# บทที่ 1
# ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น

## หัวข้อเรื่อง

1.1 เซต
- 1.1.1 การเขียนสัญลักษณ์แทนเซต
- 1.1.2 ความสัมพันธ์ระหว่างเซต
- 1.1.3 การดำเนินการของเซต
- 1.1.4 พีชคณิตของเซตเบื้องต้น
- 1.1.5 ผลผนวกและส่วนร่วมของกลุ่มของเซต

1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน

1.3 ฟังก์ชัน
- 1.3.1 การเท่ากันของฟังก์ชัน
- 1.3.2 ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ
- 1.3.3 พีชคณิตของฟังก์ชัน
- 1.3.4 ฟังก์ชันลักษณะพิเศษ
- 1.3.5 ฟังก์ชันเชิงประกอบ
- 1.3.6 ฟังก์ชันผกผัน
- 1.3.7 ภาพทางตรง
- 1.3.8 ภาพผกผัน

1.4 เซตจำกัดและเซตอนันต์

## วัตถุประสงค์

หลังจากศึกษาบทที่ 1 จบแล้ว นักศึกษาสามารถ

1. นำความรู้เกี่ยวกับเซตไปใช้อ้างอิงได้
2. นำความรู้เกี่ยวกับผลคูณคาร์ทีเซียนไปใช้อ้างอิงได้
3. นำเอาความรู้เกี่ยวกับฟังก์ชันไปใช้อ้างอิงได้
4. นำเอาความรู้เกี่ยวกับเซตจำกัดและเซตอนันต์ไปใช้อ้างอิงได้

# บทที่ 1
# ความรู้พื้นฐานเบื้องต้น

สำหรับความรู้พื้นฐานเบื้องต้นที่จะกล่าวต่อไปนี้ ต่างก็เป็นความรู้พื้นฐานที่นักศึกษาได้ศึกษามาแล้วในกระบวนวิชาต่าง ๆ จึงขอนำมากล่าวทบทวนในรูปของบทนิยาม และ ทฤษฎีบทที่สำคัญ ๆ โดยไม่แสดงการพิสูจน์

## 1.1 เซต (SETS)

โดยปกติเรามักจะใช้คำว่า "เซต" ในชีวิตประจำวันโดยไม่รู้ตัวด้วยคำต่าง ๆ แต่ก็อยู่ในความหมายเดียวกัน เช่น กลุ่มคน, ฝูงสัตว์, โขลงช้าง, หมู่บ้าน, ทีมฟุตบอล, นักศึกษาปีที่ 1 ฯลฯ นั่นคือเราใช้คำว่า "เซต" ในความหมาย "กลุ่มของสิ่งต่าง ๆ" คือเมื่อเราเอาสิ่งต่าง ๆ มารวมกัน เราจะได้สิ่งที่ทางคณิตศาสตร์เรียกว่า "เซต" (set) และเราจะเรียกสิ่งต่าง ๆ ที่รวมกันเป็นกลุ่มหรือเป็นองค์ประกอบของเซตใด ๆ ว่า "สมาชิก" (elements) ของเซต เช่น A เป็นเซตของวันในหนึ่งสัปดาห์ เซต A จะประกอบด้วย วันอาทิตย์, วันจันทร์, วันอังคาร, วันพุธ, วันพฤหัสบดี, วันศุกร์ และวันเสาร์ เป็นสมาชิกของเซต

ในทางคณิตศาสตร์ มักจะใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์ใหญ่ เช่น A, B, C, ... แทนเซตและใช้อักษรโรมันตัวพิมพ์เล็ก เช่น a, b, c, ... แทนสมาชิกของเซต

### 1.1.1 การเขียนสัญลักษณ์แทนเซต มีการเขียนได้ 2 วิธี คือ

**1. โดยวิธีแจกแจงสมาชิก**

การเขียนสัญลักษณ์แทนเซตโดยวิธีแจกแจงสมาชิกให้เขียนสมาชิกทั้งหลายที่ประกอบกันเป็นเซตนั้นลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค " , " คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว เช่น เซต A ประกอบด้วยเลขคู่บนหน้าลูกเต๋า ก็จะเขียนพรรณาเซต A หรือแจกแจงสมาชิกของเซต A ได้เป็น $A = \{2,4,6\}$ อ่านว่า A เป็นเซตที่ประกอบด้วย 2, 4 และ 6 เป็นต้น

อนึ่ง วิธีนี้เหมาะสำหรับเขียนแทนเซตที่มีสมาชิกในเซตไม่มากนักหรือถ้าเป็นเซตที่มีสมาชิกมาก ๆ บรรดาสมาชิกเหล่านั้นแต่ละสมาชิกก็จะต้องมีลักษณะเรียงรายกันอยู่อย่างมี

ระเบียบ การแจกแจงสมาชิกอาจจะใช้จุด 3 จุด (...) เขียนต่อหลังสมาชิกที่แจกแจงไว้บ้างแล้ว (ประมาณ 3 ตัว) วิธีนี้ช่วยทำให้ประหยัดเวลาในการเขียนแจกแจงสมาชิกของเซตได้ (แต่บางทีก็ทำให้ความหมายกำกวมได้) เช่น เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ 200 สามารถเขียนได้เป็น $\{1,2,3,\ldots,200\}$ หรือถ้า N เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกแล้ว สามารถเขียนแจกแจงสมาชิกของเซต N ได้เป็น $N = \{1,2,3,\ldots\}$

**หมายเหตุ** 1) การแจกแจงสมาชิกในเซตนั้น อาจเขียนสมาชิกใดก่อนหรือหลังก็ได้

2) สมาชิกตัวหนึ่ง ๆ จะเขียนซ้ำกันสักกี่ครั้งก็ได้ ก็ยังถือว่าเป็นสมาชิกตัวเดียวเท่านั้น

**2. โดยวิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต**

การเขียนสัญลักษณ์แทนเซตโดยวิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิกในเซต ให้เขียนตัวแทนของสมาชิกในเซตตัวหนึ่งใส่ไว้ในวงเล็บปีกกา แล้วบรรยายคุณสมบัติของสมาชิกไว้ด้วยการคั่นตัวแทนของสมาชิก กับคำบรรยายคุณสมบัติด้วยเครื่องหมาย ; หรือ : หรือ | ซึ่งในที่นี้มักใช้เครื่องหมาย : และจะอ่านเครื่องหมาย : ว่า "ซึ่ง" หรือ "ที่" หรือ "โดยที่" เช่น $A = \{x :$ x เป็นเลขคู่บนหน้าของลูกเต๋า$\}$ อ่านว่า "A เป็นเซตซึ่งประกอบด้วยสมาชิก x โดยที่ x เป็นเลขคู่บนหน้าของลูกเต๋า"

วิธีนี้เหมาะสำหรับการเขียนแทนเซต ที่มีสมาชิกจำนวนมากหรือนับไม่ได้

ถ้าสมาชิกตัวใดอยู่ในเซต ๆ หนึ่ง เราจะเรียกสมาชิกตัวนั้นว่า เป็นสมาชิกของเซตนั้น ๆ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ "$\varepsilon$"

เช่น ถ้า $A = \{2,4,6\}$ จะกล่าวว่า

2 เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $2\varepsilon A$

4 เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $4\varepsilon A$

5 ไม่เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $5\varepsilon A$

โดยทั่ว ๆ ไปจะเขียน "$x\varepsilon A$" แทน "x เป็นสมาชิกของ A" หรือ "x อยู่ใน A" และเขียน $x\varepsilon A$ แทน "x ไม่เป็นสมาชิกของ A" หรือ "x ไม่อยู่ใน A"

### 1.1.2 ความสัมพันธ์ของเซต

**บทนิยาม 1.1.1** สำหรับเซต A และ B ใด ๆ ซึ่งสมาชิกของ A ทุกตัวเป็นสมาชิกของ B จะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อย (subset) ของ B เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "$A \subseteq B$"

เช่น $A = \{1,2\}$ , $B = \{1,2,3,4\}$ จะได้ว่า $A \subseteq B$

**บทนิยาม 1.1.2** ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ แล้ว จะกล่าวว่า $A = B$ (นั่นคือ A และ B เป็นเซตเดียวกัน)

**บทนิยาม 1.1.3** ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \neq B$ แล้ว จะกล่าวว่า A เป็นเซตย่อยแท้ (proper subset) ของ B เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "$A \subset B$"

### 1.1.3 การดำเนินการของเซต

**บทนิยาม 1.1.4** สำหรับเซต A และ B ใด ๆ "**เซตผลผนวกของ** A **กับ** B (the union of A and B) คือเซตของทุกสมาชิกที่อยู่ในเซต A หรือเซต B เซตใดเซตหนึ่ง หรืออยู่ในทั้งสองเซต เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "$A \cup B$"

นั่นคือ $A \cup B = \{x : x \varepsilon A \vee x \varepsilon B\}$

**บทนิยาม 1.1.5** สำหรับเซต A และ B ใด ๆ **เซตส่วนร่วมของ** A **กับ** B (the intersection of A and B) คือเซตของสมาชิกที่อยู่ทั้งในเซต A และ B เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "$A \cap B$"

นั่นคือ $A \cap B = \{x : x \varepsilon A \wedge x \varepsilon B\}$

**บทนิยาม 1.1.6** สำหรับเซต A และ B ใด ๆ **เซตผลต่างของ** A **กับ** B (the difference of A and B) คือเซตของสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "$A - B$"

นั่นคือ $A - B = \{x : x \varepsilon A \wedge x \notin B\}$

**บทนิยาม 1.1.7** เซตเปล่า (empty set) หมายถึงเซตที่ไม่มีสมาชิกเลย เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $\Phi$ หรือ $\{\ \}$

นั่นคือ $\Phi = \{x : x \neq x\}$ โดย $\Phi$ จะเป็นเซตย่อยของทุก ๆ เซต

**บทนิยาม 1.1.8** เอกภพสัมพัทธ์ (universal set) คือเซตซึ่งกำหนดขอบข่ายที่จะพิจารณา โดยมีข้อตกลงว่าจะไม่กล่าวถึงเซตย่อยใดที่นอกเหนือไปจากเซตย่อยของเซตที่กำหนดขึ้นนี้ และมักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ "U"

**บทนิยาม 1.1.9** ถ้าเซต A และ B เป็นเซตสองเซตใด ๆ ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกันเลย จะกล่าวว่า เซตทั้งสองเป็นเซตต่างสมาชิก (disjoint sets) กัน

นั่นคือ A และ B เป็นเซตต่างสมาชิกกันก็ต่อเมื่อ $A \cap B = \Phi$

**บทนิยาม 1.1.10** ส่วนเติมเต็ม (complement) ของเซต A ใด ๆ คือเซตของทุกสมาชิกซึ่งไม่ใช่สมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $A'$

นั่นคือ $A' = \{x : x \notin A\}$

### 1.1.4 พีชคณิตของเซตเบื้องต้น

สำหรับเซต A, B และ C ใด ๆ

**ทฤษฎีบท 1.1.1** $A \cup \Phi = A$ และ $A \cap \Phi = \Phi$

**ทฤษฎีบท 1.1.2** $A \cup U = U$ และ $A \cap U = A$

**ทฤษฎีบท 1.1.3** $(A')' = A$

**ทฤษฎีบท 1.1.4** $A \cup A = A$ และ $A \cap A = A$

**ทฤษฎีบท** 1.1.6 $A \subseteq (A \cup B)$ และ $B \subseteq (A \cup B)$

**ทฤษฎีบท** 1.1.8 $(A \cap B) \subseteq A$ และ $(A \cap B) \subseteq B$

**ทฤษฎีบท 1.1.7** $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cup B = B$

**ทฤษฎีบท** 1.1.8 $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A \cap B = A$

**ทฤษฎีบท 1.1.9** $A \cup (A \cap B) = A$

**ทฤษฎีบท** 1.1.10 $A \cap (A \cup B) = A$

**ทฤษฎีบท** 1.1.11 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

**ทฤษฎีบท** 1.1.12 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

**ทฤษฎีบท** 1.1.13 $A - B = A \cap B'$

**ทฤษฎีบท** 1.1.14 $A = (A \cap B) \cup (A \cap B')$

**ทฤษฎีบท** 1.1.15 $A \cup B = B \cup A$

**ทฤษฎีบท** 1.1.16 $A \cap B = B \cap A$

**ทฤษฎีบท** 1.1.17 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

**ทฤษฎีบท 1.1.18** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

**ทฤษฎีบท** 1.1.19 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

**ทฤษฎีบท** 1.120 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

**ทฤษฎีบท** 1.1.21 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

### 1.1.5 ผลผนวกและส่วนร่วมของกลุ่มของเซต

**บทนิยาม 1.1.11** ให้ $J$ เป็นเซตดรรชนี (index set) และสำหรับแต่ละ $i \varepsilon J$ ให้ $A_i$ เป็นเซตแล้วจะได้ว่า

**(1) ผลผนวก** (union) **ของกลุ่มของเซต** $\{A_i | i \varepsilon J\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bigcup_{i \varepsilon J} A_i$ หมายถึงเซตของสมาชิก x ทุกตัวซึ่ง $x \varepsilon A_i$ สำหรับบาง $i \varepsilon J$

**(2) ส่วนร่วม** (intersection) **ของกลุ่มของเซต** $\{A_i | i \varepsilon J\}$ ซึ่งเขียนแทนด้วย $\bigcap_{i \varepsilon J} A_i$ หมายถึงเซตของสมาชิก x ทุกตัวซึ่ง $x \varepsilon A_i$ สำหรับทุก ๆ $i \varepsilon J$

**ตัวอย่าง** เช่น ให้ J = {a,b,c,d} เป็นเซตดรรชนี

โดย $A_a = \{1,2,3\}$ , $A_b = \{2,3,4\}$

$A_c = \{2,4,6,7\}$ , $A_d = \{1,2,5\}$ แล้วจะได้ว่า

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

และ $$\bigcap_{i \in J} A_i = \{2\}$$ เป็นต้น

**ทฤษฎีบท** 1.1.22 ให้ J เป็นเซตดรรชนีและสำหรับแต่ละ $i \varepsilon J$ ให้ $A_i$ เป็นเซต

แล้วจะได้ว่า (1) ถ้า $j \varepsilon J$ แล้ว $\bigcap_{i \varepsilon J} A_i \subseteq A_j$

(2) ถ้า $j \varepsilon J$ แล้ว $A_j \subseteq \bigcup_{i \varepsilon J} A_i$

(3) $(\bigcup_{i \varepsilon J} A_i)' = \bigcap_{i \varepsilon J} A_i'$

(4) $(\bigcap_{i \varepsilon J} A_i)' = \bigcup_{i \varepsilon J} A_i'$

## 1.2 ผลคูณคาร์ทีเซียน (CARTESIAN PRODUCT)

สำหรับ a และ b ใด ๆ จะเรียก (a,b) ว่าคู่อันดับ (ordered pair) ของ a กับ b และกำหนดว่า $(a,b) = (c,d)$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

**บทนิยาม 1.2.1** ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ผลคูณคาร์ทีเซียนของ A กับ B ซึ่งเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $A \times B$ คือเซตของทุกคู่อันดับ (x,y) เมื่อ $x \varepsilon A$ และ $y \varepsilon B$

**ตัวอย่าง 1.2.1** ถ้า $A = \{1,2\}$ , $B = \{a,b\}$

**ดังนั้น** $A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b)\}$

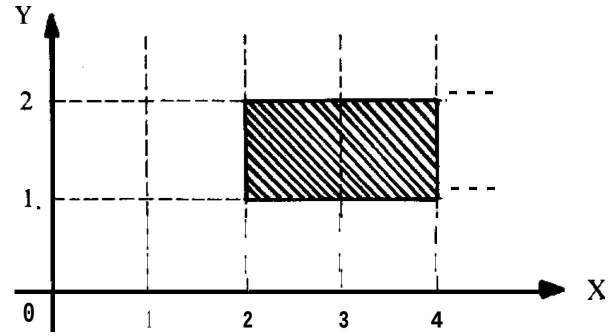
**และ** $B \times A = \{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2)\}$

**ตัวอย่าง 1.2.2** ถ้า $A = \{x : 2<x<4\}$

**และ** $B = \{x : 1<x<2\}$

**ดังนั้น** $A \times B = \{(x,y) : 2<x<4$ และ $1<y<2\}$

**ซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่ถูกล้อมรอบโดยเส้น** $x = 2, x = 4, y = 1$ และ $y = 2$ ดังรูป 1.2.1



รูป 1.2.1

นั่นคือ $A \times B = \{(x,y) : x \varepsilon A \wedge y \varepsilon B\}$

หรือกล่าวโดยทั่ว ๆ ไป

ถ้า $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เป็นเซตแล้วผลคูณคาร์ทีเซียนของ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ คือเซตของทุก $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ เมื่อ $x_1 \varepsilon A_1, x_2 \varepsilon A_2 \ldots$ และ $x_n \varepsilon A_n$

อนึ่ง เราเรียก $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ว่า สิ่งทั้ง n ที่เป็นอันดับ (ordered n-tuple)

จากนิยามของผลคูณคาร์ทีเซียนนี้ ถ้าเซตที่ใช้ทั้งหมดเป็นเซต R คือเซตของจำนวนจริงแล้วจะกล่าวได้ว่า

$R \times R = \{(x,y) : x \varepsilon R \wedge y \varepsilon R\}$ ซึ่งมักเขียนแทนด้วย $R^2$ ก็คือระนาบ ยูคลิเดียน (Euclidean plane)

ดังนั้น $R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \varepsilon R \wedge x_2 \varepsilon R \wedge \ldots \wedge x_n \varepsilon R\}$ ซึ่งจะเรียกว่า ปริภูมิแบบยูคลิดของ n มิติ (Euclidean space of n-dimensions)

**ข้อสังเกต** $R^1 = R = \{x : x \varepsilon R\}$ ก็คือจำนวนจริงทั้งหลายนั่นเอง

## 1.3 ฟังก์ชัน (FUNCTIONS)

**บทนิยาม 1.3.1** ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใด ๆ (ซึ่งไม่จำเป็นจะต้องต่างกัน) แล้ว ฟังก์ชัน f จาก A ไป B ก็คือ "เซตของคู่อันดับใน $A \times B$ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า $(x,y_1)$ และ $(x,y_2)$ อยู่ใน f แล้ว $y_1 = y_2$" มักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $f : A \rightarrow B$ หรืออาจกล่าวได้ว่า "ฟังก์ชันก็คือเซตของคู่อันดับ ซึ่งไม่มีคู่อันดับสองคู่ใด ๆ ในเซตนั้น ที่ตัวประกอบตัวที่สองไม่เท่ากันแต่ตัวประกอบตัวที่หนึ่งเท่ากัน"

โดยทั่วไป ถ้า $(x,y) \varepsilon f$ แล้ว มักเขียนแทนด้วย $y = f(x)$ และจะเรียกว่า "y เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่จุด x" บางทีก็เรียกว่า "y เป็นภาพ (image) ของ x ภายใต้ f" มักเรียกสั้น ๆ ว่า "y เท่ากับฟังก์ชัน x" และเรียก "x ว่าเป็นบุพภาพ (pre-image) ของ y ภายใต้ f"

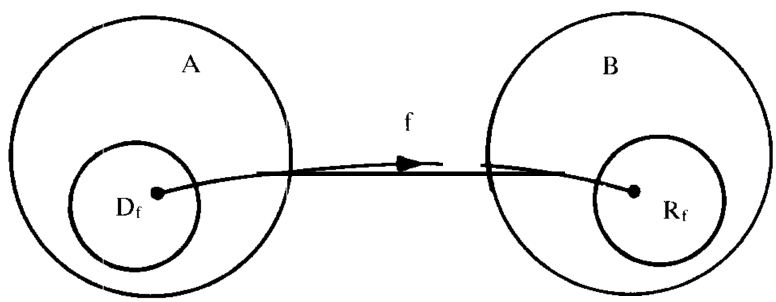
และจะเรียกเซตของบรรดาค่า x ทั้งหลายที่มีค่า f(x) หรือเซตของบรรดาตัวประกอบตัวที่หนึ่งของคู่อันดับใน f หรือ เซตของบรรดาบุพภาพ (pre-image) ทั้งหลายว่า "โดเมนของฟังก์ชัน f" (Domain of f) มักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $D_f$

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $D_f \subseteq A$

และจะเรียกเซตของบรรดาค่า y หรือค่า f(x) ทั้งหลายหรือเซตของบรรดาตัวประกอบตัวที่สองของคู่อันดับใน f หรือเซตของบรรดาภาพ (image) ทั้งหลายภายใต้ f ว่า "พิสัยของฟังก์ชัน f" (range of f) มักเขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $R_f$

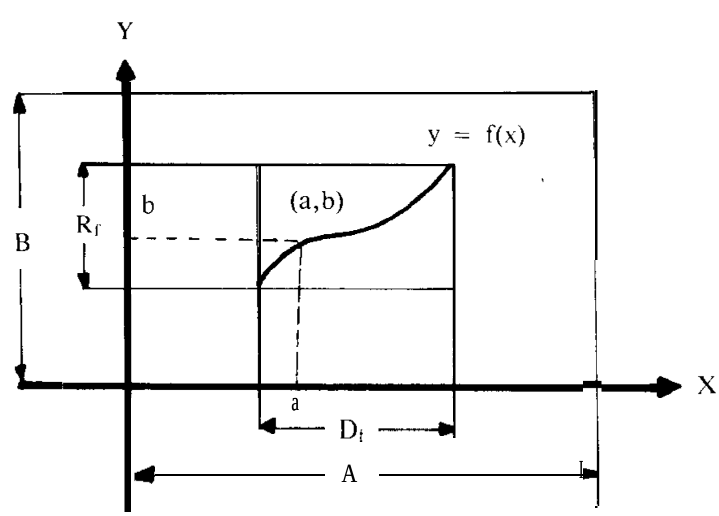
ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า $R_f \subseteq B$

ซึ่งสามารถเขียนแสดงได้ ดังรูป 1.3.1




**รูป 1.3.1**

หรือถ้า f เป็นกราฟ ดังรูป 1.3.2 ก็สามารถเขียนแสดงได้ ดังรูป 1.3.2




รูป 1.3.2

**ตัวอย่าง 1.3.1** ให้ $A = \{a,b,c,d\}$ และ $B = \{p,q,r,s\}$ และ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ซึ่งกำหนดด้วยตาราง 1.3.1

| x | f(x) |
|---|---|
| a | p |
| b | q |
| c | p |
| d | – |

**ตาราง 1.3.1**

ดังนั้น f คือ $\{(a,p), (b,q), (c,p)\}$

โดย $D_f = \{a,b,c\}$ ซึ่งจะเห็นว่า $D_f \subseteq A$ และ $R_f = \{p,q\}$ ซึ่งจะเห็นว่า $R_f \subseteq B$ ด้วย

**ตัวอย่าง 1.3.2** ให้ A และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกและ $f = \{(x,y) : x \varepsilon A$ และ $y \varepsilon B$ ซึ่ง $y = 10-3x\}$ (คือ $f(x) = 10-3x$) เราจะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

วิธีการพิจารณานั้น จะต้องแทนค่า x ด้วยจำนวนเต็มบวก (คือ $x \varepsilon A$) แล้วหาค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก (คือ $y \varepsilon B$) ที่สอดคล้องออกมา

จาก $f(x) = 10-3x$

ถ้า $x = 1 \therefore f(x) = 10-3(1) = 7$

$x = 2 \therefore f(x) = 10-3(2) = 4$

$x = 3 \therefore f(x) = 10-3(3) = 1$

$x = 4 \therefore f(x) = 10-3(4) = -2$ ซึ่งใช้ไม่ได้เพราะ $y \varepsilon B$

ฯลฯ

จะพบว่า เฉพาะ x ที่เป็นจำนวนเต็มบวกที่เท่ากับ 1,2,3 เท่านั้นที่ไม่ให้ค่า y ภายใต้ f ที่เป็นจำนวนเต็มบวกออกมา ส่วนค่า x นอกจากนั้น คือ $x = 4,5,6,\ldots$ ไม่ให้ค่า y ที่เป็นจำนวนเต็มบวก จึงไม่นำมาพิจารณา

ดังนั้น $f = \{(1,7), (2,4), (3,1)\}$

จาก f จะเห็นว่า แต่ละ $x \varepsilon A$ คือ $x = \{1,2,3\}$ แล้วจะหาค่า $y \varepsilon B$ ได้อย่างมากเพียงค่าเดียวเท่านั้น

ดังนั้น จึงกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B

จากตัวอย่าง 1.3.2 นี้ กล่าวได้ว่า

7 เป็น ภาพ ภายใต้ f ของ 1 คือ $7 = f(1)$

4 เป็น ภาพ ภายใต้ f ของ 2 คือ $4 = f(2)$

1 เป็นภาพ ภายใต้ $f$ ของ 3 คือ $1 = f(3)$

ดังนั้น $D_f = \{1,2,3\}$ ซึ่ง $D_f \subseteq A$

และ $R_f = \{7,4,1\}$ ซึ่ง $R_f \subseteq B$

### 1.3.1 การเท่ากันของฟังก์ชัน

**บทนิยาม 1.3.2** ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ จะกล่าวว่า $f$ จะเท่ากับ $g$ เขียนแทนด้วย $f = g$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $D_f = D_g$ ($f$ และ $g$ มีโดเมนเดียวกัน) และ

(2) $f(x) = g(x)$ สำหรับทุก ๆ $x$ ใน $D_f$

**หมายเหตุ**

ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B โดยปกติเมื่อเขียนในรูป สัญลักษณ์ $y = f(x)$ นั้นย่อมกล่าวได้ว่า

$x \varepsilon D_f$ โดย $D_f \subseteq A$

และ $y \varepsilon R_f$ โดย $R_f \subseteq B$

เรามักเรียก $x$ ว่าเป็นตัวแปรอิสระ (independent variable) และเรียก $y$ ว่า ตัวแปรตาม (dependent variable)

### 1.3.2 ฟังก์ชันแบบต่าง ๆ

**บทนิยาม 1.3.3** จะเรียกฟังก์ชัน $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริง (real function) ก็ต่อเมื่อ $R_f \subseteq R$ (เมื่อ R คือเซตของจำนวนจริง)

**บทนิยาม 1.3.4** จะเรียกฟังก์ชัน $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันของจำนวนจริง (function of a real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq R$

**บทนิยาม 1.3.5** จะเรียกฟังก์ชัน $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง (real function of a real variable) ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq R$ และ $R_f \subseteq R$ (นั่นคือ $f \subseteq R \times R$ หรือ $f \subseteq R^2$)

**บทนิยาม 1.3.6** จะเรียก $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B(on A into B) ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันโดย $D_f = A$ และ $R_f \subseteq B$

**บทนิยาม 1.3.7** จะเรียก $f$ ว่าเป็นฟังก์ชันบน A ไปบน B(on A onto B) ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันโดย $D_f = A$ และ $R_f = B$

**บทนิยาม 1.3.8** จะเรียก $f : A \rightarrow B$ ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (injective หรือ one to one) ก็ต่อเมื่อ $\forall_y[(x_1,y) \varepsilon f \wedge (x_2,y) \varepsilon f \Rightarrow x_1 = x_2]$

(นั่นคือ ถ้า $f(x_1) = f(x_2)$ แล้ว $x_1 = x_2$)

**บทนิยาม 1.3.9** จะเรียก $f : A \to B$ ว่าเป็นฟังก์ชันทั่วถึง (surjective function) ก็ต่อเมื่อ $R_f = B$ (หรืออาจกล่าวได้ว่า ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ $y \varepsilon B$ จะมี $x \varepsilon A$ ซึ่ง $(x,y) \varepsilon f$)

**บทนิยาม 1.3.10** จะเรียก $f : A \to B$ ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijective function) ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นทั้งฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง

**บทนิยาม 1.3.11** จะเรียก $f : A \to B$ ว่ามีความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (one - to - one correspondence) ก็ต่อเมื่อ $f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงบน A ไปบน B

### 1.3.3 พีชคณิตของฟังก์ชัน

**บทนิยาม 1.3.12** ให้ $f$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง (คือ $f : A \to R$ และ $g : A \to R$ เป็นฟังก์ชัน) แล้ว

1) $f+g$ คือฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
2) $cf$ คือฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $(cf)(x) = cf(x)$ เมื่อ $c$ คือจำนวนจริงใด ๆ
3) $fg$ คือฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $(fg)(x) = f(x)g(x)$
4) $\frac{f}{g}$ คือฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

อนึ่ง โดเมนของฟังก์ชันในแต่ละกรณีนั้น ก็คือส่วนร่วมของโดเมนของ $f$ กับโดเมนของ$g$ ยกเว้นกรณีที่ 4 ซึ่งโดเมนของฟังก์ชันจะไม่รวม $x$ ที่ $g(x) = 0$

### 1.3.4 ลักษณะพิเศษของฟังก์ชัน

**บทนิยาม 1.3.13** ถ้า A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตเปล่าใด ๆ ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (Identity function) บน A หมายถึงฟังก์ชัน $I_A : A \to A$ ซึ่งกำหนดโดย $\forall x[x \varepsilon A \Rightarrow I_A(x) = x]$

**บทนิยาม 1.3.14** ให้ A และ B เป็นเซตสองเซตใด ๆ โดย b เป็นอีลีเมนต์ตัวหนึ่งของ B, ฟังก์ชันคงที่ (constant function) $K_b$ หมายถึงฟังก์ชัน $K_b : A \to B$ กำหนดโดย $\forall x[x \varepsilon A \Rightarrow K_b(x) = b]$

**บทนิยาม 1.3.15** สำหรับเซต A ใด ๆ และ $B \subseteq A$, ฟังก์ชันย่อย (Inclusion function) ของ B ใน A หมายถึง $E_B : B \to A$ เป็นฟังก์ชันบน B ไปยัง A กำหนดโดย $\forall x[x \varepsilon B \Rightarrow E_B(x) = x]$

**บทนิยาม 1.3.16** เมื่อ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันบน A ไปยัง B และ $S \subseteq A$, ฟังก์ชันกำกัด (restriction) ของ f กับ S หมายถึงฟังก์ชัน $f|_S : S \to B$ เป็นฟังก์ชันบน S ไปยัง B กำหนดโดย $\forall x[x \varepsilon S \Rightarrow f|_S(x) = f(x)]$

**บทนิยาม 1.3.17** ฟังก์ชัน g จะเป็นฟังก์ชันยืดขยาย (extension) ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $D_f \subseteq D_g$ และ $\forall x \varepsilon D_f$, $f(x) = g(x)$

### 1.3.5 **ฟังก์ชันผลประกอบ** (composition function)

**บทนิยาม 1.3.18** ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ เป็นฟังก์ชันแล้ว ฟังก์ชันผลประกอบของ f กับ g (composition of f and g) เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ gof ก็คือฟังก์ชันจาก A ไปยัง C โดย $gof = \{(x,z) \varepsilon A \times C$ โดยมี $y \varepsilon B$ ซึ่ง $(x,y) \varepsilon f$ และ $(y,z) \varepsilon g\}$

หรืออาจกล่าวได้ว่า

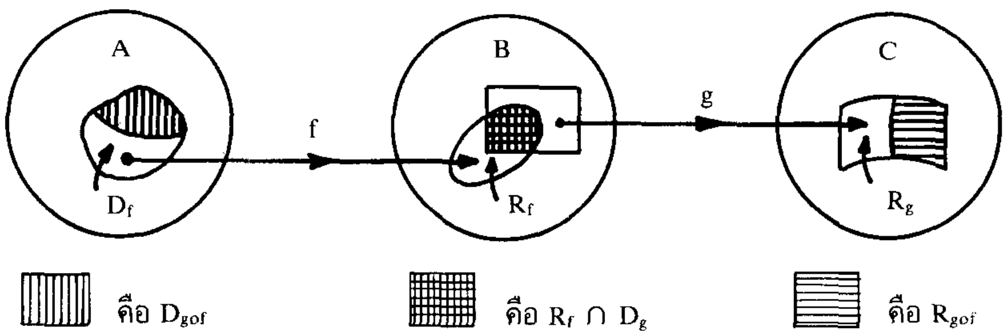
$$[gof](x) = g(f(x))$$

จากนิยาม จะได้ว่า

$$D_{gof} = \{x \varepsilon D_f : f(x) \varepsilon D_g\}$$

$$R_{gof} = \{g(f(x)) : x \varepsilon D_{gof}\}$$

เขียนแสดงได้ดังรูป 1.3.10




**รูป 1.3.10**

**ตัวอย่างที่ 1** ให้ $A = \{1,2,3\}$ , $B = \{a,b,c\}$ และ $C = \{4,5,6,7\}$ โดย $f = \{(1,a),(2,b)\}$ และ $g = \{(b,4),(c,7)\}$ ดังนั้น $gof = \{(2,4)\}$

**ตัวอย่างที่ 2** ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงของจำนวนจริง กำหนดโดย

$$f(x) = 2x,\ g(x) = 3x^2 - 1$$

$\therefore \quad [gof](x) = g(f(x)) = g(2x) = 3(2x)^2 - 1 = 12x^2 - 1$

และ $\quad [fog](x) = f(g(x)) = f(3x^2 - 1) = 2(3x^2 - 1) = 6x^2 - 2$

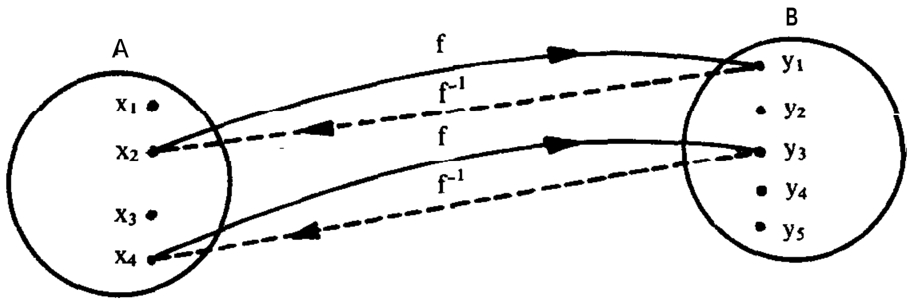
### 1.3.6 **ฟังก์ชันผกผัน** (Inverse function)

**บทนิยาม 1.3.19** ฟังก์ชัน $f : A \to B$ กล่าวได้ว่าสามารถหาฟังก์ชันผกผันได้ถ้ามี $f^{-1} : B \to A$ เป็นฟังก์ชัน

นั่นคือ $f : A \to B$ จะเป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผันโดยที่ $(x,y) \varepsilon f$ ก็ต่อเมื่อ $(y,x) \varepsilon f^{-1}$

จากนิยามเราจะแสดงได้ว่า $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันที่มีฟังก์ชันผกผันก็ต่อเมื่อ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง และ $f^{-1} : B \to A$ ก็เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ตัวอย่างเช่น

$A = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$ , $B = \{y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\}$ กำหนดให้ $f : A \rightarrow B$




รูป 1.3.11

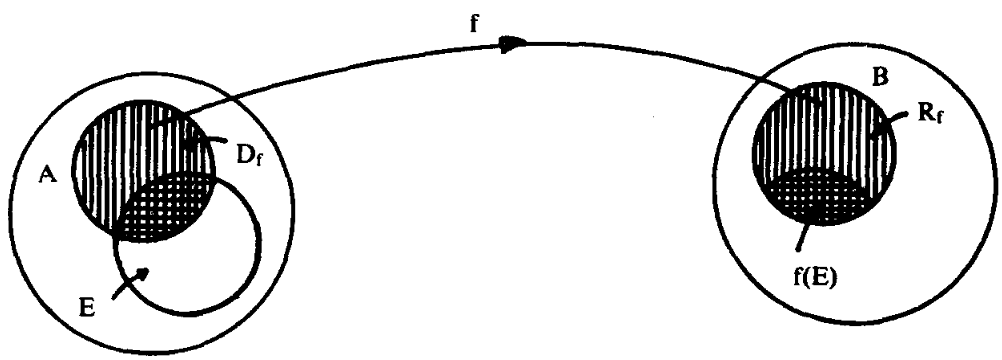
เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง โดย $f = \{(x_2,y_1), (x_4,y_3)\}$ แล้วจะเห็นได้ว่า $f^{-1} : B \rightarrow A$ ก็เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย โดย $f^{-1} = \{(y_1,x_2), (y_3,x_4)\}$ ดูรูป 1.3.11

### 1.3.7 ภาพตรง (Direct image)

**บทนิยาม 1.3.20** ให้ $f : A \rightarrow B$ เป็นฟังก์ชันใด ๆ ถ้า E เป็นเซตย่อยของ A แล้ว ภาพตรง (direct image) ของ E ภายใต้ f เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ f(E) ก็คือเซตย่อยของ $R_f$ กำหนดโดย

$$f(E) = \{f(x) : x \varepsilon E \cap D_f\}$$

เขียนแสดงได้ดังรูป 1.3.12




รูป 1.3.12

จากบทนิยาม 1.3.20 สามารถแสดงได้อีกว่าเมื่อ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันโดยมี E และ F เป็นเซตย่อยของ A แล้ว

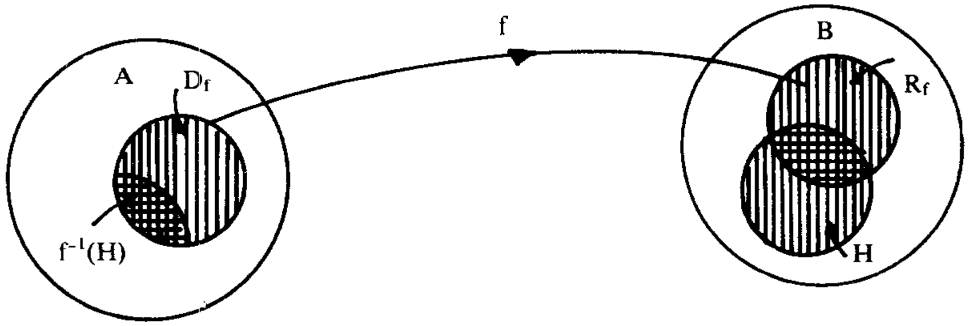
1) ถ้า $E \subseteq F$ แล้ว $f(E) \subseteq f(F)$
2) $f(E \cap F) \subseteq f(E) \cap f(F)$
3) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$
4) $f(E - F) \subseteq f(E)$

### 1.3.8 ภาพผกผัน (Inverse image)

**บทนิยาม 1.3.21** ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไปยัง B ถ้า H เป็นเซตย่อยของ B แล้วภาพผกผัน (inverse image) ของ H ภายใต้ f เขียนแทนด้วย สัญลักษณ์ $f^{-1}(H)$ ก็คือเซตย่อยของ $D_f$ ซึ่งกำหนดโดย

$$f^{-1}(H) = \{x : f(x) \varepsilon H\}$$

เขียนแสดงได้ดังรูป 1.3.13




**รูป 1.3.13**

จากบทนิยาม 1.3.21 สามารถแสดงได้ว่าเมื่อ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันโดย G,H เป็นเซตย่อยของ B แล้ว

1) ถ้า $G \subseteq H$ แล้ว $f^{-1}(G) \subseteq f^{-1}(H)$
2) $f^{-1}(G \cap H) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(H)$
3) $f^{-1}(G \cup H) = f^{-1}(G) \cup f^{-1}(H)$
4) $f^{-1}(G - H) = f^{-1}(G) - f^{-1}(H)$

## 1.4 เซตจำกัดและเซตอนันต์ (FINITE AND INFINITE SETS)

**บทนิยาม 1.4.1** ให้ A เป็นเซตใด ๆ เราจะเรียก A ว่าเป็นเซตจำกัด (finite set) ถ้า A เป็นเซตเปล่า (empty set) หรือมีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่งมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง (1 – 1 correspondence) ระหว่างสมาชิกของ A กับสมาชิกของ $N_k$ เมื่อ $N_k = \{1,2,3,\ldots,k\}$ นั่นคือ $f : A \rightarrow N_k$ มีความสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง เซตใด ๆ ก็ตามที่ไม่เป็นเซตจำกัดเราเรียกเซตนั้นว่าเป็นเซตอนันต์ (infinite set)

**บทนิยาม 1.4.2** เซต A ใด ๆ จะเป็นเซตอนันต์แบบนับได้ (denumerable set) ก็ต่อเมื่อมีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งระหว่างสมาชิกของ A กับสมาชิกของ N (เมื่อ N คือจำนวนธรรมชาติ)

**บทนิยาม 1.4.3** เซต A ใด ๆ จะเป็นเซตนับได้ (countable set) ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัดหรือ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

**บทนิยาม 1.4.4** เซต A จะเป็นเซตนับไม่ได้ (uncountable set) ก็ต่อเมื่อ S ไม่เป็นเซตนับได้ (คือไม่เป็นเซตจำกัดและไม่มีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ระหว่างสมาชิกของเซตนั้นกับสมาชิกของ N)

**ทฤษฎีบท 1.4.1** ถ้า B เป็นเซตจำกัดและ $A \subseteq B$ แล้ว A จะเป็นเซตจำกัดด้วย

**ทฤษฎีบท 1.4.2** ถ้า B เป็นเซตที่นับได้และ $A \subseteq B$ แล้ว A จะเป็นเซตที่นับได้ด้วย

**ทฤษฎีบท 1.4.3** ถ้าเซต A และ B มีการสมนัยแบบหนึ่งต่อหนึ่งและ B เป็นเซตอนันต์หรือเซตจำกัดแล้ว A จะเป็นเซตอนันต์หรือเซตจำกัดด้วย

**ทฤษฎีบท 1.4.4** ถ้า A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ และ $B \subseteq A$ แล้ว B จะต้องเป็นเซตจำกัดหรือเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

**ทฤษฎีบท 1.4.5** ถ้า A เป็นเซตจำกัดและ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้แล้ว $A \cup B$ ย่อมเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

**ทฤษฎีบท 1.4.6** ถ้า A และ B ต่างก็เป็นเซตอนันต์แบบนับได้แล้ว $A \cup B$ จะเป็นเซตอนันต์แบบนับได้ด้วย

**บทแทรกที่ 1** ถ้าแต่ละเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ต่างก็เป็นเซตอนันต์แบบนับได้แล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ จะเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

**บทแทรกที่ 2** ถ้าแต่ละเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ต่างก็เป็นเซตจำกัดแล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ เป็นเซตจำกัดด้วย

**บทแทรกที่ 3** ถ้าแต่ละเซต $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ต่างก็เป็นเซตที่นับได้แล้ว $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ก็เป็นเซตที่นับได้ด้วย