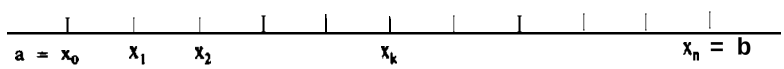
บทที่ 6
รีมันน์อินทิกรัล
(The Riemann Integral)

ในบทนี้จะเริ่มต้นด้วยการศึกษาแนวความคิดของรีมันน์อินทิกรัล และจะต่อด้วยคุณสมบัติเบื้องต้นต่าง ๆ ของฟังก์ชันที่สามารถหาอินทิกรัลได้

6.1 รีมันน์อินทิกรัล (Riemann Integral)

ในหัวข้อนี้จะได้นิยามอินทิกรัลบน (upper integral) และอินทิกรัลล่าง (lower integral) ของฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วงปิดที่มีขอบเขตใด ๆ และฟังก์ชันเหล่านี้จะกล่าวว่าหาค่ารีมันน์อินทิกรัลได้ถ้าอินทิกรัลบนและอินทิกรัลล่างมีค่าเท่ากัน

นิยาม 6.1 กำหนด $I = [a, b]$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต ผลแบ่งกั้นของ I (partition of I) คือเซตย่อย $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ ของ I โดยที่ P เป็นเซตจำกัด และ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$



รูปที่ 6.1 ผลแบ่งกั้น P ของ I = [a, b]

จุดแบ่งกั้น $x_0, x_1, ..., x_n$ ของ I จะแบ่งช่วง I ออกเป็นช่วงย่อย $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$

นิยาม 6.2 ให้ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีขอบเขตบนช่วงปิด $I = [a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของเซต I

สำหรับ $k = 1, 2, ..., n$

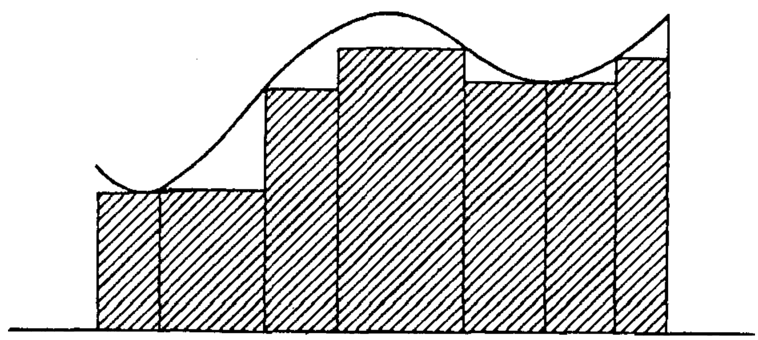
ให้ $m_k = \inf \{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ และ $M_k = \sup \{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\}$ แล้ว ผลบวกล่าง (The lower sum) ของ f ขึ้นอยู่กับผลแบ่งกั้น P คือ L(P, f)

โดยที่ $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1})$

และผลบวกบน (The upper sum) ของ f ขึ้นอยู่กับผลแบ่งกั้น P คือ U(P, f)

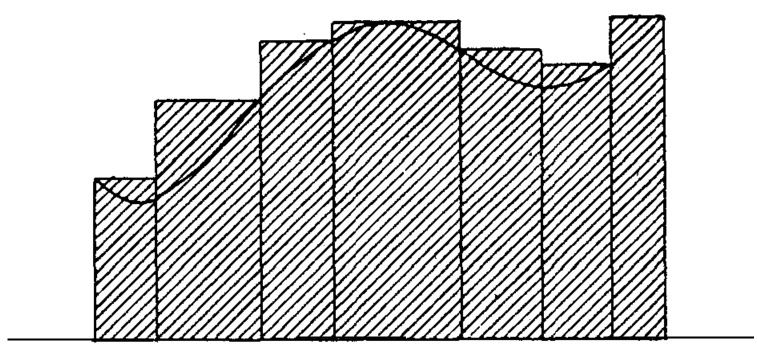
โดยที่ $U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1})$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าบวก ผลบวกล่าง (a lower sum) L(P, f) คือผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีความกว้างคือ $x_k - x_{k-1}$ และความยาวคือ m_k



รูป 6.2 ผลบวกล่าง

และผลบวกบน (an upper sum) U(P, f) คือผลบวกของพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งมีความกว้างคือ $x_k - x_{k-1}$ และความยาวคือ M_k



รูป 6.3 ผลบวกบน

ดังนี้จะเห็นว่าสำหรับผลแบ่งกั้น P ใด ๆ L(P, f) จะมีค่าน้อยกว่าหรือเท่ากับ U(P, f) เสมอ และข้อความนี้ยังคงเป็นจริงสำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ด้วย ดังจะได้พิสูจน์ให้เห็นต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 6.1 ถ้า $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I และ P เป็นผลแบ่งกั้นของ I แล้ว $L(P, f) \leqslant U(P, f)$

พิสูจ ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เนื่องจาก $m_k \leqslant M_k$ ทุก ๆ $k = 1, \ldots, n$ และ $x_k - x_{k-1} > 0$ ทุก ๆ $k = 1, \ldots, n$

จะได้ว่า $L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = U(P, f)$ #

นิยาม 6.3 ถ้า $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ และ $Q = \{y_0, y_1, \ldots, y_m\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของเซต I เรากล่าวว่า Q เป็นผลแบ่งกั้นที่ละเอียดกว่า (refinement) P ถ้า $P \subseteq Q$

และในกรณีนี้แต่ละช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ สามารถเขียนเป็นผลผนวก (union) ของช่วงย่อย ซึ่งมีจุดปลายเป็นสมาชิกของ Q

กล่าวคือ $[x_{k-1}, x_k] = [y_{j-1}, y_j] \cup [y_j, y_{j+1}] \cup \ldots \cup [y_{h-1}, y_h]$

และทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่า ผลแบ่งกั้นที่ละเอียดกว่าจะทำให้ผลบวกล่างมีค่าเพิ่มขึ้น ในขณะเดียวกันก็ทำให้ผลบวกบนมีค่าลดลง

ทฤษฎีบทประกอบ 6.2 ถ้า $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง I, P และ Q เป็นผลแบ่งกั้นเซต I โดยที่ Q เป็นผลแบ่งกั้นที่ละเอียดกว่า P แล้ว จะได้ว่า

$L(P, f) \leqslant L(Q, f)$ และ $U(Q, f) \leqslant U(P, f)$

พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ถ้า $P = Q$ แล้ว ทฤษฎีบทประกอบเป็นจริง

ดังนั้น สมมติ $P \neq Q$ เลือก $c \in Q$ โดยที่ $c \notin P$

ให้ $P_1 = P \cup \{c\}$ นั่นคือ $P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x_k, \ldots, x_n\}$ และ P_1 เป็นผลแบ่งกั้นของ I ที่ละเอียดกว่า P

ให้ $m'_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, c]\}$

$m''_k = \inf\{f(x) \mid x \in [c, x_k]\}$

ดังนั้น $m_k \leqslant m'_k$ และ $m_k \leqslant m''_k$

เพราะฉะนั้น $m_k(x_k - x_{k-1}) = m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c) \leqslant m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c)$

นั่นคือ $L(P, f) = \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m'_k(c - x_{k-1}) + m''_k(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

$$= L(P_1, f)$$

และเนื่องจาก $Q-P$ เป็นเซตจำกัด ดังนั้น โดยขบวนการข้างต้นและทฤษฎีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ $L(P, f) \leqslant L(Q, f)$

ถ้าให้ $M_k' = \sup\{f(x) | x \in [x_{k-1}, c]\}$

$M_k'' = \sup\{f(x) | x \in [c, x_k]\}$

จะได้ $M_k' \leqslant M_k$ และ $M_k'' \leqslant M_k$

เพราะฉะนั้น $M_k'(c-x_{k-1}) + M_k''(x_k - c) \leqslant M_k(c - x_{k-1}) + M_k(x_k - c)$

$$= M_k(x_k - x_{k-1})$$

นั่นคือ
$$U(P_1, f) = \sum_{i=1}^{k-1} M_i(x_i - x_{i-1}) + M_k'(c - x_{k-1}) + M_k''(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = U(P, f)$$

และเนื่องจาก $Q-P$ เป็นเซตจำกัด ดังนั้น โดยขบวนการข้างต้นและทฤษฎีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้ $U(Q, f) \leqslant U(P, f)$ #

จากทฤษฎีบทประกอบ 6.1 และ 6.2 จะทำให้ได้ความสัมพันธ์ระหว่างผลบวกล่างและผลบวกบนของผลแบ่งกั้นช่วง I ที่ต่างกันดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 6.3 กำหนด $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง I P_1 และ P_2 เป็นผลแบ่งกั้นของ I แล้ว $L(P_1, f) \leqslant U(P_2, f)$

พิสูจน์ ให้ $Q = P_1 \cup P_2$ ดังนั้น Q เป็นผลแบ่งกั้นของ I ที่ละเอียดว่า P_1 และ P_2 โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.1 และ 6.2 ได้ว่า

$$L(P_1, f) \leqslant L(Q, f) \leqslant U(Q, f) \leqslant U(P_2, f)$$ #

นิยาม 6.4 **กำหนด** $I = [a, b]$ **และ** $f : I \to R$ **เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง** I **อินทิกรัลล่าง** (the lower integral) **ของ** f **บน** I **คือ** $\underline{\int_a^b} f$ **โดยที่**

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วง } I\}$$

และอินทิกรัลบน (the upper integral) ของ f บน I คือ $\overline{\int_a^b} f$ โดยที่

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) \mid P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบนช่วง } I\}$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนเซต I

ให้ $m_I = \inf\{f(x) \mid x \in I\}$

$M_I = \sup\{f(x) \mid x \in I\}$

ดังนั้น สำหรับผลแบ่งกั้น P ใด ๆ บนช่วง I จะได้

$m_I(b-a) \leqslant L(P, f) \leqslant U(P, f) \leqslant M_I(b-a)$

เพราะฉะนั้นจึงได้ว่า $m_I(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant M_I(b-a)$

และ $m_I(b-a) \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant M_I(b-a)$

ทฤษฎีบท 6.4 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนช่วง I แล้ว

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f$$

พิสูจน์ ถ้า P_1 และ P_2 เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ I โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.3 จะได้ว่า

$$L(P_1, f) \leqslant U(P_2, f)$$

นั่นคือ $U(P_2, f)$ เป็นขอบเขตบนของเซต $\{L(P, f) \mid P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } I\}$ ดังนั้น

$$\underline{\int_a^b} f \leqslant U(P_2, f)$$

และเนื่องจาก P_2 เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ บนช่วง I จึงได้ว่า $\underline{\int_a^b} f$ เป็นขอบเขตล่างของเซต $\{U(P, f) \mid P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } I\}$

ดังนั้น $\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f$ #

นิยาม 6.5 กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนเซต I แล้ว จะกล่าวว่า f หาค่ารีมันน์อินทิกรัลได้บน I เมื่อ $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ และค่ารีมันน์อินทิกรัลของ f บนช่วง I คือค่า $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ ซึ่งมักเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f \quad \text{หรือ} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

และนอกจากนั้นเรานิยาม $\int_b^a f = -\int_a^b f$ และ $\int_a^a f = 0$

เนื่องจากในบทนี้จะกล่าวเฉพาะรีมันน์อินทิกรัลเท่านั้น ดังนั้นเพื่อความสะดวกต่อไปนี้ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาค่ารีมันน์อินทิกรัลได้บนช่วง I จะกล่าวเพียงว่า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง I เท่านั้น

ตัวอย่าง 6.1 ให้ $c \in R$ และ $f : [a, b] \to R$ โดยที่ $f(x) = c$ ทุก $x \in [a, b]$ แล้ว f หาอินทิกรัลได้บน $[a, b]$

พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[a, b]$

ดังนั้น $L(P, f) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$

และ $U(P, f) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = c(b-a)$

เพราะฉะนั้น $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = c(b-a)$ #

ตัวอย่าง 6.2 ให้ $g : [0, 1] \to R$ โดยที่ $g(x) = x$ ทุก $x \in [0, 1]$ แล้ว g หาอินทิกรัลได้บน $[0, 1]$

พิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของช่วง $[0, 1]$

เนื่องจาก g เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้นจะได้ $m_k = \frac{k-1}{n}$ และ $M_k = \frac{k}{n}$

และเพราะว่า $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$ เพราะฉะนั้น

$$L(P_n, g) = \frac{0+1+2+\ldots+(n-1)}{n^2} = \frac{(n-1)n}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

และ $$U(P_n, g) = \frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2} = \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

เนื่องจาก $\{P_n | n \in N\} \subseteq \{P | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0, 1]\}$

ดังนั้น $\frac{1}{2} = \sup\{L(P_n, g) | n \in N\} \leqslant \sup\{L(P, g) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]\}$

นั่นคือ $\frac{1}{2} \leqslant \underline{\int_a^b} g$

และ $\overline{\int_a^b} g = \inf\{U(P, g) \mid P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0, 1]\} \leqslant \inf\{U(P_n, y) \mid n \in N\} = \frac{1}{2}$

นั่นคือ $\frac{1}{2} \leqslant \underline{\int_a^b} g \leqslant \overline{\int_a^b} g \leqslant \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g = \frac{1}{2}$

และ g หาอินทิกรัลได้บน $[0, 1]$ โดยที่ $\int_0^1 g = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$ #

ตัวอย่าง 6.3 กำหนด $h : [0, 1] \to R$ โดยที่ $h(x) = x^2$ ทุก ๆ $x \in [0, 1]$ แล้ว h หาค่าอินทิกรัลได้บน $[0, 1]$

พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}$

เนื่องจาก h เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น

$$m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 \quad \text{และ} \quad M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 \quad \text{เมื่อ } k = 1, \ldots, n$$

เพราะฉะนั้น สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

$$L(P_n, h) = \frac{0^2 + 1^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

และ $$U(P_n, h) = \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{3}{2n} + \frac{1}{2n^2}\right)$$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\frac{1}{3} = \sup\{L(P_n, h) \mid n \in N\} \leqslant \sup\{L(P, h) \mid P$ เป็นผลแบ่งกั้น $[0, 1]\}$

$= \underline{\int_a^b} h$

และ $\overline{\int_a^b} h = \inf\{U(P, h) \mid P$ เป็นผลแบ่งกั้น $[0, 1]\} \leqslant \inf\{U(P_n, h) \mid n \in N\}$

$= \frac{1}{3}$

นั่นคือ h หาอินทิกรัลได้บน $[0, 1]$ และ $\int_0^1 h = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$ #

ตัวอย่าง 6.4 กำหนด $I = [0, 1]$ และ $f : I \to R$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนตรรกยะ} \\ 0 & \text{ถ้า } x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะ} \end{cases}$$

แล้ว f หาอินทิกรัลไม่ได้บน I

พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[0, 1]$

เนื่องจากแต่ละช่วงย่อย $[x_{k-1}, x_k]$ ประกอบไปด้วยจำนวนตรรกยะและอตรรกยะเท่านั้น

ดังนั้น จะได้ $m_k = 0$ และ $M_k = 1$

นั่นคือ $L(P, f) = 0$ และ $U(P, f) = 1$ ทุก ๆ ผลแบ่งกั้น P

เพราะฉะนั้น $\underline{\int}_0^1 f = 0$ และ $\overline{\int}_0^1 f = 1$

เนื่องจาก $\underline{\int}_0^1 f \neq \overline{\int}_0^1 f$ ดังนั้น f หาอินทิกรัลไม่ได้บน $[0, 1]$ #

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอสำหรับฟังก์ชัน f ที่จะหาอินทิกรัลได้บนช่วง I ในกรณีที่ f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I

ทฤษฎีบท 6.5 กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I แล้ว f หาอินทิกรัลได้บน I ก็ต่อเมื่อสำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น P_ε ของ I ซึ่ง $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

พิสูจน์ สมมติ f หาอินทิกรัลได้บน I ดังนั้น $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เนื่องจาก $\underline{\int}_a^b f = \sup \{L(P, f) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $I\}$

ดังนั้น จะมีผลแบ่งกั้น P_1 ของ I ซึ่ง $\underline{\int}_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f)$

และในทำนองเดียวกัน

เนื่องจาก $\overline{\int}_a^b f = \inf \{U(P, f) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $I\}$

จะมีผลแบ่งกั้น P_2 ของ I ซึ่ง $U(P_2, f) < \overline{\int}_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $P_\varepsilon = P_1 \cup P_2$ ดังนั้น P_ε เป็นผลแบ่งกั้นของ I ที่ละเอียดกว่า P_1 และ P_2

โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.1 และ 6.2 จะได้ว่า

$$\underline{\int}_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1, f) \leqslant L(P_\varepsilon, f) \leqslant U(P_\varepsilon, f) \leqslant U(P_2, f) < \overline{\int}_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}$$

เพราะว่า $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ จึงทำให้ได้ว่า $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

ในทางกลับกัน เนื่องจากถ้า P เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ I จะได้ว่า

$$L(P, f) \leqslant \underline{\int}_a^b f \quad \text{และ} \quad \overline{\int}_a^b f \leqslant U(P, f)$$

ดังนั้น $\overline{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leqslant U(P, f) - L(P, f)$

กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยสมมติฐานจะมีผลแบ่งกั้น P_ε ของ I ซึ่ง

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\bar{\int}_a^b f - \underline{\int}_a^b f \leq U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ และ $\underline{\int}_a^b f \leq \bar{\int}_a^b f$ ดังนั้น $\bar{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^b f$

นั่นคือ f หาอินทิกรัลได้บน $[a, b] = I$ #

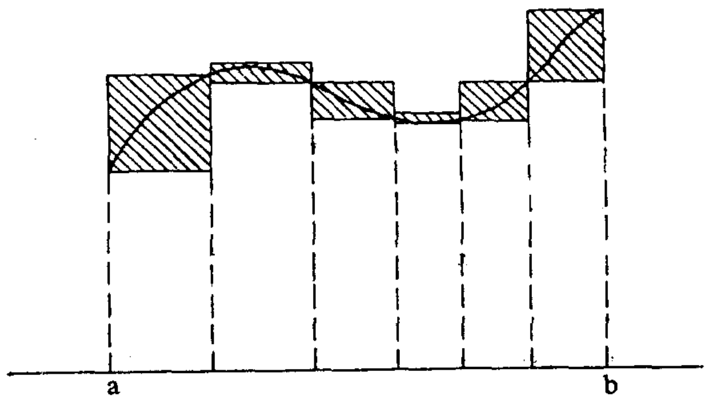
บทแทรก 6.6 กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I ถ้า $\{P_n | n \in N\}$ เป็นลำดับของผลแบ่งกั้นของ I โดยที่

$$\lim \left(U(P_n, f) - L(P_n, f)\right) = 0$$

แล้ว f หาอินทิกรัลได้บน I และ

$$\lim U(P_n, f) = \int_a^b f = \lim L(P_n, f)$$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 6.5 และทฤษฎีบทของลิมิตของลำดับ



รูป 6.4 แสดงให้เห็นผลต่างของ U(P, f) − L(P, f)

ตัวอย่าง 6.5 ให้ $g : [0, 1] \to R$ โดยที่ $g(x) = x$ ทุก $x \in [0, 1]$

ให้ $P_n = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[0, 1]$

จากตัวอย่าง 6.2 ได้ว่า $\lim \left(U(P_n, f) - L(P_n, f)\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$

โดยบทแทรก 6.6 g หาอินทิกรัลได้บน $[0, 1]$ และ

$$\int_0^1 x\,dx = \lim U(P_n, f) = \lim \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$ #

ตัวอย่าง 6.8 **ให้** $h : [0, 1] \to R$ **โดยที่** $h(x) = x^2$ **ทุก 9** $x \in [0, 1]$

ให้ $P_n = \left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots . \frac{n-1}{n}, 1\right\}$ **เป็นผลแบ่งกั้นของ** $[0, 1]$

จากตัวอย่าง 6.3 **ได้ว่า** $\lim \left(U(P_n, f) - L(P_n, f)\right) = \lim \frac{1}{n} = 0$

ดังนั้น โดยบทแทรก 6.6 h **หาอินทิกรัลได้บน** $[0, 1]$ **และ**

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim U(P_n, f) = \lim \frac{1}{3}\left(1+\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{3}$$ #

แบบฝึกหัด 6.1

1. **ถ้า** $f(x) = c$ ทุก $x \in [a, b]$ **จงพิสูจน์ว่า** $\int_a^b f = c(b-a)$
2. **กำหนด** $f : [0, 2] \to R$ **โดยที่** $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x \neq 1 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 1 \end{cases}$

   จงพิสูจน์ว่า f **หาอินทิกรัลได้บน** $[0, 2]$ **และหาค่าอินทิกรัลของ** f
3. **กำหนด** $g : [0, 1] \to R$ **โดยที่** $g(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} < x \leqslant 1 \end{cases}$

   จงแสดงว่า $\int_0^1 g = \frac{1}{2}$
4. **กำหนด** $h : [0, 1] \to R$ **โดยที่** $h(x) = \begin{cases} 0 & x \text{ เป็นตรรกยะ} \\ 1 & x \text{ เป็นอตรรกยะ} \end{cases}$

   จงแสดงว่า h **หาอินทิกรัลไม่ได้บน** $[0, 1]$
5. **กำหนด** $f(x) = x^3$ **ทุก** $0 \leqslant x \leqslant 1$ **จงแสดงว่า** $\int_0^1 x^3dx = \frac{1}{4}$

   (แนะนำ : $1^3+2^3+\ldots+m^3 = [\frac{1}{2}m(m+1)]^2$)
6. **กำหนด** $f : [a, b] \to R$ **เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน** $[a, b]$ **โดยที่** $f(x) = 0$ **ยกเว้นเฉพาะ** $x \in \{c_1, c_2, \ldots . c_n\}$ **เท่านั้น จงพิสูจน์ว่า** f **หาอินทิกรัลได้บน** $[a, b]$ **และ** $\int_a^b f = 0$
7. **สมมติ** f **เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน** $[a, b]$ **และสำหรับทุก ๆ** $c \in (a, b)$ f **หาอินทิกรัลได้บน** $[c, b]$ **จงพิสูจน์ว่า** f **หาอินทิกรัลได้บน** $[a, b]$ **และ**

$$\int_a^b f = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f$$

8. ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I โดยที่ $f(x) \geqslant 0$ ทุก ๆ $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int}_a^b f \geqslant 0$

9. ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยที่ $f(x) \geqslant 0$ ทุก ๆ $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\underline{\int}_a^b f = 0$ แล้ว $f(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in I$

10. กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I สมมุติทุก ๆ ฟังก์ชัน g ที่หาค่าอินทิกรัลได้บน I ฟังก์ชัน fg หาค่าอินทิกรัลได้บน I และ $\int_a^b fg = 0$ จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in I$

6.2 คุณสมบัติของรีมันน์อินทิกรัล (Properties of the Riemann Integral)

ทฤษฎีบท 6.7 กำหนด $I = [a, b]$ และ $f, g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I ถ้า $k \in R$ แล้วฟังก์ชัน kf และ $f+g$ หาอินทิกรัลได้บน I โดยที่

$$\int_a^b kf = k\int_a^b f$$

และ

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$$

พิสูจน์ ถ้า $k = 0$ ทฤษฎีบทเป็นจริง

สมมติ $k<0$

ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I

เนื่องจาก $k<0$ จึงได้ว่า

$$\inf \{kf(x) | x \in [x_{j-1}, x_j]\} = k \sup \{f(x) | x \in [x_{j-1}, x_j]\} \text{ สำหรับทุก } j$$

โดยที่ $j = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น จะได้ $L(P, kf) = k\,U(P, f)$

และเนื่องจาก $k<0$ เพราะฉะนั้น

$$\underline{\int}_a^b kf = \sup \{L(P, kf) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบน } I\}$$
$$= k \inf \{U(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบน } I\} = k \overline{\int}_a^b f$$

และในทำนองเดียวกันก็พิสูจน์ได้ว่า $U(P, kf) = kL(P, f)$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$\overline{\int}_a^b kf = \inf \{U(P, kf) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบน } I\}$$
$$= k \sup \{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นบน } I\} = k \underline{\int}_a^b f$$

เนื่องจาก $\underline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^b f$ ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\overline{\int}_a^b kf = \underline{\int}_a^b kf = k\int_a^b f$$

นั่นคือ kf หาอินทิกรัลได้บนช่วง I และ $\int_a^b kf = k\int_a^b f$

ในกรณีที่ $k>0$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า $f+g$ หาอินทิกรัลได้บน I และ $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$

กำหนด $\varepsilon>0$ เนื่องจาก f และ g หาอินทิกรัลได้บนช่วง I

โดยทฤษฎีบท 6.5 จะมีผลแบ่งกั้น P_1 และ P_2 ของ I ซึ่ง

$$U(P_1, f) - L(P_1, f) < \frac{\varepsilon}{2}$$

และ $U(P_2, g) - L(P_2, g) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

ให้ $P = P_1 \cup P_2$ สมมติ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

สำหรับแต่ละ $i = 1, 2, \ldots, n$ ให้

$$\begin{aligned}
M_i(f) &= \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\\
M_i(g) &= \sup\{g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\\
M_i(f+g) &= \sup\{(f+g)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\\
m_i(f) &= \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\\
m_i(g) &= \inf\{g(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}\\
m_i(f+g) &= \inf\{(f+g)(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}
\end{aligned}$$

เนื่องจาก $f(x) \leqslant M_i(f)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$g(x) \leqslant M_i(g)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

ดังนั้น $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \leqslant M_i(f) + M_i(g)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $M_i(f+g) \leqslant M_i(f) + M_i(g)$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

และในทำนองเดียวกันเนื่องจาก $m_i(f) \leqslant f(x)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

$m_i(g) \leqslant g(x)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

ดังนั้น $m_i(f) + m_i(g) \leqslant f(x) + g(x) = (f+g)(x)$ ทุก ๆ $x \in [x_{i-1}, x_i]$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $m_i(f) + m_i(g) \leqslant m_i(f+g)$ ทุก ๆ $i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $U(P, f+g) \leqslant U(P, f) + U(P, g)$

และ $L(P, f) + L(P, g) \leqslant L(P, f+g)$

นั่นคือ $U(P, f+g) - L(P, f+g) \leqslant U(P, f) - L(P, f) + U(P, g) - L(P, g)$

$$\leqslant U(P_1, f) - L(P_1, f) + U(P_2, g) - L(P_2, g)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 6.5 $f+g$ หาอินทิกรัลได้บนช่วง I

ต่อไปจะแสดงว่า $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

กำหนด $\varepsilon' > 0$

เนื่องจาก $\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(P, f) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I$\}$

และ $\int_a^b g = \overline{\int_a^b} g = \inf\{U(P, g) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I$\}$

ดังนั้น จะมีผลแบ่งกั้น P', P'' ของ I ซึ่ง

$$U(P', f) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon'}{2}$$

และ $U(P'', g) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon'}{2}$

ให้ $P^* = P' \cup P''$ ดังนั้น P^* เป็นผลแบ่งกั้นของ I ที่ละเอียดกว่า P' และ P''

และ $U(P^*, f+g) \leqslant U(P^*, f) + U(P^*, g) \leqslant U(P', f) + U(P'', g)$

$$< \int_a^b f + \frac{\varepsilon'}{2} + \int_a^b g + \frac{\varepsilon'}{2} = \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon'$$

ดังนั้น $\int_a^b f+g = \overline{\int_a^b} f+g \leqslant U(P^*, f+g) < \int_a^b f + \int_a^b g + \varepsilon'$

เนื่องจาก ε' เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ ดังนั้น

$$\int_a^b f+g \leqslant \int_a^b f + \int_a^b g$$

ในทำนองเดียวกัน เพราะว่า

$$\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) | P \text{ เป็นผลแบ่งกั้นของ } I\}$$

และ $\int_a^b g = \underline{\int_a^b} g = \sup\{L(P, g) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I$\}$

ก็สามารถพิสูจน์ได้ว่า $\int_a^b f + \int_a^b g \leqslant \int_a^b f+g$

นั่นคือ $\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$ #

บทแทรก 6.8 ถ้า $f_i : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $I = [a, b]$ และ $k_i \in R$ สำหรับ $i = 1, 2, \ldots, n$ แล้ว $\sum_{i=1}^{n} k_i f_i$ หาอินทิกรัลได้บนช่วง I และ

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{n} k_i f_i = \sum_{i=1}^{n} k_i \int_a^b f_i$$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 6.7 #

ทฤษฎีบท 6.9 กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I โดยที่ $f(x) \geqslant 0$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว $\int_a^b f \geqslant 0$

พิสูจน์ ให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ I ดังนั้น

$$m_k = \inf\{f(x) | x \in [x_{k-1}, x_k]\} \geqslant 0$$

นั่นคือ $m_k \geqslant 0$ ทุก ๆ $k = 1, 2, \ldots, n$ เพราะฉะนั้น $L(P, f) \geqslant 0$

และเพราะว่า $\int_a^b f = \sup\{L(P, f) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $I\}$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $\int_a^b f \geqslant 0$ #

บทแทรก 6.10 ถ้า $f, g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $I = [a, b]$ โดยที่ $f(x) \leqslant g(x)$ ทุก $x \in I$ แล้ว $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 6.7 ฟังก์ชัน $g - f$ หาอินทิกรัลได้บนช่วง I

และ $\int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$

เพราะว่า $(g-f)(x) \geqslant 0$ ทุก ๆ $x \in I$ โดยทฤษฎีบท 6.9 ได้ว่า $\int_a^b (g-f) \geqslant 0$

นั่นคือ $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$ #

บทแทรก 6.11 ถ้า $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $I = [a, b]$ และ $m \leqslant f(x) \leqslant M$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 6.1 ได้ว่า $\int_a^b m\,dx = m(b-a)$ และ $\int_a^b M\,dx = M(b-a)$

ดังนั้น จากบทแทรก 6.10 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a)$ #

ต่อไปจะพิสูจน์ว่าถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บนช่วง $I = [a, b]$ และ $c \in I$ แล้ว $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$ ซึ่งการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ต้องอาศัยทฤษฎีบทประกอบต่อไปนี้

ทฤษฎีบทประกอบ 6.12 กำหนด $I = [a, b]$ และ $c \in I$ แล้ว $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$

พิสูจน์ ให้ P_1 เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, c]$ P_2 เป็นผลแบ่งกั้นของ $[c, b]$

ดังนั้น $P = P_1 \cup P_2$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $I = [a, b]$

ดังนั้น $L(P, f) = L(P_1, f) + L(P_2, f)$

เนื่องจาก $L(P_1, f) \leqslant \underline{\int_a^c} f$ และ $L(P_2, f) \leqslant \underline{\int_c^b} f$

ดังนั้น $L(P, f) \leqslant \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$

นั่นคือ ถ้า P เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[a, b]$ โดยที่ $c \in P$ แล้ว จะได้ว่า

$$L(P, f) \leqslant \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$$

ให้ P' เป็นผลแบ่งกั้นใด ๆ ของ $[a, b]$

ถ้า $c \in P'$ จะได้ $L(P', f) \leqslant \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$

ถ้า $c \notin P'$ ให้ $P'' = P' \cup \{c\}$

ดังนั้น $L(P', f) \leqslant L(P'', f) \leqslant \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$

เพราะฉะนั้น $\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$ เป็นขอบเขตบนของ $\{L(P, f) | P$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]\}$

นั่นคือ $\underline{\int}_a^b f \leqslant \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$

ต่อไปกำหนด $\varepsilon > 0$ ดังนั้น จะมีผลแบ่งกั้น P_1 ของ $[a, c]$ และ P_2 ของ $[c, b]$ ซึ่ง

$$\underline{\int}_a^c f < L(P_1, f) + \frac{\varepsilon}{2} \text{ และ } \underline{\int}_c^b f < L(P_2, f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ให้ $P^* = P_1 \cup P_2$ ดังนั้น P^* เป็นผลแบ่งกั้นของ $[a, b]$ และ

$$\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f < L(P_1, f) + \frac{\varepsilon}{2} + L(P_2, f) + \frac{\varepsilon}{2} = L(P^*, f) + \varepsilon$$

เนื่องจาก ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า

$$\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f \leqslant L(P^*, f)$$

และเพราะว่า $L(P^*, f) \leqslant \underline{\int}_a^b f$ เพราะฉะนั้น $\underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f \leqslant \underline{\int}_a^b f$

นั่นคือ $\underline{\int}_a^b f = \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f$ #

ทฤษฎีบทประกอบ 6.13 กำหนด $I = [a, b]$ และ $c \in I$ แล้ว

$$\overline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f$$

พิสูจน์ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด #

ทฤษฎีบท 6.14 กำหนด $I = [a, b]$ และ $c \in (a, b)$ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I แล้ว

f หาอินทิกรัลได้บน I ก็ต่อเมื่อ f หาอินทิกรัลได้บน $[a, c]$ และ $[c, b]$

นอกจากนั้นจะได้ว่า $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

พิสูจน์ สมมติ f หาอินทิกรัลได้บน $[a, c]$ และ $[c, b]$

ดังนั้น $\underline{\int}_a^c f = \overline{\int}_a^c f$ และ $\overline{\int}_c^b f = \underline{\int}_c^b$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.12 และ 6.13 ได้ว่า

$$\overline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f = \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f = \underline{\int}_a^b f$$

นั่นคือ f หาอินทิกรัลได้บน [a, b] และ $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

ในทางกลับกันสมมติ f หาอินทิกรัลได้บน [a, b]

โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.12 และ 6.13 ได้ว่า

$$\overline{\int}_a^b f = \overline{\int}_a^c f + \overline{\int}_c^b f = \underline{\int}_a^c f + \underline{\int}_c^b f = \underline{\int}_a^b f$$

และเนื่องจาก $\underline{\int}_a^c f \leqslant \overline{\int}_a^c f$ และ $\underline{\int}_c^b f \leqslant \overline{\int}_c^b f$ ดังนั้น จึงได้ว่า

$$\overline{\int}_a^c f = \underline{\int}_a^c f \text{ และ } \overline{\int}_c^b f = \underline{\int}_c^b f$$

นั่นคือ f หาอินทิกรัลได้บน [a, c] และ [c, b] โดยที่

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$ #

บทแทรก *6.15* ถ้า $F? = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ $I = [a, b]$ และ f หาอินทิกรัลได้บน I แล้ว

$$\int_a^b f = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$$

ทฤษฎีบท 6.16 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนเซต I แล้ว ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

ก) f หาอินทิกรัลได้บน I

ข) สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะสามารถหาผลแบ่งกั้น $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ I ได้ ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$

ค) สำหรับแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ I ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n} w_k(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$ เมื่อ $w_k = \sup [f(x)-f(y)(x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$ สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$

พิสูจน์ สมมติ f หาอินทิกรัลได้บน I

โดยทฤษฎีบท 6.5 จะมีผลแบ่งกั้น $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ I โดยที่

$$U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$$

นั่นคือ $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$ c ε

ในทางกลับกันสมมติว่าแต่ละจำนวนจริง $\varepsilon>0$ สามารถหาผลแบ่งกั้น $P_\varepsilon = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ I ได้ ซึ่ง $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon$

นั่นคือ $U(P_\varepsilon, f) - L(P_\varepsilon, f) < \varepsilon$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.5 f หาอินทิกรัลได้บน I

และการพิสูจน์ว่า ข. และ ค. สมมูลกันพิสูจน์ได้จากความจริงที่ว่า

$$\sup \{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf \{f(x)|x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$
$$= \sup \{f(x) - f(y)|x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

ซึ่งคือ $M_k - m_k = w_k$ ทุก $k = 1, 2, \ldots, n$ #

ทฤษฎีบท 6.17 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันทางเดียวบน I แล้ว f หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ สมมติ f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นบน I ให้ n เป็นจำนวนนับ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ I โดยที่ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ และ $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ ทุก ๆ $k = 1, 2, \ldots, n$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น $m_k = f(x_{k-1}),\ M_k = f(x_k)$

นั่นคือ
$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1})$$
$$= \frac{b-a}{n} \big(f(x_n) - f(x_0)\big) = \frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a)\big)$$

ดังนั้น กำหนด $\varepsilon>0$ เลือก n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n > \frac{(b-a)\big(f(b)-f(a)\big)}{\varepsilon}$ และให้ P เป็นผลแบ่งกั้นของ I ดังข้างต้น

ดังนั้น จะได้ $\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n} \big(f(b) - f(a)\big) < \varepsilon$

โดยทฤษฎีบท 6.16 f หาอินทิกรัลได้บน $[a, b]$

กรณี f เป็นฟังก์ชันค่าลดลงบน I ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด #

ต่อไปจะพิสูจน์ว่าความต่อเนื่องเป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่ f จะหาอินทิกรัลได้บนช่วง I

ทฤษฎีบท 6.18 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I แล้ว f หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ โดยทฤษฎีบท 4.34 f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน I

ดังนั้น กำหนด $\varepsilon > 0$ จะมี $\delta(\varepsilon) > 0$ ซึ่งถ้า $x, y \in I$ โดยที่ $|x - y| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ให้ n เป็นจำนวนนับซึ่ง $n > \frac{(b-a)}{\delta(\varepsilon)}$

และให้ $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้นของ I โดยที่ $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n} < \delta(\varepsilon)$ ทุก $k = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้นจะได้ $w_k = M_k - m_k$

$$= \sup\{f(x) - f(y) | x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ทุก $k = 1, 2, \ldots, n$

ดังนั้น $\sum_{k=1}^{n} w_k(x_k - x_{k-1}) < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot n \cdot \frac{b-a}{n} = \varepsilon$

โดยทฤษฎีบท 6.16 f หาอินทิกรัลได้บน $[a, b]$ #

ทฤษฎีบท 6.19 กำหนด $I = [a, b]$ และ $J = [c, d]$

$f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I $\varphi : J \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน J โดยที่ $f(I) \subseteq J$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $\varphi \circ f : I \to R$ หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

ให้ $K = \sup\{|\varphi(t)| \mid t \in J\}$ และ $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{(b-a+2K)}$

เพราะว่า φ ต่อเนื่องบน $J = [c, d]$ โดยทฤษฎีบท 4.34 φ ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน J

ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $\delta < \varepsilon'$ และถ้า $s, t \in J$ โดยที่ $|s - t| < \delta$ แล้ว

$$|\varphi(s) - \varphi(t)| < \varepsilon'$$

เนื่องจาก f หาอินทิกรัลได้บน $[a, b]$ และ $\delta^2 > 0$ จะมีผลแบ่งกั้น $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ของ $[a, b]$ ซึ่ง $U(P, f) - L(P, f) < \delta^2$

ให้ $M_k = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

$$m_k = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$\widetilde{M}_k = \sup\{\varphi\circ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$, $\widetilde{m}_k = \inf\{\varphi\circ f(x) \mid x \in [x_{k-1}, x_k]\}$

สำหรับ $k = 1, 2, \ldots, n$

และ $A = \{k \in (1, 2, \ldots, n\} \mid M_k - m_k < \delta\}$

$B = \{k \in (1, 2, \ldots, n\} \mid M_k - m_k \geqslant \delta\}$

เนื่องจาก $\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k = \sup\{\varphi\circ f(x) - \varphi\circ f(y) \mid x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$

ดังนั้น ถ้า $k \in A$ และ $x, y \in [x_{k-1}, x_k]$ จะได้ $|f(x) - f(y)| < \delta$

ซึ่งทำให้ได้ว่า $|\varphi\circ f(x) - \varphi\circ f(y)| < \varepsilon'$

นั่นคือ ถ้า $k \in A$ จะได้ว่า $\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k \leqslant \varepsilon'$

และ $\sum\limits_{k\in A} (\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant \varepsilon'(b-a)$

และถ้า $k \in B$ จะได้ว่า $\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k \leqslant 2K$

ดังนั้น $\sum\limits_{k\in B} (\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2K \sum\limits_{k\in B} (x_k - x_{k-1})$

และเนื่องจาก $\delta \leqslant M_k - m_k$ เมื่อ $k \in B$ เพราะฉะนั้น

$$\sum_{k\in B} (x_k - x_{k-1}) \leqslant \frac{1}{\delta} \sum_{k\in B} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta}\big(U(P, f) - L(P, f)\big) < \delta < \varepsilon'$$

ดังนั้น $\sum\limits_{k\in B} (\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k)(x_k - x_{k-1}) \leqslant 2K \sum\limits_{k\in B} (x_k - x_{k-1}) < 2K\varepsilon'$

เพราะฉะนั้น $U(P, \varphi\circ f) - L(P, \varphi\circ f)$

$$= \sum_{k\in A} (\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k\in B} (\widetilde{M}_k - \widetilde{m}_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$< e'(b-a) + 2K\varepsilon' = \varepsilon$$

โดยทฤษฎีบท 6.5 $\varphi\circ f$ หาอินทิกรัลได้บน $[a, b]$ #

บทแทรก 6.20 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I แล้ว ฟังก์ชัน $|f|$ หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ เนื่องจากฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I ต้องเป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $K>0$ ซึ่ง $|f(x)| \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$

ให้ $J = [-K, K]$ และ $\varphi_1 : [-K, K] \to R$ โดยที่ $\varphi_1(t) = |t|$ ทุก ๆ $t \in [-K, K]$

แล้วจะได้ว่า φ ต่อเนื่องบน $[-K, K]$ และ $\varphi_1\circ f = |f|$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.19 $|f|$ หาอินทิกรัลได้บน I #

บทแทรก 6.21 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I
ถ้า n เป็นจำนวนนับแล้ว ฟังก์ชัน f^n หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ ให้ K เป็นจำนวนจริง โดยที่ $K > 0$ และ $|f(x)| \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$

และนิยาม $\varphi_2 : [-K, K] \to R$ โดยที่ $\varphi_2(t) = t^n$ ทุก ๆ $t \in [-K, K]$

โดยทฤษฎีบท 4.19 และทฤษฎีบทอุปนัยทางคณิตศาสตร์ได้ว่า φ_2 ต่อเนื่องบน $[-K, K]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.19 $f^n = \varphi_2 \circ f$ หาอินทิกรัลได้บน I #

บทแทรก 6.22 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I และมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง $f(x) \geqslant \delta$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว ฟังก์ชัน $\frac{1}{f}$ หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ ให้ K เป็นจำนวนจริงโดยที่ $\delta \leqslant f(x) \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$

และนิยาม $\varphi_3 : [\delta, K] \to R$ โดยที่ $\varphi_3(t) = \frac{1}{t}$ ทุก ๆ $t \in [\delta, K]$

โดยตัวอย่าง 4.13 φ_3 ต่อเนื่องบน $[\delta, K]$ และ $\varphi_3 \circ f = \frac{1}{f}$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.19 $\frac{1}{f}$ หาอินทิกรัลได้บน I #

ทฤษฎีบท 6.23 ให้ $I = [a, b]$ $f, g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I แล้ว ฟังก์ชันผลคูณ fg หาอินทิกรัลได้บน I

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 6.7 และบทแทรก 6.21 ฟังก์ชัน $f+g$, $(f+g)^2$, f^2, g^2 หาอินทิกรัลได้บน I

เพราะว่า $fg = \frac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2]$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 6.7 fg หาอินทิกรัลได้บน I #

แบบฝึกหัด 6.2

1. กำหนด $I = [a, b]$ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I และ $k > 0$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int_a^b} kf = k \underline{\int_a^b} f$ และ $\overline{\int_a^b} kf = k \overline{\int_a^b} f$
2. กำหนด $I = [a, b]$ และ f, g เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I สมมติ $f(x) \leqslant g(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int_a^b} f \leqslant \underline{\int_a^b} g$ และ $\overline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} g$
3. กำหนด $I = [a, b]$ และ f, g, h เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I สมมติ $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ ทุก $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ h หาอินทิกรัลได้บน I และ $A = \int_a^b f = \int_a^b h$ แล้ว g หาอินทิกรัลได้บน I และ $A = \int_a^b g$
4. กำหนด $I = [a, b]$ และ $c \in (a, b)$ ให้ $\wp$ คือเซตของผลแบ่งกั้นทั้งหมดของ I และ $\wp_c$ คือเซตของผลแบ่งกั้นทั้งหมดของ I ที่มีจุด c อยู่ ถ้า $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน I จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) | P \in \wp_c\}$
5. กำหนด $a > 0$ และ $J = [-a, a]$ ให้ $f : J \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบน J และ $\wp^*$ คือเซตของผลแบ่งกั้น P ของ I ซึ่งมีจุด 0 อยู่ และมีคุณสมบัติว่า $x \in P$ ก็ต่อเมื่อ $-x \in P$ จงพิสูจน์ว่า $\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(P, f) | P \in \wp^*\}$
6. สมมติ $J = [-a, a]$ โดยที่ $a > 0$ และ $f : J \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน J

   ก. ถ้า $f(-x) = f(x)$ ทุก ๆ $x \in J$ แล้ว $\int_{-a}^{a} f = 2 \int_0^a f$

   ข. ถ้า $f(-x) = -f(x)$ ทุก ๆ $x \in J$ แล้ว $\int_{-a}^{a} f = 0$
7. กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นบน I ถ้า P_n เป็นผลแบ่งกั้นของ I ที่แบ่ง I ออกเป็น n ส่วนเท่า ๆ กัน จงพิสูจน์ว่า

   $$0 \leqslant U(P_n, f) - \int_a^b f \leqslant \frac{b-a}{n}\left(f(b) - f(a)\right)$$
8. กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I จงใช้อสมการ $\big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)|$ ทุก ๆ $x, y \in I$ พิสูจน์ว่า $|f|$ หาอินทิกรัลได้บน I โดยไม่ต้องใช้ทฤษฎีบท 6.19
9. กำหนด $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ โดยที่ $|f(x)| \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$ จงใช้อสมการ $|\left(f(x)\right)^2 - \left(f(y)\right)^2| \leqslant K|f(x) - f(y)|$ ทุก ๆ $x, y \in I$ พิสูจน์ว่า f^2 หาอินทิกรัลได้บน I โดยไม่ต้องใช้ทฤษฎีบท 6.19

6.3 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างอนุพันธ์และอินทิกรัล ซึ่งจะสามารถพิสูจน์ได้ว่าอนุพันธ์และอินทิกรัลนี้เป็นการกระทำผกผันซึ่งกันและกัน

ทฤษฎีบทประกอบ 6.24 ให้ $I = [a, b]$, $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I โดยที่ $|f(x)| \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant K(b-a)$$

พิสูจน์ โดยบทแทรก 6.20 $|f|$ หาอินทิกรัลได้บน I

เพราะว่า $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$ โดยบทแทรก 6.10 ได้ว่า

$$-\int_a^b |f| \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|$$

ดังนั้น $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$

และเพราะว่า $|f|(x) = |f(x)| \leqslant K$ ทุก ๆ $x \in I$ โดยบทแทรก 6.11

$$\int_a^b |f| \leqslant K(b-a)$$

นั่นคือ $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \leqslant K(b-a)$ #

สมมติ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน $I = [a, b]$ สำหรับแต่ละ x โดยที่ $a \leqslant x \leqslant b$ ฟังก์ชัน f ย่อมหาอินทิกรัลได้บนช่วง $[a, x]$ ด้วย

เพราะฉะนั้น เรานิยาม $F_a : I \to R$ โดยที่ $F_a(x) = \int_a^x f$

ฟังก์ชัน F_a ที่นิยามในลักษณะนี้เรียกว่า อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ f บน I (an indefinite integral of f on I)

ฟังก์ชัน f ที่หาอินทิกรัลได้บน I ไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง แต่ฟังก์ชัน F_a นี้ต่อเนื่องเสมอ ดังจะได้พิสูจน์ต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 6.25 ให้ $I = [a, b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I แล้ว ฟังก์ชัน $F_a : I \to R$ ซึ่งนิยามโดย

$$F_a(x) = \int_a^x f \quad \text{ทุก } x \in I$$

ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน I

พิสูจน์ ถ้า $x, y \in I$ โดยที่ $x < y$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 6.14 ได้ว่า

$$F_a(y) - F_a(x) = \int_a^y f - \int_a^x f$$

$$= \int_a^x f + \int_x^y f - \int_a^x f = \int_x^y f$$

เนื่องจาก f หาอินทิกรัลได้บน I ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $K>0$ ซึ่ง $|f(x)| \leqslant K$ ทุก $x \in I$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 6.24 ได้ว่า

$$|F_a(y) - F_a(x)| = \left| \int_x^y f \right| \leqslant \int_x^y |f| \leqslant K(y-x)$$

กำหนด $\varepsilon>0$ เลือก $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{K}$

ให้ $x, y \in I$ โดยที่ $|x-y| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว จะได้

$$|F_a(y) - F_a(x)| \leqslant K|y-x| < \varepsilon$$

ดังนั้น F_a ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน I #

ทฤษฎีบท 6.26 กำหนด $f: I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $I = [a, b]$ และ $F_a : I \to R$ นิยามโดย $F_a(x) = \int_a^x f$ ทุก $x \in I$

ถ้า f ต่อเนื่องที่ $c \in I$ แล้ว F_a หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $F_a'(c) = f(c)$

พิสูจน์ สมมติ f ต่อเนื่องที่จุด $c \in I$ กำหนด $\varepsilon > 0$

ดังนั้น จะมี $\delta(\varepsilon) > 0$ ซึ่งถ้า $x \in I$ และ $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

ให้ $x \in I$ โดยที่ $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$

กรณีที่ 1 $0 < x-c < \delta(\varepsilon)$ หรือ $c < x < c+\delta(\varepsilon)$

จะได้ว่า $F_a(x) - F_a(c) = \int_a^x f - \int_a^c f$

และโดยทฤษฎีบท 6.14

$$F_a(x) - F_a(c) = \int_x^c f$$

เพราะฉะนั้น $\frac{F_a(x) - F_a(c)}{x-c} - f(c) = \frac{1}{x-c}\left[\int_c^x f - \int_c^x f(c) \right]$

นั่นคือ $\left| \frac{F_a(x) - F_a(c)}{x-c} - f(c) \right| = \frac{1}{x-c} \left| \int_c^x f - f(c) \right|$

$$\leqslant \frac{1}{x-c} \int_c^x |f - f(c)|$$

$$< \frac{1}{x-c} \cdot \varepsilon \cdot x-c = \varepsilon$$

กรณีที่ 2 $0 < c - x < \delta(\varepsilon)$ หรือ $c - \delta(\varepsilon) < x < c$

พิสูจน์ทำนองเดียวกับข้างต้นจะได้

$$\left| \frac{F_a(c) - F_a(x)}{c - x} - f(c) \right| < \varepsilon$$

เพราะว่า $\dfrac{F_a(c) - F_a(x)}{c - x} = \dfrac{F_a(x) - F_a(c)}{x - c}$

ดังนั้น $\left| \dfrac{F_a(x) - F_a(c)}{x - c} - f(c) \right| < \varepsilon$

นั่นคือ ถ้า $x \in I$ และ $0 < |x - c| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว

$$\left| \frac{F_a(x) - F_a(c)}{x - c} - f(c) \right| < \varepsilon$$

และได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{F_a(x) - F_a(c)}{x - c} = f(c)$

เพราะฉะนั้น F_a หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $F_a'(c) = f(c)$ #

ทฤษฎีบท 8.27 ทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัส (The Fundamental Theorem of Calculus)

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $I = [a, b]$ แล้ว

ฟังก์ชัน $F : I \to R$ จะสอดคล้องเงื่อนไขว่า

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f \quad \text{ทุก } x \in I$$

ก็ต่อเมื่อ $F'(x) = f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$

พิสูจน์ สมมติ $F : I \to R$ โดยที่ $F(x) - F(a) = \int_a^x f$ ทุก ๆ $x \in I$

ดังนั้น สำหรับทุก $x \in I$ จะได้ว่า $F(x) - F(a) = F_a(x)$

โดยทฤษฎีบท 6.26 จึงได้ว่า $F'(x) = F_a'(x) = f(x)$ ทุก $x \in I$

ในทางกลับ สมมติ $F : I \to R$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ ทุก $x \in I$

เพราะฉะนั้น $F'(x) = F_a'(x)$ ทุก $x \in I$

โดยบทแทรก 5.9 จะมีค่าคงที่ c ซึ่ง $F(x) = F_a(x) + c$ ทุก ๆ $x \in I$ เพราะว่า $F_a(a) = 0$

เพราะฉะนั้น $F(a) = c$

และ $F(x) - F(a) = F_a(x) = \int_a^x f$ ทุก ๆ $x \in I$ #

บทแทรก 6.28 ถ้า f ต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ และถ้า $F : I \to R$ โดยที่ $F'(x) = f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว $F(b) - F(a) = \int_a^b f$

ต่อไปจะกล่าวถึงวิธีการอินทิเกรตซึ่งจะยึดแนวทางของทฤษฎีบทหลักมูลของแคลคูลัสเป็นสำคัญ

ทฤษฎีบท 6.29 การอินทิเกรตทีละส่วน (Integration by Parts)

ให้ $I = [a, b]$ ถ้า f และ g มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I แล้ว

$$\int_a^b f'g = [f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)] - \int_a^b fg'$$

พิสูจน์ ให้ $h = fg$ แล้ว h และ h′ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยที่ $h' = f'g + fg'$

โดยทฤษฎีบท 6.27 ได้ว่า

$$\int_a^b f'g + fg' = \int_a^b h' = h(b)-h(a)$$

$$= f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)$$

ดังนั้น $\int_a^b f'g = [f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a)] - \int_a^b fg'$ #

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึง คือการหาค่าอินทิกรัลโดยวิธีเปลี่ยนตัวแปร (change of variable)

ทฤษฎีบท 6.30 กำหนด $J = [\alpha, \beta]$, $\varphi : J \to R$ มีอนุพันธ์ซึ่งเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน J ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $I = \varphi(J)$ แล้ว

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\, dx$$

พิสูจน์ ให้ $c = (p(a)$ และ $d = \varphi(\beta)$ โดยทฤษฎีบท 4.32 $I = \varphi(J)$ เป็นช่วงปิด และ $c, d \in I$

เพราะว่า f ต่อเนื่องบน I นิยาม $F : I \to R$ โดย

$$F(u) = \int_c^u f(x)\, dx \quad \text{ทุก } u \in I$$

และให้ $H : J \to R$ โดยที่ $H(t) = F(\varphi(t))$ ทุก $t \in J$

โดยทฤษฎีบท 5.4 $H'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ทุก $t \in J$

และโดยทฤษฎีบท 6.26 $F'(u) = f(u)$ ทุก $u \in I$

ดังนั้น $H'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ ทุก $t \in J$

เนื่องจาก $H(a) = F(\varphi(\alpha)) = F(c) = 0$

โดยทฤษฎีบท 6.27 ได้ว่า

$$\int_\alpha^\beta H'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = H(\beta) - H(\alpha) = H(\beta)$$

และเพราะว่า $H(\beta) = F(\varphi(\beta)) = F(d) = \int_c^d f(x)dx$

เพราะฉะนั้น $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\, dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$

ตัวอย่าง 6.7 จงหาค่าของ $\int_1^5 \frac{t}{1+t^2}\,dt$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1}$ และ $\varphi(t) = t^2$

เพราะว่า $\varphi'(t) = 2t$ ดังนั้น $\frac{t}{1+t^2} = (f\circ\varphi)(t)\cdot\varphi'(t)$

เพราะว่า φ เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้น และต่อเนื่องบนช่วง $[1, 5]$ โดยทฤษฎีบท 4.32

จะได้ $\varphi\big([1, 5]\big) = [1, 25]$

และเพราะว่า f ต่อเนื่องบนช่วง $\varphi\big([1, 5]\big) = [1, 25]$ โดยทฤษฎีบท 6.30 ได้ว่า

$$\int_1^5 \frac{t}{1+t^2}\,dt = \int_1^5 f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{25}\frac{1}{1+x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\,\ell n\,(1+x)\Big|_1^{25}$$

$$= \frac{1}{2}(\ell n\,26 - \ell n\,2) = \frac{1}{2}\,\ell n\,13$$

#

ทฤษฎีบท 6.31 ทฤษฎีบทค่ากลางสำหรับอินทิกรัล (Mean Value Theorem for Integrals)

กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ และ p เป็นฟังก์ชันที่หาอินทิกรัลได้บน I

โดยที่ $p(x) \geqslant 0$ ทุก $x \in I$ แล้ว จะมี $c \in I$ โดยที่

$$\int_a^b f(x)\,.\,p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 6.18 และทฤษฎีบท 6.23 ฟังก์ชัน fp หาอินทิกรัลได้บน I

ให้ $m = \inf f(I)$ และ $M = \sup f(I)$ ดังนั้น

$$mp(x) \leqslant f(x)\cdot p(x) \leqslant Mp(x)$$

โดยบทแทรก 6.10 ได้ว่า $m\int_a^b p \leqslant \int_a^b fp \leqslant M\int_a^b p$

ถ้า $\int_a^b p = 0$ เลือก c เป็นจำนวนจริงใด ๆ ก็ทำให้ทฤษฎีบทเป็นจริง

ถ้า $\int_a^b p \neq 0$ จะได้ $m \leqslant \dfrac{\int_a^b fp}{\int_a^b p} \leqslant M$

โดยบทแทรก 4.31 จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = \dfrac{\int_a^b fp}{\int_a^b p}$

ดังนั้น $\int_a^b fp = f(c) \int_a^b p$ #

บทแทรก 6.32 ถ้า f ต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ จะมี $c \in I$ ซึ่ง $\int_a^b f = f(c) \cdot (b-a)$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 6.31 โดยให้ $p(x) = 1$ #

ทฤษฎีบท 6.33 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

สมมติ $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}, f^{(n+1)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ แล้ว

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \ldots + \frac{P'(a)}{n!}(b\text{-}a)” + R_n$$

โดยที่ $R_n = \dfrac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

พิสูจน์ ให้ $R_n = \dfrac{1}{n!}\int_a^b (b-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วน (ทฤษฎีบท 6.29) ได้ว่า

$$\begin{aligned}
R_n &= \frac{1}{n!}\int_a^b (b\text{-}t)” \, df^{(n)}(t) \\
&= \frac{1}{n!}\left[-(b-a)” \; f^{(n)}(a) - \int_a^b f^{(n)}(t)d\,(b-t)^n\right\} \\
&= -\frac{1}{n!}(b\text{-}a)” \, f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt \\
&= -\frac{1}{n!}(b-a)” \, f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^b (b-t)^{n-1}\, df^{(n-1)}(t) \\
&= -\frac{1}{n!}(b-a)” \, f^{(n)}(a) \\
&\quad + \frac{1}{(n-1)!}\left\{-(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a) - \int_a^b f^{(n-1)}(t)d\,(b-t)^{n-1}\right\} \\
&= -\frac{1}{n!}(b\text{-}a)” \, f^{(n)}(a) \\
&\quad - \frac{1}{(n-1)!}(b\text{-}a)“\text{-}’ \; f^{(n-1)}(a) + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-t)^{n-2} f^{(n-1)}(t)dt \\
&= -\frac{1}{n!}(b\text{-}a)” \, f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(b\text{-}a)“\text{-}’ \; f^{(n-1)}(a) \\
&\quad + \frac{1}{(n-2)!}\int_a^b (b-t)^{n-2}\, df^{(n-2)}(t)
\end{aligned}$$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนนับ ดังนั้น ขบวนการอินทิเกรตนี้ต้องสิ้นสุด เพราะฉะนั้น

$$R_n = -\frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)$$

$$- \frac{1}{(n-2)!}(b-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) - \ldots + \int_a^b (b-t)\, f''(t)\, dt$$

$$= -\frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)$$

$$- \frac{1}{(n-2)!}(b-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) - \ldots + \int_a^b (b-t)\, df'(t)$$

$$= -\frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)$$

$$- \frac{1}{(n-2)!}(b-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) - \ldots - (b-a) f'(a) + \int_a^b f'(t)dt$$

$$= -\frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a) - \frac{1}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} f^{(n-1)}(a)$$

$$- \frac{1}{(n-2)!}(b-a)^{n-2} f^{(n-2)}(a) - \ldots - (b-a) f'(a) + f(b) - f(a)$$

ดังนั้น $$f(b) = f(a) + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(b-a)^n}{n!} + R_n$$ #

แบบฝึกหัด 6.3

1. กำหนด f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $I = [a, b]$ และ $H : I \to R$ นิยามโดย $H(x) = \int_x^b f$ ทุก $x \in I$ จงหาค่า $H'(x)$ สำหรับ $x \in I$
2. จงหา F' เมื่อ F นิยามบน $I = [0, 1]$ ดังต่อไปนี้

   ก. $F(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$

   ข. $F(x) = \int_0^{x^2} (1 + t^3)^{-1}\, dt$

   ค. $F(x) = \int_{x^2}^x \sqrt{1+t^2}\, dt$

   ง. $F(x) = \int_0^{\sin x} \cos t\, dt$
3. นิยาม $L : (0, \infty) \to R$ โดย $L(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$ สำหรับ $x > 0$ จงแสดงว่า

   ก. $L'(x) = \frac{1}{x}$ ทุก $x > 0$

   ข. $L(xy) = L(x) + L(y)$ ทุก ๆ $x, y > 0$

   ค. $L(x^n) = nL(x)$ ทุก ๆ $x > 0$ และ $n \in N$
4. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

   ก. $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\, dx$ ข. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

   ค. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$ ง. $\int_1^4 \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$
5. จงหาค่าอินทิกรัลต่อไปนี้

   ก. $\int_0^2 \frac{1}{2+\sqrt{x}}\, dx$ ข. $\int_1^5 x\sqrt{2x+3}\, dx$

   ค. $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{x+1}}\, dx$ ง. $\int_1^4 \frac{\sqrt{x}}{x(x+4)}\, dx$
6. กำหนด $I = [a, b]$ และ $g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I สมมุติว่ามีจำนวนจริง $K > 0$ ซึ่ง $|g(x)| \leq K \int_a^x |g|$ ทุก ๆ $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า $g(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in I$
7. กำหนด $I = [a, b]$ และ f, g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยที่ $\int_a^b f = \int_a^b g$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = g(c)$