บทที่ 2
ระบบจำนวนจริง

หัวข้อเรื่อง

2.1 จำนวนธรรมชาติ

2.2 จำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะ

2.3 จำนวนอตรรกยะ

2.4 จำนวนจริง

 2.4.1 เซตที่มีขอบเขตจำกัด

 2.4.2 ค่าสัมบูรณ์

 2.4.3 คุณสมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง

 2.4.4 คุณสมบัติความหนาแน่นของจำนวนจริง

 2.4.5 ช่วง

 2.4.6 ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง

2.5 เซตเปิดและเซตปิดในระบบจำนวนจริง

วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 2 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. บอกที่มาและความหมายของจำนวนธรรมชาติได้
2. บอกความหมายของจำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะได้
3. บอกคุณสมบัติของจำนวนตรรกยะได้
4. อธิบายความหมายของจำนวนอตรรกยะได้
5. บอกได้ว่าเซตย่อยของจำนวนจริงที่กำหนดให้มีขอบเขตจำกัดหรือไม่
6. บอกความหมายและคุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ได้
7. บอกคุณสมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริงได้
8. บอกคุณสมบัติความหนาแน่นของจำนวนจริงได้
9. เขียนช่วงที่กำหนดให้ลงในเส้นจำนวนจริงได้
10. บอกคุณสมบัติภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริงได้

11. บอกความหมายของเซตเปิดและเซตปิดได้
12. บอกได้ว่าเซตที่กำหนดให้เป็นเซตเปิดหรือเซตปิดหรือไม่
13. บอกความหมายของจุดข้างในเซต, จุดข้างนอกเซต, จุดลิมิตและจุดขอบเขตได้ ตลอดจนสามารถหาจุดต่าง ๆ เหล่านี้ของเซตที่กำหนดให้ได้

บทที่ 2
ระบบจำนวนจริง
(THE REAL NUMBER SYSTEM)

จำนวนที่มักใช้กันในทางคณิตศาสตร์ อาจจำแนกออกได้เป็นจำนวนจริง (real numbers) กับจำนวนเชิงซ้อน (complex numbers) ซึ่งในที่นี้จะศึกษาและกล่าวถึงเฉพาะจำนวนจริงเท่านั้น (โดยจำนวนจริงนี้เป็นส่วนหนึ่งของจำนวนเชิงซ้อน)

ก่อนอื่น จะศึกษาถึงส่วนประกอบของจำนวนจริงเสียก่อนว่า มีลักษณะโครงสร้างเป็นอย่างไร จำนวนจริงประกอบด้วยจำนวนที่สำคัญสองชนิดคือ

1. จำนวนตรรกยะ (Rational numbers) จำนวนตรรกยะประกอบด้วย

1.1 จำนวนเต็ม (Integers) ซึ่งแบ่งได้เป็นสามจำพวกคือ

ก) จำนวนเต็มบวก (positive integers)
ได้แก่ 1,2,3,...

ข) จำนวนเต็มลบ (negative integers)
ได้แก่ $-1, -2, -3, \ldots$

ค) จำนวนเต็มศูนย์ (0)

1.2 เศษส่วน (Fraction) ได้แก่จำนวนที่เขียนอยู่ในรูป $\frac{p}{q}$ โดย p และ q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$ (ถ้า $q = 1$ ก็จะได้ $\frac{p}{1} = p$ ดังนั้นจำนวนเต็ม p ทุก ๆ จำนวนก็เป็นเศษส่วนด้วยโดยมีส่วนเป็น 1)

นอกจากนี้จำนวนตรรกยะยังมีคุณสมบัติที่สำคัญคือจำนวนตรรกยะนั้นสามารถเขียนได้ในรูปทศนิยมรู้จบ หรือ ทศนิยมไม่รู้จบแบบเวียนซ้ำ เช่น

$$4.1 = \frac{41}{10}, \quad 0.333\ldots = \frac{1}{3} \text{ เป็นต้น}$$

2. จำนวนอตรรกยะ (Irrational numbers) ก็คือจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ซึ่งอาจเขียนได้ในรูป ทศนิยมไม่รู้จบแบบไม่เวียนซ้ำ เช่น

$$\sqrt{2} = 1.732\ldots, \qquad \pi = 3.14159\ldots$$

ต่อไปนี้เราจะศึกษาในรายละเอียดเกี่ยวกับจำนวนต่าง ๆ

2.1 จำนวนธรรมชาติ (NATURAL NUMBERS)

จำนวนธรรมชาติ นับว่าเป็นจำนวนชนิดแรกที่มนุษย์รู้จัก โดยเริ่มจากการเรียนรู้เกี่ยวกับการนับ จำนวนแรกที่รู้จักก็คงจะเป็นหนึ่ง จำนวนต่อมาก็คงเป็น สอง ... เราจึงเรียกจำนวนธรรมชาติอีกชื่อว่า จำนวนนับ และมักใช้ สัญลักษณ์ N แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ โดย $N = \{1,2,3,...\}$

เซต N นี้สามารถกำหนดขึ้นมาได้ด้วยคุณสมบัติของความสัมพันธ์แห่งอันดับ (ordered relation) ของบรรดาสมาชิกในเซต N ในตอนต่อไปนี้ จะมาศึกษาถึงคุณสมบัติแห่งอันดับของเซต N แล้ว ก็จะนิยามการบวกและการคูณจากคุณสมบัติแห่งอันดับเหล่านี้ด้วย

บทนิยาม 2.1.1 ให้ S เป็นเซตใด ๆ จะเรียก S ว่าเป็นเซตที่มีอันดับ (ordered set) ถ้าแต่ละคู่ของสมาชิกใน S มี ความสัมพันธ์แห่งอันดับ (ordered relation) "$\leqslant$" (อ่านว่า น้อยกว่าหรือเท่ากับ) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ ดังต่อไปนี้

1) สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$ และ $y \varepsilon S$ จะได้ว่า $x \leqslant y$ หรือ $y \leqslant x$

2) ถ้า $x \leqslant y$ และ $y \leqslant x$ แล้ว $x = y$

3) ถ้า $x \leqslant y$ และ $y \leqslant z$ แล้ว $x \leqslant z$

สำหรับ $x \leqslant y$ บางทีก็เขียนว่า $y \geqslant x$

ถ้า $x \leqslant y$ และ $x \neq y$ แล้ว จะเขียนแทนด้วย $x < y$ หรือ $y > x$ (เครื่องหมาย $\geqslant$ อ่านว่า มากกว่า หรือเท่ากับ, $>$ อ่านว่า มากกว่า, $<$ อ่านว่า น้อยกว่า)

เซตของจำนวนธรรมชาติ คือ เซต N ก็เป็นเซตที่มีอันดับเซตหนึ่งซึ่งมีความสัมพันธ์แห่งอันดับบน N ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้ด้วย คือ

4) ทุก ๆ เซตย่อยของ N (ที่ไม่เป็นเซตเปล่า) ย่อมมีสมาชิกตัวแรกหรือตัวที่น้อยที่สุดหนึ่งตัว

นั่นคือ ถ้า $S \subseteq N$ และ $S \neq \Phi$ แล้วจะมี $x \varepsilon S$ ซึ่ง $x \leqslant y$ สำหรับทุก ๆ $y \varepsilon S$ โดยเฉพาะในเซต N จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดซึ่งเขียนแทนด้วย 1

5) สำหรับทุก ๆ สมาชิกของ N ยกเว้น 1 จะมีสมาชิกนำหน้าที่ติดกัน

นั่นคือ ถ้า $x \varepsilon N$, $x \neq 1$ จะมี $y \varepsilon N$ ซึ่ง $y < x$ และสำหรับทุก ๆ $z < x$ จะได้ว่า $z \leqslant y$ (y เป็นสมาชิกนำหน้าที่ติดกัน)

6) N จะไม่มีสมาชิกตัวสุดท้าย (คือไม่มีสมาชิกตัวที่มากที่สุด) นั่นคือสำหรับทุก ๆ $x \varepsilon N$ จะมี $y \varepsilon N$ ซึ่ง $x < y$

จากคุณสมบัติข้อ 4) และข้อ 6) จะได้ว่า

ทุก ๆ สมาชิกของ N จะมีสมาชิกตัวถัดไป

นั่นคือสำหรับทุก ๆ $x \varepsilon N$ จะมี $y \varepsilon N$ ซึ่ง $x < y$ และสำหรับทุก ๆ $x < z$ จะได้ว่า $y \leqslant z$

สมาชิกตัวถัดไปจาก x จะเขียนแทนด้วย x' ดังนั้น $1' = 2,\ 2' = 3,\ 3' = 4 \ldots$

อนึ่ง สำหรับเซต S ซึ่งเป็นเซตย่อยของ $N(S \subseteq N)$ จะได้ว่าเซต S เป็นเซตจำกัด (finite set) ถ้า $S = \Phi$ หรือเซต S มีสมาชิกตัวที่มากที่สุด ถ้า S ไม่มีสมาชิกตัวที่มากที่สุดได้ว่า เซต S ว่าเป็นเซตอนันต์ (infinite set)

จากเรื่องราวดังกล่าวมาแล้ว จะนำมาศึกษาถึงคุณสมบัติที่สำคัญของจำนวนธรรมชาติต่อไป

ทฤษฎีบท 2.1.1 หลักของการอุปมานทางคณิตศาสตร์

(The principle of mathematical induction)

ถ้า $S \subseteq N$ ซึ่ง

i) $1 \varepsilon S$

ii) ถ้า $x \varepsilon S$ แล้ว $x' \varepsilon S$ ด้วย แล้วจะได้ว่า $S = N$

พิสูจน์ สมมุติว่า $S \neq N$ แล้วส่วนเติมเต็มของเซต S (สมมุติว่าคือเซต T) ย่อมไม่เป็นเซตเปล่า

โดยคุณสมบัติข้อที่ 4) T จะมีสมาชิกตัวแรกสมมุติให้เป็น x (คือ $x \varepsilon T$)

$\because 1 \varepsilon S$ ดังนั้น $x \neq 1$

เพราะฉะนั้นโดยคุณสมบัติข้อที่ 5 จึงได้ว่า x มีสมาชิกนำหน้าที่ติดกัน คือ y

จาก ii) ได้ว่าถ้า $y \varepsilon S$ แล้ว $y' \varepsilon S$ แต่ y' ก็คือ x แสดงว่า $x \varepsilon S$

จาก $x \varepsilon S$ และ $x \varepsilon T$ (T เป็นส่วนเติมเต็มของ S) ย่อมเป็นไปไม่ได้ (เกิดข้อขัดแย้ง)

ดังนั้น ที่สมมุติว่า $S \neq N$ นั้น จึงไม่เป็นจริง เพราะฉะนั้น $S = N$

อนึ่ง สามารถนิยามการบวก (+) ในเซต N ได้ โดยกำหนดว่าสำหรับ $x \varepsilon N$, x' ก็คือ $x + 1$ (คือสมาชิกตัวถัดไปของ x) และ $x + y$ ก็คือสมาชิกตัวถัดไปตัวที่ y ของ x

สำหรับการคูณ ($\times$) ก็สามารถกำหนดได้จากนิยามการบวก คือสำหรับ $x \varepsilon N$ ให้ $2x = x + x$ และ $yx = x + x + \ldots + x$ (บวกกันจำนวน y ครั้ง)

จาก ทฤษฎีบท 2.1.1 อาจกล่าวได้ว่า

"ถ้า $S \subseteq N$ ซึ่ง

i) $1 \varepsilon S$

ii) ถ้า $k \varepsilon S$ แล้ว $k + 1 \varepsilon S$ ด้วยแล้วจะได้ว่า $S = N$

เรียกคุณสมบัติข้อนี้ว่า หลักของการอุปมาน (The principle of induction) เป็นคุณสมบัติที่ใช้ในการพิสูจน์ทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญแบบหนึ่ง ซึ่งเรียกการพิสูจน์แบบนี้ว่า เป็นการพิสูจน์แบบอุปมานทางคณิตศาสตร์ (Mathematical induction) และมักใช้สำหรับการที่จะแสดงว่าข้อความ P(n) ที่โจทย์กำหนดมาให้นั้น เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ n ที่เป็นจำนวนธรรมชาติ ($n \varepsilon N$)

ตัวอย่าง 2.1.1 ให้ P(n) คือ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

จงพิสูจน์ว่า P(n) เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \varepsilon N$

พิสูจน์ ถ้าเราให้ $S = \{n : n \varepsilon N$ และ $P(n)\}$

1) P(1) หรือ $n=1$ เป็นจริงคือ $1 \varepsilon S$

$$\because \quad 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$= 1$$

$$\therefore \quad 1 \varepsilon S$$

2) สมมุติ P(k) (คือ $k \varepsilon S$) แล้วจะได้

$$1+2+3+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

เอา k+ 1 บวกเข้าทั้งสองข้าง จะได้

$$1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

$$= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$$

ดังนั้น P(k+ 1) เป็นจริงด้วย

นั่นคือ $k+1 \varepsilon S$

จากทฤษฎีบท 2.1.1 จึงสรุปได้ว่า $S=N$

นั่นคือ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \varepsilon N$

แบบฝึกหัด 2.1.1

จงใช้การพิสูจน์แบบอุปมานทางคณิตศาสตร์ พิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงสำหรับทุก ๆ ค่าของ $n \varepsilon N$

1) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

2) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

3) $2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1)$

4) ถ้า $1 + a > 0$ แล้ว $(1+a)^n \geqslant 1 + na$

5) ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^n \leqslant a$

6) ถ้า $a > 1$ แล้ว $a^n \geqslant a$

7) $a + ab + ab^2 + \ldots + ab^{n-1} = \frac{a(1-b^n)}{1-b}$

8) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 > n^4/4$

9) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ หารด้วย 9 ลงตัว

10) จงพิสูจน์ ทฤษฎีบททวินาม (Binomial theorem) :

สำหรับ $a, b \,\varepsilon\, N$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!} a^{n-1}b + \ldots + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} a^{n-k+1}b^{k-1} + \ldots + b^n$$

2.2 จำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะ

(INTEGERS AND RATIONAL NUMBERS)

จากจำนวนธรรมชาติหรือ $N = \{1,2,3\ldots\}$ จะขยายไปสู่จำนวนอื่น ๆ คือจำนวนเต็มกับจำนวนตรรกยะ โดยกำหนดให้ I เป็นเซตของจำนวนเต็ม จะได้ว่าสมาชิกของ I คือ x ซึ่ง x เป็นจำนวนธรรมชาติหรือ x เป็น 0 หรือ $-x$ เป็นจำนวนธรรมชาติ

นั่นคือ $I = \{x : x\varepsilon N \vee x = 0 \vee -x\varepsilon N\}$

$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

และเซตของจำนวนตรรกยะ ซึ่งเขียนแทนด้วยเซต Q คือเซตของจำนวนที่เขียนอยู่ในรูปเศษส่วน ของจำนวนเต็ม โดยที่ส่วนไม่เท่ากับศูนย์

สำหรับในเซต Q, การบวก (+), การคูณ ($\times$) และความสัมพันธ์ $\leqslant$ ก็สมนัยกับ $+, \times, \leqslant$ ในเซต N

ดังนั้น $(Q, +, \times, <)$ จะมีคุณสมบัติสอดคล้องกับสัจจพจน์ดังต่อไปนี้ (โดยกำหนดให้ x,y,z เป็นสมาชิกใด ๆ ที่อยู่ใน Q)

หมวดที่ 1 สัจจพจน์สำหรับการบวก (Axioms for addition)

1) $x+y \,\varepsilon\, Q$
2) $x+y = y+x$
3) $(x+y)+z = x+(y+z)$
4) ในเซต Q จะมี 0 ซึ่ง $x+0 = x = 0+x$
5) สำหรับแต่ละ $x\varepsilon Q$ จะมี $-x$ ซึ่ง $x+(-x) = 0 = (-x+x)$

หมวดที่ 2 สัจจพจน์สำหรับการคูณ (Axioms of Multiplication) (จะเขียนแทน $x \times y$ ด้วย xy)

6) $xy \,\varepsilon\, Q$
7) $xy = yx$
8) $(xy)z = x(yz)$
9) ในเซต Q จะมี 1 ซึ่ง $x1 = x = 1x$
10) สำหรับแต่ละ $x \neq 0$ จะมี $\frac{1}{x}$ ซึ่ง $\frac{1}{x}x = 1 = x\frac{1}{x}$

หมวดที่ 3 สัจจพจน์แห่งการแจกแจง (Distribution Axiom)

11) $x(y+z) = xy+xz$

ข้อสังเกต เซตใด ๆ ภายใต้การบวก (+) การคูณ ($\times$) ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติสำหรับตั้งแต่ข้อ 1 ถึงข้อ 11 นั้นจะเรียกว่า ฟิลด์ (field)

หมวดที่ 4 สัจจพจน์แห่งอันดับ (Ordered Axiom)

เซต Q ภายใต้ความสัมพันธ์แห่งอันดับ (ordered relation) $\leqslant$ เป็นเซตที่มีอันดับ (ordered set) โดยที่ความสัมพันธ์ $<$ มีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

12) สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon Q$ จะได้ว่า $x = 0$ หรือ $x < 0$ หรือ $0 < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

13) สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon Q$ ถ้า $0 < x$, $0 < y$ แล้ว $0 < x + y$ และ $0 < xy$

14) สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon Q$, $x < y$ ถ้า $0 < y - x$

ข้อสังเกต สำหรับเซตใด ๆ ภายใต้ $+, \times$ และ $<$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติ ตั้งแต่ข้อ 1) ถึงข้อ 14) จะเรียกว่า ฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field) ดังนั้นระบบจำนวนตรรกยะก็เป็นฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field) และอาจกล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างเซต N, I, Q ได้ว่า $N \subseteq I \subseteq Q$ พึงระลึกเสมอว่า สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon Q$ นั้น $\frac{x}{0} \varepsilon Q$

อนึ่ง สามารถนิยามการลบ และการหารได้ด้วยการบวกและการคูณคือ

บทนิยามการลบ สำหรับ x, y ใด ๆ $x - y$ ก็คือ $x + (-y)$

บทนิยามการหาร สำหรับ x, y ใด ๆ ซึ่ง $y \neq 0$, $\frac{x}{y}$ ก็คือ $x(\frac{1}{y})$

แบบฝึกหัด 2.2.1

1. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนตรรกยะ a,b ใด ๆ ถ้า $a<b$ แล้วย่อมมีจำนวนตรรกยะ c ซึ่ง $a<c<b$
2. จงพิจารณาว่า ในเซต I ภายใต้การบวก, การคูณ และความสัมพันธ์น้อยกว่า สอดคล้องกับสัจจพจน์ตั้งแต่ข้อ 1 ถึง 14 ข้อใดบ้าง
3. สำหรับ $a,b \in Q$ จงแสดงว่า

   3.1 $a-b \in Q$

   3.2 $a/b \in Q$ เมื่อ $b \neq 0$

2.3 จำนวนอตรรกยะ (IRRATIONAL NUMBERS)

ถ้าเรามองเพียงผิวเผิน ก็อาจจะคิดว่าในเซต Q นั้นมีจำนวนต่าง ๆ อยู่ครบบริบูรณ์แล้ว แต่ถ้าพิจารณาอย่างลึกซึ้งจะพบว่า ยังมีข้อบกพร่องอยู่อีก คือยังมีจำนวนอีกบางพวกที่ไม่อยู่ในเซต Q นั่นคือ จำนวนนั้นไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ซึ่งจะเรียกจำนวนเหล่านั้นว่า "จำนวนอตรรกยะ" เราจะมาเริ่มต้นตรวจสอบข้อบกพร่องดังกล่าว โดยพบว่าในเซต Q ถ้า a เป็นจำนวนบวก จะมีค่ารากที่สองของ a ซึ่งไม่อยู่ใน Q (คือ จะมีจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ) นั่นคือ ถ้า $a > 0$ แล้วอาจจะมี $x \varepsilon Q$ ที่ $x^2 = a$

ตัวอย่าง 2.3.1 พิจารณาเมื่อ $a = 2$

นั่นคือ จะแสดงว่า "ไม่มีจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ ที่ $x^2 = 2$" (คือ $\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนตรรกยะ)

สมมุติว่า x เป็นจำนวนตรรกยะซึ่งสามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนอย่างต่ำที่สุดได้เป็น $\frac{a}{b}$ (คือ a,b ไม่มีตัวประกอบร่วมนอกจาก 1 และ -1) โดย $a > 0$ และ $b > 0$

นั่นคือ $x = \frac{a}{b} = \sqrt{2} > 0$

$\therefore \quad x^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$

$\therefore \quad a^2 = 2b^2 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$

เนื่องจาก a^2 หารด้วย a ลงตัว

ดังนั้น a ต้องหาร $2b^2$ ลงตัว

แต่ a หาร b ไม่ลงตัว

$\therefore$ a ต้องหาร 2 ลงตัว

$\therefore$ $a = 1$ หรือ $a = 2$

กรณีที่ 1 ถ้า $a = 1$ จาก (1) เราได้ว่า

$1^2 = 2b^2$ แต่ $2b^2$ จะต้องมากกว่าหรือเท่ากับ 2

$\therefore \quad 1^2 > 2$ เป็นไปไม่ได้

กรณีที่ 2 ถ้า $a = 2$ จาก (1) เราได้ว่า

$2^2 = 2b^2$

$\therefore \quad 2 = b^2$

แต่ $b^2 = 1$ หรือ $b^2 \geqslant 4$ เสมอ

จึงได้ว่า $2 = 1$ หรือ $2 \geqslant 4$ เป็นไปไม่ได้

จะเห็นว่าทั้งกรณี 1 และกรณี 2 ให้ข้อขัดแย้ง (contradiction) ทั้งสองกรณี

นั่นคือ $\sqrt{2}$ เขียนเป็นเศษส่วนในรูป $\frac{a}{b}$ ดังกล่าวไม่ได้

$\therefore$ $\sqrt{2}$ ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ

นั่นก็คือ ยังมีจำนวนอีกบางจำพวกที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ ซึ่งเราเรียกว่าเป็นจำนวนอตรรกยะ (Irrational numbers) เช่น $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, π, e, ฯลฯ เป็นต้น

ตัวอย่าง 2.3.2 ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์

จงแสดงว่า $a+\sqrt{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

วิธีทำ สมมุติว่า $a+\sqrt{2}$ ไม่เป็นจำนวนอตรรกยะ

ให้ $a+\sqrt{2} = x$ เป็นจำนวนตรรกยะ

$\therefore$ $x-a = \sqrt{2}$

แต่ทั้ง x และ a เป็นจำนวนตรรกยะ

$\therefore$ $x-a$ จึงเป็นจำนวนตรรกยะด้วย

$\therefore$ $\sqrt{2}$ เป็นจำนวนตรรกยะ ซึ่งแย้งกับความเป็นจริง

ดังนั้น $a+\sqrt{2}$ จึงเป็นจำนวนอตรรกยะ

โดยทั่วไป สามารถแสดงได้ว่า ถ้า a เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์และ b เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว $a+b$, $a-b$, $b-a$, ab, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ ต่างก็เป็นจำนวนอตรรกยะทั้งสิ้น

แบบฝึกหัด 2.3.1

1) จงพิสูจน์ว่า ไม่มีเลขจำนวนตรรกยะ x ใด ๆ ซึ่ง

 1.1) $x^2 = 3$ 1.2) $x^2 = 6$

2) ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะที่ไม่เท่ากับศูนย์และ b เป็นจำนวนอตรรกยะ จงแสดงว่า

 2.1) $a+b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

 2.2) $a-b$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

 2.3) $b-a$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

 2.4) ab เป็นจำนวนอตรรกยะ

 2.5) $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

 2.6) $\frac{b}{a}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

3) ถ้า x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว จงยกตัวอย่างที่แสดงว่า

 3.1) $x+y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

 3.2) $x-y$ เป็นจำนวนตรรกยะ

 3.3) xy เป็นจำนวนตรรกยะ

 3.4) $\frac{x}{y}$ เป็นจำนวนตรรกยะ

2.4 จำนวนจริง (REAL NUMBERS)

เซตของจำนวนจริง ซึ่งมักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ R เป็นเซตที่ขยายมาจากเซตของจำนวนตรรกยะ (เซต Q) คือเป็นเซตที่รวมเอาจำนวนตรรกยะทั้งหมดกับจำนวนอตรรกยะไว้ด้วยกัน จึงกล่าวได้ว่าเซต N, เซต I และเซต Q ต่างก็เป็นเซตย่อยของ R ดังนั้นสัจจพจน์ของการบวก (+) การคูณ (×) และความสัมพันธ์ $\leqslant$ ที่สอดคล้องกับ Q ก็จะสอดคล้องกับเซต R ด้วย

นั่นคือ เซตของจำนวนจริง (R) ซึ่งสอดคล้องภายใต้ +, × และความสัมพันธ์ $\leqslant$ ก็เป็นฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field)

นอกจากนั้นฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field) ของจำนวนจริง R ยังสอดคล้องกับสัจจพจน์อีกข้อหนึ่งด้วย คือสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์ (completeness axiom)

หมวดที่ 5 สัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์ (Completeness axiom)

15) ให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ ถ้า S มีขอบเขตบนแล้ว S ย่อมมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

อนึ่ง ก่อนที่จะทำความเข้าใจกับสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์นี้ นักศึกษาจะต้องทำความเข้าใจกับหัวข้อ 2.4.1 ซึ่งจะกล่าวต่อไปเสียก่อน

ข้อสังเกต สำหรับฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field) ที่สอดคล้องกับสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์ เราจะเรียกว่าฟิลด์ที่มีอันดับอย่างบริบูรณ์ (Complete ordered field)

2.4.1 เซตที่มีขอบเขตจำกัด (Bounded set)

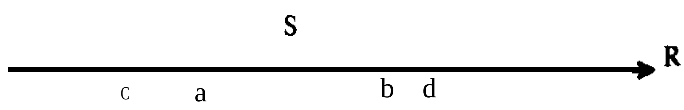
บทนิยาม 2.4.1 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า M เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$ แล้ว จะเรียก M ว่า "ขอบเขตบน" (upper bound) ของเซต S

บทนิยาม 2.4.2 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า K เป็นจำนวนจริงซึ่ง $K \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x \varepsilon S$ แล้ว จะเรียก K ว่า "ขอบเขตล่าง" (lower bound) ของเซต S

บทนิยาม 2.4.3 ถ้า m เป็นขอบเขตบนของเซต S และ $m \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ M ที่เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว จะเรียก m ว่า "ขอบเขตบนค่าน้อยสุด" (least upper bound or supremum) ของ S มักเขียนแทน m ด้วย สัญลักษณ์ l.u.b.S หรือ Sup.S

บทนิยาม 2.4.4 ถ้า k เป็นขอบเขตล่างของ S และ $K \leqslant k$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ K ที่เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว จะเรียก k ว่า "ขอบเขตล่างค่ามากสุด" (greatest lower bound or infimum) ของ S มักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ g.l.b.S หรือ inf.S

พิจารณาจากรูป 2.4.2



รูป 2.4.2

จะพบว่าถ้า $S = \{x \varepsilon R : a \leqslant x \leqslant b\}$ แล้ว c จะเป็นขอบเขตล่างตัวหนึ่งของ S และ a จะเป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S นอกจากนั้น d ก็เป็นขอบเขตบนตัวหนึ่งของ S และ b จะเป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S

ตัวอย่าง 2.4.2 ให้ $S = \{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$

ขอบเขตบนของ S คือ จำนวนจริง x ทั้งหลายซึ่ง $x \geqslant 1$

ขอบเขตล่างของ S คือ จำนวนจริง x ทั้งหลายซึ่ง $x \leqslant 0$

l.u.b.S คือ 1 และ g.l.b.S คือ 0

ข้อสังเกต เซต $\{x : x \varepsilon R \wedge 0 < x < 1\}$, $\{x : x \varepsilon R \wedge 0 \leqslant x < 1\}$, $\{x : x \varepsilon R \wedge 0 < x \leqslant 1\}$ และ $\{x : x \varepsilon R \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ จะมีขอบเขตบน, ขอบเขตล่าง, ขอบเขตบนค่าน้อยสุด และขอบเขตล่างค่ามากสุดเป็นค่าเดียวกัน

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ $S = \{\frac{1}{n} : n \varepsilon N\}$ จะพบว่า $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$

ดังนั้น ขอบเขตบนของ S คือ $x \geqslant 1$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

ขอบเขตล่างของ S คือ $x \leqslant 0$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon R$

l.u.b.S คือ 1 และ g.l.b.S คือ 0

ข้อสังเกต l.u.b.S และ g.l.b.S อาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในเซต S ก็ได้

ตัวอย่าง 2.4.4 ให้ $S = \{x : x > 0\}$ จะพบว่าเซต S ไม่มีขอบเขตบน และไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุดด้วย แต่มีขอบเขตล่างเป็นจำนวนจริง x ทั้งหลายซึ่ง $x \leqslant 0$ และมี g.l.b.S คือ 0

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ แล้ว ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S (ถ้ามี) จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น (และขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S ก็จะมีได้เพียงค่าเดียวเช่นกัน)

พิสูจน์ ถ้า m_1 และ m_2 เป็นขอบเขตบนต่ำสุด (l.u.b.S) ของ S จะได้ว่า $m_1 = m_2$ หรือ $m_1 < m_2$ หรือ $m_2 < m_1$ กรณีใดกรณีหนึ่งแต่ $m_1 < m_2$ เป็นไปไม่ได้ เพราะถ้า $m_1 < m_2$ แล้ว m_1 ก็จะไม่เป็นขอบเขตบนของ S ในทำนองเดียวกัน $m_2 < m_1$ ก็เป็นไปไม่ได้เช่นกัน เพราะถ้า $m_2 < m_1$ ก็จะได้ว่า m_2 ไม่เป็นขอบเขตบนของ S

ดังนั้น $m_1 = m_2$

ในทำนองเดียวกัน

ถ้า n_1, n_2 เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S แล้ว $n_1 = n_2$ ด้วย

หมายเหตุ 1) ขอบเขตบนของเซตเปล่าคือเซตของจำนวนจริง (R) และไม่มีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

2) เซตของจำนวนจริง (R) จะไม่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

บทนิยาม 2.4.5 สำหรับ $S \subseteq R$ เราจะเรียก S ว่าเป็น "เซตที่มีขอบเขตจำกัด" (Bounded Set) ถ้า S มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ทฤษฎีบท 2.4.2 สำหรับ $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ ถ้า S มีขอบเขตล่างแล้ว S ย่อม**มีขอบเขต**ล่างค่ามากสุด

พิสูจน์ พิจารณา $F = \{y : y \varepsilon R$ และ y เป็นขอบเขตล่างของ $S\}$

ดังนั้น $F \neq \Phi$ เพราะว่า S มีขอบเขตล่าง

และได้ว่า F ย่อมมีขอบเขตบนด้วยโดยขอบเขตบนนั้นก็คือสมาชิกทุกตัวของ S นั่นเอง เพราะฉะนั้น F จะต้องมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (มี l.u.b) (ตามสัจจพจน์แห่งความสมบูรณ์) ดังนั้นจะได้ว่า

i) $y \leqslant$ l.u.b. F สำหรับทุก ๆ $y \varepsilon F$ และ

ii) l.u.b. $F \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$

แต่จาก ii) กำหนดได้ว่า l.u.b. F เป็นขอบเขตล่างของ S

และ i) กำหนดได้ว่า l.u.b. F เป็นขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S

ดังนั้น l.u.b. F = g.l.b. S

นั่นคือ เมื่อ S มีขอบเขตล่างแล้ว S ย่อมมีขอบเขตล่างค่ามากสุด

2.4.2 **ค่าสัมบูรณ์** (Absolute value)

บทนิยาม 2.4.6 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x (absolute value of x) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $|x|$ ซึ่ง

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เช่น $|5| = 5$ และ $|-5| = -(-5) = 5$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 2.4.3 สำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ ได้ว่า

1) $|-x| = |x|$

2) $|xy| = |x|\ |y|$ 3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

4) ถ้า $a > 0$ แล้ว $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$

พิสูจน์ 1) ถ้า $x \geqslant 0$ แล้ว $|x| = x$ และ $|-x| = -(-x) = x$

ถ้า $x < o$ แล้ว $|x| = -x$ และ $|-x| = -x$

ดังนั้น $|x| = |-x|$ #

พิสูจน์ 2) (i) ถ้า $x \geqslant 0$ และ $y \geqslant 0$ แล้ว $xy \geqslant 0$

$\therefore\ |xy| = xy$

และ $|x|\ |y| = xy$

(ii) ถ้า $x<0$ และ $y>0$ แล้ว $xy<0$

$$|xy| = -xy$$

และ $|x|\ |y| = (-x)(y) = -xy$

(iii) ถ้า $x>0$ และ $y<0$ แล้ว $xy<0$

$$\therefore\ |xy| = -xy$$

และ $|x|\ |y| = x(-y) = -xy$

(iv) ถ้า $x<0$ และ $y<0$ แล้ว $xy>0$

$$|xy| = xy$$

และ $|x|\,|y| = (-x)(-y) = xy$

(v) ถ้า $x=0,\ y=0$ แล้ว $xy=0$

$$|xy| = 0$$

และ $|x|\ |y| = (0)(0) = 0$

จาก (i) ถึง (v) จึงกล่าวสรุปได้ว่า

$$|xy| = |x|\ |y|$$

#

พิสูจน์ 3) ให้ $x \geqslant 0$

$|x| = x$ ....(1)

และให้ $x < 0$

. $|x| = -x$

จาก $x < 0$ จะได้ว่า $0 < -x$ ดังนั้น $x < -x$

$x < |x|$ . . (2)

จาก (1) และ (2) ได้ว่า $x \leqslant |x|$ ....(a)

ให้ $x \geqslant 0$

$|x| = x$

และ $-|x| = -x$

จาก $x \geqslant 0$ จะได้ว่า $-x \leqslant x$

.. $-|x| \leqslant x$ .... (3)

ให้ $x < 0$

$\therefore\ |x| = -x$

และ $-|x| = x$ .... (4)

จาก (3) และ (4) ได้ว่า $-|x| \leqslant x$ ....(b)

เราเขียน (a) และ (b) รวมกันได้เป็น

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \#$$

พิสูจน์ 4) (i) สมมุติว่า $|x| \leqslant a$

$\therefore \quad -a \leqslant -|x|$

แต่ $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

$\therefore \quad -a \leqslant x \leqslant a$

นั่นคือ $|x| \leqslant a$ แล้ว $-a \leqslant x \leqslant a$

(ii) สมมุติว่า $-a \leqslant x \leqslant a$

ถ้า $x \geqslant 0$ เราได้ $|x| = x$

แต่ $x \leqslant a$

$\therefore |x| \leqslant a$

ถ้า $x < 0$ เราได้ $|x| = -x$

แต่ $-a \leqslant x$ ได้ว่า $-x \leqslant a$

$\therefore \quad |x| \leqslant a$

ดังนั้น ถ้า $-a \leqslant x \leqslant a$ แล้ว $|x| \leqslant a$

ทฤษฎีบท 2.4.4 อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (Triangle inequality)

สำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ จะได้ว่า $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

พิสูจน์ จาก $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

และ $-|y| \leqslant y \leqslant |y|$

$\therefore \quad -(|x| + |y|) \leqslant x+y \leqslant |x| + |y|$

ดังนั้น $|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \#$

ตัวอย่าง 2.4.5 ให้ $|x+3| < 4$ จงหาค่าของ x

วิธีทำ จาก $|x+3| < 4$ เราได้ว่า

$$-4 < x+3 < 4$$

เอา -3 บวกตลอด

ดังนั้น $-7 < x < 1$

2.4.3 **คุณสมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง** (Archimedean property of real numbers)

บทนิยาม 2.4.7 ฟิลด์ที่มีอันดับ F (ordered field F) ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นฟิลด์ที่มีอันดับแบบอาร์คีมีดีส (Archimedean ordered field) ถ้าสำหรับแต่ละ $x \varepsilon F$ จะมีจำนวนธรรมชาติ n ซึ่ง $x < n$

ทฤษฎีบท 2.4.5 คุณสมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง (Archimedean property of real numbers)

กำหนดให้ $x \varepsilon R$ และ $x > 0$ แล้วจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $x < n$

พิสูจน์ สมมุติว่า ไม่มี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $x < n$

ดังนั้น $n \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

นั่นคือเซต N มี x เป็นขอบเขตบน

เพราะฉะนั้น N ย่อมมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด (ตามสัจจพจน์แห่งความสมบูรณ์)

ให้ $a = \text{l.u.b.} N$

สำหรับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \varepsilon N$ ย่อมมี $n+1 \varepsilon N$ ด้วย

ดังนั้น $n+1 \leqslant a$

หรือ $n \leqslant a-1$

นั่นแสดงว่า $a-1$ เป็นขอบเขตบนตัวหนึ่งของ N

ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ a เป็น l.u.b. ของ N

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $x < n$ #

บทแทรก ถ้า $x \varepsilon R$ ซึ่ง $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$ แล้ว $x = 0$

พิสูจน์ ถ้ามี $x > 0$ ซึ่ง $x < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

แล้ว $n < \frac{1}{x}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$

แต่ $\frac{1}{x} > 0$ ตามคุณสมบัติอาร์คีมีดีสจะต้องได้ว่า $\frac{1}{x} < n$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง (เป็นไปไม่ได้)

$\therefore \quad x = 0$ #

จากบทแทรกจึงกล่าวได้ว่าสำหรับ $\varepsilon > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดให้ ถ้า $|a-b| < \varepsilon$ แล้ว จะได้ว่า $a = b$

เพราะถ้าเลือก $\varepsilon = \frac{1}{n}$ เมื่อ $n \varepsilon N$

ก็จะได้ว่า $|a-b| < \frac{1}{n}$

จากบทแทรกจึงได้ว่า $|a-b| = 0$

$\therefore \quad a = b$

ทฤษฎีบท 2.4.6 ใน R สำหรับ $a > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้จะมี $x > 0$ ซึ่ง $x^2 = a$

พิสูจน์ พิจารณาเซต $S = \{x \varepsilon R : x \geqslant 0 \text{ และ } x^2 \leqslant a\}$

เซต S ไม่เป็นเซตเปล่า เพราะว่ามี $0 \varepsilon S$

เซต S มีขอบเขตบน เพราะ

สำหรับ $a>1$ ถ้า $y>a$ แล้ว $y^2>a$ (หรือ $a<y^2$) และสำหรับ $a\leqslant 1$ ถ้า $y>1$ แล้ว $y^2>1\geqslant a$ ดังนั้นโดยสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์จึงได้ว่าเซต S จะต้องมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

ให้ $x = \text{l.u.b. } S$

ต้องการแสดงว่า $x^2 = a$

จาก $x>0$ เพราะว่าสำหรับ $1<a$, $1^2\leqslant a$ ดังนั้น $1\varepsilon S$

และสำหรับ $a\leqslant 1$, $a^2\leqslant a$ ดังนั้น $a\varepsilon S$

กำหนดให้ $\varepsilon > 0$ ซึ่ง

$$0 < \varepsilon < x$$

เราทราบว่า $0 < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon$

$$\therefore \quad (x-\varepsilon)^2 < x^2 < (x+\varepsilon)^2 \qquad \text{..........(1)}$$

จึงได้ว่า (x-e) ε S แต่ $(x+\varepsilon) \not\varepsilon S$ ($\because$ x เป็น l.u.b. S)

$$\therefore \quad (x-\varepsilon)^2 \leqslant a < (x+\varepsilon)^2 \qquad \text{..........(2)}$$

จาก (1) และ (2) รวมกันได้ว่า

$$(x-\varepsilon)^2 - (x+\varepsilon)^2 < x^2-a < (x+\varepsilon)^2 - (x-\varepsilon)^2$$

$$\therefore \quad -4x\,\varepsilon < x^2 - a < 4x\,\varepsilon$$

นั่นคือ $|x^2-a| < 4x\,\varepsilon$

เพราะฉะนั้น $x^2-a = 0$ (จากบทแทรก ท.บ.2.4.5)

นั่นคือ $x^2 = a$ #

นั่นแสดงว่าเซต R ที่สอดคล้องตามสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์จะรวมจำนวนที่ไม่อยู่ในเซตของจำนวนตรรกยะไว้ด้วย นั่นคือจำนวนอตรรกยะจะอยู่ในเซต R

ต่อไปเราจะใช้คุณสมบัติ อาร์คีมีดีส (Archimedean property) สร้างคุณสมบัติความหนาแน่น (density property) ของเซต R

2.4.4 คุณสมบัติความหนาแน่นของจำนวนจริง (density property of real numbers)

ทฤษฎีบท 2.4.7 ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ นั่นคือ สำหรับ $x,y\varepsilon R$ ถ้า $x<y$ แล้วจะมี $r\varepsilon Q$ ซึ่ง $x<r<y$ (นั่นอาจกล่าวได้ว่ามีจำนวนตรรกยะอยู่อย่างหนาแน่นในจำนวนจริง)

พิสูจน์

กรณีที่ 1 สมมุติให้ $x > 0$

ดังนั้น $y > 0$ และ $y - x > 0$

$\therefore \quad \frac{1}{y-x} > 0$

จาก ทฤษฎีบท 2.4.5 ได้ว่าจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $\frac{1}{y-x} < n$

$\therefore \quad \frac{1}{n} < y - x$

นอกจากนั้นยังได้อีกว่า จาก $y>0$ นั้น $ny>0$

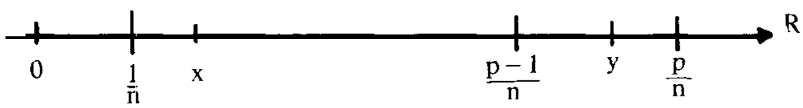
เพราะฉะนั้นจะมี $m \varepsilon N$ ซึ่ง $yn<m$ (จากทฤษฎีบท 2.4.5)

$\therefore \quad y < \frac{m}{n}$

กำหนดให้เซต $S = \{ m \varepsilon N : y \leqslant \frac{m}{n} \}$ ไม่เป็นเซตเปล่า

ดังนั้น S จะมีสมาชิกตัวแรกให้เป็น p (ตามคุณสมบัติข้อ 4 ของ N)

$\therefore \quad \frac{p-1}{n} < y \leqslant \frac{p}{n}$



รูป 2.4.3

แต่ $x = y - (y-x) < \frac{p}{n} - \frac{1}{n} = \frac{p-1}{n}$

$\therefore \quad x < \frac{p-1}{n}$

ดังนั้น $x < \frac{p-1}{n} < y$

เพราะฉะนั้น $\frac{p-1}{n}$ จะเป็นจำนวนตรรกยะที่ต้องการ

กรณีที่ 2 สมมุติให้ $x = 0$ ดังนั้น $y > 0$

แล้ว $0 < \frac{1y}{2} < y$ โดยเหตุผลจากกรณีที่ 1 จึงได้ว่า

จะมี $r \varepsilon Q$ ซึ่ง $0 = x < \frac{1}{2} y < r < y$

กรณีที่ 3 สมมุติให้ $x<0$ แต่ $y>0$

คือ $x<0<y$

ในกรณีนี้ได้ 0 เป็นจำนวนตรรกยะที่อยู่ระหว่าง x กับ y

กรณีที่ 4 สมมุติให้ $x<0$ และ $y<0$

โดย $x<y$

$\therefore \ |y| < |x|$

เช่นเดียวกับกรณีที่ 1) จะสามารถหา $r \varepsilon Q$

ซึ่ง $|y| < r < |x|$ ได้

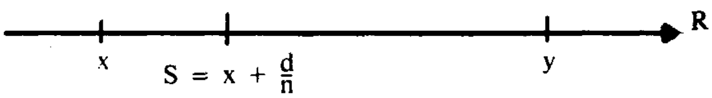
ดังนั้น $x < -r < y$

นั่นก็คือ ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ #

ทฤษฎีบท 2.4.8 ระหว่างจำนวนตรรกยะสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ

พิสูจน์ ให้ x และ y เป็นจำนวนตรรกยะซึ่ง $x<y$

จะต้องพิสูจน์ว่ามีจำนวนอตรรกยะ S ซึ่ง $x<S<y$



รูป 2.4.4

จากเซตผลต่างของเซต R กับเซต Q (คือเซต $R-Q$) จะได้ว่าจะต้องมีจำนวนอตรรกยะ $d>0$ และโดยคุณสมบัติอาร์คีมีดีส จึงได้ว่าจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $\frac{d}{y-x} < n$

เพราะฉะนั้นจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $x < x + \frac{d}{n} < y$

เนื่องจาก d เป็นจำนวนอตรรกยะ x เป็นจำนวนตรรกยะและ n เป็นจำนวนธรรมชาติ เพราะฉะนั้น $\frac{d}{n}$ และ $x + \frac{d}{n}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ (ดูแบบฝึกหัด 2.3.3)

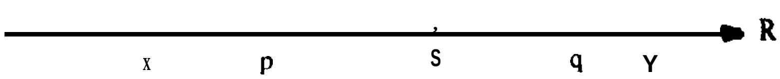
ถ้าให้ $S = x + \frac{d}{n}$ ก็จะกล่าวได้ว่า

ระหว่างจำนวนตรรกยะสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ #

ทฤษฎีบท 2.4.9 ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ (นั่นคือกล่าวได้ว่าจำนวนอตรรกยะมีอยู่อย่างหนาแน่นในจำนวนจริง)

พิสูจน์ ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงซึ่ง $x < y$

จะต้องพิสูจน์ว่ามีจำนวนอตรรกยะ S ซึ่ง $x < S < y$



รูป 2.4.5

จากทฤษฎีบท 2.4.7 ได้ว่าจำนวนตรรกยะมีอยู่หนาแน่นในจำนวนจริง

นั่นคือสำหรับ $x,y \varepsilon R$ จะมี $p \varepsilon Q$ ซึ่ง $x<p<y$

และสำหรับ $p,y \varepsilon R$ จะมี $q \varepsilon Q$ ซึ่ง $p<q<y$

จากทฤษฎีบท 2.4.8 จึงได้ว่า

สำหรับ $p,q \varepsilon Q$ จะมีจำนวนอตรรกยะ S ซึ่ง $x<p<S<q<y$

นั่นคือ $x<S<y$

ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่าระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะหรือในจำนวนจริงมีจำนวนอตรรกยะอยู่อย่างหนาแน่น #

2.4.5 ช่วง (Intervals)

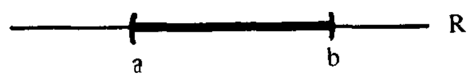
ช่วงคือ เซตที่มีสมาชิกเรียงรายกันอยู่อย่างต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.4.8 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a<b$ แล้ว ได้ว่า

1) **ช่วงเปิด** (open interval) จาก a ไป b เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ (a,b) โดย

$$(a,b) = \{x \varepsilon R : a<x<b\}$$

หรือเขียนเป็นรูปได้ ดังรูป 2.4.6



รูป 2.4.6

นั่นคือ (a,b) หมายถึงเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a กับ b (ไม่รวมจุด a และ b)

2) **ช่วงปิด** (closed interval) จาก a ไป b เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ [a,b] โดย

$$[a,b] = \{x \varepsilon R : a \leqslant x \leqslant b\}$$

ดังรูป 2.4.7

รูป 2.4.7

นั่นคือ $[a,b]$ หมายถึงเซตของจำนวนจริงตั้งแต่ a ถึง b (รวมจุด a และจุด b ด้วย)

3) **ช่วงกึ่งเปิดทางซ้าย** (half-open on the left) จาก a ไป b เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $(a,b]$ โดย

$$(a,b] = \{x\varepsilon R : a < x \leqslant b\}$$

ดังรูป 2.4.8

รูป 2.4.8

นั่นคือ $(a,b]$ หมายถึงเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a กับ b โดยรวมจุด b ด้วย แต่ไม่รวมจุด a

4) **ช่วงกึ่งเปิดทางขวา** (half-open on the right) จาก a ไป b เขียนด้วย สัญลักษณ์ $[a,b)$ โดย

$$[a,b) = \{x\varepsilon R : a \leqslant x < b\}$$

ดังรูป 2.4.9

รูป 2.4.9

นั่นคือ $[a,b)$ หมายถึงเซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง a กับ b โดยรวมจุด a ด้วยแต่ไม่รวมจุด b

5) **ช่วงกึ่งอนันต์** (semi-infinite intervals) แบ่งเป็น 4 ลักษณะ คือ

5.1 เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่า b (ไม่รวมจุด b) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $(-\infty,b)$
นั่นคือ $(-\infty,b) = \{x\varepsilon R : x < b\}$ ดังรูป 2.4.10

รูป 2.4.10

5.2 เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ b (รวมจุด b ด้วย) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $(-\infty, b]$ นั่นคือ $(-\infty, b] = \{x \varepsilon R : x \leqslant b\}$ ดังรูป 2.4.11

รูป 2.4.11

5.3 เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า a (ไม่รวม a) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $(a, +\infty)$ นั่นคือ $(a, +\infty) = \{x \varepsilon R : a < x\}$ ดังรูป 2.4.12

รูป 2.4.12

5.4 เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ a (รวมจุด a ด้วย) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $[a, +\infty)$ นั่นคือ $[a, +\infty) = \{x \varepsilon R : a \leqslant x\}$ ดังรูป 2.4.13

รูป 2.4.13

6) ช่วงอนันต์ (infinite interval) คือ

เซตของจำนวนจริงทั้งหลาย เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $(-\infty, +\infty)$

นั่นคือ $(-\infty, +\infty) = \{x : x \varepsilon R\}$

หมายเหตุ พึงระลึกไว้ว่า $+\infty$ และ $-\infty$ เป็นเพียงสัญลักษณ์ไม่ใช่จำนวนจริง

อนึ่ง สำหรับจุด a และจุด b นั้นจะเรียกว่าเป็นจุดสิ้นสุด (end point) ของช่วงไม่ว่า a และ b จะอยู่ในช่วงนั้นหรือไม่ก็ตามสำหรับจุดอื่น ๆ ที่อยู่ระหว่าง a กับ b เรียกว่าจุดข้างใน (interior point) ของช่วงนั้น ๆ

อนึ่ง มักใช้ สัญลักษณ์ R^+ แทนเซตของจำนวนจริงบวก และ Q^+ แทนเซตของจำนวนตรรกยะบวก

2.4.6 ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง (Extended real number system)

ในคณิตศาสตร์ขั้นพิสดาร มีการใช้ระบบจำนวนใหม่อันหนึ่งซึ่งเรียกว่า ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง

บทนิยาม 2.4.9 ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ R^* คือเซตซึ่งประกอบด้วยเลขจำนวนจริงทั้งหลาย (R) และสมาชิกใหม่อีก 2 ตัวคือ $+\infty$ และ $-\infty$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติต่าง ๆ ดังต่อไปนี้

1) ถ้า $a \varepsilon R$ แล้วจะได้ว่า

   1.1) $a + (+\infty) = +\infty$

   1.2) $a + (-\infty) = -\infty$

   1.3) $a - (+\infty) = -\infty$

   1.4) $a - (-\infty) = +\infty$

   1.5) $\frac{a}{+\infty} = \frac{a}{-\infty} = 0$

2) ถ้า $a > 0$ แล้ว จะได้ว่า

   2.1) $a(+\infty) = +\infty$

   2.2) $a(-\infty) = -\infty$

3) ถ้า $a < 0$ แล้ว จะได้ว่า

   3.1) $a(+\infty) = -\infty$

   3.2) $a(-\infty) = +\infty$

4) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

5) $(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

6) ถ้า $a \varepsilon R$ แล้ว ได้ว่า $-\infty < a < +\infty$

อนึ่ง เราอาจจะเขียนแทน R และ R^* ด้วยช่วงได้คือ เขียนแทน R ด้วยช่วง $(-\infty, +\infty)$ และ เขียนแทน R^* ด้วยช่วง $[-\infty, +\infty]$ อย่างไรก็ตามในการคำนวณขั้นต้นนี้มักใช้กับเซต R เป็นส่วนใหญ่ และจะสังเกตเห็นว่าในภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริงนี้ สิ่งที่ยังไม่ได้กำหนดว่ามันมีค่าเท่ากับอะไรก็คือ $\infty - \infty$, $\infty + (-\infty)$, $0(\infty)$, $0(-\infty)$, $(\infty)0$ และ $(-\infty)0$ ตลอดจนการหารด้วยศูนย์ก็ยังคงไม่ได้กำหนดเช่นเดิม

แบบฝึกหัด 2.4.1

ให้ a, b, c, d เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $a+b = a+c$ แล้ว $b = c$
2. ถ้า $a+b = 0$ แล้ว $b = -a$
3. $-(-a) = a$
4. $-(a-b) = b-a$
5. ถ้า $a + b = a$ แล้ว $b = 0$
6. ถ้า $a \neq 0$ และ $ab = ac$ แล้ว $b = c$
7. $0a = 0$
8. ถ้า $ab = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$
9. ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{ab} = (\frac{1}{a})(\frac{1}{b})$
10. ถ้า $a \neq 0$ แล้ว + = a
    ā
11. $(-1)a = -a$
12. $(-a)b = -ab$
13. $(-a)(-b) = ab$
14. $(a+b)c = ac+bc$
15. $a-(b-c) = (a-b)+c$
16. ถ้า $a<b$ และ $b<c$ แล้ว $a<c$
17. ถ้า $a<b$ แล้ว $a+c < b+c$
18. ถ้า $a<b$ และ $c>0$ แล้ว $ac<bc$
19. ถ้า $a<b$ และ $c<0$ แล้ว $bc<ac$
20. ถ้า $a<b$ แล้ว $-b < -a$
21. ถ้า $a<b$ และ $c<d$ แล้ว $a+c < b+d$ และ $a-d < b-c$

    สำหรับเซต S ต่อไปนี้ จงหาขอบเขตบน, ขอบเขตล่าง, l.u.b.S และ g.l.b.S

22. $S = \{1,2,3\}$
23. $S = \{x : x \varepsilon R \wedge 1 \leqslant x < 3\}$
24. $S = (x : x^2 - 6x + 5 = 0)$
25. $S = \{x : x \varepsilon Q \wedge x = (-1)^n + \frac{1}{n}$ ทุก ๆ $n \varepsilon N\}$
26. $S = \{\frac{n}{n+1} : n \varepsilon N\}$

27. $S = \{x : x \varepsilon R^{+} \wedge 0 < x^2 - 1 \leqslant 2\}$

28. $S = \{x : x \varepsilon R^{+} \wedge 1 \leqslant \frac{1}{x^2 - 1}\}$

29. ถ้า $A \subseteq B \subseteq R$ และถ้า B มีขอบเขตบนและขอบเขตล่างแล้ว จงพิสูจน์ว่า

$l.u.b.A \leqslant l.u.b.B$ และ $g.l.b.A \geqslant g.l.b.B$

30. จงหาเซต S ซึ่ง $S \subseteq R$ และ $l.u.b.S = g.l.b.S$

31. จงหาจำนวนจริง x โดย (a) $|x - 2| \leqslant 8$ (b) $|x - 2| > 8$

32. จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ที่กำหนดมาให้ $x > 1$ จะมีจำนวน $n \varepsilon N$ ที่ใหญ่ที่สุดจำนวนหนึ่งซึ่ง $n \leqslant x$

33. จงพิสูจน์ว่า ระหว่างจำนวนตรรกยะสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ

34. จงพิสูจน์ว่าสำหรับจำนวนจริง x,y ใด ๆ

1) $|x - y| = |y - x|$ 2) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$

3) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$

2.5 เซตเปิดและเซตปิดในระบบจำนวนจริง (OPEN SET AND CLOSED SET IN REAL NUMBER SYSTEM)

ในการศึกษาเกี่ยวกับเซตของจุดบนเส้นจำนวนนั้น เราจะอาศัยหลักในการกำหนดจุดแทนจำนวนจริงลงบนเส้นที่ได้กำหนดขึ้น โดยทั่ว ๆ ไปจะมองในรูปของแกนพิกัด X ซึ่งจุดต่าง ๆ บนแกน X นี้มีการสมนัย 1 – 1 กับจำนวนจริงทั้งหมด (กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง)

บทนิยาม 2.5.1 ย่านสมมาตร (symmetric neighborhood) ของจุด x_0 เมื่อ $x_0 \varepsilon R$ หมายถึงเซตของจำนวนจริง x ทั้งหมดซึ่ง $|x - x_0| < h$ หรือ $x_0 - h < x < x_0 + h$ เมื่อ $h \varepsilon R$ และ $h > 0$ มักเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$N_h(x_0)$" นั่นคือ $N_h(x_0) = \{x : |x - x_0| < h\}$

หรือ $N_h(x_0) = \{x \varepsilon R : x_0 - h < x < x_0 + h\}$ เมื่อ $h \varepsilon R$ และ $h > 0$

ข้อสังเกต โดยทั่ว ๆ ไปมักเขียนย่านสมมาตรของจุด x_0 ใด ๆ เพียงสั้น ๆ ว่าย่านของจุด x_0

บทนิยาม 2.5.2 เซต S จะเรียกว่าเป็นเซตเปิด (open set) ก็ต่อเมื่อแต่ละจุด x_0 ของ S มีย่านอย่างน้อยหนึ่งย่าน ซึ่งอยู่ใน S

หรือกล่าวว่า $S \subseteq R$ จะเรียกว่าเป็นเซตเปิดต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $x_0 \varepsilon S$ จะมี $h > 0$ ซึ่ง $N_h(x_0) \subseteq S$ เท่านั้น

ตัวอย่าง 2.5.1 ให้ $S = \{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$ กล่าวได้ว่า S เป็นเซตเปิดเพราะแต่ละจุด $x_0 \varepsilon S$ จะมี $N_h(x_0) \subseteq S$

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ $S = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x < 1\}$ กล่าวได้ว่า S ไม่เป็นเซตเปิดเพราะ ณ ที่จุด $x_0 = 0$, ไม่มี $N_h(x_0) \subseteq S$

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ $S = \{x \varepsilon R : x < 2\}$ จะได้ว่า S เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.4 ให้ $S = \{x \varepsilon Q : x = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$ จะได้ว่า S ไม่เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.5 ให้ $S = \{x \varepsilon Q : 0 < x < 1\}$ กล่าวได้ว่า S ไม่เป็นเซตเปิด เพราะในเซต S มีอย่างน้อยสมาชิกหนึ่งตัว x_0 ซึ่งแต่ละย่านของ x_0 ไม่อยู่ใน S (เพราะว่าย่านใด ๆ ของจุด x_0 ที่อยู่ใน S แต่ละจุดประกอบด้วยจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ)

ตัวอย่าง 2.5.6 ให้ $S = \{x : x \varepsilon R\}$ กล่าวได้ว่า S เป็นเซตเปิดเพราะว่าสำหรับทุก ๆ $x_0 \varepsilon R$ จะมี $h > 0$, $N_h(x_0) \subseteq R$ นั่นคือเซตของจำนวนจริงทั้งหมดเป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.7 ให้ $S = \Phi$ (เซตเปล่า) จะได้ว่า Φ ก็เป็นเซตเปิดเพราะว่า Φ ไม่มีสมาชิก ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า สำหรับทุก ๆ $x_0 \varepsilon \Phi$ (ซึ่งเป็นเท็จเสมอ) แล้วจะมี $h > 0$ ซึ่ง $N_h(x_0) \subseteq \Phi$ นั่นคือเซตเปล่าเป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.5.1 เซตส่วนร่วม (intersection) ของเซตเปิดสองเซตใด ๆ ย่อมเป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตเปิด

และให้ $S = S_1 \cap S_2$

จะแสดงว่า S เป็นเซตเปิด

ให้ $x \varepsilon S$ แล้ว $x \varepsilon S_1$ และ $x \varepsilon S_2$ ด้วย

เพราะว่า S_1 เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี h_1 ซึ่งสำหรับทุก z ซึ่งถ้า $|z-x| < h_1$ แล้ว $z \varepsilon S_1$ (หรือ $N_h(x_0) \subseteq S_1$)

และเพราะว่า S_2 เป็นเซตเปิด

ดังนั้นจะมี h_2 ซึ่งสำหรับทุก w ซึ่งถ้า $|w-x| < h_2$ แล้ว $w \varepsilon S_2$ (หรือ $N_h(x_0) \subseteq S_2$)

เลือก h_3 ให้มีค่าเป็นค่าที่น้อยที่สุดระหว่าง h_1 กับ h_2

จะได้ว่าสำหรับทุก $y \varepsilon R$ ซึ่ง $|y-x| < h_3$ แล้ว y จะต้องอยู่ทั้งในเซต S_1 และ S_2

ดังนั้น $y \varepsilon S$

แสดงว่า S เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.5.2 เซตผลผนวก (Union) ของกลุ่มของ เซตเปิด ใด ๆ ย่อมเป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ให้ J เป็นเซตดรรชนีและสำหรับแต่ละ $i \varepsilon J$ ให้ A_i เป็นเซตเปิด จะต้องแสดงว่า เซต $S = \bigcup\limits_{i \varepsilon J} A_i$ เป็นเซตเปิด

ให้ $x_o \varepsilon S$ ดังนั้น $x_o \varepsilon \bigcup\limits_{i \varepsilon J} A_i$

นั่นแสดงว่า $x_o \varepsilon A_i$ สำหรับเซต A_i บางเซต

ดังนั้นจะต้องมี $h > 0$ ซึ่งทำให้ $N_h(x_o) \subseteq A_i$ ($\because A_i$ เป็นเซตเปิด)

เพราะฉะนั้น $N_h(x_o) \subseteq S$ ด้วย

จึงได้ว่า S เป็นเซตเปิด

ข้อสังเกต เซตผลผนวกของกลุ่มของ เซตเปิด ที่มีจำนวนไม่จำกัดย่อมเป็นเซตเปิดแต่เซ็ตร่วมของกลุ่มของเซตเปิดที่มีจำนวนไม่จำกัด อาจจะไม่เป็นเซตเปิดก็ได้ เช่น

$S_n = \{x \varepsilon R : \frac{-1}{n} < x < 1 + \frac{1}{n}\}, n \varepsilon N$

จะเห็นว่า $\cup S_n = \{x \varepsilon R : -1 < x < 2\}$ เป็นเซตเปิด

และ $\cap S_n = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ ซึ่งไม่เป็นเซตเปิด

บทนิยาม 2.5.3 เซต S ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นเซตปิด (closed set) ถ้าส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซตนั้น (คือ S') เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.8 ให้ $S = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ เป็นเซตปิดเพราะส่วนเติมเต็มของ S เป็นเซตผลผนวกระหว่าง S_1 กับ S_2 เมื่อ $S_1 = \{x \varepsilon R : x < 0\}$ และ $S_2 = \{x \varepsilon R : x > 1\}$ ซึ่งทั้ง S_1 และ S_2 ต่างก็เป็นเซตเปิด

นั่นคือ $S = \{x \varepsilon R : (x < 0 \text{ หรือ } x > 1)\}$

ดังนั้น S จึงเป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.9 ให้ $S = \{x \varepsilon R : x \geqslant 2\}$ กล่าวได้ว่า S เป็นเซตปิดเพราะว่าส่วนเติมเต็มของ S คือ $S' = \{x \varepsilon R : x < 2\}$ เป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 2.5.10 ให้ $S = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x < 1\}$ กล่าวได้ว่า S ไม่เป็นเซตปิด เพราะว่าส่วนเติมเต็มของ S คือผลผนวกระหว่าง

$S_1 = \{x \varepsilon R : x < 0\}$ กับ $S_2 = \{x \varepsilon R : x \geqslant 1\}$ ซึ่ง S_1 เป็นเซตเปิด แต่ S_2 เป็นเซตปิด

หรือส่วนเติมเต็มของ S คือ

$S' = \{x \varepsilon R : (x < 0 \text{ หรือ } x \geqslant 1)\}$ ไม่เป็นเซตเปิด เพราะไม่สามารถกำหนดย่านของ 1 ให้อยู่ใน S ได้ คือ $N_h(1) \not\subseteq S$

ตัวอย่าง 2.5.11 เซตเปล่า (ϕ) เป็นเซตปิด เพราะส่วนเติมเต็มของ Φ คือเซต R (เซตของจำนวนจริงทั้งหมด) เป็นเซตเปิด (จากตัวอย่าง 2.5.6)

ตัวอย่าง 2.5.12 เซต R ซึ่งเป็นเซตของจำนวนจริงทั้งหมดเป็นเซตปิด เพราะส่วนเติมเต็มของ R คือเซตเปล่า (Φ) ซึ่งจากตัวอย่าง 2.5.7 ได้ว่า ϕ เป็นเซตเปิด

ข้อสังเกต

1) เซตที่เป็นทั้ง เซตเปิดและ เซตปิด จะมีอยู่เพียงสองเซตเท่านั้น คือเซตของจำนวนจริงทั้งหลาย (R) กับเซตเปล่า (Φ)
2) เซตที่ไม่เป็นเซตเปิด ไม่ได้หมายความว่าเซตนั้นจะเป็นเซตปิด หรือเซตที่ไม่เป็นเซตปิดก็ไม่ได้หมายความว่าเซตนั้นจะเป็นเซตเปิดเสมอไป นั่นคืออาจมีเซ็ตที่ไม่เป็นทั้งเซ็ตเปิดและเซ็ตปิด เช่น เซต $S = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x < 1\}$
3) ช่วงเปิด (a,b) ใน R คือ $\{x \varepsilon R : a < x < b\}$ ก็เป็นเซตเปิด
4) ช่วงปิด $[a,b]$ ใน R คือ $\{x \varepsilon R : a \leqslant x \leqslant b\}$ ก็เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 2.5.3 เซตผลผนวกของเซตปิด สองเซตใด ๆ ย่อมเป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ S_1 และ S_2 เป็นเซตปิดและให้ $S = S_1 \cup S_2$

จะพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิด

จาก $S = S_1 \cup S_2$

เพราะว่า $S' = S_1' \cap S_2'$

เนื่องจาก S_1 เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น S_1' เป็นเซตเปิด

และเนื่องจาก S_2 เป็นเซตปิด

เพราะฉะนั้น S_2' เป็นเซตเปิด

และ $S_1' \cap S_2'$ เป็นเซตเปิด (จากทฤษฎีบท 2.5.1) หรือ S' เป็นเซตเปิด

ดังนั้น S เป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 2.5.4 เซตส่วนร่วมของกลุ่มของเซตปิดใด ๆ ย่อมเป็นเซตปิด

พิสูจน์ ให้ J เป็นเซตดรรชนี และสำหรับแต่ละ $i \varepsilon J$ ให้ A_i เป็นเซตปิด จะต้องแสดงว่าเซต $S = \bigcap_{i \varepsilon J} A_i$ เป็นเซตปิด

เพราะว่า $(\bigcap_{i \varepsilon J} A_i)' = \bigcup_{i \varepsilon J} A_i'$ (จาก ท.บ.1.1.22 ข้อ (4))

และได้ว่า $\bigcup_{i \varepsilon J} A_i'$ เป็นเซตเปิด (จาก ท.บ.2.5.2)

จาก $\bigcup_{i \varepsilon J} A_i'$ เป็นเซตเปิด จึงได้ว่า $\bigcap_{i \varepsilon J} A_i$ เป็นเซตปิด

บทนิยาม 2.5.4 ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว เซตเปิด A ใด ๆ ซึ่ง $x \varepsilon A$ กล่าวได้ว่าเซต A เป็น ย่านหนึ่งของ x เขียนด้วยสัญลักษณ์ N(x)

บทนิยาม 2.5.5 สำหรับจุด $x \varepsilon A$ จะเรียก x ว่าเป็นจุดข้างใน (interior point) เซต A ถ้ามี $N(x) \subseteq A$

จากบทนิยาม 2.5.5 นี้จึงอาจกล่าวได้ว่า เซต S ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นเซตเปิดถ้าแต่ละจุด $x \varepsilon S$ ต่างก็เป็นจุดข้างในเซต S นั่นเอง

บทนิยาม 2.5.6 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าเป็นจุดข้างนอก (exterior point) เซต A ก็ต่อเมื่อมีย่านของ x เป็นเซตย่อยของ A' (เมื่อ A' คือส่วนเติมเต็มของเซต A)

บทนิยาม 2.5.7 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าเป็นจุดขอบ (boundary point) เซต A ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ย่านของ x มีทั้งจุดที่อยู่ใน A และ A'

บทนิยาม 2.5.8 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าเป็นจุดลิมิต (limit point) ของเซต A ถ้าทุก ๆ ย่านของ x มีอย่างน้อยหนึ่งจุดที่อยู่ใน A โดยที่จุดนั้นต้องเป็นจุดที่ต่างจากจุด x (จะสังเกตเห็นว่าจุดลิมิตของเซตใด ๆ อาจจะอยู่หรือไม่อยู่ในเซตนั้นก็ได้)

ตัวอย่าง 2.5.13 ให้ $A = \{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$ แล้วจะได้ว่า

ทุก ๆ จุดของ $x \varepsilon A$ เป็นจุดข้างใน A

จุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดขอบ A

ทุก ๆ จุดของ $x \varepsilon A$ รวมทั้งจุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดลิมิตของ A

ทุก ๆ จุด $x \varepsilon A'$ ยกเว้นจุด $x = 0$ และ $x = 1$ เป็นจุดข้างนอก A

ตัวอย่าง 2.5.14

ให้ $S = \{\frac{1}{n} : n\varepsilon N\}$ คือ $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\}$ แล้วจะได้ว่า

ไม่มีจุดใดเป็นจุดข้างใน S เลย

ทุก ๆ จุด $x\varepsilon S$ รวมทั้งจุด $x = 0$ เป็นจุดขอบ S

มีจุด $x = 0$ เพียงจุดเดียวเท่านั้นที่เป็นจุดลิมิตของ S

ทุก ๆ จุด $x\varepsilon S'$ ยกเว้นจุด $x = 0$ เป็นจุดข้างนอก S

ตัวอย่าง 2.5.15

ให้ $B = \{x : x\varepsilon Q \wedge 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ แล้วจะได้ว่า

ไม่มีจุด x ใด ๆ เป็นจุดข้างใน B เลย

ทุก ๆ $x\varepsilon[0,1]$ เป็นจุดขอบ B

ทุก ๆ จุด $x\varepsilon[0,1]$ (ทั้งที่เป็นจำนวนตรรกยะและอตรรกยะ) ต่างเป็นจุดลิมิตของ B

ทฤษฎีบท 2.5.5 เซต S ใด ๆ จะเป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อเซต S นั้นประกอบด้วยจุดลิมิตของ S ทั้งหมด

พิสูจน์

i) สมมุติว่า S เป็นเซตปิดและ x เป็นจุดลิมิตใด ๆ ของ S จะต้องแสดงว่า $x\varepsilon S$

ให้ $x \not\varepsilon S$

ดังนั้น $x\varepsilon S'$ ซึ่ง S' เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้นย่อมมีย่านของ x ที่เป็นเซตย่อยของ S' ซึ่งย่านดังกล่าวต้องไม่ใช่จุดของเซต S

ดังนั้น x จึงไม่ใช่จุดลิมิตของ S ซึ่งขัดแย้งกับข้อสมมุติ

จึงกล่าวได้ว่า $x\varepsilon S$

ii) สมมุติว่า S เป็นเซตของจุดลิมิตของ S ทั้งหมด

จะพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิดโดยแสดงว่า S' เป็นเซตเปิด

ให้ $y\varepsilon S'$

เพราะฉะนั้น y ไม่ใช่จุดลิมิตของ S

ดังนั้นจะมีย่านของ y ซึ่งไม่มีจุดใด ๆ อยู่ในเซต S เลย

นั่นแสดงว่าย่านนี้อยู่ในเซต S'

ดังนั้น S' เป็นเซตเปิด

นั่นคือ S เป็นเซตปิด

แบบฝึกหัด 2.5.1

1. จงพิจารณาแต่ละเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตเปิด หรือเซตปิดหรือว่าไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

   1.1 $\{x \varepsilon R : x < 1\}$

   1.2 $\{x \varepsilon R : x \geqslant 1\}$

   1.3 $\{x \varepsilon R : (x < 0 \vee x \geqslant 1)\}$

   1.4 $\{x \varepsilon R : x \varepsilon Q\}$

   1.5 $\{x \varepsilon R : x \not\varepsilon Q\}$

   1.6 $\{x \varepsilon R : x > 3\}$

   1.7 $\{x \varepsilon R : x \leqslant 3\}$

   1.8 $\{x \varepsilon R : 0 \leqslant x \leqslant 3\}$

   1.9 $\{x \varepsilon R : 0 < x \leqslant 3\}$

   1.10 $\left\{\frac{1}{n} : n \varepsilon N\right\}$

2. จงหาจุดลิมิตของ S และ S′ ของเซต $S = \{x \varepsilon R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

3. จงพิจารณาแต่ละข้อต่อไปนี้

   3.1) ถ้า $S = \{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$ จะมีจุดในเซต S ที่เป็นจุดลิมิตของ S′ หรือไม่?

   3.2) มีจุดในเซต S′ ที่เป็นจุดลิมิตของ S หรือไม่?

4. จงพิสูจน์ว่าเซตจำกัดใด ๆ เป็นเซตปิด

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า S เป็นเซตเปิดแล้ว แต่ละจุดของเซตนี้เป็นจุดลิมิตของ S

6. จงหาจุดข้างใน, จุดลิมิต, จุดขอบและจุดข้างนอกของเซตต่อไปนี้

   6.1) $S_1 = \left\{\frac{n-1}{n} : n \varepsilon N\right\}$

   6.2) $S_2 = \left\{\frac{n}{n^2+1} : n \varepsilon N\right\}$

   6.3) $S_3 = \left\{(-1)^n \frac{n}{n+1} : n \varepsilon N\right\}$

   6.4) $S_4 = \{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$

บทสรุปทบทวน
บทที่ 2 ระบบจำนวนจริง

2.1) จำนวนธรรมชาติ

บทนิยาม 2.1.1 ให้ S เป็นเซตใด ๆ จะเรียก S ว่าเป็นเซตที่มีอันดับ ถ้าแต่ละคู่ของสมาชิกใน S มีความสัมพันธ์แห่งอันดับ "$\leqslant$" ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1) สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$ และ $y \varepsilon S$ จะได้ว่า $x \leqslant y$ หรือ $y \leqslant x$

2) ถ้า $x \leqslant y$ และ $y \leqslant x$ แล้ว $x = y$

3) ถ้า $x \leqslant y$ และ $y \leqslant z$ แล้ว $x \leqslant z$

เซตของจำนวนธรรมชาติคือเซต $N = \{1,2,3,\ldots\}$ ก็เป็นเซตที่มีอันดับที่สอดคล้องกับคุณสมบัติต่อไปนี้ด้วย

4) ทุก ๆ เซตย่อยของ N ที่ไม่เป็นเซตเปล่า ย่อมมีสมาชิกตัวแรกหรือตัวที่น้อยที่สุด

5) สำหรับทุก ๆ สมาชิกของ N ยกเว้น 1 จะมีสมาชิกนำหน้าที่ติดกัน

6) เซต N ไม่มีสมาชิกตัวสุดท้าย

ทฤษฎีบท 2.1.1 หลักของการอุปมานทางคณิตศาสตร์

ถ้า $S \subseteq N$ ซึ่ง

i) $1 \varepsilon S$

ii) ถ้า $x \varepsilon S$ แล้ว $x' \varepsilon s$ ด้วยแล้วจะได้ว่า $S = N$ (เมื่อ x' คือสมาชิกตัวถัดไปจาก x)

2.2 จำนวนเต็มและจำนวนตรรกยะ

เซตของจำนวนเต็ม (I) คือ $\{x : x \varepsilon N$ หรือ $x = 0$ หรือ $-x \varepsilon N\}$

$= \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

เซตของจำนวนตรรกยะ (Q) คือ $\{\frac{a}{b} : a \varepsilon I,\ b \varepsilon I$ และ $b \neq 0\}$

ระบบ $(Q, +, \times, <)$ มีคุณสมบัติสอดคล้องกับสัจจพจน์ต่อไปนี้

ให้ x, y, z เป็นสมาชิกใด ๆ ใน Q

สัจจพจน์สำหรับการบวก

1) $x + y \varepsilon Q$

2) $x + y = y + x$

3) $(x + y) + z = x + (y + z)$

4) ในเซต Q มี 0 ซึ่ง $x + 0 = x = 0 + x$

5) สำหรับแต่ละ $x \varepsilon Q$ จะมี $-x$ ซึ่ง $x + (-x) = 0 = (-x) + x$

สัจจพจน์สำหรับการคูณ

6) $xy \varepsilon Q$

7) $xy = yx$

8) $(xy)z = x(yz)$

9) ในเซต Q มี 1 ซึ่ง $x1 = x = 1x$

10) สำหรับแต่ละ $x \varepsilon Q$ ที่ $x \neq 0$ จะมี $\frac{1}{x}$ ซึ่ง $x\left(\frac{1}{x}\right) = 1 = \frac{1}{x}(x)$

สัจจพจน์แห่งการแจกแจง

11) $x(y+z) = xy+xz$

สัจจพจน์แห่งอันดับ

12) สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon Q$ จะได้ว่า $x = 0$ หรือ $x < 0$ หรือ $0 < x$ เพียงอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น

13) สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon Q$ ถ้า $0 < x, 0 < y$ แล้ว $0 < x+y$ และ $0 < xy$

14) สำหรับทุก ๆ $x, y \varepsilon Q$ ได้ว่า $x < y$ ถ้า $0 < y-x$

บทนิยามการลบ สำหรับ x, y ใด ๆ $x-y$ ก็คือ $x+(-y)$

บทนิยามการหาร สำหรับ x, y ใด ๆ ซึ่ง $y \neq 0$, $\frac{x}{y}$ ก็คือ $x\left(\frac{1}{y}\right)$

2.3 จำนวนอตรรกยะ

จำนวนอตรรกยะ คือ จำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เช่น $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \pi, e$, ฯลฯ เป็นต้น

2.4 จำนวนจริง

เซตของจำนวนจริง (R) คือ เซตที่ประกอบด้วยจำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ

จำนวนจริงมีคุณสมบัติสอดคล้องกับสัจจพจน์สำหรับการบวก สัจจพจน์สำหรับการคูณ, สัจจพจน์แห่งการแจกแจง, สัจจพจน์แห่งลำดับที่กล่าวมาแล้ว นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์ด้วย

สัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์

15) ให้ $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ ถ้า S มีขอบเขตบนแล้ว S ย่อมมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด

หมายเหตุ

1) เซตใด ๆ ภายใต้การบวก (+) การคูณ ($\times$) ซึ่งสอดคล้องกับสัจจพจน์สำหรับการบวก, สัจจพจน์สำหรับการคูณ และสัจจพจน์แห่งการแจกแจง จะเรียกว่า ฟิลด์ (field)

2) เซตใด ๆ ภายใต้การบวก (+), การคูณ (×) และความสัมพันธ์น้อยกว่า (<) ซึ่งสอดคล้องกับสัจจพจน์สำหรับการบวก, สัจจพจน์สำหรับการคูณ, สัจจพจน์แห่งการแจกแจง และสัจจพจน์แห่งอันดับ จะเรียกว่า ฟิลด์ที่มีอันดับ (ordered field)

3) เซตใด ๆ ภายใต้การบวก (+), การคูณ (×) และความสัมพันธ์น้อยกว่า (<) ซึ่งสอดคล้องกับสัจจพจน์สำหรับการบวก, สัจจพน์สำหรับการคูณ, สัจจพจน์แห่งการแจกแจง, สัจจพจน์แห่งอันดับและสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์ จะเรียกว่า ฟิลด์ที่มีอันดับอย่างบริบูรณ์ (Complete ordered field)

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งว่า ฟิลด์ที่สอดคล้องกับสัจจพจน์แห่งอันดับเรียกว่าฟิลด์ที่มีอันดับ และฟิลด์ที่มีอันดับที่สอดคล้องกับสัจจพจน์แห่งความบริบูรณ์เรียกว่า ฟิลด์ที่มีอันดับอย่างบริบูรณ์

2.4.1 เซตที่มีขอบเขตจำกัด

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า M เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $x \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ $x \varepsilon S$ แล้วจะเรียก M ว่า ขอบเขตบนของเซต S

บทนิยาม 2.4.2 ให้ $S \subseteq R$ ถ้า K เป็นจำนวนจริงซึ่ง $K \leqslant x$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ $x \varepsilon S$ แล้ว จะเรียก K ว่า ขอบเขตล่างของเซต S

บทนิยาม 2.4.3 ถ้า m เป็นขอบเขตบนของเซต S และ $m \leqslant M$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ M ที่เป็นขอบเขตบนของ S แล้ว จะเรียก m ว่าขอบเขตบนค่าน้อยสุด (least upper bound or supremum) ของเซต S มักเขียนแทนด้วย l.u.b. S หรือ sup. S

บทนิยาม 2.4.4 ถ้า k เป็นขอบเขตล่างของเซต S และ $K \leqslant k$ สำหรับทุก ๆ ค่าของ K ที่เป็นขอบเขตล่างของ S แล้ว จะเรียก k ว่า ขอบเขตล่างค่ามากสุด (greatest lower bound or infimum) ของเซต S มักเขียนแทนด้วย g.l.b. S หรือ inf. S

ทฤษฎีบท 2.4.1 ถ้า $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ แล้ว ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของเซต S (ถ้ามี) จะมีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.4.5 สำหรับ $S \subseteq R$ จะเรียก S ว่าเป็นเซตที่มีขอบเขตจำกัด ถ้า S มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง

ทฤษฎีบท 2.4.2 สำหรับ $S \subseteq R$ และ $S \neq \Phi$ ถ้า S มีขอบเขตล่างแล้ว S ย่อมมีขอบเขตล่างค่ามากสุด

2.4.2 ค่าสัมบูรณ์

บทนิยาม 2.4.6 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ นิยามโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{ถ้า } x \geqslant 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 2.4.3 สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ได้ว่า

1) $|-x| = |x|$

2) $|xy| = |x||y|$

3) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$

4) ถ้า $a > 0$ แล้ว $|x| \leqslant a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leqslant x \leqslant a$

ทฤษฎีบท 2.4.4 อสมการอิงสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
สำหรับจำนวนจริง x, y ใด ๆ ได้ว่า

$|x+y| \leqslant |x|+|y|$

2.4.3 คุณสมบัติอาร์คีมีดิสของจำนวนจริง

บทนิยาม 2.4.7 ฟิลด์ที่มีอันดับ F จะเรียกว่าเป็นฟิลด์ที่มีอันดับแบบอาร์คีมีดีส ถ้าสำหรับแต่ละ $x \varepsilon F$ จะมีจำนวนธรรมชาติ n ซึ่ง $x < n$

ทฤษฎีบท 2.4.5 คุณสมบัติอาร์คีมีดีสของจำนวนจริง (Archimedean property of real numbers)

กำหนดให้ $x \varepsilon R$ และ $x>0$ แล้วจะมี $n \varepsilon N$ ซึ่ง $x < n$

บทแทรก ถ้า $x \varepsilon R$ ซึ่ง $0 \leqslant x < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ $n \varepsilon N$ แล้ว $x = 0$

ทฤษฎีบท 2.4.6 ในเซต R สำหรับ $a > 0$ ใด ๆ ที่กำหนดมาให้ จะมี $x > 0$ ซึ่ง $x^2 = a$

2.4.4 คุณสมบัติความหนาแน่นของจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 2.4.7 ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนตรรกยะ (กล่าวได้ว่ามีจำนวนตรรกยะอยู่หนาแน่นในจำนวนจริง)

ทฤษฎีบท 2.4.8 ระหว่างจำนวนตรรกยะสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ

ทฤษฎีบท 2.4.9 ระหว่างจำนวนจริงสองจำนวนใด ๆ ย่อมมีจำนวนอตรรกยะ (กล่าวได้ว่า มีจำนวนอตรรกยะอยู่หนาแน่นในจำนวนจริง)

2.4.5 ช่วง

ช่วงคือ เซตที่มีสมาชิกเรียงรายกันอยู่อย่างต่อเนื่อง

บทนิยาม 2.4.8 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a < b$ แล้วได้ว่า

1) ช่วงเปิด จาก a ไป b เขียนแทนด้วย (a,b)
   คือ $(a,b) = \{x \varepsilon R : a < x < b\}$
2) ช่วงปิดจาก a ไป b เขียนแทนด้วย [a,b]
   คือ $[a,b] = \{x \varepsilon R : a \leqslant x \leqslant b\}$
3) ช่วงกึ่งเปิดทางซ้ายจาก a ไป b เขียนแทนด้วย (a,b]
   คือ $(a,b] = \{x \varepsilon R : a < x \leqslant b\}$

4) ช่วงกึ่งเปิดทางขวาจาก a ไป b เขียนแทนด้วย $[a,b)$

คือ $[a,b) = \{x \varepsilon R : a \leqslant x < b\}$

5) ช่วงกึ่งอนันต์ แบ่งเป็น 4 ลักษณะคือ

5.1) เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่า b เขียนแทนด้วย $(-\infty,b)$

คือ $(-\infty,b) = \{x \varepsilon R : x < b\}$

5.2) เซตของจำนวนจริงที่น้อยกว่า หรือเท่ากับ b เขียนแทนด้วย $(-\infty,b]$

คือ $(-\infty,b] = \{x \varepsilon R : x \leqslant b\}$

5.3) เซตของจำนวนจริงที่มากกว่า a เขียนแทนด้วย $(a,+\infty)$

คือ $(a,+\infty) = \{x \varepsilon R : a < x\}$

5.4) เซตของจำนวนจริงที่มากกว่าหรือเท่ากับ a เขียนแทนด้วย $[a,+\infty)$

คือ $[a,+\infty) = \{x \varepsilon R : a \leqslant x\}$

6) **ช่วงอนันต์** คือเซตของจำนวนจริงทั้งหลาย เขียนแทนด้วย $(-\infty,+\infty) = \{x : x \varepsilon R\}$

2.4.6 ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง

บทนิยาม 2.4.9 ภาคยืดขยายของระบบจำนวนจริง เขียนแทนด้วย R^* คือเซตที่ประกอบด้วยจำนวนจริงทั้งหลาย (เซต R) และสมาชิกใหม่อีก 2 ตัว คือ $+\infty$ และ $-\infty$ ซึ่งสอดคล้องกับคุณสมบัติต่าง ๆ ดังนี้

1) ถ้า $a \varepsilon R$ แล้วจะได้ว่า

1.1) $a+(+\infty) = +\infty$

1.2) $a+(-\infty) = -\infty$

1.3) $a-(+\infty) = -\infty$

1.4) $a-(-\infty) = +\infty$

1.5) $\frac{a}{+\infty} = 0$

1.6) $\frac{a}{-\infty} = 0$

2) ถ้า $a > 0$ แล้ว จะได้ว่า

2.1) $a(+\infty) = +\infty$

2.2) $a(-\infty) = -\infty$

3) ถ้า $a < 0$ แล้ว จะได้ว่า

3.1) $a(+\infty) = -\infty$

3.2) $a(-\infty) = +\infty$

4) $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

5) $(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$

6) ถ้า $a \varepsilon R$ แล้วได้ว่า $-\infty < a < +\infty$

2.5 เซตเปิดและเซตปิดในระบบจำนวนจริง

บทนิยาม 2.5.1 ย่านสมมาตร (เรียกสั้น ๆ ว่าย่าน) ของจุด x_0 เมื่อ $x_0 \varepsilon R$ หมายถึง เซตของจำนวนจริง x ทั้งหมด ซึ่ง $|x - x_0| < h$ เมื่อ $h \varepsilon R$ และ $h > 0$ เขียนแทนด้วย $N_h(x_0)$

บทนิยาม 2.5.2 เซต S จะเรียกว่าเป็นเซตเปิด ก็ต่อเมื่อแต่ละจุด x_0 ของ S มีย่านอย่างน้อยหนึ่งย่าน ซึ่งอยู่ใน S

ทฤษฎีบท 2.5.1 เซตส่วนร่วมของเซตเปิดสองเซตใด ๆ ย่อมเป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.5.2 เซตผลผนวกของกลุ่มของเซตเปิดใด ๆ ย่อมเป็นเซตเปิด

ข้อสังเกต เซตส่วนร่วมของกลุ่มของเซตเปิดที่มีจำนวนไม่จำกัด อาจจะไม่เป็นเซตเปิดก็ได้

บทนิยาม 2.5.3 เซต S ใด ๆ จะเรียกว่าเป็นเซตปิด ถ้าส่วนเติมเต็มของเซตนั้น (คือ S') เป็นเซตเปิด

ทฤษฎีบท 2.5.3 เซตผลผนวกของเซตปิดสองเซตใด ๆ ย่อมเป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 2.5.4 เซตส่วนร่วมของกลุ่มของเซตปิดใด ๆ ย่อมเป็นเซตปิด

บทนิยาม 2.5.4 ถ้า x เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว เซตเปิด A ใด ๆ ซึ่ง $x \varepsilon A$ จะกล่าวได้ว่าเซต A เป็นย่านหนึ่งของ x เขียนแทนด้วย $N(x)$

บทนิยาม 2.5.5 สำหรับจุด $x \varepsilon A$ จะเรียก x ว่าเป็นจุดข้างในเซต A ถ้ามี $N(x) \subseteq A$

บทนิยาม 2.5.6 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าเป็นจุดข้างนอกเซต A ก็ต่อเมื่อย่านของ x เป็นเซตย่อยของ A' (เมื่อ A' คือส่วนเติมเต็มของ A)

บทนิยาม 2.5.7 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าจุดขอบเซต A ก็ต่อเมื่อทุก ๆ ย่านของ x มีทั้งจุดที่อยู่ในเซต A และเซต A'

บทนิยาม 2.5.8 สำหรับจุด x ใด ๆ จะเรียกจุด x นั้นว่าเป็นจุดลิมิตของเซต A ถ้าทุก ๆ ย่านของ x มีอย่างน้อยหนึ่งจุดที่อยู่ในเซต A โดยที่จุดนั้นต้องเป็นจุดที่ต่างจากจุด x

ทฤษฎีบท 2.5.5 เซต S ใด ๆ จะเป็นเซตปิดก็ต่อเมื่อเซต S นั้นประกอบด้วยจุดลิมิตของเซต S ทั้งหมด

คำตอบแบบฝึกหัด

คำตอบแบบฝึกหัด 2.2.1

2) สอดคล้องทุกข้อยกเว้นข้อ 10. ข้อเดียวเท่านั้น

คำตอบแบบฝึกหัด 2.3.1

3.1) เช่น $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$

3.2) เช่น $x = \sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}$

3.3) เช่น $x = \sqrt{5}$, $y = \sqrt{5}$

3.4) เช่น $x = \sqrt{6}$, $y = \sqrt{6}$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.4.1

22) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant 3\}$
ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant 1\}$
ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 3
ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 1

23) คำตอบเหมือนข้อ 22)

24) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant 5\}$
ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant 1\}$
ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 1
ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 5

25) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant \frac{3}{2}\}$
ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant -1\}$

26) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant 1\}$
ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant \frac{1}{2}\}$
ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ 1
ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ $\frac{1}{2}$

27) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant \sqrt{3}\}$
ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant 1\}$
ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ $\sqrt{3}$
ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 1

28) ขอบเขตบน คือ $\{x \varepsilon R : x \geqslant \sqrt{2}\}$

ขอบเขตล่าง คือ $\{x \varepsilon R : x \leqslant 1\}$

ขอบเขตบนค่าน้อยสุด คือ $\sqrt{2}$

ขอบเขตล่างค่ามากสุด คือ 1

30) $S = \{c\}$ เมื่อ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

31) (1) $-6 \leqslant x \leqslant 10$

(2) $x < -6$ และ $x > 10$

คำตอบแบบฝึกหัด 2.5.1

1.

1.1) เป็นเซตเปิด

1.2) เป็นเซตปิด

1.3) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

1.4) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

1.5) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

1.6) เป็นเซตเปิด

1.7) เป็นเซตปิด

1.8) เป็นเซตปิด

1.9) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

1.10) ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด

2. จุดลิมิตของ S คือ ทุก ๆ จุด x ซึ่ง $0 \leqslant x \leqslant 1$

จุดลิมิตของ S คือ ทุก ๆ จุด x ซึ่ง $x \leqslant 0$ และ $x \geqslant 1$

3.

3.1) ไม่มี

3.2) มี คือจุด 0 กับ 1

6.

6.1) จุดลิมิตของ S_1 คือ 1

จุดข้างในของ S_1 ไม่มี

จุดข้างนอกของ S_1 คือ $\{x \varepsilon R : x \not\varepsilon S_1\}$ หรือเซต S_1'

จุดขอบของ S_1 คือ จุดทุก ๆ จุดใน S_1 รวมทั้ง 1 ด้วย

6.2) จุดลิมิตของ S_2 คือ 0

จุดข้างในของ S_2 ไม่มี

จุดข้างนอกของ S_2 คือ $\{x \varepsilon R : x \varepsilon S_2\}$ หรือเซต S_2'

จุดขอบของ S_2 คือ จุดทุก ๆ จุดในเซต S_2

6.3) จุดลิมิตของ S_3 คือ 1 และ -1

จุดข้างในของ S_3 ไม่มี

จุดข้างนอกของ S_3 คือ $\{x \varepsilon R : x \varepsilon S_3\}$ หรือเซต S_3'

จุดขอบของ S_3 คือ ทุก ๆ จุดในเซต S_3

6.4) จุดลิมิตของ S_4 คือ ทุก ๆ จุดในเซต S_4

จุดข้างในของ S_4 คือ $\{x \varepsilon R : 0 < x < 1\}$

จุดข้างนอกของ S_4 คือ $\{x \varepsilon R : x \varepsilon S_4\}$ หรือเซต S_4'

จุดขอบของ S_4 คือ จุด 0 และ 1