บทที่ 5
การหาอนุพันธ์
(Differentiation)

5.1 อนุพันธ์ (The Derivative)

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงคุณสมบัติเบื้องต้นของอนุพันธ์ โดยเริ่มแรกจะให้นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชันเสียก่อน

นิยาม 5.1 ให้ $I \subseteq R$ เป็นช่วง (interval) ใด ๆ, $f : I \to R$ และ $c \in I$
เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็นอนุพันธ์ของ f ที่จุด c (L is the derivative of f at c) ถ้าสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สามารถหาจำนวนจริง $\delta(\varepsilon) > 0$ ได้ โดยที่ ถ้า $x \in I$
และ $0 < |x-c| < \delta(\varepsilon)$ แล้ว

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x-c} - L \right| < \varepsilon$$

และในกรณีนี้เรากล่าวว่า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c (f is differentiable at c) และเขียนแทนด้วย $f'(c) = L$

ข้อสังเกต 1) จากนิยามของอนุพันธ์ของ f ที่จุด c ถ้า $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c}$ หาค่าได้

เราจะได้ว่า $$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

2) ถ้า $f : I \to R$ สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $c \in I$ แล้ว อนุพันธ์ของ f ที่จุด c เขียนแทนด้วย $f'(c)$ ดังนั้น ถ้า f สามารถหาอนุพันธ์ได้ เราจะได้ฟังก์ชันใหม่ คือ f' ซึ่งมีโดเมน (domain) เป็นเซตย่อยของโดเมนของ f

ตัวอย่างเช่น ถ้า $f(x) = x^2$ สำหรับ $x \in R$ แล้ว ที่จุด c ใด ๆ ใน R

จะได้ $$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{x^2 - c^2}{x-c}$$

$$= \lim_{x \to c} x + c = 2c$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f' นิยามบนเซต R โดยที่ $f'(x) = 2x$ ทุก ๆ $x \in R$

3) ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง I แล้ว $f'(x) = 0$ บน I และถ้า $f(x) = x$ แล้ว $f'(x) = 1$ ทุก ๆ $x \in I$

ทฤษฎีที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับการที่ f สามารถหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c คือ ความต่อเนื่องที่จุด c

ทฤษฎีบท 5.1 ถ้า $f : I \to R$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $c \in I$ แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด c

พิสูจน์ สำหรับ $x \in I \quad x \neq c$

$$f(x) - f(c) = \left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c}\right)(x-c)$$

เนื่องจาก $f'(c)$ หาค่าได้ และจากทฤษฎีบท 4.5 จะได้ว่า

$$\lim_{x - c} (f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x-c}\right) \lim_{x \to c} x - c$$

$$\lim_{x \to c} f(x) - f(c) = f'(c) \cdot 0 = 0$$

นั่นคือ $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องที่จุด c

#

ความต่อเนื่องของ $f : I \to R$ ที่จุด c เป็นเพียงเงื่อนไขที่จำเป็นเท่านั้น แต่ไม่เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะสรุปได้ว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.1 กำหนด $f : R \to R$ โดยที่ $f(x) = |x|$ ทุก ๆ $x \in R$

พิจารณาที่ $x = 0$ พบว่า f ต่อเนื่องที่จุด 0

และสำหรับ $x \neq 0$ จะได้ $\frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \frac{|x|}{x}$ ซึ่งจากตัวอย่าง 4.7

พบว่า $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด 0

#

ทฤษฎีบท 5.2 ให้ $I \subseteq R$ เป็นช่วงใด ๆ, $c \in I$, $f : I \to R$ และ $g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่จุด c

ก. ถ้า $\alpha \in R$ แล้ว ฟังก์ชัน αf หาอนุพันธ์ได้ที่ c และ

$$(\alpha f)'(c) = \alpha\,(f'(c))$$

ข. ฟังก์ชัน $f+g$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

ค. ฟังก์ชัน fg หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(fg)'(c) = f'(c)\,g(c) + f(c)g'(c)$$

ง. ถ้า $g(c) \neq 0$ แล้วฟังก์ชัน $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

พิสูจน์ ก. และ ข) ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

ค) ให้ $p = fg$ ดังนั้น สำหรับ $x \in I$ และ $x \neq c$ จะได้

$$\frac{p(x) - p(c)}{x-c} = \frac{f(x)\,g(x) - f(c)\,g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)\,g(x) - f(c)\,g(x) + f(c)\,g(x) - f(c)\,g(c)}{x-c}$$

$$= \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \cdot g(x) + f(c) \cdot \frac{g(x) - g(c)}{x-c}$$

เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c โดยทฤษฎีบท 5.1 g ต่อเนื่องที่จุด c นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c)$ และเนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้

ที่จุด c จะได้ $\lim\limits_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c)$ และ

$\lim\limits_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x-c} = g'(c)$ ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} \frac{p(x) - p(c)}{x-c}$ หาค่าได้

และ

$$\lim_{x \to c} \frac{p(x) - p(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \cdot \lim_{x \to c} g(x) + \lim_{x \to c} f(c) \cdot \lim_{x \to c} \frac{g(x) - g(c)}{x-c}$$

$$= f'(c)\,g(c) + f(c)\,g'(c)$$

นั่นคือ fg หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$

ง. ให้ $q = \frac{f}{g}$ ดังนั้น สำหรับ $x \in D_q$ (โดเมนของ q) และ $x \neq c$ จะได้

$$\frac{q(x) - q(c)}{x-c} = \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(c)}{g(c)}}{x-c}$$

$$= \frac{f(x)\,g(c) - f(c)\,g(x)}{g(x)\,g(c)\,(x-c)}$$

$$= \frac{f(x)g(c) - f(c)g(c) + f(c)g(c) - f(c)g(x)}{g(x)g(c)\,(x-c)}$$

$$= \frac{1}{g(x)\,g(c)}\left\{\frac{f(x) - f(c)}{x-c}\cdot g(c) - f(c)\cdot\frac{g(x) - g(c)}{x-c}\right\}$$

เนื่องจาก f, g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ g ต่อเนื่องที่จุด c จะได้ว่า

$\lim\limits_{x \to c}\frac{q(x) - q(c)}{x-c}$ หาค่าได้ และ

$$\lim_{x \to c}\frac{q(x) - q(c)}{x-c} = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$$

นั่นคือ $\frac{f}{g}$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{(g(c))^2}$

#

บทแทรก 5.3 ถ้า $f_1, f_2, \ldots, f_n$ เป็นฟังก์ชันจากช่วง I ไปยังเซต R และหาอนุพันธ์ได้ที่จุด $c \in I$ แล้ว

ก. ฟังก์ชัน $f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(f_1 + f_2 + \ldots + f_n)'(c) = f_1'(c) + f_2'(c) + \ldots + f_n'(c)$$

ข. ฟังก์ชัน $f_1 f_2 \ldots f_n$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(f_1f_2\ldots f_n)'(c) = f_1'(c)\,f_2(c)\ldots f_n(c) + f_1(c)\,f_2'(c)\ldots f_n(c) + \ldots + f_1(c)\,f_2(c)\ldots f_n'(c)$$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 5.2 และวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

#

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้โดยใช้นิยาม 5.1

   ก. $f(x) = x^3$ $(x \in R)$

   ข. $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

   ค. $h(x) = \sqrt{x}$ $(x > 0)$

   ง. $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

2. จงพิสูจน์ว่า $f(x) = x^{1/3}, x \in R$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 0$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \text{ เป็นตรรกยะ} \\ 0 & x \text{ เป็นอตรรกยะ} \end{cases}$

   จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ และหาค่า $f'(0)$

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^3 & x < 1 \\ 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$

   จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 1$

5.2 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)

จากบทแทรก 5.3 (ข) ถ้าให้ $f_1 = f_2 = \ldots = f_n = f$ จะได้ $(f^n)'(c) = n(f(c))^{n-1} f'(c)$ ซึ่งสูตรนี้สามารถขยายจากทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันประกอบ ซึ่งเรียกว่า กฎลูกโซ่ (Chain Rule) ได้เช่นกัน

ทฤษฎีบท 5.4 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)
ให้ I, J เป็นช่วงใด ๆ $g : I \to R$ และ $f : J \to R$ โดยที่ $f(J) \subseteq I$
ให้ $c \in J$ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ f(c)
แล้วฟังก์ชันประกอบ gof หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ

$$(gof)'(c) = g'(f(c))\, f'(c)$$

พิสูจน์ ให้ $d = f(c)$ และ G เป็นฟังก์ชันนิยามบนเซต I โดย

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(d)}{y-d} & \text{ถ้า } y \in I,\ y \neq d \\ g'(d) & \text{ถ้า } y = d \end{cases}$$

เนื่องจาก g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด d เราจะได้ $\lim\limits_{y \to d} G(y) = g'(d) = G(d)$

ดังนั้น G ต่อเนื่องที่จุด d และ เพราะว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $c \in J$ โดยทฤษฎีบท 5.1 f ต่อเนื่องที่จุด c และเนื่องจาก $f(J) \subseteq I$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.25 Gof ต่อเนื่องที่จุด c

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} Gof(x) = \lim\limits_{y \to d} G(y) = g'(d) = g'(f(c))$

และจากนิยามของ G จะได้ว่า $g(y) - g(d) = G(y)(y-d)$ ทุก ๆ $y \in I$, $y \neq d$
ดังนั้น ถ้า $x \in J$ และ ให้ $y = f(x)$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} gof(x) - gof(c) &= g(f(x)) - g(f(c)) \\ &= g(y) - g(d) \\ &= G(y)(y - d) \\ &= G(f(x))(f(x) - f(c)) \\ &= Gof(x)(f(x) - f(c)) \end{aligned}$$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x \in J$, $x \neq c$ จะได้

$$\frac{gof(x) - gof(c)}{x-c} = Gof(x) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x-c}$$

เพราะว่า $\lim_{x \to c} G \circ f(x) = g'(f(c))$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c จะได้

$$\lim_{x\to c} \frac{g\circ f(x) - g\circ f(c)}{x-c} = g'(f(c))\, f'(c)$$

นั่นคือ $g\circ f$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c และ $(g\circ f)'(c) = g'(f(c))\, f'(c)$

#

ตัวอย่าง 5.2 กำหนด $f:I\to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I และ $g(y) = y^n$ ทุก ๆ $y\in R$ และ $n\in N$

เนื่องจาก $g'(y) = ny^{n-1}$ ดังนั้น จากทฤษฎีบท 5.4 จะได้ว่า

$(g\circ f)(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$ ทุก ๆ $x\in I$

นั่นคือ $(f^n)'(x) = n(f(x))^{n-1} f'(x)$ ทุก ๆ $x\in I$

#

ตัวอย่าง 5.3 สมมุติ $f:A\to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I โดยที่ $f(x)\neq 0$ และ $f'(x)\neq 0$ ทุก ๆ $x\in I$

ถ้า $h(y) = \frac{1}{y}$ สำหรับ $y\neq 0$ โดยทฤษฎีบท 5.2 (ง) จะได้

$h'(y) = \frac{-1}{y^2}$ สำหรับ $y\in R,\ y\neq 0$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = (h\circ f)'(x) = h'(f(x))\, f'(x) = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2} \quad \text{ทุก } x\in I$$

ตัวอย่าง 5.4 ให้ $f:R\to R$ โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ถ้า } x\neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x=0 \end{cases}$$

แล้ว f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดใน R

พิสูจน์ ให้ $h(x) = \frac{1}{x}\ (x\neq 0)$ และ $S(x) = \sin x$

ดังนั้น $S'(x) = \cos x$ และ $S\circ h(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

โดยทฤษฎีบท 5.4 จะได้ $(S\circ h)'(x) = S'(h(x))\,h'(x)$

$$= \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

และ จาก $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ โดยทฤษฎีบท 5.2 (ค) จะได้ว่า ถ้า $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

พิจารณาที่ $x=0$ จะได้ว่า

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} x \sin\frac{1}{x} = 0$$

ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ $x \in R$ แต่ฟังก์ชัน f' หาลิมิตไม่ได้ที่ $x=0$ นั่นคือ f' ไม่ต่อเนื่องที่ $x=0$ นั่นคือ ฟังก์ชัน f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ จุด $x \in R$ แต่ฟังก์ชัน f' ไม่ใช่ฟังก์ชันต่อเนื่องบน R

แบบฝึกหัด 5.2

1. ถ้า $f(x) = |x^3|$ จงหาค่า $f'(x)$
2. ให้ $f(x) = x|x|$ จงพิสูจน์ว่า

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$$

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$

   จงแสดงว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 0$
4. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   ก. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

   ข. $g(x) = \sqrt{5-2x+x^2}$

   ค. $h(x) = (\sin x^k)^m$; $k, m \in N$

   J. $k(x) = \tan(x^2)$ เมื่อ $|x| < \frac{\pi}{2}$

5.3 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (The Mean Value Theorem)

ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยเป็นทฤษฎีบทที่กล่าวถึง ความสัมพันธ์ของค่าของฟังก์ชัน และค่าของอนุพันธ์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่สำคัญทฤษฎีหนึ่งในวิชาการวิเคราะห์จำนวนจริง ในหัวข้อนี้จะได้ศึกษาทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย และผลต่อเนื่องบางประการที่ได้จากทฤษฎีบทนี้

นิยาม 5.2 กำหนด I เป็นช่วงใด ๆ $f: I \to R$ จะกล่าวว่า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่จุด $c \in I$ ถ้ามีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ ทุก ๆ $x \in N_\varepsilon(c) \cap I$

นิยาม 5.3 กำหนด I เป็นช่วงใด ๆ $f: I \to R$ จะกล่าวว่า f มีค่าต่ำสุด สัมพัทธ์ (relative minimum) ที่จุด $c \in I$ ถ้ามีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $f(c) \leq f(x)$ ทุก ๆ $x \in N_\varepsilon(c) \cap I$

และเรากล่าวว่า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ที่จุด $c \in I$ ถ้า f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือ ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ c

ตัวอย่าง 5.5 กำหนด $I = [0,1]$ และ $f: I \to R$ โดยที่

$f(x) = x$ ทุก ๆ $x \in I$

จะพบว่า 0 เป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f และ 1 เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ f

ทฤษฎีบท 5.5 ให้ c เป็นจุดข้างใน (interior point) ของ ช่วง I และ $f: I \to R$ โดยที่ f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c

ถ้า f หาอนุพันธ์ที่จุด c ได้ แล้ว $f'(c) = 0$

พิสูจน์ จะพิสูจน์เฉพาะในกรณี f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์เท่านั้น ส่วนในกรณีที่ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์นั้นให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

สมมุติ $f'(c) > 0$ ให้ $\varepsilon = f'(c)$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

เพราะว่า $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c)$ โดยนิยาม 4.1 จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่ง

ถ้า $x \in I$ และ $0 < |x-c| < \delta_1$ แล้ว $\left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon$

และเนื่องจาก f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด c จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่ง $f(x) \leq f(c)$ ทุก ๆ $x \in N_{\delta_2}(c) \cap I$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ ดังนั้น $N_\delta(c) \subseteq N_{\delta_1}(c)$ และ $N_\delta(c) \subseteq N_{\delta_2}(c)$

นั่นคือ $f(x) \leq f(c)$ ทุก ๆ $x \in N_\delta(c) \cap I$

และ ถ้า $x \in I$ โดยที่ $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว $\left| \dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} - f'(c) \right| < \varepsilon$

นั่นคือ $\dfrac{f(x) - f(c)}{x-c} > 0$ ทุก ๆ $x \in N_\delta(c) \cap I$

ถ้า $x > c$ และ $x \in N_\delta(c) \cap I$ แล้ว จะได้ว่า $f(x) - f(c) > 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะว่า $f(x) \leq f(c)$ ทุก ๆ $x \in N_\delta(c) \cap I$

เฉพาะฉะนั้นที่สมมุติว่า $f'(x) > 0$ นั้นไม่จริง และในทำนองเดียวกันก็สามารถพิสูจน์

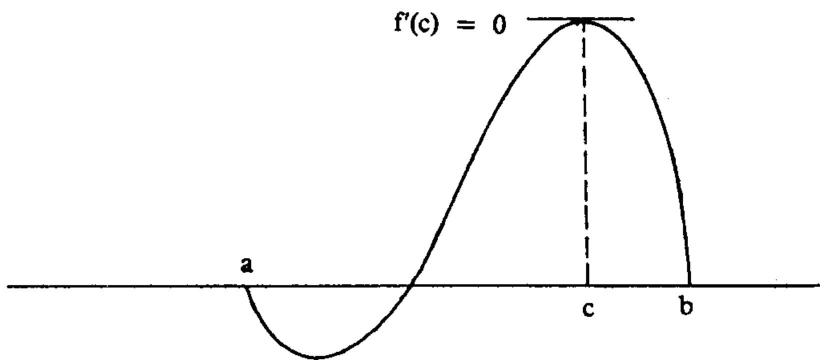
ได้ว่า $f'(c)$ ไม่น้อยกว่า 0

ดังนั้น $f'(c) = 0$

#

หมายเหตุ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุดภายในโดเมนแล้ว f ไม่จำเป็นที่จะหาอนุพันธ์ได้ที่จุดนั้น เช่น ให้ $I = [-1, 1]$ และ $f(x) = |x|$ บน I จะพบว่า 0 เป็นจุดภายในของ I และ f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่จุด 0 แต่จากตัวอย่าง 5.1 f หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่จุด 0

ทฤษฎีบท 5.6 ทฤษฎีบทของโรลล์ (Rolle's Theorem)
สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $f(a) = f(b)$ แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$



รูป 5.1 Rolle's Theorem

พิสูจน์ ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่บน I แล้ว จะได้ $f'(c) = 0$ ทุก ๆ $c \in (a,b)$
ดังนั้นสมมุติว่า f ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงที่บน I

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ โดยทฤษฎีบท 4.28 f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน I

นั่นคือ $\min f \leq f(a) \leq \max f$ และเพราะว่า $f(a) = f(b)$ และ f ไม่ใช่ฟังก์ชันค่าคงที่บนช่วง I จะได้ $\min f < f(a)$ หรือ $f(a) < \max f$

กรณีที่ 1 $\min f < f(a)$

ให้ $c \in [a,b]$ โดยที่ $f(c) = \min f$

เนื่องจาก $\min f = f(c) < f(a) = f(b)$ จะได้ว่า $c \in (a,b)$ นั่นคือ c เป็นจุดข้างในเซต I และเนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วง (a,b) โดยทฤษฎีบท 5.5 จะได้ว่า $f'(c) = 0$

กรณีที่ 2 $f(a) < \max f$

ให้ $c \in [a,b]$ โดยที่ $f(c) = \max f$

เนื่องจาก $f(a) = f(b) < \max f = f(c)$ จะได้ว่า $c \in (a,b)$

นั่นคือ c เป็นจุดข้างในเซต I และเนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกจุดในช่วง (a,b)

โดยทฤษฎีบท 5.5 จะได้ว่า $f'(c) = 0$

#

ผลจากทฤษฎีบทของโรลส์ ทำให้ได้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยดังต่อไปนี้

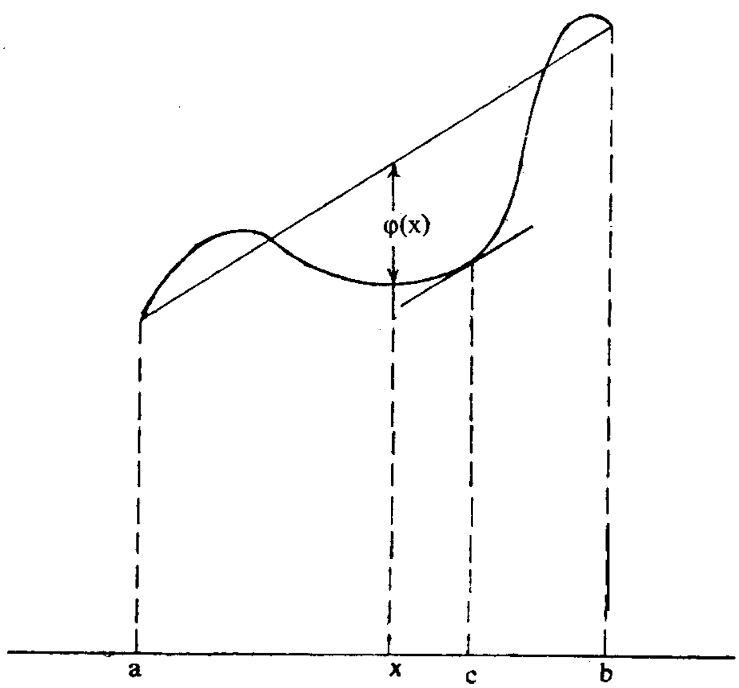
ทฤษฎีบท 5.7 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean Value Theorem)

สมมุติ f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) แล้วจะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$

พิสูจน์ กำหนดฟังก์ชัน φ บนเซต I โดย

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(x-a)$$

(ฟังก์ชัน φ นี้คือฟังก์ชัน ผลต่างระหว่าง f และฟังก์ชันที่มีกราฟเป็นเส้นตรงที่เชื่อมจุด (a,f(a)) และ (b,f(b)) ดูจากรูป 5.2)



รูป 5.2 ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) จะได้ φ ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) ด้วย

และจากนิยามของ φ พบว่า $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.6 มี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $\varphi'(c) = 0$

$$\text{นั่นคือ } 0 = \varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

ดังนี้ จะได้ว่า $f'(c)(b-a) = f(b) - f(a)$ #

ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยนี้มีความหมายในแง่เรขาคณิตก็คือ มีจุดอย่างน้อยหนึ่งจุดบนกราฟ $y = f(x)$ ซึ่งเส้นสัมผัสกราฟที่จุดนี้ ขนานกับเส้นตรงซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $(a,f(a))$ และ $(b,f(b))$ ดังแสดงให้เห็นในรูป 5.2

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นผลที่ได้จากทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

ทฤษฎีบท 5.8 สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) และถ้า $f'(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าคงที่ (constant function) บน I

พิสูจน์ แนวทางของการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้คือ จะพิสูจน์ว่า $f(x) = f(a)$ ทุก ๆ $x \in I$

ให้ $x \in I$ โดยที่ $x > a$ และ $I_x = [a,x]$

ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วงปิด I_x และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,x)

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c \in (a,x)$ ซึ่ง $f(a) - f(x) = f'(c)(x-a)$

และจากกำหนดให้ $f'(c) = 0$ ดังนั้น $f(x) = f(a)$

นั่นคือ $f(x) = f(a)$ ทุก ๆ $x \in [a,b]$

#

บทแทรก 5.9 สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $f'(x) = g'(x)$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้วจะมีฟังก์ชันค่าคงที่ C โดยที่ $f = g+C$ บน I

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 5.8

#

นิยาม 5.4 **กำหนด** $A \subseteq R$ $f:A \to R$ **เรากล่าวว่า** f **มีค่าเพิ่มขึ้นบนเซต** A (f is increasing on A) **ถ้า** $x_1, x_2 \in A$ **และ** $x_1 \leq x_2$ **แล้ว** $f(x_1) \leq f(x_2)$

และ f **มีค่าเพิ่มขึ้นบนเซต** A **โดยแท้** (f is strictly increasing on A) **ถ้า** $x_1, x_2 \in A$ **และ** $x_1 < x_2$ **แล้ว** $f(x_1) < f(x_2)$

นิยาม 5.5 **กำหนด** $A \subseteq R$ $f:A \to R$ **เรากล่าวว่า** f **มีค่าลดลงบนเซต** A (f is decreasing on A) **ถ้า** $x_1, x_2 \in A$ **และ** $x_1 \leq x_2$ **แล้ว** $f(x_1) \geq f(x_2)$

และ f **มีค่าลดลงบนเซต** A **โดยแท้** (f is strictly decreasing on A) **ถ้า** $x_1, x_2 \in A$ **และ** $x_1 < x_2$ **แล้ว** $f(x_1) > f(x_2)$

นิยาม 5.6 **กำหนด** $A \subseteq R$ f:A-R **ถ้า** f **เป็นฟังก์ชันที่มีค่าเพิ่มขึ้น หรือ มีค่าลดลงบนเซต** A **เรากล่าวว่า** f **เป็นฟังก์ชันทางเดียวบนเซต** A (f is a monotone function on A)

ทฤษฎีบท 5.10 **ให้** $f:I \to R$ **เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง** I **แล้ว**

ก. f **มีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง** I **ก็ต่อเมื่อ** $f'(x) \geq 0$ **ทุก ๆ** $x \in I$

ข. f **มีค่าลดลงบนช่วง** I **ก็ต่อเมื่อ** $f'(x) \leq 0$ **ทุก ๆ** $x \in I$

พิสูจน์ ก) สมมุติ $f'(x) \geq 0$ ทุก ๆ $x \in I$ ให้ $x_1, x_2 \in I$ โดยที่ $x_1 \leq x_2$ และ $J = [x_1, x_2]$ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง J และโดยทฤษฎีบท 5.1 f ต่อเนื่องบนช่วง J เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะมี $c \in (x_1, x_2)$ ซึ่ง

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1)$$

เนื่องจาก $f'(c) \geq 0$ และ $x_2 - x_1 \geq 0$ ดังนั้น $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$
นั่นคือ $f(x_1) \leq f(x_2)$

เพราะฉะนั้น f มีค่าเพิ่มขึ้นบน I

ในทางกลับกัน สมมุติ ว่า f หาอนุพันธ์ได้และมีค่าเพิ่มขึ้นบนช่วง I ให้ $c \in I$ ดังนั้น สำหรับ x ใด ๆ ในช่วง $I - \{c\}$ $x > c$ หรือ $x < c$

เพราะฉะนั้น $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ ทุก ๆ $x \in I$, $x \neq c$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.6 $f'(c) = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$

เนื่องจาก c เป็นจุดใด ๆ ใน I จึงได้ว่า $f'(x) \geq 0$ ทุก $x \in I$

ข) พิสูจน์คล้ายกับการพิสูจน์ ก)

หมายเหตุ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ในช่วง I โดยที่ $f'(x) > 0$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้ว ก็สามารถพิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 5.10 ว่า f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นโดยแท้บนช่วง I

แต่ถ้า f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นโดยแท้ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง I แล้ว ไม่จำเป็นที่ $f'(x) > 0$ ทุก $x \in I$

เช่น กำหนด f:R-R โดยที่ $f(x) = x^3$ ทุก ๆ $x \in R$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นโดย แท้บน R แต่ $f'(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in R$

#

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขที่เพียงพอ (a sufficient condition) ในการที่ฟังก์ชัน f จะมีจุดสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extremum) ในช่วง I

ทฤษฎีบท 5.11 การทดสอบจุดสุดขีดโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First Derivative Test for Extrema)

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $I = [a,b]$ และ c เป็นจุดภายใน (interior point) เซต I สมมุติ f หาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a,c) และ (c,b) แล้ว

ก) ถ้ามี $\delta>0$ และ $N_\delta(c) \subseteq I$ โดยที่ $f'(x)\geq 0$ สำหรับ $x \in (c-\delta,c)$ และ $f'(x) \leq 0$ สำหรับ $x \in (c, c+\delta)$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum) ที่จุด c

ข) ถ้ามี $\delta>0$ และ $N_\delta(c) \subseteq I$ โดยที $f'(x) \leq 0$ สำหรับ $x \in (c-\delta,c)$ และ $f'(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in (c, c+\delta)$ llh f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum) ที่จุด c

พิสูจน์ n) ให้ $x \in (c-\delta, c)$ โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c_x \in (x, c)$
ซึ่ง $f(c) - f(x) = f'(c_x)(c-x)$

เนื่องจาก $f'(c_x) \geq 0$ และ $c-x \geq 0$ จะได้ว่า $f(x)\leq f(c)$

ให้ $y \in (c, c+\delta)$ โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c_y \in (c,y)$
ซึ่ง $f(y) - f(c) = f'(c_y)(y-c)$

เนื่องจาก $f'(c_y)\leq 0$ และ $y-c\geq 0$ จะได้ว่า f(y) 4 f(c)

เพราะฉะนั้น f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่จุด c

ข) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับข้อ n)

#

ตัวอย่างที่จะแสดงให้เห็นต่อไปนี้เป็นการประยุกต์ของทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย

ตัวอย่าง 5.6 **จงหาค่าประมาณของ** $\sqrt{105}$

วิธีทำ ให้ $f(x) = \sqrt{x}$ **และ** $a = 100,\ b = 105$

โดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย จะมี $c \in (100, 105)$ ซึ่ง

$$\sqrt{105} - \sqrt{100} = \frac{5}{2\sqrt{c}}$$

เพราะว่า $10 < \sqrt{c} < \sqrt{105} < \sqrt{121} = 11$ จะได้ว่า

$$\frac{5}{2(11)} < \frac{5}{2\sqrt{c}} = \text{Jim-10} < \frac{5}{2(10)}$$

นั่นคือ $10.22 < \sqrt{105} < 10.25$ ซึ่งยังเป็นค่าประมาณซึ่งค่อนข้างหยาบ

แต่จาก $\sqrt{c} < \sqrt{105}$ จะได้ว่า $\sqrt{c} < 10.25$ ด้วย

ดังนั้น $$\frac{5}{2(10.25)} < \frac{5}{2\sqrt{c}} = \sqrt{105} - 10$$

นั่นคือ $10.243 < \sqrt{105} < 10.25$ ซึ่งจะได้ค่าประมาณของ $\sqrt{105}$ ที่ละเอียดขึ้น

#

ตัวอย่าง 5.7 **จงพิสูจน์ว่า** $e^x > 1 + x$ ทุก ๆ $x \in R$

พิสูจน์ กำหนด $f(x) = e^x$ แล้ว $f'(x) = e^x$ และจะได้ว่า

$f'(x) > 1$ สำหรับ $x > 0$ และ $f'(x) < 1$ สำหรับ $x < 0$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $e^x = 1$ นั่นคือ $e^x = 1 + x$ เมื่อ $x = 0$

สมมุติ $x > 0$ โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c \in (0, x)$ โดยที่

$$e - e^0 = e^c\ (x-0)$$

เพราะว่า $e^0 = 1$ และ $e^c > 1$ ดังนั้น $e^x - 1 > x$ นั่นคือ A $1 + x$

สมมุติ $x < 0$ โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c \in (x,0)$ โดยที่

$$e^0 - e^x = e^c\ (0-x)$$

เพราะว่า $e^0 = 1$ และ $e^c < 1$ ดังนั้น $1 - e^x < -x$ นั่นคือ $e^x > 1 + x$

เพราะฉะนั้น $e^x \geq 1 + x$ ทุก ๆ $x \in R$

ตัวอย่าง 5.8 **จงพิสูจน์ว่า** $-x \leq \sin x \leq x$ ทุก ๆ $x \geq 0$

พิสูจน์ กำหนด g(x) = sin x **ดังนั้น** $g'(x)$ = cos X ทุก ๆ $x \in R$

ให้ X เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ X 70 โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c \in (0,x)$

ซึ่ง sin x - sin 0 = cos c (x-0)

เนื่องจาก sin 0 = 0 และ -14 cos $c \leq 1$ จะได้

$$-x \leqslant \sin x \leqslant x$$

ดังนั้น -x-C sin $x \leqslant x$ เมื่อ $x \geq 0$

#

ตัวอย่าง 5.9 (Bernoulli's Inequality) ถ้า n เป็นจำนวนนับใด ๆ

จะได้ว่า $(1+x)^n \geq 1+nx$ ทุก ๆ $x > -1$

พิสูจน์ ให้ h(x) $=(1+x)^n$ แล้ว จะได้ h'(x) = n(l $+x)^{n-1}$ ทุก ๆ x 7-l

ถ้า $n = 1$ จะได้ $(1+x)^n = 1+nx$ ทุก ๆ $x > -1$

ดังนั้น สมมุติ n 7 1 และให้ X เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ X 70 โดยทฤษฎีบท 5.7

จะมี $c \in (0,x)$ โดยที่

h(x) - h(0) = h'(c) (x-0)

นั่นคือ $(1+x)^n - 1 = n(1+c)^{n-1}$ x

เนื่องจาก c>o และ $n-1 > 0$ จะได้ว่า $n(1+c)^{n-1} > 1$ นั่นคือ $(1+x)^n - , > nx$

เพราะฉะนั้น $(1+x)^n > 1+nx$ ทุก ๆ $x > 0$

สมมุติ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $-1 < x < 0$ และ $n > 1$

โดยทฤษฎีบท 5.7 จะมี $c \in (x,0)$ โดยที่

h(0) - h(x) = h'(c) (O-x)

นั่นคือ $1-(1+x)^n = -nx(1+c)^{n-1}$

เนื่องจาก $-1 < c < 0$ และ n-17 0 จะได้ $(1+c)^{n-1} < 1$

นั่นคือ 1-(1+x)' <-nx เพราะฉะนั้น $(1+x)^n > 1+nx$ ทุก $x \in (-1, 0)$

n i x = 0 จะได้ $(1+x)^n = 1+nx$

นั่นคือ $(1+x)^n \geq 1+nx$ ทุก ๆ x 7 - l

#

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $f(x) = x^2 - 3x + 5$

ข. $g(x) = 3x - 4x^2$

ค. $h(x) = x^3 - 3x - 4$

ง. $k(x) = x^4 + 2x^2 - 4$

2. จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์ และช่วงซึ่งฟังก์ชันต่อไปนี้มีค่าเพิ่มขึ้น และช่วงซึ่งฟังก์ชันมีค่าลดลง

ก. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

ข. $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

ค. $h(x) = \sqrt{x} - 2\sqrt{x+2}$ $(x > 0)$

ง. $k(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

3. จงหาจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้บนโดเมนที่กำหนดให้

n. $f(x) = |x^2 - 1|$ $-4 \leq x \leq 4$

ข. $g(x) = 1 - (x - 1)^{2/3}$ $0 \leq x \leq 2$

ค. $h(x) = x|x^2 - 12|$ $-2 \leq x \leq 3$

J. $k(x) = x(x - 8)^{1/3}$ $0 \leq x \leq 9$

4. จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยพิสูจน์ว่า $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ ทุก ๆ $x, y \in R$

5. จงใช้ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย พิสูจน์ว่า $\frac{x-1}{x} < \ln x < x-1$ ทุก $x > 1$

6. กำหนด I เป็นช่วง และ $f: I \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน I ถ้า f' เป็นฟังก์ชันค่าบวกโดยแท้บน I (strictly positive on I) แล้ว f เป็นฟังก์ชันค่าเพิ่มขึ้นโดยแท้ (strictly increasing) บน I

5.4 คุณสมบัติค่ากลางของอนุพันธ์

(The Intermediate Value Properties of Derivatives)

ทฤษฎีบทประกอบ 5.12 ให้ I เป็นช่วงใด ๆ $f:I\to R$ และ $c \in$ I
สมมุติว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c แล้ว

n) ถ้า $f'(c) > 0$ แล้ว จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x \in I$ และ $c < x < c+\delta$ แล้ว
f(x) 7 f(c)

ข) ถ้า $f'(c) < 0$ แล้ว จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x \in I$ และ $c-\delta < x <$ แล้ว
$f(x) > f(c)$

พิสูจน์ n) เนื่องจาก $\lim\limits_{x - c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c) > 0$ โดยทฤษฎีบท 4.10 จะมีจำนวนจริง
6 7 0 ซึ่งถ้า $x \in I$ และ $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว

$$\frac{f(x) - f(c)}{x-c} > 0$$

ดังนั้นถ้า $x \in I$ และ $c < x < c + \delta$ แล้ว จะได้

$$f(x) - f(c) = (x-c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x-c} \; 7 \; o$$

นั่นคือ $f(x) > f(C)$

ข) พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับข้อ ก)

#

ทฤษฎีบท 5.19 ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $I = [a, b]$ และถ้า k เป็นจำนวนจริง
โดยที่ $f'(a) < k < f'(b)$ แล้ว จะมี $c \in (a, b)$ ซึ่ง $f'(c) = k$

พิสูจน์ นิยามฟังก์ชัน g บนช่วง I โดยที่

$$g(x) := k(x-a) - f(x) \text{ ทุก ๆ } x \in I$$

เนื่องจาก f หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I โดยทฤษฎีบท 5.1 f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง
I ซึ่ งทำให้ g เป็นฟังก์ชันต่อเนืองบนช่วง I ด้วย

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.28 g มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บน I

เนื่องจาก $g'(a) = k - f'(a) 7 0$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 5.12 (n)
$g(a) \neq \max g$

และเนื่องจาก $g'(b) = k - f'(b) < 0$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 5.12 (ข) $g(b) \neq \max g$

ดังนั้น จะมี $c \in (a,b)$ โดยที่ $g(c) = \max g$ และโดยทฤษฎีบท 5.5 จะได้ $g'(c) = 0$

นั่นคือ $0 = g'(c) = k - f'(c)$ เพราะฉะนั้น $f'(c) = k$

#

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบท 5.13 ทำให้ทราบว่า ถ้าค่าของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน f ใด ๆ เปลี่ยนเครื่องหมายจากบวกเป็นลบภายในช่วง I แล้ว จะต้องมี $c \in I$ ซึ่ง $f'(c) = 0$

แบบฝึกหัด 5.4

1. กำหนด I เป็นช่วง และ $f: I \to R$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน I
   จงพิสูจน์ว่า ถ้าไม่มี $x \in I$ ซึ่ง $f'(x) = 0$ แล้ว $f'(x) > 0$ ทุก $x \in I$
   หรือ $f'(x) < 0$ ทุก ๆ $x \in I$
2. สมมุติ $f: [0,2] \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[0,2]$ และหาอนุพันธ์ได้บน $(0,2)$ และ
   $f(0) = 0,\ f(1) = 1,\ f(2) = 1$

   ก. จงแสดงว่า มี $c_1 \in (0,1)$ โดยที่ $f'(c_1) = 1$

   ข. จงแสดงว่า มี $c_2 \in (1,2)$ โดยที่ $f'(c_2) = 0$

   ค. จงแสดงว่า มี $c \in (0,2)$ ซึ่ง $f'(c) = \frac{1}{3}$

5.5 กฎของโลปิตาล (L' Hospital' s Rules)

5.5.1 รูปแบบยังไม่กำหนด (Indeterminate Forms)

จากการศึกษาวิธีหาค่าลิมิต จะพบว่า ถ้า $A = \lim_{x \to c} f(x)$ และ $B = \lim_{x \to c} g(x)$ และถ้า $B \neq 0$ แล้ว จะได้ว่า $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$

ในกรณีที่ $A = 0$ และ $B = 0$ เรายังไม่สามารถหาค่าลิมิตของ $\frac{f}{g}$ ได้ตามทฤษฎีบทที่กล่าวมาข้างต้นทั้งหมด และในกรณีนี้ เราเรียก $\frac{f}{g}$ ว่าเป็น รูปแบบยังไม่กำหนด (indeterminate form) ซึ่งจะเห็นได้ต่อไปว่า $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ อาจหาค่าได้เป็นจำนวนจริงหรืออาจจะหาค่าไม่ได้ เช่น ให้ $f(x) = \alpha x$, $a \in R$ และ $g(x) = x$ จะเห็นว่า $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\alpha x}{x} = \alpha$

และในกรณีที่ $A = 0$ และ $B = 0$ เรากล่าวว่า $\frac{f}{g}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดในแบบ $0/0$

สำหรับรูปแบบยังไม่กำหนดรูปแบบอื่น เราใช้สัญญลักษณ์แทนด้วย ∞/∞, $0.\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0 และ $\infty - \infty$ ตามแต่กรณี

และในหัวข้อนี้จะได้ศึกษารูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0/0$ และ ∞/∞ เท่านั้น ส่วนรูปแบบอื่น ๆ นั้นเราสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ $0/0$ หรือ ∞/∞ ได้ โดยใช้ฟังก์ชันชี้กำลัง (exponential function) ฟังก์ชัน ลอการิทึม (logarithm function) หรือ ฟังก์ชันพีชคณิตอื่น ๆ (alagebraic function)

5.5.2 **กฎของโลปิตาล กรณี** O/O (L' Hospital's Rule : The Case O/O)

ทฤษฎีบท 5.14 กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันบนช่วงปิด [a,b] โดยที่ f(a) = g(a) = 0 และ $g(x) \neq 0$ ทุก ๆ $a < x < b$ ถ้า f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a และถ้า $g'(a) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{นั่นคือ} \quad \lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก f(a) = g(a) = 0 ดังนั้น สำหรับ $a < x < b$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{\frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\frac{g(x) - g(a)}{x - a}}$$

เนื่องจาก f และ g หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a โดยที่ $g'(a) \neq 0$ ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.5 (ข)

จะได้ว่า $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}{\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

นั่นคือ $$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$ ด้วย

#

ข้อควรระวัง สมมุติฐานที่ว่า f(a) = g(a) = 0 นั้นสำคัญมาก ดังตัวอย่าง เช่น ถ้า $f(x) = x + 17$ และ $g(x) = 2x + 3$ สำหรับจำนวนจริง x จะได้

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{17}{3} \quad \text{ในขณะที่} \quad \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{1}{2}$$

ทฤษฎีบท 5.15 **ทฤษฎีบทค่าเฉลี่ยของโคชี (Cauchy** Mean Value Theorem)
กำหนด f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a,b) ถ้า $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ โดยทฤษฎีบทของโรลล์ จะได้ว่า $g(a) \neq g(b)$ ดังนั้นสำหรับ $x \in [a,b]$ นิยาม

$$h(x)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))-(f(x)-f(a))$$

เพราะฉะนั้น h ต่อเนื่องบนช่วง ปิด [a,b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วง (a,b) โดยที่ $h(a) = h(b) = 0$

โดยทฤษฎีบทของโรลล์ จะมี $c \in (a,b)$ ซึ่ง $h'(c) = 0$

นั่นคือ $$0 = h'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c) - f'(c)$$

และเนื่องจาก $g'(c) \neq 0$ จะได้

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

#

ทฤษฎีบท 5.16 กฎของโลปิตาล (L' Hospital' a Rule)

สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $f(a) = g(a) = 0, g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $a < x < b$ แล้ว

ก) ถ้า $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ โดยที่ $L \in R$ แล้ว $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ข) ถ้า $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty\ (-\infty)$ แล้ว $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty\ (-\infty)$

พิสูจน์ ก) กำหนด $\varepsilon > 0$ แล้วจะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $a < x < a + \delta$ แล้ว

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

และสำหรับ x ซึ่ง $a < x < a + \delta$ โดยทฤษฎีบท 5.15 จะมี c_x โดยที่ $a < c_x < x$

และ $$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$$

นั่นคือ สำหรับ แต่ละ x ซึ่ง $a < x < a + \delta$ จะมี c_x ซึ่ง $a < c_x < a + \delta$

ดังนั้น $$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| = \left| \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L \right| < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

ข. สมมุติ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$

ให้ K เป็นจำนวนจริงโดยที่ $K>0$ ดังนั้น จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a<x<a+\delta$ แล้ว

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} > K$$

สำหรับแต่ละ x ซึ่ง $a<x<a+\delta$ โดยทฤษฎีบท 5.15 จะมี c_x โดยที่ $a<c_x<x$

และ $$\frac{f(x)}{g} \quad o \quad \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} > K$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$

และในกรณี $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$ ให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

#

ทฤษฎีบท 5.17 สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว

ก) ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริงแล้ว $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

ข. ถ้า $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty\ (-\infty)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a^-} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty\ (-\infty)$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบท 5.16

#

ทฤษฎีบท 5.18 สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด [a,b] และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด (a,b) โดยที่ $f(a) = g(a) = 0$, $g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ แล้ว

ก) ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ โดยที่ $L \in R$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

ข) ถ้า $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty\ (-\infty)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty\ (-\infty)$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 5.16 และ ทฤษฎีบท 5.17

#

ต่อไปจะขยายผลของกฎของโลปิตาลไปในกรณีลิมิตที่อนันต์ซึ่งจะพิจารณาเฉพาะกรณีลิมิตที่ ∞

ทฤษฎีบท 5.19 กำหนด $b>0$ สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องและหาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[b,\infty)$

โดยที่ 1) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$

2) $g(x) \neq 0$ และ $g'(a) \neq 0$ ทุก ๆ $x>b$

แล้ว $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

พิสูจน์ พิจารณาฟังก์ชัน F และ G ซึ่งนิยามบนช่วง $[0,\frac{1}{b}]$ โดย

$$F(t) = \begin{cases} f(1/t) & \text{ถ้า } 0<t\le\frac{1}{b} \\ 0 & \text{ถ้า } t=0 \end{cases}$$

และ $$G(t) = \begin{cases} g(1/t) & \text{ถ้า } 0<t\le\frac{1}{b} \\ 0 & \text{ถ้า } t=0 \end{cases}$$

ดังนั้น จะได้ว่า $\lim_{t\to0^+}F(t) = \lim_{x\to\infty} f(x)$ และ $\lim_{t\to0^+}G(t) = \lim_{x\to\infty} g(x)$

และ จากทฤษฎีบท 5.4 จะได้ $F'(t) = (-1/t^2)f'(1/t)$ และ $G'(t) = (-1/t^2)g'(1/t)$

และเนื่องจาก F และ G สอดคล้องกับสมมุติฐานของทฤษฎีบท 5.16 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to0^+}\frac{f'(1/t)}{g'(1/t)} \\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

#

ตัวอย่าง 5.10 จงหาค่าของ $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

วิธีทำ เนื่องจากฟังก์ชัน $g(x) = \sqrt{x}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $x = 0$ ดังนั้น จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 5.14

ให้ $f(x) = \sin x$ จะได้ f และ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด $[0,b]$ และหาอนุพันธ์ได้ในช่วงเปิด $(0,b)$ เมื่อ $b>0$

และ $f(0) = g(0) = 0$, $g'(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (0,b)$

โดยทฤษฎีบท 5.16 ได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} 2\sqrt{x} \cos x = 0$$

#

ตัวอย่าง 5.11 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

วิธีทำ เนื่องจาก $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$ และ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$

ยังคงมีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ 0/0 อีก ดังนั้นจึงต้องใช้กฎของโลปิตาลอีกครั้ง

นั่นคือ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$

เพราะฉะนั้น $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

#

ตัวอย่าง 5.12 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ 0/0 ดังนั้น

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

#

ตัวอย่าง 5.13 จงหาค่าของ $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

วิธีทำ $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ 0/0 ดังนั้น

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1/x}{1} = 1$$

5.5.3 กฎของโลปิตาล กรณี ∞/∞

ทฤษฎีบท 5.20 สมมุติ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a,b) โดยที่

1) $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ และ $\lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$

2) $g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ x ซึ่ง $a < x < b$

แล้ว จะได้ว่า

ถ้า $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

พิสูจน์ ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ เนื่องจาก $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g(x)} = L$

ดังนั้นจะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $a<x<a+\delta$ แล้ว

$$\left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| < \varepsilon$$

เลือก $c_1 \in (a, a+\delta)$ และเนื่องจาก $\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty$ จึงสามารถเลือก $c_2 \in (a, c_1)$

ได้ โดยที่ $f(x) \neq f(c_1)$ ทุก ๆ x ซึ่ง $a< x<c_2$

นิยามฟังก์ชัน F บน (a, c_2) โดย

$$F(x) = \frac{1-\frac{f(c_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(c_1)}{g(x)}} \quad \text{สำหรับ } x \in (a, c_2)$$

และเนื่องจาก $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in (a,b)$ จะได้ว่า $g(x) \neq g(c_1)$

ทุก ๆ $x \in (a, c_2)$

ดังนั้น จากสมมุติฐาน จะได้ว่า $\lim_{x \to a^+} F(x) = 1$

เพราะฉะนั้นจะมี c_3 ซึ่ง $a<c_3<c_2$ โดยที่ $|F(x)-1|<\varepsilon$ เมื่อ $a<x<c_3$ นั่นคือ ถ้า $a<x<c_3$

จะได้

$$\frac{1}{|F(x)|} < \frac{1}{1-\varepsilon} < 2$$

พิจารณา $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{F(x)}{F(x)} = \frac{f(x)-f(c_1)}{g(x)-g(c_1)} \cdot \frac{1}{F(x)}$

และจากทฤษฎีบท 5.15 จะมี $\xi \in (x, c_1)$ ซึ่ง $\dfrac{f(x) - f(c_1)}{g(x) - g(c_1)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

นั่นคือ $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \dfrac{1}{F(x)}$

เนื่องจาก $a < x < c_3 < c_2 < c_1 < a+\delta$ จะได้ว่า

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \cdot \frac{1}{F(x)} - L\right|$$

$$= \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L \cdot F(x)\right| |F(x)|^{-1}$$

$$\leq \left\{\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - L\right| + |L - L\,F(x)|\right\} |F(x)|^{-1}$$

$$\leq 2(\varepsilon + |L|\varepsilon) = 2(1 + |L|)\varepsilon$$

ซึ่งจะทำให้ได้ว่า $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$

#

ตัวอย่าง 5.14 กำหนด $I = (0,\pi)$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x}$

วิธีทำ $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x}$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ ∞/∞

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 5.20 ได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln \sin x}{\ln x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\frac{\cos x}{\sin x}}{1/x}$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x}\right) \cos x$$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 0^+} \cos x = 1$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \sin x}{\ln x} = 1$$

#

5.5.4 รูปแบบยังไม่กำหนดแบบอื่น (Other Indeterminate Forms)

รูปแบบยังไม่กำหนดแบบอื่น เช่น $\infty - \infty$, $0.\infty$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0 สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูป $0/0$ หรือ ∞/∞ ได้ ดังจะแสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.15 กำหนด $I = (0, \frac{\pi}{2})$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$

วิธีทำ สังเกตได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x})$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $\infty - \infty$

แต่ $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = \lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{\sin x - x}{x \sin x})$ ซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0/0$

และ
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}) = 0$

#

ตัวอย่าง 5.16 กำหนด $I = (0,\infty)$ จงหาค่าของ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$

วิธีทำ สังเกตได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ $0 . (-\infty)$

แต่ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ ซึ่งมีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ ∞/∞

ดังนั้นจะได้ว่า
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

#

ตัวอย่าง 5.17 **กำหนด** $I = (0,\infty)$ **จงหาค่าของ** $\lim_{x \to 0^+} x^x$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0^+} x^x$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ 0^0

จากแคลคูลัสเบื้องต้น ได้ว่า $x^x = e^{x \ln x}$

และเพราะว่าฟังก์ชัน $f(y) = e^y$ ต่อเนื่องที่ $y = 0$ และ จากตัวอย่าง 5.16 ทราบว่า

$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$ #

ตัวอย่าง 5.18 **กำหนด** $I = (0,\infty)$ **จงหาค่าของ** $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

วิธีทำ $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ มีรูปแบบยังไม่กำหนดแบบ ∞^0

เนื่องจาก $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln (1 + 1/x)}$ ดังนั้น

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln (1 + 1/x)}$$

เพราะว่า
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$
$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x + 1}$$
$$= 0$$

และเนื่องจากฟังก์ชัน $f(y) = e^y$ ต่อเนื่องที่ $y = 0$ จึงได้ว่า

$$\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln (1 + 1/x)} = e^0 = 1 \ \#$$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาลิมิตของฟังก์ชันที่กำหนดโดเมนมาให้ดังนี้

ก. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(x+1)}{\sin x}$ $\quad (0, \frac{\pi}{2})$

ข. $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\tan x}{x}$ $\quad (0, \frac{\pi}{2})$

ค. l i m $\dfrac{\ln \cos x}{x}$ $\quad (0, \frac{\pi}{2})$
x-o*

J . l i m $\dfrac{\tan x - x}{x^2}$ $\quad (0, \frac{\pi}{2})$
x-o+

2 . จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก. lim $\dfrac{\text{Arc}\tan x}{x}$ $\quad (-\infty, \infty)$
x - o

ข. l i m $\dfrac{1}{x(\ln x)^2}$ $\quad (0,1)$
x - o

ค. lim $x^3 \ln x$ $\quad (0, \infty)$
e-O+

J. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$ $\quad (0, \infty)$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก. lim $\dfrac{\ln x}{x^2}$ $\quad (0, \infty)$
x - w

ข. lim $\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\quad (0, \infty)$
x - w

fl. lim $x \ln \sin x$ $\quad (0, \pi)$
x - o

J . l i m $\dfrac{x + \ln x}{x \ln x}$ $\quad (0, \infty)$
x - w

5.6 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

การประยุกต์ที่สำคัญอย่างหนึ่งของวิชาการวิเคราะห์จำนวนจริง คือ การประมาณค่าฟังก์ชัน โดยโพลีโนเมียล ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ ซึ่งเป็นทฤษฎีบทที่แสดงให้เห็นถึงการใช้โพลีโนเมียลในการประมาณค่าฟังก์ชัน

และก่อนจะกล่าวถึงทฤษฎีบทจะขอกล่าวถึงอนุพันธ์อันดับสูงเสียก่อน

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ จุด x ในช่วง I และถ้า $c \in I$ เราพิจารณาว่า ถ้าฟังก์ชัน f' หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c เรากล่าวว่า f มีอนุพันธ์อันดับสอง (second derivative) ที่จุด c และเขียนแทนค่าอนุพันธ์ว่า $f''(c)$ หรือ $f^{(2)}(c)$

ในทำนองเดียวกันเราสามารถนิยามอนุพันธ์อันดับที่สาม (third derivative) $f'''(c) = f^{(3)}(c)$..., และ อนุพันธ์อันดับที่ n (n^{th} derivative) $f^{(n)}(c)$ ได้ เมื่ออนุพันธ์หาค่าได้ในแต่ละกรณี

ทฤษฎีบท 5.21 กำหนด n เป็นจำนวนนับ $I = [a,b]$ และ $f:I \to R$ โดยที่ $f, f', f'', \ldots, f^{(n)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I และ $f^{(n+1)}$ หาค่าได้ทุกจุดในช่วง (a,b) ถ้า $x_0 \in I$ แล้ว สำหรับทุก ๆ $x \in I$ จะมี c ซึ่งอยู่ระหว่าง x และ x_0

โดยที่ $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!} + \ldots +$

$$+ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

พิสูจน์ กำหนด x_0, $x \in I$ และ J เป็นช่วงปิดซึ่งมีจุดปลายอยู่ที่ x_0 และ x

นิยามฟังก์ชัน F บน J โดยที่

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{(x-t)f'(t)}{1!} - \ldots - \frac{(x-t)^n f^{(n)}(t)}{n!} \quad \text{สำหรับ } t \in J$$

ดังนั้น จะได้ว่า $F'(t) = -\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!}$

และนิยามฟังก์ชัน G บน J โดยที่

$$G(t) = F(t) - \left(\frac{x-t}{x-x_0}\right)^{n+1} F(x_0) \quad \text{สำหรับ } t \in J$$

ดังนั้น $G(x_0) = G(x) = 0$ และโดยทฤษฎีบท 5.6 จะมี c ซึ่งอยู่ระหว่าง x และ x_0 โดยที่

$$0 = G'(c) = F'(c) + \frac{(n+1)(x-c)^n F(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}}$$

นั่นคือ $F(x_0) = -\dfrac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-c)^n} F'(c) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

เพราะฉะนั้น

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \frac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

#

หมายเหตุ ถ้าให้ $P_n(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \ldots + \dfrac{(x-x_0)^n f^{(n)}(x_0)}{n!}$

และ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ได้ว่า

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

5.6.1 การประยุกต์ของทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Applications of Taylor's Theorem)

จาก $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ทำให้ได้ว่าฟังก์ชัน $f(x)$ สามารถประมาณได้ด้วยโพลิโนเมียล $P_n(x)$ โดยมีค่าผิดพลาด (error) คือ $R_n(x)$ และค่าผิดพลาด $R_n(x)$ นั้นจะมากหรือน้อยขึ้นอยู่กับค่า n ดังจะได้แสดงให้เห็นในตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 5.19 จงใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ เมื่อ $n=2$ ประมาณค่า $\sqrt[3]{1+x}, x>-1$

วิธีทำ ให้ $f(x) = (1+x)^{1/3}$ $x_0 = 0$ และ $n = 2$

เพราะว่า $f'(x) = \dfrac{1}{3}(1+x)^{-2/3}$ และ $f''(X) = -\dfrac{2}{9}(1+x)^{-5/3}$ จะได้

$$f'(0) = \frac{1}{3} \quad \text{และ} \quad f''(O) = -\frac{2}{9}$$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ จะได้ $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$

ดังนั้น $f(x) = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + R_2(x)$

โดยที่ $R_2(x) = \frac{f'''(c)\,x^3}{3!} = \frac{5}{81}(1+c)^{-8/3}x^3$ **เมื่อ** c **เป็นจุดบางจุดระหว่าง** 0 **และ** x

ให้ $x = 0.3$ **จะได้** $P_2(0.3) = 1 + \frac{1}{3}(0.3) - \frac{1}{9}(0.3)^2 = 1.09$

นั่นคือ $\sqrt[3]{1.3}$ **มีค่าประมาณ** 1.09

และเนื่องจาก $c>0$ **จะได้** $(1+c)^{-8/3}<1$ **ซึ่งจะทำให้ได้ว่า**

$$R_2(0.3) = \frac{5}{81}(1+c)^{-8/3}x^3 < \frac{5}{81}\left(\frac{3}{10}\right)^3 = \frac{1}{600} < 0.17 \times 10^{-2}$$

เพราะฉะนั้น $|\sqrt[3]{1.3} - 1.09| < 0.5 \times 10^{-2}$ **ซึ่งทำให้ได้ว่า ค่าประมาณของ** $\sqrt[3]{1.3}$ **นี้มีความถูกต้องถึงทศนิยมตำแหน่งที่สอง**

#

ตัวอย่าง 5.20 จงหาค่าประมาณของ e โดยมีค่าผิดพลาดไม่เกิน 10^{-5}

วิธีทำ **ให้** $g(x) = e^x$ **เลือก** $x_0 = 0$

จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ จะได้

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

และ $R_n(x) = \frac{e^c}{(n+1)!}$ **เมื่อ** c **เป็นจุดบางจุดระหว่าง** 0 **และ** x

ให้ $x=1$ **จะได้** $P_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$

และ $R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!}$ **เมื่อ** c **เป็นจุดบางจุดระหว่าง** 0 **และ** 1

เพราะว่า $0<c<1$ **ดังนั้น** $e^c < 3$

นั่นคือจะต้องหาค่า n **ซึ่ง** $\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5}$

พิจารณาจากการคำนวณ พบว่า $9! = 362,880 > 3 \times 10'$

ดังนั้นจึงเลือก $n = 8$ และ จะได้

$$P_8(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{8!} = 2.71828$$

นั่นคือ e มีค่าประมาณ 2.17828 ซึ่งค่าประมาณนี้มีความผิดพลาดไม่เกิน 10^{-5}

#

ตัวอย่าง 5.21 จงแสดงว่า $1 - \frac{1}{2}x^2 < \cos x$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง x

วิธีทำ กำหนด $f(x) = \cos x$ และ $x_0 = 0$
จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + R_2(x)$$

โดยที่ $R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3 = \frac{\sin c}{6}x^3$ เมื่อ c เป็นจุดบางจุดระหว่าง 0 และ x

ถ้า $0 < x < \pi$ จะได้ $0 < c < \pi$ ดังนั้น $\sin c \geq 0$ และ $x^3 > 0$
นั่นคือ $R_2(x) \geq 0$

ถ้า $-\pi \leq x \leq 0$ จะได้ $-\pi \leq c \leq 0$ ดังนั้น $\sin c \leq 0$ และ $x^3 \leq 0$
นั่นคือ $R_2(x) \geq 0$

เพราะฉะนั้น $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ ทุก ๆ x ซึ่ง $|x| \leq \pi$

และถ้า $|x| > \pi$ แล้ว $1 - \frac{1}{2}x^2 < -3 \leq \cos x$

ดังนั้น $1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos x$ ทุก ๆ จำนวนจริง x

5.6.2 ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (Relative Extrema)

ดังได้กล่าวถึงในทฤษฎีบท 5.5 แล้วว่า ถ้า c เป็นจุดข้างในของช่วง I และ $f:I \to R$ โดยที่ f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c และถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด c แล้ว $f'(c) = 0$ นั่นคือเงื่อนไขที่จำเป็น (necessary condition) สำหรับการที่ f จะมีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c คือ $f'(c) = 0$ และวิธีหนึ่งที่จะพิจารณาได้ว่า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c หรือไม่ คือการทดสอบโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง (ทฤษฎีบท 5.11)

และในทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงการใช้อนุพันธ์อันดับสูงทดสอบจุดสุดขีดสัมพัทธ์

ทฤษฎีบท 5.22 กำหนด I เป็นช่วง x_0 เป็นจุดภายในช่วง I และ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq 2$ สมมุติ $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ หาค่าได้ และต่อเนื่องบนย่านจุด x_0 และ $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ แต่ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

ก) ถ้า n เป็นเลขคู่ และ $f^{(n)}(x_0) > 0$ แล้ว f มีค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

ข) ถ้า n เป็นเลขคู่ และ $f^{(n)}(x_0) < 0$ แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

ค) ถ้า n เป็นเลขคี่ แล้ว f ไม่มีค่าสูงสุดหรือต่ำสุดที่ x_0

พิสูจน์ โดยการใช้ทฤษฎีบท 5.21 ที่จุด x_0 จะพบว่า สำหรับ $x \in I$ จะได้

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{f^{(n)}(c)\,(x-x_0)^n}{n!}$$

เมื่อ c เป็นจุดบางจุดระหว่าง x และ x_0

เนื่องจาก $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ดังนั้น

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(c)\,(x-x_0)^n}{n!}$$

เนื่องจาก $f^{(n)}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ โดยทฤษฎีบท 4.10 จะมีช่วง J ซึ่ง $x_0 \in J$ และ $f^{(n)}(x)$ และ $f^{(n)}(x_0)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน สำหรับทุก ๆ $x \in J$

นั่นคือ ถ้า $x \in J$ จะได้ $c \in J$ ด้วย ซึ่งทำให้ได้ว่า $f^{(n)}(c)$ และ $f^{(n)}(x_0)$ มีเครื่องหมายเหมือนกัน

ก) ถ้า n เป็นเลขคู่ และ $f^{(n)}(x_0) > 0$

ดังนั้น สำหรับ $x \in J$ จะได้ $f^{(n)}(c) > 0$ และ $(x-x_0)^n \geq 0$

นั่นคือ $R_{n-1}(x) \geq 0$ เพราะฉะนั้น $f(x) \geq f(x_0)$ ทุก ๆ $x \in J$

และ x_0 จึงเป็นจุดต่ำสุดสัมพัทธ์

ข) ถ้า n เป็นเลขคู่ และ $f^{(n)}(x_0) < 0$

สำหรับ $x \in J$ จะได้ $f^{(n)}(c) < 0$ และ $(x-x_0)^n \geq 0$

นั่นคือ $R_{n-1}(x) \leq 0$ ดังนั้น จึงได้ $f(x) \leq f(x_0)$ ทุก ๆ $x \in J$

เพราะฉะนั้น x_0 เป็นจุดสูงสุดสัมพัทธ์

ค) ถ้า n เป็นเลขคี่ จะได้ว่า $(x-x_0)^n$ มีค่าบวกโดยแท้ เมื่อ $x > x_0$ และ $(x-x_0)^n$ มีค่าลบโดยแท้เมื่อ $x < x_0$

นั่นคือ $R_{n-1}(x)$ จะมีเครื่องหมายแตกต่างกันสำหรับ x ซึ่งอยู่ทางขวาหรือทางซ้ายของ x_0

เพราะฉะนั้น f จึงไม่มีค่าสูงสุดสัมพัทธ์ หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ x_0

#

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x > 0$ แล้ว $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$

   และ จงหาค่าประมาณของ $\sqrt{1.2}$ และ $\sqrt{2}$

2. จงใช้ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ โดย $n = 2$ เพื่อหาค่าประมาณของ $\sqrt{1.2}$ และ $\sqrt{2}$

3. จงพิจารณาว่า $x = 0$ เป็นจุดสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้หรือไม่

   ก. $f(x) = x^3 + 2$

   ข. $g(x) = \sin x - x$

   ค. $h(x) = \sin x + \frac{1}{6}x^3$

   ง. $k(x) = \cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2$