} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

และ
$$
\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} \\
&= \frac{(n+1)^2 - n(n+2)}{(n+2)(n+1)} \\
&= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+2)\ (n+1)} \\
&= \frac{1}{(n+2)\ (n+1)} > 0 \qquad \text{สำหรับทุก ๆ ค่าของ } n \varepsilon N
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad a_{n+1} > a_n \quad \text{หรือ} \quad a_n < a_{n+1}$$

นั่นคือ $\{\frac{n}{n+1}\}$ เป็นลำดับเพิ่มโดยแท้ หรือกล่าวว่าเป็นลำดับไม่ลดก็ได้

จึงได้ว่า ลำดับ $\{\frac{n}{n+1}\}$ เป็นลำดับทางเดียวด้วย

ตัวอย่าง 3.4.4 ลำดับ $\{1-(\frac{n-1}{10})\}$ เป็นลำดับลดโดยแท้

$$\because \quad a_n = 1-(\frac{n-1}{10}), \quad a_{n+1} = 1-\frac{n}{10}$$

$$a_{n+1} - a_n = (1-\frac{n}{10}) - (1-\frac{(n-1)}{10})$$

$$= \frac{n-1-n}{10} = -\frac{1}{10} < 0$$

$$\therefore \quad a_{n+1} - a_n < 0$$

นั่นคือ $a_{n+1} < a_n$ หรือ $a_n > a_{n+1}$

จึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $1-\frac{(n-1)}{10}$ เป็นลำดับทางเดียวด้วย

ข้อสังเกต

1) ลำดับไม่ลดย่อมมีขอบเขตล่างเสมอ และลำดับไม่เพิ่มก็ย่อมมีขอบเขตบนเสมอด้วย

2) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ทุก ๆ พจน์มีค่าเป็นจำนวนบวกเสมอแล้ว อาจกล่าวได้ว่า ลำดับนั้นจะเป็นลำดับไม่ลดก็ต่อเมื่อ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$ และจะเป็นลำดับไม่เพิ่มก็ต่อเมื่อ $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant 1$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \in N$

ทฤษฎีบท 3.4.1 ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบนย่อมเป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบน ดังนั้น $\{a_n\}$ ย่อมมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ตามสัจพจน์แห่งความสมบูรณ์)

ให้ $\text{l.u.b.}\{a_n\} = M$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง

$$M-\varepsilon < a_n \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n \geqslant N_0$$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด จึงอาจกล่าวได้ว่า

$$M-\varepsilon < a_n \qquad (n \geqslant N_0)$$

แต่ $a_n \leqslant M$ ทุก ๆ ค่าของ $n \in N$

$$\therefore \quad M-\varepsilon < a_n \leqslant M < M+\varepsilon, \quad n \geqslant N_0$$

$$\therefore \quad M-\varepsilon < a_n < M+\varepsilon, \quad n \geqslant N_0$$

นั่นคือ $|a_n - M| < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} a_n = M$

จึงได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

ทฤษฎีบท 3.4.2 ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่างย่อมเป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

จาก ท.บ. 3.4.1 กับ 3.4.2 อาจกล่าวสรุปได้ว่า

ทฤษฎีบท 3.4.3 ลำดับทางเดียวใด ๆ จะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

โดยถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด (ไม่เพิ่ม) ที่กำหนดให้ซึ่งมีขอบเขตบน (ขอบเขตล่าง) แล้ว $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับลู่เข้า โดยลู่เข้าสู่ l.u.b. ของ $\{a_n\}$ (g.l.b. ของ $\{a_n\}$) **นั้น ๆ ตาม**แต่กรณี

ทฤษฎีบท 3.4.4 ลำดับไม่ลดซึ่งไม่มีขอบเขตบนย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$

พิสูจน์ สมมุติว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดซึ่งไม่มีขอบเขตบน

จะต้องแสดงว่ามีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่งสำหรับ $M > 0$ แล้วทำให้ $a_n > M$ เมื่อ $n \geqslant N_0$

$\because$ $\{a_n\}$ ไม่มีขอบเขตบนแล้ว M ก็ย่อมไม่เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $a_{N_0} > M$

$\because$ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดแล้ว

$$a_n > M \qquad (n \geqslant N_0)$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

นั่นแสดงว่า $\{a_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$

ทฤษฎีบท 3.4.5 ลำดับไม่เพิ่มซึ่งไม่มีขอบเขตล่างย่อมลู่ออกไปยัง $-\infty$

พิสูจน์ ในทำนองเดียวกันกับ ท.บ. 3.4.5 **จึงให้ทำเป็นแบบฝึกหัด**

ตัวอย่าง 3.4.9 จงแสดงว่า ลำดับ $\{\frac{n}{n!}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

จาก
$$\{\frac{n}{n!}\} = \{\frac{1}{1!}, \frac{2}{2!}, \frac{3}{3!}, \frac{4}{4!}, \frac{5}{5!}, \ldots\}$$
$$= \{1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{20}, \frac{1}{120}, \ldots\}$$

จะพบว่า $\{\frac{n}{n!}\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

หรืออาจพิจารณาจาก

$$a_n = \frac{n}{n!} \quad \text{และ} \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)!}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{(n+1)!} - \frac{n}{n!}$$

$$\frac{n!(n+1) \quad n(n+1)!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)! \quad n(n+1)!}{n!(n+1)!}$$

$$= \frac{(1-n)}{n!} \leqslant 0 \quad \text{เมื่อ} \quad n \;\varepsilon\; N$$

นั่นคือ $a_1 = a_2 > a_3 > a_4 > \ldots..$

$\therefore$ ลำดับ $\{\frac{n}{n!}\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มโดยมีขอบเขตล่าง

คือ $\{x \;\varepsilon\; R : x \leqslant 0\}$ (และมี $\{x \;\varepsilon\; R : x \geqslant 1\}$ เป็นขอบเขตบนด้วย)

จึงกล่าวได้ว่า $\{\frac{n}{n!}\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและเป็นลำดับทางเดียวด้วย

ดังนั้นลำดับ $\{\frac{n}{n!}\}$ จึงเป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.4.6 สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ย่อมมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับทางเดียว

พิสูจน์ ให้ T_1 เป็นลำดับ $\{a_1\}$ และ T_2 เป็นลำดับ $\{a_2, a_3, a_4, \ldots..\}$ และให้ T_n แทนลำดับ $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots..\}$

จะแบ่งการพิสูจน์เป็น 2 กรณี

กรณีที่ 1 สมมติว่าทุก ๆ ลำดับ $\{T_n\}$ มีพจน์ที่มากที่สุด

ให้ a_{n_1} เป็นพจน์ที่มากที่สุดในลำดับ $\{T_n\}$

ให้ a_{n_2} เป็นพจน์ที่มากที่สุดในลำดับ $\{T_{n_1+1}\}$ แล้ว $n_2 > n_1$ และ $a_{n_2} \leqslant a_{n_1}$

ให้ a_{n_3} เป็นพจน์ที่มากที่สุดในลำดับ $\{T_{n_2+1}\}$ แล้ว $n_3 > n_2$ และ $a_{n_3} \leqslant a_{n_2}$

ทำอย่างนี้เป็นเรื่อย ๆ ..... จะสามารถสร้างลำดับ $\{a_{n_j}\}$ ซึ่งเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$ และมีค่าไม่เพิ่มได้

กรณีที่ 2 ถ้าในกรณีที่ 1 ไม่เป็นจริงแล้ว

สำหรับบาง $n_1 \;\varepsilon\; N$, ลำดับ $\{T_{n_1}\}$ ไม่มีพจน์ที่มากที่สุด

เนื่องจาก a_{n_1} เป็นพจน์หนึ่งของ $\{T_{n_1}\}$ และมีพจน์ a_{n_2} ของลำดับ $\{T_{n_1}\}$ ที่มีค่ามากกว่า a_{n_1} แล้วก็จะมีพจน์ a_{n_3} ของ $\{T_{n_1}\}$ ที่มีค่ามากกว่า a_{n_2}

ยิ่งกว่านั้นเราอาจจะเลือก a_{n_3} ที่ $n_3 > n_2$ ได้ด้วย ทำเช่นนี้เรื่อย ๆ ไป .... จะสามารถสร้างลำดับย่อย $\{a_{n_j}\}$ ของ $\{a_n\}$ ที่มีค่าไม่ลดได้

จากทั้งสองกรณีจึงกล่าวได้ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ย่อมมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับทางเดียว

แบบฝึกหัด 3.4.1

1. สำหรับแต่ละลำดับต่อไปนี้ จงหาขอบเขตบน, ขอบเขตล่าง, ขอบเขตบนค่าน้อยสุด, ขอบเขตล่างค่ามากสุด และพิจารณาว่าเป็นลำดับไม่เพิ่มหรือเป็นลำดับไม่ลดหรือไม่

   1.1) $\{\frac{n}{n+1}\}$ 1.2) $\{(-1)^n + \frac{1}{n}\}$

   1.3) $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ 1.4) $\{\frac{n!-1}{n!+1}\}$

   1.5) $\{\frac{2^n}{2^n-1}\}$ 1.6) $\{2 - \frac{(n-1)}{10}\}$

2. จงแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เมื่อ $a_n = |\frac{m!}{n!(m-n)!}|$ เมื่อ $m \varepsilon Q^+$ เป็นลำดับลู่เข้าสำหรับ $n > m$

3. จงแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่ง $a_1 = t > 0$ และ $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ เป็นลำดับลู่เข้า พร้อมทั้งหาด้วยว่ามันลู่เข้าสู่ค่าใด

4. ถ้า $a_n = \frac{10^n}{n!}$ จงหาจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $a_{n+1} < a_n \; (n \geqslant N_0)$

5. ให้ $a_n = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$ จงแสดงว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับทางเดียวและมีขอบเขตจำกัด และลู่เข้าสู่ $\frac{1}{2}$

6. สมมติให้ $a_2 > a_1 > 0$ และให้ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$ เมื่อ $n \geqslant 2$ จงแสดงว่า

   6.1) ลำดับย่อย $a_1, a_3, a_5, \ldots..$ เป็นลำดับไม่เพิ่ม

   6.2) ลำดับย่อย $a_2, a_4, a_6, \ldots..$ เป็นลำดับไม่ลด

7. โดยใช้ทฤษฎีบททวินาม จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{a_n\} = \{(1+\frac{1}{n})^n\}$ เป็นลำดับไม่ลด และมีขอบเขตบน และเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

3.5 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่เข้า (PROPERTIES AND ALGEBRAS OF CONVERGENT SEQUENCES)

ทฤษฎีบท 3.5.1 สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

$\therefore$ จะมี L ที่ทำให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

นั่นคือ จะมี N_0 ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ ทุกค่าของ $n \geqslant N_0$, $\varepsilon > 0$

และ $|a_n| \leqslant |a_n - L| + |L| < \varepsilon + |L|$ ทุกค่าของ $n \geqslant N_0$ ....(1)

จะต้องพิสูจน์ให้ได้ว่า จะมีจำนวน M ที่ทำให้ $|a_n| \leqslant M$ ทุกค่า n

ให้ K = ค่าสูงสุดระหว่าง $\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_0-1}|\}$

$\therefore$ $|a_n| \leqslant K$ ทุกค่าของ $n < N_0$ .... (2)

จาก (1) และ (2) จึงได้ว่า

ถ้าให้ M = ค่าสูงสุดระหว่าง $\{\varepsilon + |L|, K\}$

ก็จะได้ว่า ย่อมมี M ที่ทำให้ $|a_n| \leqslant M$ ทุกค่าของ n

$\therefore$ ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ข้อสังเกต

1. ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดไม่จำเป็นต้องเป็นลำดับลู่เข้า เช่น

$$\{a_n\} = \{(-1)^{n+1}\}$$

2. ถ้าลำดับนั้นเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและเป็นลำดับทางเดียวด้วยแล้ว ลำดับนั้นย่อมเป็นลำดับลู่เข้าเสมอ

ทฤษฎีบท 3.5.2 ลำดับลู่เข้าใด ๆ จะมีค่าลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ สมมุติให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าใด ๆ โดยสมมุติให้

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L_1 \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = L_2$$

นั่นคือ ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ ใด ๆ มาให้

จะมีค่า $n_1 \varepsilon N$ ซึ่ง $|a_n - L_1| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_1$

และจะมีค่า $n_2 \varepsilon N$ ซึ่ง $|a_n - L_2| < \varepsilon$ สำหรับทุก $n \geqslant n_2$

แต่ $|L_1 - L_2| \leqslant |a_n - L_1| + |a_n - L_2| < 2\varepsilon$ สำหรับ n ที่มากกว่าค่าสูงสุดระหว่าง n_1 กับ n_2

นั่นแสดงว่า $L_1 = L_2$ (จากบทแทรก Archimedean Property)

ทฤษฎีบท 3.5.3 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าใด ๆ แล้วจะได้ว่า

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k(\lim\limits_{n\to\infty} a_n)$ เมื่อ $k \in R$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} a_n)(\lim\limits_{n\to\infty} b_n)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

สมมติให้ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$

จะมี $n_1 \in N$ ซึ่ง $|a_n - a| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_1$

และจะมี $n_2 \in N$ ซึ่ง $|b_n - b| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_2$

1) ให้ $\varepsilon > 0$

$\because$ $|a_n + b_n - (a+b)| = |a_n - a + b_n - b| \leqslant |a_n - a| + |b_n - b|$

$< 2\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ n ที่มากกว่าค่าสูงสุดระหว่าง n_1 กับ n_2

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = a + b$

$= \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2) กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

$\because$ $|ka_n - ka| = |k(a_n - a)| = |k|\,|a_n - a| < |k|\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_1$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = ka = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

3) $\because$ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้นจึงมีขอบเขตจำกัดด้วย นั่นคือ จะมี $m > 0$ ซึ่ง $|a_n| \leqslant m$ สำหรับทุก ๆ $n \in N$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

$|a_nb_n - ab| = |a_nb_n - a_nb + a_nb - ab|$

$\leqslant |a_n|\,|b_n - b| + |b|\,|a_n - a|$

$\leqslant m\varepsilon + |b|\varepsilon = (m + |b|)\varepsilon$ สำหรับทุก ๆ n ที่มากกว่าค่าสูงสุด ระหว่าง n_1 กับ n_2

นั่นคือ $\lim_{n \to \infty} (a_n b_n) = ab = (\lim_{n \to \infty} a_n)(\lim_{n \to \infty} b_n)$ #

4) ให้ $|b_n - b| < \frac{|b|}{2}$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_2$

แต่ $||b_n| - |b|| < |b_n - b| < \frac{|b|}{2}$

$$||b_n| - |b|| < \frac{|b|}{2}$$

$$-\frac{|b|}{2} < |b_n| - |b| < \frac{|b|}{2}$$

$$\therefore |b_n| - |b| > -\frac{|b|}{2}$$

$$|b_n| > \frac{|b|}{2}$$

ให้ $\varepsilon > 0$

$$\therefore \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b - b_n}{bb_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{bb_n}\right|$$

$$= \frac{|b_n - b|}{|b||b_n|}$$

$$\leqslant \frac{2|b_n - b|}{|b|^2}$$

$$< \frac{2}{|b|^2}\varepsilon \quad \text{สำหรับทุก ๆ } n \geqslant n_2$$

$$\therefore \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{b} = \frac{1}{\lim_{n \to \infty} b_n} \quad \text{เมื่อ } \lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$$

5) จากข้อความที่พิสูจน์แล้วในตอนที่ 3 กับตอนที่ 4 จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim_{n \to \infty} a_n}{\lim_{n \to \infty} b_n} \quad \text{เมื่อ } \lim_{n \to \infty} b_n \neq 0$$

ตัวอย่าง 3.5.1 ให้ $\{a_n\} = \left\{\frac{3n^2-2}{7n^2-n+3}\right\}$ จงแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และจงหาค่าลิมิต

จาก $$a_n = \frac{3n^2-2}{7n^2-n+3}$$

$$= \frac{3-\frac{2}{n^2}}{7-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 3 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty} 7 - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}$$

$$= \frac{3-(\lim\limits_{n\to\infty} 2)(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})}{7-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+(\lim\limits_{n\to\infty} 3)(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n})}$$

$$= \frac{3-(2)(0)(0)}{7-0+(3)(0)(0)} = \frac{3}{7}$$

ทฤษฎีบท 3.5.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

พิสูจน์ $\because$ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

$\therefore$ จะมี L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

นั่นคือ สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมี N_0 ที่ทำให้ $|a_n - L| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่า $n \geqslant N_0$

$\because$ $||a_n|-|L|| \leqslant |a_n-L| < \varepsilon$

$\therefore$ $||a_n|-|L|| < \varepsilon$ ทุก ๆ ค่าของ $n \geqslant N_0$

นั่นคือ $$\lim_{n\to\infty}|a_n| = |L| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$ #

ข้อสังเกต จาก ท.บ. 3.5.3 ทำให้สามารถกล่าวถึงโครงสร้างทางพีชคณิตของเซตของลำดับลู่เข้าใน R ได้ว่า

1. จากข้อ 1) และข้อ 2) ของ ท.บ. 3.5.3 ทำให้กล่าวได้ว่า เซตของลำดับลู่เข้าเป็นปริภูมิเวกเตอร์เชิงจริง (real vector space) ภายใต้การดำเนินการบวกกันของลำดับสองลำดับ และการคูณลำดับด้วยจำนวนจริง k ซึ่งกำหนดโดย

$$\{a_n\}+\{b\} = \{a_n+b_n\} \quad \text{และ} \quad k\{a_n\} = \{ka_n\}$$

2. จากข้อ 1), ข้อ 2) และข้อ 3) ของ ท.บ. 3.5.3 ทำให้กล่าวได้ว่า เซตของลำดับลู่เข้าเป็น**พีชคณิตสลับที่เชิงจริง** (real commutative algebra) ภายใต้การดำเนินการคูณกันของลำดับกับลำดับ ซึ่งกำหนดโดย $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n b_n\}$ (ดูภาคผนวก)

แบบฝึกหัด 3.5.1

จงหาค่าลิมิตของลำดับลู่เข้าต่อไปนี้

1.1 $\left\{\frac{5-n}{n+2}\right\}$

1.2 $\left\{\frac{n-1}{2n-3n^3}\right\}$

1.3 $\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$

1.4 $\{2^{\frac{1}{n}}\}$

1.5 $\left\{\frac{3n+2}{4-5n}\right\}$

จงพิสูจน์ว่าถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า โดย $a_n \leqslant b_n$ สำหรับทุกค่าของ n และถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ แล้ว $L \leqslant M$

จงพิสูจน์ว่าถ้า $0<a<1$ แล้ว ลำดับ $\{a^n\}$ ย่อมลู่เข้าสู่ 0

จงพิสูจน์ว่าถ้า $1<a<\infty$ แล้ว ลำดับ $\{a^n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$

สมมุติให้ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n-1}{a_n+1} = 0$ จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$

(แนวการทำ : ให้ $\varepsilon_n = \frac{a_n-1}{a_n+1}$ แล้วหาค่า a_n)

3.6 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่ออก

(PROPERTIES AND ALGEBRAS OF DIVERGENT SEQUENCES)

ในหัวข้อ 3.5 กล่าวได้ว่า ผลบวก, ผลต่าง, ผลคูณและผลหาร (ถ้าหาได้) ของลำดับลู่เข้าย่อมเป็นลำดับลู่เข้าด้วย มีปัญหาว่าผลเหล่านี้จะเป็นจริงสำหรับลำดับลู่ออกไหม? จะพบว่าถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกแล้วลำดับ $\{-a_n\}$ ย่อมลู่ออกด้วย และจะเห็นได้อย่างชัดแจ้งว่าผลบวกของลำดับทั้งสองนั้นไม่ลู่ออก นอกจากนั้นผลคูณของลำดับ $\{(-1)^n\}$ (ซึ่งเป็นลำดับลู่ออก) กับตัวของมันเองก็ไม่ลู่ออก ในตอนนี้จะศึกษาถึงพีชคณิตของลำดับที่ลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.6.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออกไปยัง $+\infty$ แล้วผลบวกและผลคูณของลำดับทั้งสองย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$ ด้วย

พิสูจน์ กำหนด $M > 0$ ใด ๆ ให้

เลือกจำนวนเต็มบวก N_1 ซึ่ง $a_n > M \qquad (n \geqslant N_1)$

และ เลือกจำนวนเต็มบวก N_2 ซึ่ง $b_n > 1 \qquad (n \geqslant N_2)$

แล้วสำหรับ N_o ซึ่งเท่ากับค่าสูงสุดระหว่าง N_1 กับ N_2

จะได้ว่า $a_n + b_n > M + 1 > M \qquad (n \geqslant N_o)$

และ $a_n b_n > M.1 = M \qquad (n \geqslant N_o)$

เนื่องจาก M เป็นจำนวนบวกใด ๆ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า

ลำดับ $\{a_n + b_n\}$ และลำดับ $\{a_n b_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ ด้วย

ทฤษฎีบท 3.6.2 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ และลำดับ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด แล้ว $\{a_n + b_n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$

พิสูจน์ จาก $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ดังนั้นจะมี $B > 0$ ซึ่ง $|b_n| \leqslant B \qquad (n \,\varepsilon\, N)$

กำหนด $M > 0$ ใด ๆ ให้และเลือกจำนวนเต็มบวก N_o ซึ่ง

$$a_n > M + B \qquad (n \geqslant N_o)$$

แล้วสำหรับ $n \geqslant N_o$

$$a_n + b_n \geqslant a_n - |b_n| > (M + B) - B = M$$

นั่นคือ $a_n + b_n > M \qquad (n \geqslant N_o)$

แสดงว่า $a_n + b_n \to +\infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

จึงกล่าวได้ว่าลำดับ $\{a_n + b_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$

ทฤษฎีบท 3.6.3 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ และลำดับ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ลำดับ $\{a_n + b_n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$ ด้วย

พิสูจน์ เนื่องจากลำดับ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า จาก ท.บ.3.5.1 จึงได้ว่าลำดับ $\{b_n\}$ ย่อมมีขอบเขตจำกัด ด้วย

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n + b_n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$ (ตาม ท.บ.3.6.2) #

หมายเหตุ จาก ท.บ.3.6.2-3.6.3 ถ้าแทน "$+\infty$" ด้วย "$-\infty$" ผลก็ยังเป็นจริงอยู่ ให้นักศึกษาพิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

แบบฝึกหัด 3.6.1

1. จงพิสูจน์ว่าถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออกแล้ว ลำดับ $\{k \cdot a_n\}$ เมื่อ $k \epsilon R$ และ $k \neq 0$ ย่อมเป็นลำดับลู่ออกด้วย
2. จงยกตัวอย่างลำดับแกว่งกวัด (ซึ่งเป็นลำดับลู่ออก แต่ไม่ลู่ออกไปยัง $+\infty$ หรือ $-\infty$) สองลำดับ ที่

   2.1) ผลบวกของลำดับทั้งสองเป็นลำดับลู่ออกไปยัง $+\infty$

   2.2) ผลบวกของลำดับทั้งสองเป็นลำดับลู่ออกไปยัง $-\infty$

   2.3) ผลบวกของลำดับทั้งสองเป็นลำดับลู่เข้า
3. จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าผลบวกของลำดับลู่ออก อาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้
4. จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่าผลคูณของลำดับลู่ออก อาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้
5. จงยกตัวอย่างเพื่อแสดงว่า ถ้าเอาจำนวนจริงใด ๆ คูณกับลำดับลู่ออกแล้ว อาจได้ลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้

3.7 ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ

(LIMIT SUPERIOR AND LIMIT INFERIOR OF SEQUENCES)

ในการศึกษาลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับนี้จะแยกพิจารณาสำหรับลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและลำดับที่ไม่มีขอบเขต โดยในตอนแรกจะพิจารณาลำดับที่มีขอบเขตจำกัดก่อน

พิจารณาลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่งเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด นั่นคือมีจำนวนจริง A และ B ซึ่ง $A \leqslant a_n \leqslant B$ ทุก ๆ $n \varepsilon N$ โดย A เป็นขอบเขตล่างค่าหนึ่งและ B เป็นขอบเขตบนค่าหนึ่งของลำดับ $\{a_n\}$

จาก $a_n \leqslant B$ เมื่อ $n \varepsilon N$

สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, 3, \ldots$ จะได้ว่า

$$\{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots\}$$

เป็นเซตที่มีขอบเขตบน ดังนั้นเซตนี้จึงมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ตามสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์) และพึงสังเกตว่า จำนวนจริง B ก็ยังคงเป็นขอบเขตบนของเซตนี้ด้วย

ให้ $B_n = \text{l.u.b}\,\{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

นั่นคือ

$$B_1 = \text{l.u.b}\,\{a_1 , a_2 , a_3 , \ldots\}$$

$$B_2 = \text{l.u.b}\,\{a_2 , a_3 , a_4 , \ldots\}$$

$$B_3 = \text{l.u.b}\,\{a_3 , a_4 , a_5 , \ldots\}$$

จะพบว่า $B_1 \geqslant B_2 \geqslant B_3 \geqslant \ldots \geqslant B$

นั่นคือ $B_n \geqslant B_{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ทั้งนี้เพราะว่า $B_n \geqslant a_k$ เมื่อ $k = n, n+1, n+2, \ldots$

เพราะฉะนั้น B_n เป็นขอบเขตบนของ $\{a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots\}$

ดังนั้น $B_n \geqslant \text{l.u.b}\,\{a_{n+1} , a_{n+2} , \ldots\}$

จึงได้ว่า $B_n \geqslant B_{n+1}$

ดังนั้น ลำดับ $\{B_n\}$ จึงเป็นลำดับไม่เพิ่มที่มีขอบเขตจำกัด

เพราะฉะนั้น $\{B_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า (ท.บ.3.4.3)

บทนิยาม 3.7.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขตจำกัด และให้ $B_n = \text{l.u.b} \{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$ แล้ว ลิมิตซุพีเรียร์ (limit superior) ของลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ หรือ $\lim \sup a_n$ หรือ $\overline{\lim\, a_n}$ นิยามโดย

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} B_n$$

หรือ $\lim \sup a_n = \lim B_n$

ในทำนองเดียวกัน

จาก $A \leqslant a_n$ เมื่อ $n \varepsilon N$

สำหรับแต่ละ $n = 1, 2, 3, ...$ จะได้ว่า

$\{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$

เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง ดังนั้นเซตนี้จึงมีขอบเขตล่างค่ามากสุด (ท.บ.2.4.2) และพึงสังเกตว่าจำนวนจริง A ก็ยังคงเป็นขอบเขตล่างของเซตนี้ด้วย

ให้ $A_n = \text{g.l.b} \{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

นั่นคือ

$A_1 = \text{g.l.b} \{a_1 , a_2 , a_3 , ...\}$

$A_2 = \text{g.l.b} \{a_2 , a_3 , a_4 . \}$

$A_3 = \text{g.l.b} \{a_3 , a_4 , a_5 , ... \}$

....

....

....

จะพบว่า $A_1 \leqslant A_2 \leqslant A_3 \leqslant ..... \leqslant A_n \leqslant A_{n+1} \leqslant ..... \leqslant A$

นั่นคือ $A_n \leqslant A_{n+1}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

ทั้งนี้เพราะว่า $A_n \leqslant a_k$ เมื่อ $k = n, n+1, n+2, ...$

เพราะฉะนั้น A_n เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$

ดังนั้น $A_n \leqslant \text{g.l.b} \{a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$

จึงได้ว่า $A_n \leqslant A_{n+1}$

ดังนั้น ลำดับ $\{A_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดที่มีขอบเขตจำกัด

เพราะฉะนั้น $\{A_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า (ท.บ.3.4.3)

บทนิยาม 3.7.2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขตจำกัด และให้ $A_n = \text{g.l.b} \{a_n , a_{n+1} , a_{n+2} , ...\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$ แล้ว ลิมิตอินฟีเรียร์ (limit inferior) ของลำดับ $\{a_n\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} \inf a_n$ หรือ $\lim \inf a_n$ หรือ $\underline{\lim\, a_n}$ นิยามโดย

$$\lim_{n\to\infty} \inf a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

หรือ $\lim \inf a_n = \lim A_n$

ข้อสังเกต เนื่องจากลำดับ $\{A_n\}$ และ $\{B_n\}$ ต่างก็เป็นลำดับลู่เข้า จึงสามารถหาค่าลิมิตได้และมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น (ท.บ.3.5.2) ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าลำดับที่มีขอบเขตจำกัดย่อมมีลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์อย่างละเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.7.1 ให้ลำดับ $\{a_n\} = \{2,-2,1,-1,1,-1,1,-1,.....\}$ จงหา $\lim \sup a_n$ และ $\lim \inf a_n$

วิธีทำ

จาก $\{a_n\} = \{2,-2,1,-1,1,-1,1,-1,.....\}$

ได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดโดยมี 2 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และ -2 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

(i) ให้ $B_n = \text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, ...\}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
B_1 &= \text{l.u.b}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ...\} \\
&= \text{l.u.b}\{2,-2,1,-1,1\ .....\} \\
&= 2 \\
B_2 &= \text{l.u.b}\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, ...\} \\
&= \text{l.u.b}\{-2,1,-1,1,-1,\ .....\} \\
&= 1 \\
B_3 &= \text{l.u.b}\{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, ...\} \\
&= \text{l.u.b}\{1,-1,1,-1,1,\ .....\} \\
&= 1 \\
B_4 &= \text{l.u.b}\{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, ...\} \\
&= \text{l.u.b}\{-1,1,-1,1,-1,\ .....\} \\
&= 1 \\
B_5 &= \text{l.u.b}\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, ...\} \\
&= \text{l.u.b}\{1,-1,1,-1,1,\ .....\} \\
&= 1 \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
B_n &= 1
\end{aligned}$$

จาก $\quad \limsup a_n = \lim B_n$

ดังนั้น $\quad \limsup a_n = \lim 1$

$$= 1$$

นั่นคือลิมิตซุพีเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ คือ 1

(ii) ให้ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \text{g.l.b}\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \ldots\} \\
&= \text{g.l.b}\{2, -2, 1, -1, 1, \ldots\} \\
&= -2 \\
A_2 &= \text{g.l.b}\{a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \ldots\} \\
&= \text{g.l.b}\{-2, 1, -1, 1, -1, \} \\
&= -2 \\
A_3 &= \text{g.l.b}\{a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots\} \\
&= \text{g.l.b}\{1, -1, 1, -1, 1, \} \\
&= -1 \\
A_4 &= \text{g.l.b}\{a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \ldots\} \\
&= \text{g.l.b}\{-1, 1, -1, 1, -1, \ldots\} \\
&= -1 \\
A_5 &= \text{g.l.b}\{a_5, a_6, a_7, a_8, a_9, \ldots\} \\
&= \text{g.l.b}\{1, -1, 1, -1, 1, \ldots\} \\
&= -1 \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
A_n &= -1
\end{aligned}
$$

จาก $\quad \liminf a_n = \lim A_n$

ดังนั้น $\quad \liminf a_n = \lim(-1)$

$$= -1$$

นั่นคือ ลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ คือ -1

ตัวอย่าง 3.7.2 ให้ $\{a_n\} = \{\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}$

จงหา lim sup a_n และ lim inf a_n

วิธีทำ

จาก $\{a_n\} \quad = \quad \{\frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\}$

$$= \{\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, \ldots\}$$

ได้ว่าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด โดยมี $\frac{1}{2}$ เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และมี เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุด

(i) ให้ $B_n = \text{l.u.b}\ \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
B_1 &= \text{l.u.b}\ \{a_1, a_2, a_3, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{2} \\
B_2 &= \text{l.u.b}\ \{a_2, a_3, a_4, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{4} \\
B_3 &= \text{l.u.b}\ \{a_3, a_4, a_5, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{4} \\
B_4 &= \text{l.u.b}\ \{a_4, a_5, a_6, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{6} \\
B_5 &= \text{l.u.b}\ \{a_5, a_6, a_7, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{6} \\
B_6 &= \text{l.u.b}\ \{a_6, a_7, a_8, \ldots\} \\
&= \text{l.u.b}\ \{-\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{12}, \ldots\} \\
&= \tfrac{1}{8}
\end{aligned}$$

$$B_7 = \text{l.u.b}\{a_7, a_8, a_9, \ldots\}$$
$$= \text{l.u.b}\{\tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{12}, -\tfrac{1}{13}, \ldots\}$$
$$= \tfrac{1}{8}$$

....

....

....

ดังนั้น $B_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{1}{n+2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $\lim B_n = 0$

จาก $\lim\sup a_n = \lim B_n$

จึงได้ว่า ลิมิตซุพีเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ คือ 0

(ii) ให้ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

จะได้ว่า

$$A_1 = \text{g.l.b}\{a_1, a_2, a_3, \ldots\}$$
$$= \text{g.l.b}\{\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \ldots\}$$
$$= -\tfrac{1}{3}$$
$$A_2 = \text{g.l.b.}\{a_2, a_3, a_4, \ldots\}$$
$$= \text{g.l.b}\{-\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, \ldots\}$$
$$= -\tfrac{1}{3}$$
$$A_3 = \text{g.l.b}\{a_3, a_4, a_5, \ldots\}$$
$$= \text{g.l.b}\{\tfrac{1}{4}, -\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \ldots\}$$
$$= -\tfrac{1}{5}$$
$$A_4 = \text{g.l.b}\{a_4, a_5, a_6, \ldots\}$$
$$= \text{g.l.b}\{-\tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{12}, \ldots\}$$
$$= -\tfrac{1}{5}$$
$$A_5 = \text{g.l.b}\{a_5, a_6, a_7, \ldots\}$$
$$= \text{g.l.b}\{\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{12}, -\tfrac{1}{13}, \ldots\}$$
$$= -\tfrac{1}{7}$$

$$
\begin{aligned}
A_6 &= \text{g.l.b}\{a_6, a7, a8, \ldots\}\\
&= \text{g.l.b}\left\{-\tfrac{1}{7}, \tfrac{1}{8}, -\tfrac{1}{9}, \tfrac{1}{10}, -\tfrac{1}{11}, \tfrac{1}{12}, -\tfrac{1}{13}, \tfrac{1}{14}, \ldots\right\}\\
&= -\tfrac{1}{7}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $A_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{n+2} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ -\dfrac{1}{n+1} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $\lim A_n = 0$

จาก $\lim\inf a_n = \lim A_n$

จึงได้ว่า ลิมิตอินฟิเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ คือ 0

ข้อสังเกต ลำดับ $\{a_n\} = \left\{\dfrac{(-1)^{n-1}}{n+1}\right\}$ ตามตัวอย่าง 3.7.2 นี้ เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim a_n = 0$ ด้วย

ทฤษฎีบท 3.7.1 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว

$$\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$$

พิสูจน์

ให้ $B_n = \text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

และ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น $A_n \leqslant B_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

และเนื่องจาก $\{A_n\}$ และ $\{B_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

จึงได้ว่า $\lim A_n \leqslant \lim B_n$

เพราะฉะนั้น $\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$

ทฤษฎีบท 3.7.2 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด และ $a_n \leqslant b_n$ ทุกค่า $n \varepsilon N$ แล้วจะได้ว่า

(1) $\lim\sup a_n \leqslant \lim\sup b_n$

(2) $\lim\inf a_n \leqslant \lim\inf b_n$

พิสูจน์

ให้ X_n = l.u.b $[a, , a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots]$

x_n = g.l.b $[a, , a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$

Y" = l.u.b $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]$

Yn = g.l.b $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\}$

เพราะ $[a,]$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับทีมีขอบเขตจำกัด

ดังนั้น ลำดับ $\{X_n\}$, $\{x_n\}$, $\{Y_n\}$ และ $\{y_n\}$ จึงเป็นลำดับลู่เข้า

เพราะว่า $a, \leqslant b_n$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

ดังนั้น l.u.b $[a, , a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots) \leqslant$ l.u.b $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots)$

และ g.l.b $[a,, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} \leqslant$ g.l.b $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]$

นั่นคือ $X_n \leqslant Y_n$ และ $x_n \leqslant y_n$

เพราะฉะนั้น $\lim X_n \leqslant \lim Y_n$ และ $\lim x_n \leqslant \lim y_n$

นันแสดงว่า

(I) $\lim\sup a, \leqslant \lim\sup b_n$

และ (2) $\lim\inf a_n \leqslant \lim\inf b_n$

ทฤษฎีบท 3.7.3 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว

(1) $\lim\sup (a_n + b_n) \leqslant \lim\sup a_n + \lim\sup b_n$

(2) $\lim\inf (a_n + b_n) \geqslant \lim\inf a_n + \lim\inf b_n$

พิสูจน์ (1)

ให้ X_n = l.u.b $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

และ Y_n = l.u.b $\{b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น $a_k \leqslant X_n$ เมื่อ $k \geqslant n$

และ $b_k \leqslant Y_n$ เมื่อ $k \geqslant n$

ดังนั้น $a_k + b_k \leqslant X_n + Y_n$ เมื่อ $k \geqslant n$

นั่นแสดงว่า

$X_n + Y_{,,}$ เป็นขอบเขตบนของ $\{(a_n + b_{,,}), (a_{n+1} + b_{n+1}), \ldots\}$

ดังนั้น l.u.b $\{(a_n + b_n), (a_{n+1} + b_{n+1}), \ldots\} \leqslant X_n + Y_n$

จึงได้ว่า

$\lim$ l.u.b $\{(a_n + b_n), (a_{n+1} + b_{n+1}), \ldots\} \leqslant \lim (X_n + Y_n)$

แต่ $\lim (X_n + Y_n) = \lim X_n + \lim Y_n$

ดังนั้น lim l.u.b $\{(a_n+b_n), (a_{n+1}+b_{n+1}), \ldots\} \leqslant \lim X_n + \lim Y_n$

นั่นคือ $\limsup (a_n+b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ทฤษฎีบท 3.7.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว

$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$

พิสูจน์

(1) จะพิสูจน์ว่า $\liminf a_n = \lim a_n$

สมมุติให้ $\lim a_n = L$

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon>0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_o ซึ่งทำให้

$$|a_n-L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{เมื่อ } n \geqslant N_o$$

เพราะฉะนั้น $L-\frac{\varepsilon}{2} < a_n < L+\frac{\varepsilon}{2}$ เมื่อ $n \geqslant N_o$

แสดงว่า $L+\frac{\varepsilon}{2}$ เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ เมื่อ $n \geqslant N_o$

และ $L-\frac{\varepsilon}{2}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ เมื่อ $n \geqslant N_o$

สมมุติให้ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $n \geqslant N_o$ จะได้ว่า

$$L-\frac{\varepsilon}{2} \leqslant A_n \leqslant L+\frac{\varepsilon}{2}$$

ดังนั้น $L-\varepsilon < A_n < L+\varepsilon$

หรือ $|A_n-L| < \varepsilon$

แสดงว่า $\lim A_n = L$

ดังนั้น $\liminf a_n = L$

นั่นคือ $\liminf a_n = \lim a_n$

(2) จะต้องพิสูจน์ว่า $\limsup a_n = \lim a_n$ (ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบท 3.7.5 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดซึ่ง $\liminf a_n = \limsup a_n = l$ แล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim a_n = L$

พิสูจน์

ให้ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

และ $B_n = \text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

จากสิ่งที่กำหนดให้ ได้ว่า

$\liminf a_n = \lim A_n = L$

และ $\limsup a_n = \lim B_n = L$

ดังนั้น สำหรับ $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_1 และ N_2 ซึ่งทำให้

$|A_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_1$

และ $|B_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_2$

เลือก N_o = ค่าสูงสุด (N_1, N_2)

เพราะฉะนั้น ถ้า $n \geqslant N_o$ แล้ว

$|A_n - L| < \varepsilon$

และ $|B_n - L| < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $n \geqslant N_o$ จึงได้ว่า

$L - \varepsilon < A_n$

และ $B_n < L + \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $L - \varepsilon < \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

และ $\text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} < L + \varepsilon$

ดังนั้น $L - \varepsilon < a_n$

และ $a_n < L + \varepsilon$

นั่นคือ $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$

หรือ $|a_n - L| < \varepsilon$

นั่นแสดงว่า $\lim a_n = L$

จึงได้ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ข้อสังเกต จากที่ศึกษาอาจกล่าวได้ว่า ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับที่มีขอบเขตจำกัดย่อมหาค่าได้เสมอ โดยอาจจะมีค่าเท่ากันหรือไม่ก็ได้ แต่ถ้าลำดับนั้นเป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ค่าลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ย่อมเท่ากันและมีค่าเท่ากับลิมิตของลำดับนั้นด้วย

ต่อไปจะศึกษาถึงลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตบนแล้วจะได้ว่า $\text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = +\infty$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ และถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตล่างแล้วก็จะได้ว่า $\text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} = -\infty$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ ซึ่งกล่าวเป็นบทนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 3.7.3 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตบนแล้ว $\lim\sup a_n = +\infty$

บทนิยาม 3.7.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตล่างแล้ว $\lim\inf a_n = -\infty$

ตัวอย่าง 3.7.3 ให้ $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$ จงหา $\lim\sup a_n$ และ $\lim\inf a_n$

วิธีทำ

จาก $\{a_n\} = \{(-1)^n n\}$

$= \{-1, 2, -3, 4, -5, 6, -7, 8, \ldots\}$

เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตบนและไม่มีขอบเขตล่าง

ดังนั้น $\limsup a_n = +\infty$ และ $\liminf a_n = -\infty$

ตัวอย่าง 3.7.4 ให้ $\{a_n\} = \{2 - \frac{n-1}{10}\}$ จงหา $\limsup a_n$ และ $\liminf a_n$

วิธีทำ

จาก $\{a_n\} = \{2 - \frac{n-1}{10}\}$

$= \{2, 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.4, \ldots\}$

ได้ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ มี 2 เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด และไม่มีขอบเขตล่าง

(1) ให้ $B_n = \text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

จะได้ว่า

$B_1 = 2$

$B_2 = 1.9$

$B_3 = 1.8$

$B_4 = 1.7$

$B_5 = 1.6$

....

$B_n = 2 - \frac{n-1}{10}$

เพราะฉะนั้น $\lim B_n = \lim 2 - \frac{n-1}{10}$

$= -\infty$

ดังนั้นจึงได้ว่า

$\limsup a_n = -\infty$

(2) เนื่องจาก ลำดับ $\{a_n\}$ ไม่มีขอบเขตล่าง

ดังนั้น $\liminf a_n = -\infty$

นั่นคือ ลำดับ $\{a_n\} = \{2 - \frac{n-1}{10}\}$ มีลิมิตซุพีเรียร์เป็น $-\infty$ และมีลิมิตอินฟีเรียร์เป็น $-\infty$ ด้วย

ทฤษฎีบท 3.7.6 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตแล้ว

$\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

(1) ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตบน

จากบทนิยาม 3.7.3 จะได้ว่า

$\lim\sup a_n = +\infty$

ดังนั้น $\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$

(2) ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตล่าง

จากบทนิยาม 3.7.4 จะได้ว่า

$\lim\inf a_n = -\infty$

ดังนั้น $\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$

นั่นแสดงว่า ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตแล้ว

$\lim\inf a_n \leqslant \lim\sup a_n$

ทฤษฎีบท 3.7.7 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(i) ถ้า $\lim\sup a_n = \lim\inf a_n = +\infty$ แล้ว $\lim a_n = +\infty$

(ii) ถ้า $\lim\sup a_n = \lim\inf a_n = -\infty$ แล้ว $\lim a_n = -\infty$

พิสูจน์ (i)

(a) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $\lim\sup a_n = +\infty$ แสดงว่า $\lim B_n = +\infty$

เมื่อ $B_n = \text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $M>0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_o ซึ่งทำให้

$$B_n > M \qquad \text{เมื่อ } n \geqslant N_o$$

นั่นคือ $\text{l.u.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} > M$ เมื่อ $n \geqslant N_o$

นั่นแสดงว่า $a_n > M$ เมื่อ $n \geqslant N_o$

เพราะฉะนั้น $\lim a_n = +\infty$

(b) ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $\lim\inf a_n = +\infty$

แสดงว่า $\lim A_n = +\infty$

เมื่อ $A_n = \text{g.l.b}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$

เพราะฉะนั้น สำหรับ $M > 0$ จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่งทำให้

$$A_n > M \qquad \text{เมื่อ } n \geqslant N_0$$

นั่นคือ $\text{g.l.b.}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\} > M$ เมื่อ $n \geqslant N_0$

นั่นแสดงว่า $a_n > M$ เมื่อ $n \geqslant N_0$

เพราะฉะนั้น $\lim a_n = +\infty$

จาก (a) และ (b) จึงได้ว่า

ถ้า $\limsup a_n = \liminf a_n = +\infty$ แล้ว $\lim a_n = +\infty$

(ii) พิสูจน์ (ให้เป็นแบบฝึกหัด)

แบบฝึกหัด 3.7.1

1. จงหาลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟิเรียร์ของลำดับต่อไปนี้

   1.1) $\left\{\frac{(-1)^n}{2n-1}\right\}$

   1.2) $\left\{\frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{n+2}\right.$ - 1

   1.3) $\{(-1)^{n-1}(2n-1)\}$

   1.4) $\{(-1)^{n-1}\}$

   1.5) $\left\{\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\}$

   1.6) $\{n^{1+(-1)^n}\}$

2. จงพิสูจน์ ท.บ. 3.7.3 ข้อ (ii)
3. จงพิสูจน์ ท.บ. 3.7.4 ข้อ (ii)
4. จงพิสูจน์ ท.บ. 3.7.7 ข้อ (ii)

3.8 ลำดับโคชีและทฤษฎีบทบอลซาโน - ไวแอร์สตราส (CAUCHY SEQUENCES AND BOLZANO-WEIESTRASS THEOREM)

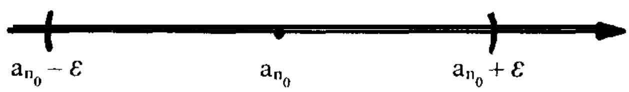
ต่อไปนี้จะศึกษาถึงเกณฑ์การพิจารณาที่สำคัญอันหนึ่งสำหรับการแสดงว่า ลำดับที่กำหนดเป็นลำดับลู่เข้า โดยไม่ต้องทราบค่าลิมิตของลำดับนั้น เกณฑ์นั้นก็คือ เกณฑ์ของโคชี

บทนิยาม 3.8.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ แล้ว จะเรียก $\{a_n\}$ ว่า ลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งทำให้

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad \text{เมื่อ} \quad n \geqslant n_0 \quad \text{และ} \quad m \geqslant n_0$$

นั่นคือ อาจกล่าวโดยคร่าว ๆ ได้ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ จะเป็นลำดับโคชี ถ้า a_n และ a_m ต่างก็มีค่าเข้าใกล้กัน เมื่อ n และ m มีค่ามาก ๆ นั่นเอง

จะเห็นว่า สำหรับลำดับโคชี $\{a_n\}$ ใด ๆ นั้น $|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant n_0$ ดูรูป 3.7.1



รูป 3.7.1

$$a_n \,\varepsilon\, (a_{n_0} - \varepsilon, a_{n_0} + \varepsilon) \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant n_0$$

ทฤษฎีบท 3.8.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ สมมติให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

และ $\quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = L$

สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งทำให้

$$|a_m - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad m \geqslant n_0$$

และ

$$|a_n - L| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \geqslant n_0$$

ดังนั้น สำหรับ $m \geqslant n_0$ และ $n \geqslant n_0$ จึงได้ว่า

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - L) + (L - a_n)| \\ &\leqslant |a_m - L| + |L - a_n| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 3.8.2 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

พิสูจน์ สมมติว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว สำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งทำให้

$$|a_m - a_n| < \varepsilon \quad \text{สำหรับ} \quad m \geqslant n_0 \quad \text{และ} \quad n \geqslant n_0$$

แล้ว $|a_m - a_{n_0}| < \varepsilon$ สำหรับ $m \geqslant n_0$

ดังนั้น ถ้า $m \geqslant n_0$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |a_m| &= |a_m - a_{n_0} + a_{n_0}| \\ &\leqslant |a_m - a_{n_0}| + |a_{n_0}| \\ &< \varepsilon + |a_{n_0}| \quad \text{เมื่อ} \quad m \geqslant n_0 \end{aligned}$$

ให้ M เป็นค่าสูงสุดระหว่าง $(|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0-1}|)$ แล้วย่อมได้ว่า

$$|a_m| < M + \varepsilon + |a_{n_0}| \qquad (m \in N)$$

นั่นแสดงว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด #

ทฤษฎีบท 3.8.3 คุณสมบัติความบริบูรณ์ของเซตจำนวนจริง (Completeness Property of R)

ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี โดย ท.บ. 3.4.7 จะได้ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ย่อมมีลำดับย่อย $\{a_{n_j}\}$ ที่เป็นลำดับทางเดียว และโดย ท.บ. 3.8.2 ได้ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ดังนั้นลำดับย่อย $\{a_{n_j}\}$ ย่อมมีขอบเขตจำกัดด้วย จึงได้ว่า $\{a_{n_j}\}$ ย่อมลู่เข้าสู่บางค่าของ $a \in R$

จะแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ก็ลู่เข้าสู่ a ด้วย

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$

เนื่องจากลำดับ $\{a_{n_j}\}$ ลู่เข้าสู่ a

ดังนั้น จะมีจำนวนเต็มบวก J ซึ่ง

$$|a_{n_j} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (j \geqslant J) \tag{1}$$

เนื่องจาก $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี จึงมีจำนวนเต็มบวก K ซึ่ง

$$|a_m - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (m, n \geqslant K) \tag{2}$$

อาจจะเลือก K ที่ $K \geqslant J$

สมมติว่า k เป็นจำนวนเต็มบวก และ $k \geqslant K$ แล้ว $k \geqslant J$

ดังนั้น จาก (1) จึงได้ว่า

$$|a_{n_k} - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{.......... (3)}$$

และ $n_k \geqslant k \geqslant K$ ด้วย

ดังนั้น จาก (2) จึงได้ว่า

$$|a_k - a_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{.......... (4)}$$

จาก (3) และ (4) จึงได้ว่า

$$|a_k - a| < \varepsilon \qquad (k \geqslant K)$$

นั่นแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า #

ตัวอย่าง 3.8.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งกำหนดโดย

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n) \qquad \text{ทุก ๆ} \quad n \in N$$

จะแสดงว่า $|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2^{n-2}}$ และพิสูจน์ว่า $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี และเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

จาก $$a_{n+2} = \frac{1}{2}(a_{n+1} + a_n)$$

จะได้ว่า $$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n - a_{n+1})$$

$$\therefore \quad |a_{n+2} - a_{n+1}| = \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n|$$

โดย $$|a_3 - a_2| = \frac{1}{2}|a_2 - a_1| = \frac{1}{2}(2) = 1$$

$$|a_4 - a_3| = \frac{1}{2}|a_3 - a_2| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|a_2 - a_1|\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1) = \frac{1}{2}$$

โดยการอุปมานทางคณิตศาสตร์จะได้ว่า

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{2^{n-2}} \qquad \text{เมื่อ} \quad n \geqslant 2 \quad \text{และ} \quad n \in N$$

และจาก $|a_m - a_n| \leqslant |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n|$ เมื่อ $m > n$

$$\leqslant \frac{1}{2^{m-3}} + \frac{1}{2^{m-4}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{1}{2^{n-2}}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n-4}}$$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า

ลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชี และเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

ทฤษฎีบท 3.8.4 ทฤษฎีบทช่วงสอดแทรก (The nested-interval theorem)

สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ ให้ $I_n = [a_n, b_n]$ เป็นช่วงปิด (ที่ไม่ใช่ช่วงเปล่า) ของจำนวนจริง ซึ่ง $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \ldots I_n \supset I_{n+1} \ldots$ และ $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n)$ เท่ากับ $\lim_{n\to\infty}$ (ความยาวของช่วง I_n) $= 0$ แล้ว $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ย่อมมีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ จาก $I_n \supset I_{n+1}$ ดังนั้นจึงได้ว่า $a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n$

นั่นแสดงว่า ลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับไม่ลดและเป็นลำดับไม่เพิ่มตามลำดับ นอกจากนั้นยังได้ว่า ทุก ๆ พจน์ของลำดับทั้งสองนี้ต่างก็อยู่ใน I_1 ดังนั้นทั้งลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ ต่างก็เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ตาม ท.บ. 3.4.3 จึงได้ว่า ลำดับทั้งสองนี้เป็นลำดับลู่เข้าด้วย

ให้ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ และ $\lim_{n\to\infty} b_n = b$

จึงได้ว่า $b - a = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$

$\therefore\ a = b$

แต่ $a_n \leqslant a \leqslant b_n$ สำหรับแต่ละ $n \varepsilon N$ ซึ่งแสดงว่า $x \varepsilon \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

ดังนั้น จะไม่มี $z \neq x$ ที่จะสามารถอยู่ใน $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ได้ และ $|z - x|$ ก็จะใหญ่กว่า ความยาวของ I_n สำหรับ n ที่ใหญ่พอ

ดังนั้น $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ จะมี x เพียงจุดเดียวเท่านั้นและไม่มีจุดอื่น ๆ อีกแล้ว #

ทฤษฎีบท 3.8.5 ทฤษฎีบทบอลซาโน-ไวแอร์สตราส (Bolzano-weierstrass Theorem)

ทุก ๆ ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดย่อมมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว จะมีช่วงปิดที่มีขอบเขตจำกัด

$$I_0 = [a, b] \quad \text{ซึ่ง} \quad a_n \varepsilon I_0 \quad \text{ทุก ๆ} \quad n \varepsilon N$$

พิจารณาช่วง $I_1^1 = \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$, $I_1^2 = \left[\frac{a+b}{2}, b\right]$

แล้วจะมีเซตอนันต์ S_1 ซึ่งเป็นเซตย่อยของ N ซึ่ง

$$\{a_n : n \varepsilon S_1\} \subset I_1^1 \quad \text{หรือ} \quad \{a_n : n \varepsilon S_1\} \subset I_1^2$$

สมมติว่า ให้ชื่อเป็นช่วง I_1

จากช่วง I_1 สร้างช่วงย่อย I_2^1 กับ I_2^2 เป็นครึ่งหนึ่งของ I_1 เช่นเดียวกับขั้นแรก

ก็จะมีเซตอนันต์ S_2 ที่เป็นเซตย่อยของ N อีก ซึ่ง

$$\{a_n : n \varepsilon S_2\} \subset I_2^1 \quad \text{หรือ} \quad \{a_n : n \varepsilon S_2\} \subset I_2^2$$

สมมติว่า ให้ชื่อเป็นช่วง I_2

จะทำด้วยขั้นตอนเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ ...

ผลสุดท้ายเราจะได้ลำดับของช่วงปิด

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_k \supset \ldots$$

และจะมีเซตอนันต์ S_k ที่เป็นเซตย่อยของ N ซึ่ง

$$\{a_n : n \varepsilon S_k\} \subset I_k$$

สร้างลำดับย่อย $\{a_{n_k}\}$ ดังนี้โดย

สำหรับแต่ละ $k \varepsilon N$ เมื่อ $a_{n_k} \varepsilon I_k$ แล้ว

$$|a_{n_k} - a_{n_i}| \leqslant \frac{1}{2^k}(b-a) \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad i > k$$

เพราะฉะนั้น $\{a_{n_k}\}$ จึงเป็นลำดับโคชี

จาก ท.บ. 3.8.3 จึงกล่าวได้ว่า

ลำดับ $\{a_{n_k}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้น ลำดับ $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

หมายเหตุ ท.บ. 3.8.5 นี้เรียกว่า คุณสมบัติการปกคลุมแน่นของเซตจำนวนจริง (Compactness Property of R)

แบบฝึกหัด 3.8.1

1. ลำดับ $\{a_n\}$ มีคุณสมบัติว่า

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_{n+1} - a_n| \quad \text{สำหรับทุก ๆ} \quad n \varepsilon N$$

จงพิสูจน์ว่า ลำดับ $\{a_n\}$ นี้เป็นลำดับโคชี และเป็นลำดับลู่เข้า

2. จากข้อกำหนดที่ว่า ทุก ๆ ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดย่อมมีลำดับย่อยที่ลู่เข้าด้วย จงพิสูจน์ว่าทุก ๆ ลำดับโคชีเป็นลำดับลู่เข้า (นั่นคือ กำหนดให้ R มีคุณสมบัติการปกคลุมแน่น จงพิสูจน์ว่า ย่อมมีคุณสมบัติความบริบูรณ์ด้วย)

3. จงแสดงว่า $\left\{\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right\}$ เป็นลำดับโคชี

บทสรุปทบทวน
บทที่ 3 ลำดับของจำนวนจริง

3.1 บทนิยามของลำดับ

บทนิยาม 3.1.1 ลำดับของจำนวนจริงก็คือ ฟังก์ชันชนิดหนึ่งซึ่งมีโดเมนเป็นสมาชิกในเซตของจำนวนธรรมชาติ $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ และมีพิสัยเป็นสมาชิกในเซตของจำนวนจริง R

บทนิยาม 3.1.2 ถ้าฟังก์ชัน $f : N \to R$ มีโดเมนเป็นเซต $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ เมื่อ n เป็นจำนวนที่นับได้ถ้วน จะเรียกลำดับนั้นว่า ลำดับจำกัด แต่ถ้าลำดับมีโดเมนเป็นเซต $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ จะเรียกลำดับนั้นว่า ลำดับอนันต์

บทนิยาม 3.1.3 พจน์ทั่วไปของลำดับ หมายถึง พจน์ที่ n ของลำดับซึ่งเป็นพจน์ที่สามารถทำให้ทราบพจน์ต่าง ๆ ทั้งหมดของลำดับได้

บทนิยาม 3.1.4 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับแล้ว จะได้ว่า

1) ผลบวกของลำดับคือ $\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$
2) ผลต่างของลำดับคือ $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$
3) ผลคูณของลำดับคือ $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$
4) ผลหารของลำดับคือ $\dfrac{\{a_n\}}{\{b_n\}} = \left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ เมื่อ $b_n \neq 0$

บทนิยาม 3.1.5 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ และ $\{r_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนธรรมชาติ (นั่นคือ $r_n \in N$ ทุก ๆ n) ซึ่ง $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots < r_n < \ldots$ แล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_{r_n}\}$ ว่าเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{a_n\}$

บทนิยาม 3.1.6 ถ้า $A = \{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ และ $P = \{n_i\}$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนธรรมชาติที่มีค่าเพิ่มขึ้นเสมอแล้ว จะเรียกลำดับที่ได้จากฟังก์ชันประกอบ $A \circ P$ ว่า เป็นลำดับย่อยของ $\{a_n\}$

3.2 ลิมิตของลำดับ

บทนิยาม 3.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับแล้ว จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L (ขณะที่ n เข้าใกล้อนันต์) ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ที่กำหนดให้ใด ๆ แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 (อาจขึ้นอยู่กับ ε) ซึ่ง $|a_n - L| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant N_0$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ หรือ $a_n \to L$ ขณะที่ $n \to \infty$

3.3 ลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออก

บทนิยาม 3.3.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ L เป็นจำนวนจริงแล้ว จะเรียกว่า ลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L และเรียก $\{a_n\}$ นี้ว่า เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 3.3.2 ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นลำดับลู่ออกก็ต่อเมื่อลำดับนั้นไม่เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 3.3.3 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับลู่ออกทางบวกหรือลู่ออกไปยัง $+\infty$ ถ้ากำหนด $M > 0$ มาให้แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ซึ่ง $a_n \geqslant M$ สำหรับทุก ๆ $n \geqslant N_0$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ หรือ $a_n \to +\infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

บทนิยาม 3.3.4 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับลู่ออกทางลบ หรือลู่ออกไปยัง $-\infty$ ถ้ากำหนด $M > 0$ มาให้แล้ว จะมีจำนวนเต็มบวก N_0 ที่ทำให้ $a_n < -M$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \geqslant N_0$ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$ หรือ $a_n \to -\infty$ ขณะที่ $n \to \infty$

บทนิยาม 3.3.5 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก โดยที่ไม่เป็นลำดับลู่ออกทางบวกหรือลำดับลู่ออกทางลบแล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า เป็นลำดับแกว่งกวัด

ทฤษฎีบท 3.3.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่เข้าสู่ L แล้ว ลำดับย่อยใด ๆ ของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่เข้าสู่ค่า L เดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.3.2

(i) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางบวกแล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่ออกทางบวกด้วย

(ii) ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกทางลบแล้ว ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ ย่อมลู่ออกทางลบด้วย

3.4 ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและลำดับทางเดียว

บทนิยาม 3.4.1 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตบนก็ต่อเมื่อพิสัยของลำดับมีขอบเขตบน และถ้า M' เป็นขอบเขตบนของ $\{a_n\}$ โดยมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ ค่าขอบเขตบน M ของ $\{a_n\}$ ได้ว่า $M' \leqslant M$ แล้ว จะเรียก M' ว่าเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของลำดับ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วย $\text{l.u.b.}\{a_n\}$

บทนิยาม 3.4.2 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตล่างก็ต่อเมื่อพิสัยของลำดับมีขอบเขตล่าง และถ้า m' เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_n\}$ โดยมีคุณสมบัติว่า ทุก ๆ ค่าขอบเขตล่าง m ของ $\{a_n\}$ ได้ว่า $m \leqslant m'$ แล้ว จะเรียก m' ว่าเป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของลำดับ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วย $\text{g.l.b.}\{a_n\}$

บทนิยาม 3.4.3 ลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดก็ต่อเมื่อลำดับ $\{a_n\}$ มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

บทนิยาม 3.4.4 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับไม่ลด ถ้า $a_n \leqslant a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n และถ้า $a_n < a_{n+1}$ เสมอแล้ว จะเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับเพิ่มโดยแท้

บทนิยาม 3.4.5 ลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับไม่เพิ่ม ถ้า $a_n \geqslant a_{n+1}$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ n และถ้า $a_n > a_{n+1}$ เสมอแล้ว จะเรียกลำดับนี้ว่า ลำดับลดโดยแท้

บทนิยาม 3.4.6 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่ลด หรือเป็นลำดับไม่เพิ่มแล้ว จะเรียกลำดับ $\{a_n\}$ ว่า ลำดับทางเดียว

ทฤษฎีบท 3.4.1 ลำดับไม่ลดซึ่งมีขอบเขตบนย่อมเป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.4.2 ลำดับไม่เพิ่มซึ่งมีขอบเขตล่างย่อมเป็นลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.4.3 ลำดับทางเดียวใด ๆ จะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎีบท 3.4.4 ลำดับไม่ลดซึ่งไม่มีขอบเขตบนย่อมลู่ออกไปสู่ $+\infty$

ทฤษฎีบท 3.4.5 ลำดับไม่เพิ่มซึ่งไม่มีขอบเขตล่างย่อมลู่ออกไปยัง $-\infty$

ทฤษฎีบท 3.4.6 สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ย่อมมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับทางเดียว

3.5 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่เข้า

ทฤษฎีบท 3.5.1 สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎีบท 3.5.2 ลำดับลู่เข้าใด ๆ จะมีค่าลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.5.3 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าใด ๆ แล้ว จะได้ว่า

1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ เมื่อ $k \in R$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n) = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty} b_n\right)$

4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ เมื่อ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

ทฤษฎีบท 3.5.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = |\lim_{n\to\infty} a_n|$$

3.6 คุณสมบัติและพีชคณิตของลำดับลู่ออก

ทฤษฎีบท 3.6.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่ลู่ออกไปยัง $+\infty$ แล้ว ผลบวกและผลคูณของลำดับทั้งสองย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$ ด้วย

ทฤษฎีบท 3.6.2 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ และลำดับ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว $\{a_n+b_n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$

ทฤษฎีบท 3.6.3 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ ลู่ออกไปยัง $+\infty$ และลำดับ $\{b_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ลำดับ $\{a_n+b_n\}$ ย่อมลู่ออกไปยัง $+\infty$ ด้วย

หมายเหตุ จาก ท.บ. 3.6.1 – 3.6.3 ถ้าแทน $+\infty$ ด้วย $-\infty$ ผลลัพธ์ก็ยังคงเป็นจริงอยู่

3.7 ลิมิตซุพีเรียร์และลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ

บทนิยาม 3.7.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขตจำกัด และให้ $B_n = \text{l.u.b.}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว ลิมิตซุพีเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วย $\limsup_{n\to\infty} a_n$ หรือ $\limsup a_n$ หรือ $\overline{\lim}\, a_n$ นิยามโดย

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} B_n$$

หรือ $$\limsup a_n = \lim B_n$$

บทนิยาม 3.7.2 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขตจำกัด และให้ $A_n = \text{g.l.b.}\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots\}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว ลิมิตอินฟีเรียร์ของลำดับ $\{a_n\}$ เขียนแทนด้วย $\liminf_{n\to\infty} a_n$ หรือ $\liminf a_n$ หรือ $\underline{\lim}\, a_n$ นิยามโดย

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

หรือ $$\liminf a_n = \lim A_n$$

ทฤษฎีบท 3.7.1 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว

$$\liminf a_n \leqslant \limsup a_n$$

ทฤษฎีบท 3.7.2 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดและ $a_n \leqslant b_n$ ทุกค่า $n \in N$ แล้ว จะได้ว่า

(1) $\limsup a_n \leqslant \limsup b_n$

(2) $\liminf a_n \leqslant \liminf b_n$

ทฤษฎีบท 3.7.3 ถ้า $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัดแล้ว

(1) $\limsup(a_n+b_n) \leqslant \limsup a_n + \limsup b_n$

(2) $\liminf(a_n+b_n) \geqslant \liminf a_n + \liminf b_n$

ทฤษฎีบท 3.7.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว

$$\liminf a_n = \limsup a_n = \lim a_n$$

ทฤษฎีบท 3.7.5 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด ซึ่ง

$$\liminf a_n = \limsup a_n = L$$

แล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim a_n = L$

บทนิยาม 3.7.3 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตบนแล้ว

$$\limsup a_n = +\infty$$

บทนิยาม 3.7.4 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตล่างแล้ว

$$\liminf a_n = -\infty$$

ทฤษฎีบท 3.7.6 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่มีขอบเขตแล้ว

$$\liminf a_n \leqslant \limsup a_n$$

ทฤษฎีบท 3.7.7 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง

(1) ถ้า $\limsup a_n = \liminf a_n = +\infty$ แล้ว $\lim a_n = +\infty$

(2) ถ้า $\limsup a_n = \liminf a_n = -\infty$ แล้ว $\lim a_n = -\infty$

3.8 ลำดับโคชีและทฤษฎีบทบอลซาโน-ไวแอร์สตราส

บทนิยาม 3.8.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับใด ๆ แล้ว จะเรียก $\{a_n\}$ ว่า ลำดับโคชี ถ้าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้จะมีจำนวนเต็มบวก n_0 ซึ่งทำให้ $|a_n - a_m| < \varepsilon$ เมื่อ $n \geqslant n_0$ และ $m \geqslant n_0$

ทฤษฎีบท 3.8.1 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับโคชี

ทฤษฎีบท 3.8.2 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว ลำดับ $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับที่มีขอบเขตจำกัด

ทฤษฎีบท 3.8.3 คุณสมบัติความบริบูรณ์ของเซตจำนวนจริง (Completeness property of R)

ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ เป็นลำดับโคชีแล้ว $\{a_n\}$ ย่อมเป็นลำดับลู่เข้าด้วย

ทฤษฎีบท 3.8.4 สำหรับแต่ละ $n \in N$ ให้ $I_n = [a_n, b_n]$ เป็นช่วงปิด (ที่ไม่ใช่ช่วงเปล่า) ของจำนวนจริง ซึ่ง $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots \supset I_n \supset I_{n+1} \supset \ldots$

และ $\lim_{n \to \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \to \infty}$ (ความยาวของช่วง I_n) $= 0$ แล้ว

$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ ย่อมมีจำนวนจริงเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 3.8.5 ทฤษฎีบทบอลซาโน-ไวแอร์สตราส (Bolzano-Weierstrass Theorem) ทุก ๆ ลำดับที่มีขอบเขตจำกัดย่อมมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

หมายเหตุ ท.บ. 3.8.5 นี้ เป็นคุณสมบัติการปกคลุมแน่นของเซตจำนวนจริง (Compactness Property of R)

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 3.1.1

1.

1.1) $(-1)^n$

1.2) $\frac{n}{n+1}$

1.3) $\sqrt{2n}$

1.4) $(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$

1.5) 3^{n-1}

1.6) $\frac{1-(-1)^n}{2}$

2.

2.1) 3, 7, 11, 15, 19, 23, . . .

2.2) $\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}, \frac{1}{11}, \frac{1}{13}, \ldots$

2.3) $\frac{6}{1}, \frac{11}{4}, \frac{16}{9}, \frac{21}{16}, \frac{26}{25}, \frac{31}{36}, \ldots$

2.4) $2, 0, \frac{2}{81}, 0, \frac{2}{625}, 0, \ldots$

2.5) $\frac{x^3}{3!}, \frac{x^5}{5!}, \frac{x^7}{7!}, \frac{x^9}{9!}, -\frac{x^{11}}{11!}, \frac{x^{13}}{13!}, \ldots$

3.

3.1) ผลบวก คือ $0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$

ผลต่าง คือ $-2, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots$

ผลคูณ คือ $-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$

ผลหาร คือ $-1, -2, -3, -4, \ldots$

3.2) ผลบวก คือ 2, 3, 10, 27, . . .

ผลต่าง คือ 0, 3, 8, 27, ...

ผลคูณ คือ 1, 0, 9, 0, . . .

ผลหารไม่มี (เพราะมีการหารด้วยศูนย์)

3.3) ผลบวก คือ $\left\{\frac{8n^2+2n}{2n+1}\right\}$

ผลต่าง คือ $\left\{\frac{8n^2+2n-2}{2n+1}\right\}$

ผลคูณ คือ $\left\{\frac{4n-1}{2n-1}\right\}$

ผลหาร คือ $\{8n^2+2n-1\}$

3.4) ผลบวก คือ $\left\{\frac{5n^3+n^2+1-(-1)^n}{n^4}\right\}$

ผลต่าง คือ $\left\{\frac{5n^3+n^2-1+(-1)^n}{n^4}\right\}$

ผลคูณ คือ $\left\{\frac{(5n+1)(1-(-1)^n)}{n^6}\right\}$

ผลหาร คือ $\left\{\frac{n^2(5n+1)}{1-(-1)^n}\right\}$

4. $\{4(2^i-1)+3\}$

5. $\left\{\frac{1}{6i+1}\right\}$

6. $\left\{\frac{10i-4}{(2i-1)^2}\right\}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.2.1

5. $N_0 = 27$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.3.1

1.

1.1) ลำดับ $\left\{\frac{3n-1}{4n+5}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{3}{4}$

1.2) ลำดับ $\left\{\frac{3+2(10)^n}{5+3(10)^n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ $\frac{2}{3}$

1.3) ลำดับ $\left\{\frac{2n}{n+4\sqrt{n}}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 2

1.4) ลำดับ $\left\{\frac{2n}{n+3}\right\}$ ลู่เข้าสู่ 2

1.5) ลำดับ $\left\{\frac{10^5}{n}\right\}$ ลู่เข้าสู่ **0**

2.

2.1) ลู่ออกไปยัง $+\infty$

2.2) ลู่ออกไปยัง $-\infty$

2.3) เป็นลำดับแกว่งกวัด

2.4) เป็นลำดับแกว่งกวัด

2.5) เป็นลำดับแกว่งกวัด

2.6) เป็นลำดับแกว่งกวัด

2.7) ลู่เข้าสู่ 1

คำตอบแบบฝึกหัด 3.4.1

1. 1.1) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant 1\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\left\{x \varepsilon R : x \leqslant \frac{1}{2}\right\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 1

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ $\frac{1}{2}$

เป็นลำดับไม่ลด

1.2) ขอบเขตบน คือ $\left\{x \varepsilon R : x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x < -1\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ $\frac{3}{2}$

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ -1

ไม่เป็นลำดับเพิ่มและไม่เป็นลำดับลด

1.3) ขอบเขตบน คือ $\left\{x \varepsilon R : x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant -1\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ $\frac{1}{2}$

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ -1

ไม่เป็นลำดับเพิ่มและไม่เป็นลำดับลด

1.4) ขอบเขตบน คือ $\{x \in R : x \geqslant 1\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\{x \in R : x \leqslant 0\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 1

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 0

เป็นลำดับไม่ลด

1.5) ขอบเขตบน คือ $\{x \in R : x \geqslant 2\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\{x \in R : x \leqslant 1\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 2

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 1

เป็นลำดับไม่เพิ่ม

1.6) ขอบเขตบน คือ $\{x \in R : x \geqslant 2\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 2

ขอบเขตล่าง ไม่มี

ขอบเขตล่างค่ามากสุด ไม่มี

เป็นลำดับไม่เพิ่ม

3. ลู่เข้าสู่ 0

4. 9

คำตอบแบบฝึกหัด 3.5.1

1.

1.1) -1

1.2) 0

1.3) 0

1.4) 1

1.5) $-\frac{3}{5}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.6.1

2.

2.1) เช่น ลำดับ $\{0, 1, 0, 2, 0, 3, \ldots\}$ กับลำดับ $\{1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots\}$

2.2) เช่น ลำดับ $\{0, -1, 0, -2, 0, -3, \ldots\}$ กับลำดับ $\{-1, 0, -2, 0, -3, 0, \ldots\}$

2.3) เช่น ลำดับ $\{1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots\}$ กับลำดับ $\{0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots\}$

3. เช่น ลำดับ $\{n\}$ กับลำดับ $\{-n\}$

ลำดับ $\{n\}$ กับลำดับ $\{n\}$

4. เช่น ลำดับ $\{(-1)^n\}$ กับลำดับ $\{(-1)^n\}$

ลำดับ $\{n\}$ กับลำดับ $\{n\}$

5. เช่น 0 คูณกับลำดับ $\{n\}$

1 คูณกับลำดับ $\{n\}$

คำตอบแบบฝึกหัด 3.7.1

1.

1.1) $\limsup a_n = 0$, $\liminf a_n = 0$

1.2) $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = -1$

1.3) $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = -\infty$

1.4) $\limsup a_n = 1$, $\liminf a_n = 1$

1.5) $\limsup a_n = \frac{2}{3}$, $\liminf a_n = \frac{2}{3}$

1.6) $\limsup a_n = +\infty$, $\liminf a_n = 1$