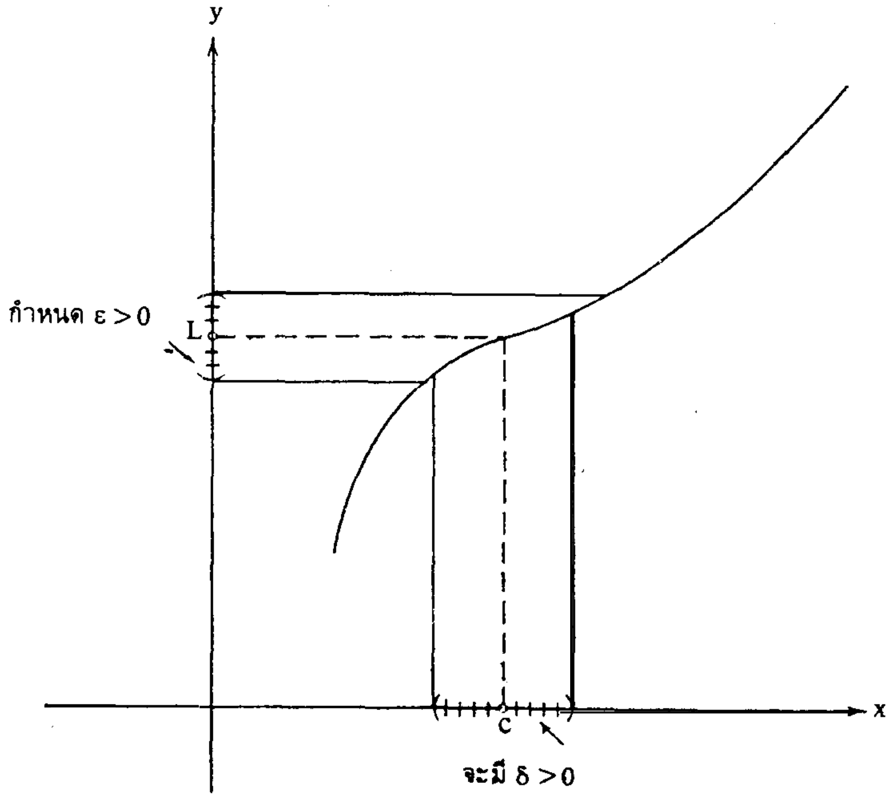
บทที่ 4
ลิมิต และความต่อเนื่อง
(Limits and Continuity)

4.1 ลิมิตของฟังก์ชัน (Limits of Functions)

4.1.1 นิยามทั่วไป

นิยาม 4.1 กำหนด $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{R}$, $f: \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ และ c เป็นจุดลิมิต (limit point) ของ **A** เรากล่าวว่าจำนวนจริง L จะเป็น ลิมิตของ f ที่จุด c (L is a limit of f at c) ถ้าสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สามารถหาจำนวนจริง $\delta > 0$ ได้ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ $0 < |x - c| < 6$ แล้วทำให้ $|f(x) - L| < \varepsilon$



รูป 4.1 L เป็นลิมิตของ f ที่จุด c

ถ้า L เป็นลิมิตของ f ที่จุด c บางครั้งเรากล่าวว่า f ลู่เข้าสู่ L ที่จุด c (f converges to L at c) และเขียนแทนด้วย

$$L = \lim_{x \to c} f \qquad \text{หรือ} \qquad L = \lim_{x \to c} f(x)$$

และถ้า f หาลิมิตไม่ได้ที่จุด c เรากล่าวว่า f ลู่ออกที่จุด c (f diverges at c)

ทฤษฎีบท 4.1 ถ้า $f : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A โดยที่ f หาค่าลิมิตได้ที่จุด c แล้ว ค่าลิมิตของ f ที่จุด c มีเพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ $L' = \lim_{x \to c} f(x)$ และ $L'' = \lim_{x \to c} f(x)$

กำหนด $\varepsilon > 0$

โดยนิยาม 4.1 ให้ $\delta_1 > 0$ โดยที่ ถ้า $x \in A$ และ $0 < |x-c| < \delta_1$ แล้ว

$$|f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

และ ให้ $\delta_2 > 0$ โดยที่ ถ้า $x \in A$ และ $0 < |x-c| < \delta_2$ แล้ว

$$|f(x) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}$$

เลือก $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

นั่นคือ ถ้า $x \in A$ และ $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - L'| < \frac{\varepsilon}{2}$

และ $|f(x) - L''| < \frac{\varepsilon}{2}$

เนื่องจาก c เป็นจุดลิมิตของ A ให้ $x \in A$ โดยที่ $0 < |x-c| < \delta$

ดังนั้น
$$\begin{aligned} |L'-L''| &= |L'-f(x) + f(x) - L''| \\ &\leq |L'-f(x)| + |f(x) - L''| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

เพราะว่า ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ จึงได้ว่า $|L'-L''| = 0$ นั่นคือ $L' = L''$

#

ตัวอย่าง 4.1 กำหนด $b \in R$ และ $f : R \to R$ นิยามโดย $f(x) = b$ ทุก ๆ $x \in R$ แล้ว
$\lim_{x \to c} f(x) = b$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = 1$

ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < |x-c| < 1$ แล้ว

$$|f(x) - b| = |b-b| = 0 < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \to c} f(x) = b$

#

ตัวอย่าง 4.2 ให้ $f : R \to R$ นิยามโดย $f(x) = x$ ทุก $x \in R$ และ ถ้า c เป็นจำนวนจริง ๆ ใดแล้ว $\lim_{x \to c} f(x) = c$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \varepsilon$

ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < |x-c| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - c| = |x-c| < \delta = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{x \to c} f(x) = c$

#

ตัวอย่าง 4.3 ให้ $f : R \to R$ นิยามโดย $f(x) = x^2$ แล้ว $\lim_{x \to c} f(x) = c^2$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{2|c|+1}\}$

ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < |x-c| < \delta \le 1$

เพราะว่า $|x| = |x-c+c| \le |x-c| + |c|$

เพราะฉะนั้น $|x| < 1 + |c|$ และ $|x+c| \le |x| + |c| < 1 + 2|c|$

และ
$$\begin{aligned} |f(x) - c^2| &= |x^2 - c^2| = |x-c||x+c| \\ &\le |x-c|(1+2|c|) < \delta(1+2|c|) \\ &< \frac{\varepsilon}{2|c|+1}(1+2|c|) = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim_{x \to c} f(x) = c^2$

#

ตัวอย่าง 4.4 $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$ ถ้า $c > 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < |x-c| < \frac{c}{2}$

แล้ว จะได้ว่า $\frac{c}{2} < x < \frac{3c}{2}$

เพราะฉะนั้น $0 < \frac{1}{cx} < \frac{2}{c^2}$

นั่นคือ $0 < \frac{1}{cx} < \frac{2}{c^2}$ ถ้า $0 < | x - c | < \frac{c}{2}$

เลือก $\delta = \min \{ \frac{c}{2} , \frac{c^2}{2} \varepsilon \}$

ให้ x เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < | x - c | < \delta$

ดังนั้น $| f(x) - \frac{1}{c} | = | \frac{1}{x} - \frac{1}{c} | = \frac{1}{cx} | x - c |$

$< \frac{2}{c^2} (\frac{c^2}{2} \varepsilon) = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$

#

ตัวอย่าง 4.5 $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$

พิสูจน์ ให้ $f : R \to R$ โดยที่ $f(x) = \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1}$ ทุก $x \in R$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \min \{ 1, \frac{2}{15} \varepsilon \}$

ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < | x-2 | < 6$

ดังนั้น $0 < | x - 2 | < 1$ นั่นคือ $1 < x < 3$

และ $5x^2 + 6x + 12 \le 5 (3^2) + 6 (3) + 12 = 75$

$5 (x^2 + 1) \ge 5 (1 + 1) = 10$

เพราะฉะนั้น $| f(x) - \frac{4}{5} | = \left| \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} - \frac{4}{5} \right|$

$= \frac{| 5x^2 + 6x + 12 | \, | x - 2 |}{5 (x^2 + 1)}$

$\le \frac{75}{10} | x - 2 | < \frac{15}{2} \cdot \frac{2}{15} \varepsilon = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$

#

4.1.2 เกณฑ์ของลิมิตในเชิงของลำดับ (Sequential Criterion for Limits)

ในหัวข้อต่อไปนี้จะกล่าวถึงลิมิตของฟังก์ชันในเทอมของลิมิตของลำดับ

ทฤษฎีบท 4.2 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A แล้ว $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ ลำดับ (x_n) โดยที่ $x_n \in A - \{c\}$ ทุกจำนวนนับ n ถ้า $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

พิสูจน์ สมมุติ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน A โดยที่ $x_n \neq c$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = c$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

ให้ δ เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\delta > 0$ และถ้า $0 < |x - c| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

เพราะว่า $\lim x_n = c$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ โดยที่ ถ้า n เป็นจำนวนนับที่ $n \geq n_0$ แล้ว $0 < |x_n - c| < \delta$

นั่นคือ $|f(x_n) - c| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

เพราะฉะนั้น $\lim f(x_n) = L$

ในทางกลับกัน กำหนดว่า ถ้า (x_n) เป็นลำดับ ใน A โดยที่ $x_n \neq c$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

สมมุติ $\lim\limits_{x - c} f(x) \neq L$ จะมีจำนวนจริง $E > 0$ ซึ่งถ้า δ เป็นจำนวนจริง

โดยที่ $\delta > 0$ แล้ว จะมี $x \in A$ ซึ่ง $0 < |x - c| < \delta$ และ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $\delta_n = \frac{1}{n}$

นั่นคือสำหรับแต่ละจำนวนนับ n จะมี $x_n \in A$ ซึ่ง $0 < |x_n - c| < \delta_n = \frac{1}{n}$ และ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$

กำหนด $\varepsilon' > 0$ โดยบทแทรก 1.22 ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < \varepsilon'$ นั่นคือ ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_0$ แล้ว

$$0 < |x_n - c| < \frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon'$$

เพราะฉะนั้น $\lim x_n = c$ และโดยข้อกำหนดให้ $\lim f(x_n) = L$
นั่นคือ จะมีจำนวนนับ n_1 ซึ่งถ้า $n \geq n_1$ แล้ว $|f(x_n) - L| < \varepsilon$
ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของ $f(x_n)$ เพราะว่า $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$
ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

#

4.1.3 เกณฑ์การลู่ออก (Divergence Criteria)

ทฤษฎีบท 4.3 กำหนด $A \subsetneq R$, $f : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

ก. ถ้า L เป็นจำนวนจริงแล้ว $\lim\limits_{x \to c} f(x) \neq L$ ก็ต่อเมื่อสามารถหาลำดับ (x_n) ใน A ได้ โดยที่ $x_n \neq c$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = c$ แต่ $\lim f(x_n) \neq L$

ข. ฟังก์ชัน f ไม่สามารถหาค่าลิมิตที่จุด c ได้ก็ต่อเมื่อมีลำดับ (x_n) ใน A โดยที่ $x_n \neq c$ ทุกจำนวนนับ n และลำดับ (x_n) ลู่เข้าสู่ค่า c แต่ลำดับ $(f(x_n))$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ ผลของทฤษฎีบท 4.2

#

ตัวอย่าง 4.6 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

พิสูจน์ ให้ $f : (0, \infty) \to R$ โดยที่ $f(x) = \frac{1}{x}$ ทุก ๆ $x \in (0, \infty)$

สำหรับแต่ละ n ให้ $x_n = \frac{1}{n}$ ดังนั้น $\lim x_n = 0$ โดยที่ $x_n \neq 0$
และ $x_n \in (0, \infty)$ ทุกจำนวนนับ n

$$\text{แต่} \quad f(x_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

และลำดับ $(f(x_n))$ เป็นลำดับลู่ออก

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.3 (ข) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

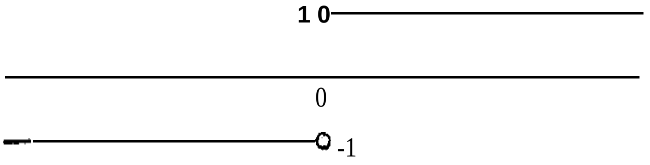
#

ตัวอย่าง 4.7 ให้ $\mathrm{sgn} : R \to R$ นิยามโดย

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{ถ้า } x \neq 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \end{cases}$$

แล้ว $\lim_{x \to 0}$ sgn (x) หาค่าไม่ได้

พิสูจน์



รูป 4.2 sgn (x)

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $x_n = (-1)^n \frac{1}{n}$

ดังนั้น $x_n \neq 0$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = 0$

แต่ $\operatorname{sgn}(x_n) = (-1)^n$ ทุกจำนวนนับ n

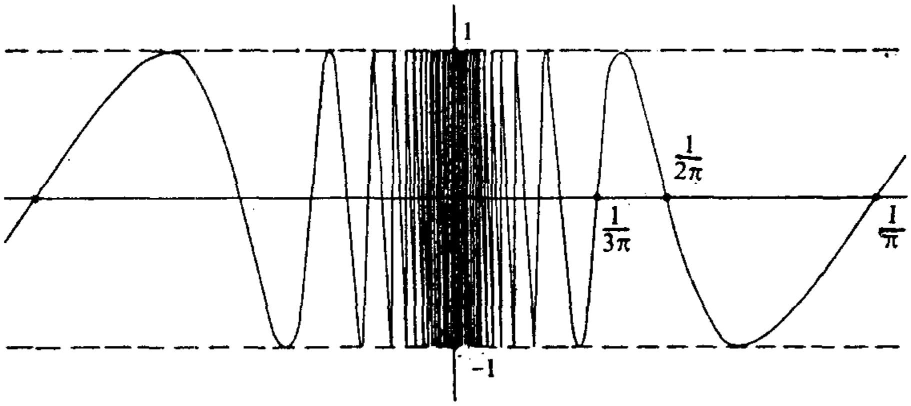
ดังนั้น ลำดับ $(\operatorname{sgn}(x_n))$ เป็นลำดับลู่ออก

เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบท 4.3 (ข) $\lim_{x \to 0}$ sgn (x) หาค่าไม่ได้

#

ตัวอย่าง 4.8 $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

พิสูจน์ สำหรับ $x \neq 0$ ให้ $g(x) = \sin \frac{1}{x}$



รูป 4.3 $g(x) = \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

เนื่องจาก $\sin t = 0$ ถ้า $t = k\pi$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

และ $\sin t = 1$ ถ้า $t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ โดยที่ k เป็นจำนวนเต็ม

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $x_n = \frac{1}{n\pi}$

และ $y_n = (\frac{\pi}{2} + 2n\pi)^{-1}$

ดังนั้น $\lim x_n = 0$ และ $\lim y_n = 0$

เพราะว่า $g(x_n) = \sin n\pi = 0$ ดังนั้น $\lim g(x_n) = 0$

และ $\lim g(y_n) = 1$ เนื่องจาก $g(y_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)$

ถ้า $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ หาค่าได้

โดยทฤษฎีบท 4.2 $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \lim g(x_n) = \lim g(y_n)$

แต่เนื่องจาก $\lim g(x_n) \neq \lim g(y_n)$

ดังนั้น $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

#

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงพิจารณาเงื่อนไขของ $|x-1|$ ที่จะทำให้

   ก. $|x^2-1| < \frac{1}{2}$

   ข. $|x^2-1| < \frac{1}{10^3}$

   ค. $|x^2-1| < \frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่กำหนด

   ง. $|x^3-1| < \frac{1}{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับที่กำหนด

2. กำหนด c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \subseteq R$ และ $f : A \to R$
   จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to c} |f(x) - L| = 0$

3. กำหนด $f: R \to R$ และ $c \in R$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to c} f(x+c) = L$

4. กำหนด $f : R \to R$, $I \subseteq R$ เป็นช่วงเปิด และ $c \in I$
   ถ้า f_1 เป็นฟังก์ชันกำกัดของ f บน I (f_1 is the restriction of f to I)
   จงพิสูจน์ว่า f_1 หาค่าลิมิตที่จุด c ได้ ก็ต่อเมื่อ f หาค่าลิมิตได้ที่จุด c
   และ $\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} f_1(x)$

5. กำหนด $f : R \to R$ และ $J \subseteq R$ เป็นช่วงปิด ให้ $c \in J$
   และ f_2 เป็นฟังก์ชันกำกัดของ f บน J
   จงพิสูจน์ว่า ถ้า f หาค่าลิมิตที่จุด c ได้แล้ว f_2 หาค่าลิมิตที่จุด c ได้
   และจงแสดงว่า ถ้า f_2 หาค่าลิมิตได้ที่จุด c แล้ว f หาค่าลิมิตที่จุด c ได้ไม่เป็นความจริง

6. กำหนด $I = (0,a)$, $a > 0$ และ $g(x) = x^2$ ทุก $x \in I$
   สำหรับ x,c ใด ๆ ใน I จงพิสูจน์ว่า $|g(x) - c^2| \le 2a|x-c|$
   และใช้อสมการนี้พิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} x^2 = c^2$ สำหรับ c ใด ๆ ใน I

7. ให้ $I \subseteq R$ เป็นช่วง $f: I \to R$ และ $c \in I$ สมมุติว่ามีจำนวนจริง K และ L
   โดยที่ $|f(x) - L| \le K|x-c|$ ทุก ๆ $x \in I$ แล้วจงพิสูจน์ว่า
   $\lim_{x \to c} f(x) = L$

8. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} x^3 = c^3$ ทุก $c \in R$

9. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to c} \sqrt{x} = \sqrt{c}$ ทุก ๆ $c \geq 0$

10. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 2} \frac{1}{1-x} = -1$ $(x > 1)$

ข. $\lim_{x \to 1} \frac{x}{1+x} = \frac{1}{2}$ $(x > 0)$

ค. $\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{|x|} = 0$ $(x \neq 0)$

ง. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-x+1}{x+1} = \frac{1}{2}$ $(x > 0)$

11. จงแสดงวาลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้หาค่าไม่ได้

ก. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$

ข. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x > 0)$

ค. $\lim_{x \to 0} (x + \mathrm{sgn}(x))$

ง. $\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

12. กำหนด $f : R \to R$ และ $\lim_{x \to 0} f(x) = L$ ให้ $a > 0$ และ $g : R \to R$ โดย $g(x) = f(ax)$ ทุก $x \in R$ จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 0} g(x) = L$

4.2 ทฤษฎีบทของลิมิต (Limit Theorems)

นิยาม 4.2 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A
เรากล่าวว่า f มีขอบเขตบริเวณย่านจุด c (f is bounded on a neighborhood of c)
ถ้ามี $\varepsilon > 0$ และค่าคงที่ $M > 0$ ซึ่ง $| f(x) | \leq M$ ทุก ๆ $x \in A \cap N_\varepsilon(c)$

ทฤษฎีบท 4.4 กำหนด $f : A \to R$ ถ้า f หาค่าลิมิตได้ที่จุด c แล้ว f จะมีขอบเขตบริเวณย่านจุด c บางย่าน

พิสูจน์ ให้ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ และกำหนด $\varepsilon = 1$
ดังนั้น จะมี $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $0 < | x - c | < \delta$ และ $x \in A$ แล้ว $| f(x) - L | < 1$

นั่นคือ $-1 < f(x) - L < 1$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x \in A \cap N_\delta(c)$ โดยที่ $x \neq c$ แล้ว

$| f(x) | \leq | L | + 1$

ถ้า $c \notin A$ ให้ $M = | L | + 1$
ถ้า $c \in A$ ให้ $M = \max\{ | f(c) |, | L | + 1 \}$

ดังนั้น ถ้า $x \in A \cap N_\delta(c)$ แล้ว $| f(x) | \leq M$

นั่นคือ f มีขอบเขตบริเวณย่านจุด c

#

นิยาม 4.3 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ และ $g : A \to R$
นิยามฟังก์ชันผลบวก (sum) $f + g$ ฟังก์ชันผลต่าง (difference) $f - g$
ฟังก์ชันผลคูณ (product) fg บนเซต A โดย

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

และ $$(fg)(x) = f(x)\, g(x) \quad \text{ทุก } x \in A$$

และถ้า b เป็นจำนวนจริง เรานิยามฟังก์ชันพหุคูณ (multiple) bf โดย

$$(bf)(x) = b(f(x)) \quad \text{ทุก ๆ } x \in A$$

นอกจากนั้น ถ้า $g(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in A$ แล้ว เรานิยามฟังก์ชันผลหาร (quotient) $\frac{f}{g}$ โดย

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{ทุก ๆ } x \in A$$

ทฤษฎีบท 4.5 กำหนด $A \subset R$ $f : A \to R$, $g : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของ A และ b เป็นจำนวนจริงใดๆ

ก. ถ้า $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$ แล้ว

$\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = L+M$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c} (f-g)(x) = L-M$

$\lim\limits_{x \to c} (fg)(x) = LM$ และ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to c} (bf)(x) = bL$

ข. ถ้า $h : A \to R$ โดยที่ $h(x) \neq 0$ ทุกๆ $x \in A$
และถ้า $\lim\limits_{x \to c} h(x) = H \neq 0$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{L}{H}$

พิสูจน์ ก. ให้ (x_n) เป็นลำดับใด ๆ ใน A โดยที่ $x_n \neq c$ และ $\lim x_n = c$ โดยทฤษฎีบท 4.2
$\lim f(x_n) = L$ และ $\lim g(x_n) = M$

และจากทฤษฎีบท 2.5 ได้ว่า

$\lim (f+g)(x_n) = \lim (f(x_n) + g(x_n)) = L + M$

$\lim (f-g)(x_n) = \lim (f(x_n) - g(x_n)) = L - M$

$\lim (fg)(x_n) = \lim f(x_n)\, g(x_n) = LM$

และ $\lim (bf)(x_n) = \lim b(f(x_n)) = bL$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} (f+g)(x) = L+M$

$\lim\limits_{x \to c} (f-g)(x) = L-M$

$\lim\limits_{x \to c} (fg)(x) = LM$

และ $\lim\limits_{x \to c} (bf)(x) = bL$

ข. ให้ (x_n) เป็นลำดับใน A โดยที่ $x_n \neq c$ และ $\lim x_n = c$
โดยทฤษฎีบท 4.2 $\lim f(x_n) = L$ และ $\lim h(x_n) = H$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 2.5 ได้ว่า $\lim \left(\frac{f}{h}\right)(x_n) = \lim \frac{f(x_n)}{h(x_n)} = \frac{L}{H}$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} \left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{L}{H}$ #

ตัวอย่าง 4.9 $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 4.2 $\lim\limits_{x \to c} x = c$

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 4.5 $\lim\limits_{x \to c} x^2 = c^2$ #

ตัวอย่าง 4.10 ถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{1}{c}$

พิสูจน์ ถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim_{x \to c} x = c > 0$

โดยทฤษฎีบท 4.5 $\lim_{x \to c} \frac{1}{x} = \frac{\lim_{x \to c} 1}{\lim_{x \to c} x} = \frac{1}{c}$

#

ตัวอย่าง 4.11 $\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) = 20$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 4.5

$$\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)(x^3 - 4) = \lim_{x \to 2} (x^2 + 1) \lim_{x \to 2} (x^3 - 4)$$

$$= 5 \times 4 = 20$$

ตัวอย่าง 4.12 $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim_{x \to 2} x^2 + 1 = 5 \neq 0$

โดยทฤษฎีบท 4.5 ได้ว่า

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x \to 2} (x^3 - 4)}{\lim_{x \to 2} (x^2 + 1)} = \frac{4}{5}$$

#

ตัวอย่าง 4.13 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \frac{4}{3}$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim_{x \to 2} 3x - 6 = 0$ จึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 4.5 ได้

แต่ถ้า $x \neq 2$ แล้ว $\frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \frac{x + 2}{3}$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{x + 2}{3} = \frac{1}{3} \lim_{x \to 2} x + 2 = \frac{4}{3}$$

ทฤษฎีบท 4.8 กำหนด $A \subseteq R$ $f : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของ A
ถ้า $a \le f(x) \le b$ ทุก ๆ $x \in A$, $x \neq c$ และถ้า $\lim_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้แล้ว

$$a \le \lim_{x \to c} f(x) \le b$$

พิสูจน์ ให้ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ และ (x_n) เป็นลำดับใด ๆ ใน A โดยที่ $x_n \neq c$
และ $\lim x_n = c$ โดยทฤษฎีบท 4.2 $\lim f(x_n) = L$

และเนื่องจาก $a \le f(x_n) \le b$ โดยทฤษฎีบท 2.8 ได้ว่า

$a \le \lim f(x_n) \le b$

นั่นคือ $a \le \lim_{x \to c} f(x) \le b$

#

ทฤษฎีบท 4.7 ให้ $A \subseteq R$ $f, g, h : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของ A
ถ้า $f(x) \le g(x) \le h(x)$ สำหรับทุก ๆ $x \in A$, $x \neq c$ และถ้า

$\lim_{x \to c} f(x) = L = \lim_{x \to c} h(x)$ แล้ว $\lim_{x \to c} g(x) = L$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.2 และทฤษฎีบท 2.9

ตัวอย่าง 4.14 $\lim_{x \to 0} x^{3/2} = 0 \quad (x > 0)$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x^{3/2}$ สำหรับทุก $x > 0$
เนื่องจาก $x < x^{1/2} \le 1$ สำหรับทุก ๆ x ถ้า $0 < x \le 1$

ดังนั้น $x^2 < x^{3/2} \le x$ ทุก ๆ $x \in (0,1]$

ให้ $f|_{(0,1]} : (0,1] \to R$ โดยที่

$f|_{(0,1]}(x) = x^{3/2}$ ทุก ๆ $x \in (0,1]$

และเนื่องจาก $\lim_{x \to 0} x^2 = 0 = \lim_{x \to 0} x$

โดยทฤษฎีบท 4.7 $\lim_{x \to 0} f|_{(0,1]}(x) = 0$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก δ เป็นจำนวนจริง โดยที่ ถ้า $0 < |x-0| < \delta$ แล้ว

$|f|_{(0,1]}(x) - 0| < \varepsilon$

ให้ 6' = min { 6, 1 }

ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ 0 $< |x - 0| < \delta'$

ดังนั้น $| f(x) - 0 | = | f|_{(0,1]} (x) - 0 | < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

#

ตัวอย่าง 4.15 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

พิสูจน์ ให้ $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$

เนื่องจาก $-1 \leq \sin z \leq 1$ ทุกจำนวนจริง z

ดังนั้น $|\sin \frac{1}{x} | \leq 1$ ถ้า $x \neq 0$

นั่นคือ $| x \sin \frac{1}{x} | \leq | x |$ ถ้า $x \neq 0$

เพราะฉะนั้น $-| x | \leq x \sin \frac{1}{x} \leq | x |$ ถ้า $x \neq 0$

เพราะว่า $\lim_{x \to 0} -| x | = 0 = \lim_{x \to 0} | x |$

โดยทฤษฎีบท 4.7 ได้ว่า $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

นิยาม 4 . 4 ให้ $A \subsetneq R$ และ $f : A \to R$

นิยาม $|f| : A \to R$ โดยที่ $| f | (x) = | f(x) |$ ทุก ๆ $x \in A$

ทฤษฎีบท 4.8 ให้ $A \subsetneq R$ $f : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้แล้ว $\lim_{x \to c} | f| (x)$ หาค่าได้ด้วย และ

$\lim_{x \to c} | f |(x) = | \lim_{x \to c} f(x) |$

พิสูจน์ ให้ $\lim_{x \to c} f(x) = L$

กำหนด $\varepsilon>0$ เลือก $\delta>0$ โดยที่ ถ้า $x\in A$ และ $0<|x-c| < \delta$ แล้ว

$|f(x)-L| < \varepsilon$

เนื่องจาก $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L|$ สำหรับทุก $x \in A$

จึงได้ว่า $||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$

ถ้า $x \in A$ และ $0 < |x-c| < \delta$

นั่นคือ $\lim_{x \to c} |f|(x) = |L|$

นิยาม 4.5 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ โดยที่ $f(x) \geq 0$ ทุก ๆ $x \in A$
นิยาม $\sqrt{f} : A \to R$ โดย $\sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)}$ ทุก $x \in A$

ทฤษฎีบท 4.9 ให้ $A \subseteq R$ และ $f : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x)$ หาค่าได้แล้ว $\lim_{x \to c} \sqrt{f}(x) = \sqrt{\lim_{x \to c} f(x)}$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยอาศัยทฤษฎีบท 2.11 #

ทฤษฎีบท 4.10 ให้ $A \subseteq R$ $f:A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

ถ้า $\lim_{x \to c} f(x) > 0$ แล้วจะมีจำนวนจริง $\delta>0$ โดยที่ $f(x)>0$ สำหรับทุก ๆ $x \in A \cap N^*_\delta(c)$

และในทำนองเดียวกัน ถ้า $\lim_{x \to c} f(x) < 0$ และจะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ โดยที่ $f(x) < 0$

สำหรับทุก ๆ $x \in A \cap N^*_\delta(c)$

พิสูจน์ ให้ $\lim_{x \to c} f(x) = L$ และ $L > 0$

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $\delta>0$ โดยที่ ถ้า $x \in A - \{c\}$ และ $0<|x-c|<\delta$ แล้ว

$|f(x) - L| < L$

นั่นคือ $0<f(x)<2L$

เพราะฉะนั้น $f(x) > 0$ ทุก ๆ $x \in A \cap N^*_\delta(c)$

และในกรณี $\lim_{x \to c} f(x) = L< 0$ พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 1} (x+1)(2x+3)$ $(x \in R)$

ข. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2}{x^2-2}$ $(x>0)$ $(x>0)$

A. $\lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x}\right)$ $(x>0)$

ง. $\lim_{x \to 0} \frac{|x+1|}{x^2+2}$ $(x \in R)$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{2x+1}{x+3}}$ $(x>0)$

ข. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ $(x>0)$

ค. $\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^2-1}{x}$ $(x>0)$

ง. $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ $(x>0)$

3. จงหาค่า $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+3x}}{x+2x^2}$ $(x>0)$

4. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to 0} \cos\frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้ แต่ $\lim_{x \to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$

4.3 ลิมิตข้างเดียว (One-Sided Limits)

นิยาม 4.6 ให้ $A \subseteq R$ และ $f : A \to R$

ก. ถ้า c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty)$ แล้ว เรากล่าวว่าจำนวนจริง L เป็นลิมิตข้างขวาของ f ที่จุด c (L is a right - hand limit of fat c) และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$

สามารถหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ $0 < x - c < \delta$ แล้ว $|f(x) - L| < \varepsilon$

ข. ถ้า c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (-\infty, c)$ แล้ว เรากล่าวจำนวนจริง L เป็นลิมิตข้างซ้ายของ f ที่จุด c (L is a left - hand limit off at c) และเขียนแทนด้วย $\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$

ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$

สามารถ หา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ $0 < c - x < \delta$ แล้ว $|f(X) - L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 4.11 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty)$ และ L เป็นจำนวนจริงแล้ว

$\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ ลำดับ (x_n) ใน A และ $x_n > c$

ทุกจำนวนนับ n ถ้า $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยง่ายจากนิยาม 2.3 และนิยาม 4.6 ว่า ถ้า $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

และ (x_n) เป็นลำดับ โดยที่ $x_n \in A \cap (c, \infty)$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

ในทางกลับกันกำหนดว่าสำหรับทุก ๆ ลำดับ (x_n) โดยที่ $x_n \in A \cap (c, \infty)$ ถ้า $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

สมมุติว่า $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) \neq L$ ดังนั้น

จะมี $\varepsilon > 0$

และ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n จะมี $x_n \in A \cap (c, \infty)$ โดยที่

$$0 < x_n - c < \frac{1}{n} \text{ และ } |f(x_n) - L| \geq \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } n$$

เพราะว่า (x_n) เป็นลำดับ โดยที่ $0 < x_n - c < \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n

จึงได้ว่า $\lim x_n = c$

แต่เพราะว่า $| f(x_n) - L | \geq \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\lim f(x_n) \neq L$ ซึ่งขัดแย้งกับกำหนดให้

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L$

#

ทฤษฎีบท 4.12 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (-\infty, C)$ และ L เป็นจำนวนจริงแล้ว

$\lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ ลำดับ (x_n) โดยที่ $x_n \in A \cap (-\infty, c)$

ถ้า $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยวิธีคล้ายกับการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 4.11 #

ทฤษฎีบท 4.13 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ c เป็นจุดลิมิตของเซต $A \cap (c, \infty)$ และ L เป็นจำนวนจริงแล้ว

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x - c} + f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

พิสูจน์ เห็นได้ง่ายว่า ถ้า $\lim\limits_{x - c} (f(x) = L$ แล้ว $\lim\limits_{x - c+} f(x) = L = \lim\limits_{x \to c^-} f(x)$

ในทางกลับกันสมมุติ $\lim\limits_{x - c^\cdot} f(x) = L = \lim\limits_{x - c'} f(x)$

กำหนด $\varepsilon > 0$

เนื่องจาก $\lim\limits_{x - c+} f(x) = L$ จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ

$0 < x - c < \delta_1$ แล้ว $| f(x) - L | < \varepsilon$

และเนื่องจาก $\lim\limits_{x \to c^-} If(x) = L$ จะมี $\delta_2 > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ

$0 < c - x < \delta_2$ แล้ว $| f(x) - L | < \varepsilon$

เลือก $\delta = \min \{ \delta_1, \delta_2 \}$

ดังนั้น ถ้า $x \in A$ โดยที่ $0 < | x - c | < \delta$ แล้ว $| f(x) - L | < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$

ตัวอย่าง 4.16 ให้ sgn :R- R นิยามโดย

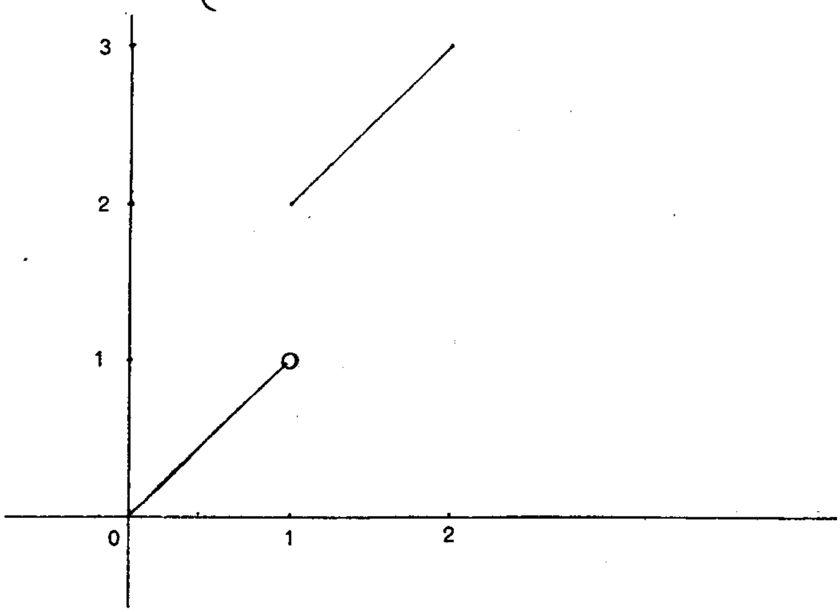
$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } x > 0 \\ 0 & \text{ถ้า } x = 0 \\ -1 & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$$

เนื่อ งจาก $\lim\limits_{x \to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$

โดยทฤษฎีบท 4.13 จึงได้ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{sgn}(x)$ หาค่าไม่ได้ #

ตัวอย่างที่ 4.17 ให้ $f : [0, 2] \to R$ นิยามโดย

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ x+1 & \text{ถ้า } 1 \le x \le 2 \end{cases}$$



รูป 4.4 $f(x) = \begin{cases} x & \text{ถ้า } 0 \le x < 1 \\ x+1 & \text{ถ้า } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

เนื่อ งจาก $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 2$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.13 $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้ #

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงยกตัวอย่างฟังก์ชันที่มีลิมิตข้างขวา แต่ไม่มีลิมิตข้างซ้ายที่จุดนั้น
2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ หรือ แสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้

n. $\lim\limits_{x-1^*} \frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

ข. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x}{x-1}$ $(x \neq 1)$

ค. $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{(x+2)}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$

ง. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ $(x>-1)$

3 . จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to 0^+} \lim\limits_{x+} \frac{x}{|x|} = 0$

4. กำหนด $f'(X) = \begin{cases} x+1 & \text{ถ้า } x \leq 2 \\ 2x-3 & \text{ถ้า } x > 2 \end{cases}$

จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = 1$ และ $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$

5 . กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{ถ้า } x \geq 0 \\ -x & \text{ถ้า } x < 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

6. กำหนด $f(x) = 2^{1/(x-1)}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{x--1^*} f(x)$ หาค่าไม่ได้

7. จงแสดงว่า $\lim\limits_{x \to 1^+} e^{\frac{-1}{x+1}} = 0$

4.4 ลิมิตอนันต์ (Infinite Limits)

นิยาม 4.7 ให้ $A \subseteq R$ $f: A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A

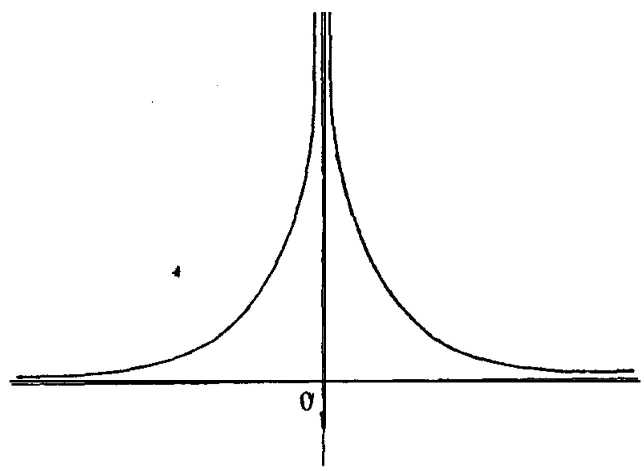
ก. เรากล่าวว่า f โน้มเข้าสู่ค่า ∞ ในขณะที่ x เข้าใกล้ c (f tends to ∞ as $x \to c$) และเขียน $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$

ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง α สามารถหา $\delta(\alpha) > 0$ ได้ ซึ่งถ้า $0 < |x - c| < \delta(\alpha)$ และ $x \in A$ แล้ว $f(x) > a$

ข. เรากล่าวว่า f โน้มเข้าสู่ค่า $-\infty$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ c (f tends to $-\infty$ as $x \to c$) และเขียน $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง β สามารถหา $\delta(\beta) > 0$ ได้ ซึ่งถ้า $0 < |x - c| < \delta(\beta)$ และ $x \in A$ แล้ว $f(x) < \beta$

ตัวอย่าง 4.18 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$



รูป 4.5 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$

พิสูจน์ ให้ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ถ้า $\alpha = 0$ แล้ว $\frac{1}{x^2} > \alpha$ เสมอ

สมมุติ $\alpha \neq 0$ เลือก $\delta(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|}}$

ดังนั้น ถ้า $0 < |x| < \delta(\alpha)$ แล้ว $|\alpha| < \frac{1}{x^2}$

นั่นคือ $\frac{1}{x^2} > |\alpha| \geq \alpha$

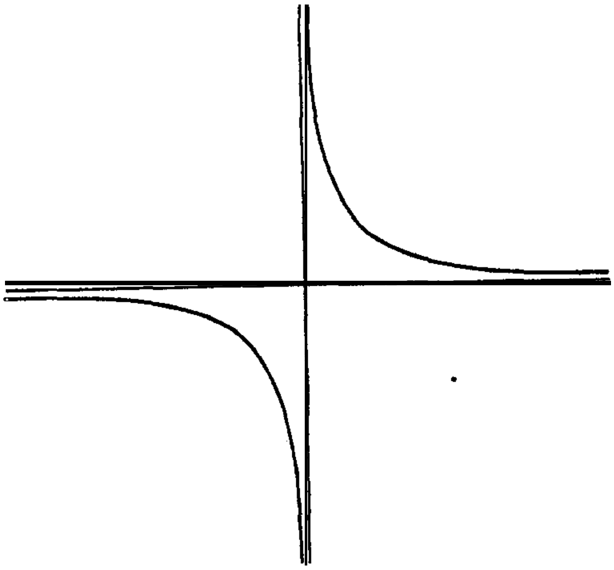
ตัวอย่าง 4.19 ให้ $g(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$ แล้ว g ไม่โน้มเข้าสู่ค่า ∞ หรือ $-\infty$ ในขณะที่ x เข้าใกล้ 0

พิสูจน์ ถ้า $\alpha > 0$ แล้ว $g(x) < \alpha$ ทุก ๆ $x < 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq \infty$

ในขณะเดียวกัน ถ้า $\beta < 0$ แล้ว $g(x) > \beta$ ทุก ๆ $x > 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to 0} g(x) \neq -\infty$



รูป 4.6 $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

ทฤษฎีบท 4.14 ให้ $A \subseteq R$ $f, g : A \to R$ และ c เป็นจุดลิมิตของ A ถ้า $f(x) \leq g(x)$ ทุก ๆ $x \in A$ และ $x \neq c$ แล้ว

ก. ถ้า $\lim\limits_{x - c} f(x) = w$ แล้ว $\lim\limits_{x - c} g(x) = \infty$

ข. ถ้า $\lim\limits_{x - c} g(x) = -\infty$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} f(x) = -\infty$

พิสูจน์ ก. กำหนด $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \infty$

ให้ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้นจะมี $\delta(\alpha) > 0$ ซึ่งถ้า $0 < |x-c| < \delta(\alpha)$ และ $x \in A$ แล้ว $f(x) > \alpha$

เนื่องจาก $f(x) \leq g(x)$ ทุก ๆ $x \in A$ และ $x \neq c$

ดังนั้น จะได้ว่า ถ้า $0 < |x-c| < \delta(\alpha)$ แล้ว $g(x) > \alpha$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \infty$

ข. พิสูจน์ได้ในทำนองเดียวกัน

#

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงพิสูจน์ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{|x|} = \infty$

2. จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to 0} \ln |x| = \infty$

3. ให้ $c \in R$ และ f เป็นฟังก์ชันนิยามสำหรับ $x \in (c, \infty)$ และ $f(x)>0$ ทุก ๆ $x \in (c, \infty)$

   จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to c} f = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{1}{f} = 0$

4. จงพิสูจน์

ก. $\lim_{x \to 2} \frac{x}{|x-2|} \quad = \quad \infty$

ข. $\lim_{x \to -1} \frac{-1}{(x+1)^2} \quad = \quad -\infty$

ค. $\lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \quad = \quad w$

ง. $\lim_{x \to -2} \frac{x-2}{x^3+4x^2+4x} \quad = \quad w$

5. จงพิสูจน์

n. $\lim_{x \to 0} |\cot x| \quad = \quad \infty$

ข. $\lim_{x \to 0} \frac{|\sin x|}{1-\cos x} \quad = \quad \infty$

6 . จงพิสูจน์

n. $\lim_{x \to 0^-} (-\frac{1}{x}) \quad = \quad w$

ข. $\lim_{x \to -1^+} (-\frac{1}{x+1}) \quad = \quad -\infty$

ค. $\lim_{x \to -3^+} \frac{x-2}{x^2+x-6} \quad = \quad w$

ง. $\lim_{x \to 1^+} 2^{\frac{1}{(x+1)}} \quad = \quad \infty$

7. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{x \to a} f(x) = w$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = w$

4.5 **ลิมิตที่อนันต์** (Limits at Infinity)

นิยาม 4.8 **ให้** $A \subseteq R$ **และ** $f: A \to R$

n. **สมมุติมีจำนวนจริง** a **ซึ่ง** $(a, \infty) \subseteq A$ **เรากล่าวว่าจำนวนจริง** L **เป็นลิมิตของ** f **ขณะที่** x **เข้าใกล้ค่าอนันต์** (L is a limit of f as $x \to \infty$) **และเขียน** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ **ใด ๆ สามารถหาจำนวนจริง** $K(\varepsilon) > a$ **ได้ ซึ่งถ้า** $x > K(\varepsilon)$ **แล้ว** $|f(x)-L| < \varepsilon$

ข. สมมุติมีจำนวนจริง b **ซึ่ง** $(-\infty, b) \subseteq A$ **เรากล่าวว่าจำนวนจริง** L **เป็นลิมิตของ** f **ขณะที่** x **เข้าใกล้ค่าลบอนันต์** (L is a limit of f as $x \to -\infty$) **และเขียน** $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

ถ้ากำหนด $\varepsilon > 0$ **ใด ๆ สามารถหาจำนวนจริง** $K(\varepsilon) < b$ **ได้ ซึ่งถ้า** $x < K(\varepsilon)$ **แล้ว** $|f(x)-L| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 4.15 **ให้** $A \subseteq R$ $f: A \to R$ **และสมมุติว่ามีจำนวนจริง** a **โดยที่** $(a, \infty) \subseteq A$ **แล้ว**

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ สำหรับทุก ๆ ลำดับ** (x_n) **ใน** $A \cap (a, \infty)$ **ถ้า** $\lim x_n = \infty$ **แล้ว** $\lim f(x_n) = L$

พิสูจน์ **ให้** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ **และ** (x_n) **เป็นลำดับใด ๆ ใน** $A \cap (a, \infty)$ **โดยที่** $\lim x_n = \infty$

กำหนด $\varepsilon > 0$ **เนื่องจาก** $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ **ให้** $K(\varepsilon)$ **เป็นจำนวนจริงโดยที่** $K(\varepsilon) > a$ **และถ้า** $x > K(\varepsilon)$ **แล้ว**

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

เพราะว่า $\lim x_n = \infty$ **ให้** n_0 **เป็นจำนวนนับ โดยที่ ถ้า** $n \geq n_0$ **แล้ว** $x_n > K(\varepsilon)$

นั่นคือ $|f(x_n) - L| < \varepsilon$ **ทุก** $n \geq n_0$

เพราะฉะนั้น $\lim f(x_n) = L$

ในทางกลับกันสมมุติว่าทุก ๆ ลำดับ (x_n) **ใน** $A \cap (a, \infty)$ **ถ้า** $\lim x_n = \infty$ **แล้ว** $\lim f(x_n) = L$

สมมุติ $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq L$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ ถ้า n เป็นจำนวนนับใด ๆ และ $n > a$ แล้ว จะมี $x \in A \cap (a, \infty)$ ซึ่ง $x > n$ และ $|f(x) - L| \geq \varepsilon$

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n_0 > a$

ดังนั้น จะมี $x_{n_0} \in A \cap (a, \infty)$ โดยที่ $x_{n_0} > n_0$ และ $|f(x_{n_0}) - L| \geq \varepsilon$

นั่นคือสำหรับแต่ละจำนวนเต็ม k, $n_0 + k > a$

ดังนั้น จะมี $x_{n_0+k} \in A \cap (a, \infty)$ โดยที่ $x_{n_0+k} > n_0 + k$ และ

$$|f(x_{n_0+k}) - L| \geq \varepsilon$$

ให้ $x_n = x_{n_0}$ ทุก ๆ $n \leq n_0$

จะแสดงว่า $\lim x_n = \infty$

ให้ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

โดยทฤษฎีบท 1.20 ให้ n_1 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $\alpha < n_1$

เลือก $n' = \max\{n_0, n_1\}$

ดังนั้น สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq n'$ แล้ว

$$x_n > n \geq n' > \alpha$$

นั่นคือ $\lim x_n = \infty$

แต่ $|f(x_n) - L| \geq \varepsilon$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ ซึ่งทำให้ $\lim f(x_n) \neq L$

แต่จากกำหนดให้ ถ้า $\lim x_n = \infty$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

ดังนั้น ที่สมมุติไว้ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) \neq L$ นั้นไม่จริง #

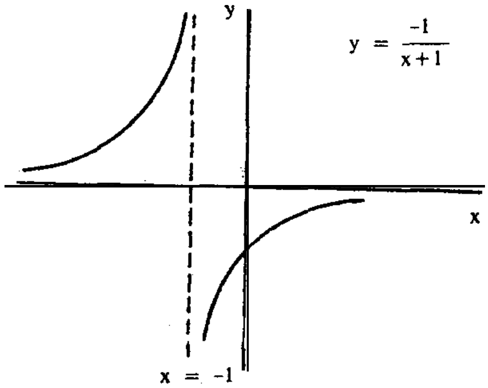
ทฤษฎีบท 4.16 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ และสมมุติว่ามีจำนวนจริง b ซึ่ง $(-\infty, b) \subseteq A$ แล้ว $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ ลำดับ (x_n) ใน $(-\infty, b) \cap A$ ถ้า $\lim x_n = -\infty$ แล้ว $\lim f(x_n) = L$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยวิธีคล้ายกับการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.15

#

ตัวอย่าง 4.20 จงพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x+1} = 0$ และ

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$



รูป 4.7 $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

พิสูจน์ พิจารณา f บนช่วง $(-1, \infty)$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $K(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$

ดังนั้น $K(\varepsilon) > -1$ และถ้า $x > K(\varepsilon)$ แล้ว

$|f(x) - 0| = \left|\frac{-1}{x+1} - 0\right| = \frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{-1}{x+1} = 0$

พิจารณา f บนช่วง $(-\infty, -1)$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $K(\varepsilon) = -\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)$

ดังนั้น $K(\varepsilon) < -1$ และถ้า $x < K(\varepsilon)$ แล้ว

จะได้ $x + 1 < -\frac{1}{\varepsilon}$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $-\frac{1}{x+1} < \varepsilon$

นั่นคือ $|f(x) - 0| = \left|-\frac{1}{x+1} - 0\right| = -\frac{1}{x+1} < \varepsilon$

เพราะฉะนั้น $\lim\limits_{x \to -\infty} -\frac{1}{x+1} = 0$

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงพิสูจน์

n. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} \quad = \quad 0$

ข. $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{x}{x-2} \quad = \quad I$

ค. $\lim\limits_{x - a l} e^{-x} \quad = \quad 0$

J. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2+x}{1-2x^2} \quad = \quad -\frac{1}{2}$

จ. $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-1/(x+1)} \quad = \quad 1$

ฉ. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sin x}{x} \quad = \quad 0$

2 . จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = L$ จะมี $a \in R$ ซึ่ง f มีขอบเขตบน $[a,\infty)$

4.6 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous Functions)

นิยาม 4.9 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ และ $c \in A$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องที่จุด c (f is continuous at c) ถ้ากำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สามารถหา $\delta > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ $|x-c| < \delta$ แล้ว

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

หมายเหตุ 1) จากนิยาม 4.9 ถ้า c เป็นจุดลิมิตของ A แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด c ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$

2) ถ้า $c \in A$ โดยที่ c ไม่ใช่จุดลิมิตของ A จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่ง $N_\delta(c) \cap A = \{c\}$

ดังนั้น ถ้ากำหนดจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สมาชิก $x \in A$ ที่สอดคล้องกับคุณสมบัติที่ว่า $|x-c| < \delta$ มีเพียงตัวเดียวเท่านั้นคือ $x = c$

นั่นคือ ข้อความ "ถ้า $x \in A$ และ $|x-c| < \delta$ แล้ว $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$" เป็นจริงเสมอ

เพราะฉะนั้น ถ้า $c \in A$ โดยที่ c ไม่ใช่จุดลิมิตของ A แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด c เสมอ

ดังนั้น การพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด c ใด ๆ ใน A จึงสนใจที่จะพิจารณาเฉพาะ c ที่เป็นจุดลิมิตของ A เท่านั้น

นิยาม 4.10 ให้ $A \subseteq R$ $f : A \to R$ ถ้า $B \subseteq A$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต B (f is continuous on B) ถ้า f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดใน B

ทฤษฎีบท 4.17 ให้ $A \subseteq R$ $f: A \to R$ และ $c \in A$ แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด c ก็ต่อเมื่อ ทุกๆ ลำดับ (x_n) ใน A ถ้า $\lim x_n = c$ แล้ว $\lim f(x_n) = f(c)$

พิสูจน์ สมมุติ f ต่อเนื่องที่จุด c

กรณีที่ 1 c ไม่เป็นจุดลิมิตของ A

เนื่องจาก $c \in A$ ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $\varepsilon' > 0$ โดยที่ $N_{\varepsilon'}(c) \cap A = \{c\}$

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน A โดยที่ $\lim x_n = c$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่งถ้า $n \ge n_0$ แล้ว $|x_n - c| < \varepsilon'$

เนื่องจาก $N_{\varepsilon'}(c) \cap A = \{c\}$ ดังนั้น $x_n = c$ ทุก ๆ $n \ge n_0$

เพราะฉะนั้น $f(x_n) = f(c)$ ทุก ๆ $n \ge n_0$ แล้วทำให้ได้ว่า $\lim f(x_n) = f(c)$

กรณีที่ 2 c เป็นจุดลิมิตของ A

ให้ (x_n) เป็นลำดับใน A โดยที่ $\lim x_n = c$

และ $S = \{k \in N \mid x_k \neq c\}$

ถ้า $S = \phi$ แล้ว $\lim f(x_n) = f(c)$

ถ้า S เป็นเซตอนันต์

เรียงลำดับสมาชิกใน S โดยที่ $k_1 = \min S$ และ $k_1 < k_2 < k_3 < \ldots < k_n < \ldots$

ดังนั้น (x_{k_n}) เป็นลำดับย่อยของ (x_n) โดยที่ $x_{k_n} \neq c$ ทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก $\lim x_n = c$ จะได้ $\lim x_{k_n} = c$ ด้วย

และเพราะว่า c เป็นจุดลิมิตของ A และ f ต่อเนื่องที่ c จะได้ว่า $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$ โดยทฤษฎีบท 4.2 $\lim f(x_{k_n}) = f(c)$

และเนื่องจาก $x_n = c$ ทุก ๆ $n \notin S$ ดังนั้น $\lim f(x_n) = f(c)$

ถ้า S เป็นเซตจำกัด และไม่ใช่เซตว่าง

ให้ $k^* = \max S$ ดังนั้น $x_n = c$ ทุก ๆ $n > k^*$

นั่นคือ $f(x_n) = f(c)$ ทุก ๆ $n > k^*$

ดังนั้น $\lim f(x_n) = f(c)$

ในทางกลับกันพิสูจน์ได้ง่ายจากหมายเหตุข้างต้น และการพิสูจน์ทฤษฎีบท 4.2

#

4.6.1 **เกณฑ์การไม่ต่อเนื่อง** (Discontinuity Criterion)

ทฤษฎีบท 4.18 ให้ $A \subseteq R$ $f: A \to R$ และ $c \in A$ *f ไม่ต่อเนื่องที่จุด* c (f is not continuous at c or f is discontinuous at c) ก็ต่อเมื่อสามารถหาลำดับ (x_n) ใน A ได้ โดยที่ $\lim x_n = c$ และ $\lim f(x_n) \neq f(c)$

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.17

#

ตัวอย่าง 4.21 ให้ b เป็นจำนวนจริง และ $f(x) = b$ ทุกจำนวนจริง x llh f ต่อเนื่องบน R

พิสูจน์ ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ c เป็นจุดลิมิตของ R และ $\lim\limits_{x \to c} f(x) = b = f(c)$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่จุด c นั่นคือ f ต่อเนื่องบน R

#

ตัวอย่าง 4.22 ให้ $g(x) = x$ ทุก $x \in R$ แล้ว g ต่อเนื่องบน R

พิสูจน์ ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว c เป็นจุดลิมิตของ R และ $\lim_{x \to c} g(x) = c = g(c)$

ดังนั้น g ต่อเนื่องที่จุด c นั่นคือ g ต่อเนื่องบน R

#

ตัวอย่าง 4.23 ให้ $h(x) = x^2$ ทุก $x \in R$ แล้ว h ต่อเนื่องบน R

พิสูจน์ ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว c เป็นจุดลิมิตของ R และ $\lim_{x \to c} h(x) = c^2 = h(c)$

ดังนั้น h ต่อเนื่องที่จุด c นั่นคือ h ต่อเนื่องบน R

#

ตัวอย่าง 4.24 ให้ $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$ และ $A = \{x \in R \mid x \neq 0\}$ แล้ว φ ต่อเนื่องบน A

พิสูจน์ ให้ $c \in A$ แล้ว c เป็นจุดลิมิตของ A

และ $\lim_{x \to c} \varphi(x) = \frac{1}{c} = \varphi(c)$

ดังนั้น φ ต่อเนื่องบน A

#

หมายเหตุ จากตัวอย่าง 4.24 ฟังก์ชัน φ ไม่นิยามที่จุด $x = 0$ นั่นคือ φ ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$

ตัวอย่าง 4.25 ให้ $\mathrm{sgn} : R \to R$ นิยาม โดย

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

จากตัวอย่าง 4.7 $\lim_{x \to 0} \mathrm{sgn}(x)$ หาค่าไม่ได้ นั่นคือ ฟังก์ชัน sgn(x) ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x = 0$ #

หมายเหตุ ก. ฟังก์ชัน $f : A \to R$ อาจไม่ต่อเนื่องที่จุด c เนื่องจาก f ไม่นิยามที่จุด c แต่ถ้า f มีลิมิต L ที่จุด c เรานิยามฟังก์ชันยืดขยาย (extension function) F ของ f

โดยให้ $F : A \cap \{c\} \to R$ โดย

$$f(x) = \begin{cases} L & \text{ถ้า } x = c \\ f(x) & \text{ถ้า } x \neq c \end{cases}$$

แล้วเราจะได้ว่า F ต่อเนื่องที่จุด c ในกรณีนี้เรียก F ว่าเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องยืดขยาย

ของ f ที่จุด $x=c$ (F is a continuous extension of f at $x=c$)

ข. ถ้าฟังก์ชัน $g : A \to R$ ไม่มีลิมิตที่ $x=c$ แล้วเราไม่สามารถนิยามฟังก์ชันต่อเนื่องยืดขยาย ของ g ที่จุด $x=c$ ได้

เนื่องจากถ้า C เป็นจำนวนจริงใด ๆ และนิยาม $G : A \cup \{c\} \to R$ โดย

$$G(x) = \begin{cases} C & \text{ถ้า } x=c \\ g(x) & \text{ถ้า } x \neq c \end{cases}$$

แล้ว G ไม่ต่อเนื่องที่จุด c เนื่องจากถ้า $\lim\limits_{x \to c} G(x)$ หาค่าได้ และ

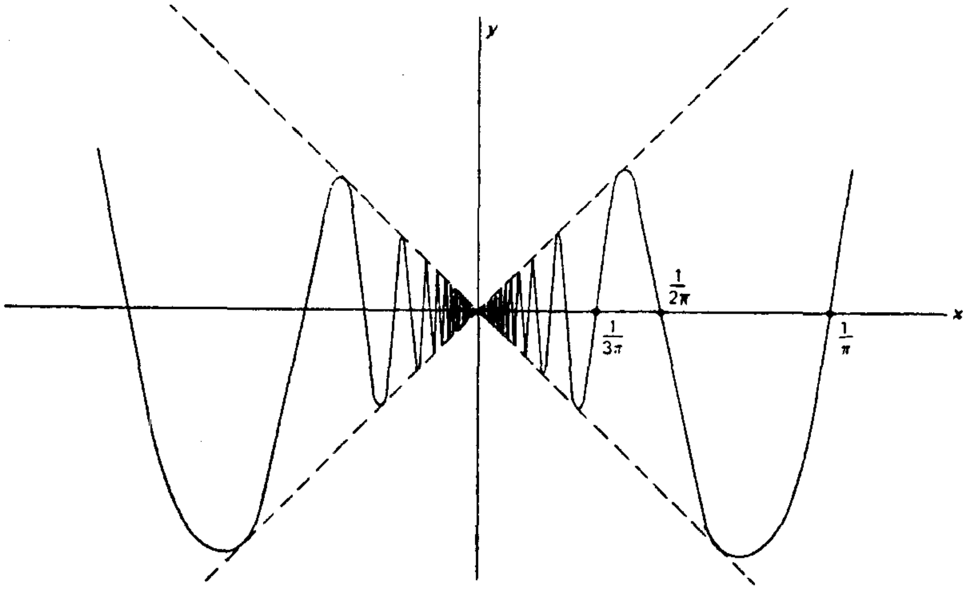
$C = \lim\limits_{x \to c} G(x)$ แล้ว $\lim\limits_{x \to c} g(x) = C$ ด้วย

ตัวอย่าง 4.26 ให้ $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$

จากตัวอย่าง 4.0 $\lim\limits_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ f ไม่มีฟังก์ชันต่อเนื่องยืดขยายที่จุด $x=0$

ตัวอย่าง 4.27 ให้ $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ สำหรับ $x \neq 0$



รูป 4.8 $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$

เนื่องจาก g ไม่นิยามที่จุด $x=0$ จึงได้ว่า g ไม่ต่อเนื่องที่จุด $x=0$

แต่จากตัวอย่างที่ 4.15 $\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

ดังนั้น ให้ $G: R \to R$ นิยาม โดย

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } x=0 \\ g(x) & \text{ถ้า } x \neq 0 \end{cases}$$

จะได้ว่า G เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องยืดขยายของ g ที่จุด $x=0$ #

ทฤษฎีบท 4.19 ให้ $A \subseteq R$ $f, g : A \to R$ $b \in R$ และ $c \in A$
ถ้า f, g ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว

ก. $f+g, f-g, fg$ และ bf ต่อเนื่องที่จุด c

ข. ถ้า $h : A \to R$ ต่อเนื่องที่จุด c และ $h(x) \neq 0$ ทุก $x \in A$ แล้ว $\frac{f}{h}$ ต่อเนื่องที่จุด c

พิสูจน์ ถ้า c ไม่ใช่จุดลิมิตของ A ทฤษฎีบทนี้เป็นจริงทันที

สมมุติ c เป็นจุดลิมิตของ A

เนื่องจาก f, g, h ต่อเนื่องที่ c ดังนั้น $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

$\lim_{x \to c} g(x) = g(c)$ และ $\lim_{x \to c} h(x) = h(c)$

และโดยทฤษฎีบท 4.5 ได้ว่า

$$\lim_{x \to c} (f+g)(x) = f(c)+g(c) = (f+g)(c)$$

$$\lim_{x \to c} (f-g)(x) = f(c)-g(c) = (f-g)(c)$$

$$\lim_{x \to c} (fg)(x) = f(c)\,g(c) = (fg)(c)$$

$$\lim_{x \to c} (bf)(x) = bf(c) = (bf)(c)$$

, และ $$\lim \frac{f}{h}(x) = \frac{f(c)}{h(c)} = \frac{f}{h}(c)$$

#

ทฤษฎีบท 4.20 ให้ $A \subseteq R$ $f, g : A \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต A ให้ b เป็นจำนวนจริง

ก. ฟังก์ชัน $f+g, f-g, fg$ และ bf ต่อเนื่องบนเซต A

ข. ถ้า $h : A \to R$ ต่อเนื่องบนเซต A และ $h(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in A$ แล้ว $\frac{f}{h}$ ต่อเนื่องบน A

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.19 #

ตัวอย่าง 4.28 ฟังก์ชัน sine ต่อเนื่องบนเซต R

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$$|\sin z| \le |z| \qquad |\cos z| \le 1$$

และ $$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนด $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$

ให้ x เป็นจำนวนจริงโดยที่ $|x-c| < \delta$

ดังนั้น $$|\sin x - \sin c| = \left|2\sin\frac{(x-c)}{2}\cos\frac{(x+c)}{2}\right|$$
$$\le 2\cdot\frac{|x-c|}{2}\cdot 1 = |x-c| < \delta = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to c} \sin x = \sin c$ เพราะฉะนั้น sine ต่อเนื่องบนเซต R

ตัวอย่าง 4.29 ฟังก์ชัน cosine ต่อเนื่องบนเซต R

พิสูจน์ สำหรับจำนวนจริง x, y, z ใด ๆ

$$|\sin z| \le |z| \qquad |\sin z| \le 1$$

และ $$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{(x+y)}{2}\sin\frac{(y-x)}{2}$$

ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ กำหนด $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = \varepsilon$ ให้ x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $|x-c| < \delta$

ดังนั้น $$|\cos x - \cos c| = \left|2\sin\frac{(x+c)}{2}\sin\frac{(c-x)}{2}\right|$$
$$\le 2\cdot 1\cdot\frac{|c-x|}{2} = |x-c| < \delta = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim\limits_{x\to c} \cos x = \cos c$ เพราะฉะนั้น cosine ต่อเนื่องบน R

ตัวอย่าง 4.30 ให้ $A = \{x \in R \mid x \ne n\pi + \frac{\pi}{2}$ โดยที่ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

แล้วฟังก์ชัน tangent ต่อเนื่องบนเซต A

เนื่องจาก $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

และ $\cos x \neq 0$ ทุก ๆ $x \in A$

โดยทฤษฎีบท 4.20 tangent ต่อเนื่องบนเซต A

#

ทฤษฎีบท 4.21 ให้ $A \subseteq R$ $f : A\text{-}R$

n. ถ้า $c \in A$ และ f ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว $|f|$ ต่อเนื่องที่จุด c

ข. ถ้า f ต่อเนื่องบนเซต A แล้ว $|f|$ ต่อเนื่องบนเซต A

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.0 #

ทฤษฎีบท 432 ให้ $A \subseteq R$ $f : A\text{-}R$ และ $f(x) \geq 0$ ทุก ๆ $x \in A$

n. ถ้า $c \in A$ และ f ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว $\sqrt{f}$ ต่อเนื่องที่จุด c

ข. ถ้า f ต่อเนื่องบนเซต A แล้ว $\sqrt{f}$ ต่อเนื่องบนเซต A

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.9 #

นิยาม 4.11 ให้ $A \subseteq R$ $f, g : A\text{-}R$ นิยามฟังก์ชัน

$\sup(f,g) : A\text{-}R$ และ $\inf(f, g) : A\text{-}R$ โดย

$$\sup(f, g)(x) = \sup\{f(x), g(x)\}$$

$$\inf(f, g)(x) = \inf\{f(x), g(x)\}$$

ทฤษฎีบท 4.22 ให้ $A \subseteq R$ $f, g : A\text{-}R$

แล้ว $$\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$$

และ $$\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$$

พิสูจน์ ให้ $x \in A$ ถ้า $f(x) \leq g(x)$

แล้ว $$\sup(f, g)(x) = g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

$$\inf(f, g)(x) = f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) - \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

ถ้า $g(x) \leq f(x)$

แล้ว $$\sup(f, g)(x) = f(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) + \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

$$\inf(f, g)(x) = g(x) = \frac{1}{2}(f(x)+g(x)) - \frac{1}{2}|f(x)-g(x)|$$

นั่นคือ $\sup(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$

และ $\inf(f, g) = \frac{1}{2}(f+g) - \frac{1}{2}|f-g|$ #

ทฤษฎีบท 4.24 ให้ $A \subseteq R$ $f,g:A \to R$

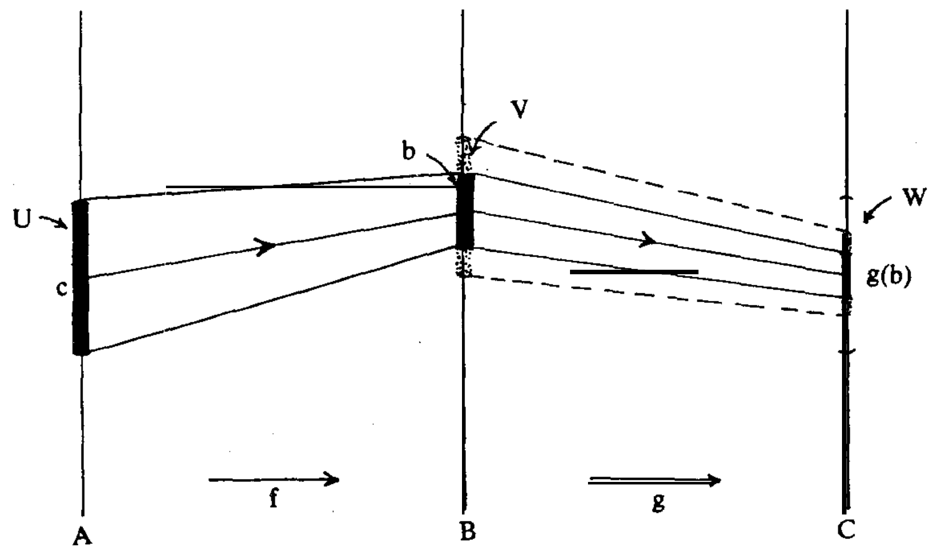
ก. ถ้า $c \in A$ และ f, g ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว sup(f, g) และ inf(f, g) ต่อเนื่องที่จุด c

ข. ถ้า f และ g ต่อเนื่องบนเซต A แล้ว sup(f, g) และ inf(f, g) ต่อเนื่องบนเซต A

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.23 ทฤษฎีบท 4.19 และทฤษฎีบท 4.20 #

4.6.2 ฟังก์ชันต่อเนื่องประกอบ (Composition of Continuous Functions)

ต่อไปนี้จะพิสูจน์ว่า ถ้า $f:A \to R$ ต่อเนื่องที่จุด c และ $g:B \to R$ โดยที่ $f(A) \subseteq B$ และ g ต่อเนื่องที่ f(c) แล้วฟังก์ชันประกอบ $g \circ f$ ต่อเนื่องที่จุด c



รูปที่ 4.9 ฟังก์ชันประกอบของ f และ g

ทฤษฎีบท 4.25 ให้ $A \subseteq R$ และ $f:A \to R$ กำหนด $f(A) \subseteq B$ และ $g:B \to R$

ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด c ใน A และ g ต่อเนื่องที่จุด f(c) แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $g \circ f:A \to R$ ต่อเนื่องที่จุด c

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon>0$

เนื่องจาก g ต่อเนื่องที่ f(c) ให้ δ_1 เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่

ถ้า $y\in B$ และ $|y-f(c)|<\delta_1$ แล้ว $|g(y)-g(f(c))|<\varepsilon$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่ c จะมีจำนวนจริง $\delta_2>0$ ซึ่งถ้า

$x\in A$ และ $|x-c|<\delta_2$ แล้ว $|f(x)-f(c)|<\delta_1$

เนื่องจาก $f(A)\subseteq B$ ดังนั้น จะได้ว่า ถ้า $x\in A$ และ $|x-c|<\delta_2$ แล้ว

$|g(f(x))-g(f(c))|<\varepsilon$

นั่นคือ $g\circ f$ ต่อเนื่องที่จุด f(c)

#

ทฤษฎีบท 4.26 ให้ $A,B\subseteq R$ $f:A\to R$ โดยที่ f ต่อเนื่องบนเซต A และให้ $g:B\to R$ โดยที่ g ต่อเนื่องบนเซต B

ถ้า $f(A)\subseteq B$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $g\circ f:A\to R$ ต่อเนื่องบนเซต A

พิสูจน์ ผลจากทฤษฎีบท 4.25

#

ตัวอย่าง 4.31 ฟังก์ชัน $\sin\frac{1}{x}$ ต่อเนื่องบนเซต $R-\{0\}$

พิสูจน์ ให้ $f:R-\{0\}\to R$ โดยที่ $f(x) = \frac{1}{x}$

และ $g:R\to R$ โดยที่ $g(x) = \sin x$

ดังนั้น $g\circ f:R-\{0\}$ และ $g\circ f(x) = \sin\frac{1}{x}$

จากตัวอย่าง 4.24 f ต่อเนื่องบน $R-\{0\}$ และจากตัวอย่าง 4.28 g ต่อเนื่องบน R

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.26 $g\circ f(x) = \sin\frac{1}{x}$ ต่อเนื่องบน $R-\{0\}$ #

แบบฝึกหัด 4.6

1. กำหนด $a<b<c$ สมมุติ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ g เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[b,c]$ และ $f(b) = g(b)$ นิยาม h บน $[a,c]$ โดย

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ถ้า } x \in [a,b] \\ g(x) & \text{ถ้า } x \in [b,c] \end{cases}$$

จงพิสูจน์ว่า h ต่อเนื่องบน $[a,c]$

2. กำหนด $A \subsetneq R$ และ $f : A \to R$ ต่อเนื่องที่จุด $c \in A$ จงพิสูจน์ว่าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon>0$ จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $x,y \in A \cap N_\delta(c)$ แล้ว $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$

3. กำหนด $f:R \to R$ ต่อเนื่องที่จุด c และ $f(c)>0$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $\delta>0$ ซึ่งถ้า $x \in N_\delta(c)$ แล้ว $f(x)>0$

4. กำหนด $f:R \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R และ $S = \{x \in R | f(x) = 0\}$ จงพิสูจน์ว่า S เป็นเซตปิดใน R (แนะนำ ใช้ทฤษฎีบท 2.17)

5. กำหนด $A \subsetneq B \subsetneq R$ และ $f : B \to R$ ให้ g เป็นฟังก์ชัน กำกัดของ f บน A (กล่าวคือ $g(x) = f(x)$ ทุก ๆ $x \in A$)

   ก. ถ้า f ต่อเนื่องที่จุด $c \in A$ แล้ว g ต่อเนื่องที่จุด c

   ข. จงแสดง (โดยการยกตัวอย่าง) ว่า ถ้า g ต่อเนื่องที่จุด c แล้ว ไม่จำเป็นที่ f ต่อเนื่องที่จุด c

6. จงแสดงว่า $f(x) = |x|$ ต่อเนื่องบน R

7. กำหนด $K>0$ และ $f : R \to R$ โดยที่ $|f(x)-f(y)| \leq K|x-y|$ ทุก ๆ $x,y \in R$ จงแสดงว่า f ต่อเนื่องบน R

8. สมมุติ $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน R และ $f(r) = 0$ ทุก ๆ จำนวนตรรยะ r จงพิสูจน์ว่า $f(x) = 0$ ทุก ๆ $x \in R$

9. จงพิจารณาการต่อเนื่องของฟังก์ชันต่อไปนี้

   ก. $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ $(x \in R)$

   ข. $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ $(x>0)$

   ค. $h(x) = \dfrac{\sqrt{1+|\sin x|}}{x}$ $(x \neq 0)$

   ง. $k(x) = \cos\sqrt{1+x^2}$ $(x \in R)$

4.7 ฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (Continuous Functions on Intervals)

ในหัวข้อนี้จะศึกษาถึงฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่มีขอบเขต ซึ่งจะให้คุณสมบัติที่สำคัญมากมาย

นิยาม 4.12 เรากล่าวว่าฟังก์ชัน $f:A\to R$ มีขอบเขตบนเซต A (f is bounded on A) ถ้ามีจำนวนจริง $M>0$ ซึ่ง $|f(x)|\leq M$ ทุก ๆ $x\in A$

จากนิยาม 4.12 อาจกล่าวได้เป็นอย่างอื่นว่า f มีขอบเขตบนเซต A ถ้าพิสัย (range) ของ f เป็นเซตที่มีขอบเขต

ฟังก์ชันต่อเนื่อง f อาจจะไม่เป็นฟังก์ชันมีขอบเขตบนโดเมน f

ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.92 ให้ $f(x) = \frac{1}{x}$ $x\neq 0$

ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนเซต $R-\{0\}$

แต่ $\{\frac{1}{x} \mid x\neq 0\}$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

เนื่องจากถ้า M เป็นจำนวนจริงบวก ที่ทำให้ $|\frac{1}{x}|\leq M$ ทุก $x\in R-\{0\}$ แล้ว

จะได้ว่า $0<\frac{1}{M}\leq |x|$ ทุก ๆ จำนวนจริง $x\neq 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

#

ทฤษฎีบทต่อไปนี้จะกล่าวถึงเงื่อนไขของเซตที่จะทำให้ฟังก์ชันต่อเนื่อง f เป็นฟังก์ชันที่มีขอบเขตบนเซตนั้น

ทฤษฎีบท 4.27 ทฤษฎีบทของการมีขอบเขต (Boundness Theorem)
ให้ $I = [a,b]$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต และ $f: I\to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต I แล้ว f มีขอบเขตบนเซต I

พิสูจน์ สมมุติ f ไม่มีขอบเขตบนเซต I

นั่นคือ สำหรับทุกจำนวนนับ n จะมี $x_n \in I$ ซึ่ง $|f(x_n)| > n$

เนื่องจาก I เป็นเซตที่มีขอบเขต ลำดับ (x_n) ซึ่งเป็นลำดับที่มีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.16 ให้ $X' = (x_{r_k})$ เป็นลำดับย่อยของ (x_n) ที่เป็นลำดับลู่เข้า และให้ $\lim x_{r_k} = x$

เนื่องจาก I เป็นเซตปิด โดยทฤษฎีบท 2.17 $x \in I$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ x ซึ่งทำให้ได้ว่า $\lim f(x_{r_k}) = f(x)$

โดยทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ $(f(x_{r_k}))$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่เป็นไปไม่ได้เนื่องจาก $|f(x_{r_k})| > r_k \geq k$ ทุกจำนวนนับ k

นั่นคือ f ต้องมีขอบเขตบนเซต I #

หมายเหตุ จากการพิสูจน์ ทฤษฎีบท 4.27 จะพบว่า ถ้าให้ I เป็นเซตปิดและมีขอบเขตใด ๆ โดยที่ไม่จำเป็นต้องเป็นช่วงแล้ว ทฤษฎีบท 4.27 ยังคงเป็นจริง

นิยาม 4.19 ให้ $A \subsetneq R$ และ $f: A \to R$

เรากล่าวว่า f **มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บน** A (f has an absolute maximum on A) **ถ้ามี** $x^* \in A$ **ซึ่ง** $f(x^*) \geq f(x)$ **ทุก** $x \in A$

f **มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (f has an absolute minimum on A) **ถ้ามี** $x_* \in A$ **ซึ่ง** $f(x_*) \leq f(x)$ **ทุก** $x \in A$

และ กล่าวว่า x^* เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์สำหรับ f **บน** A (x^* is an absolute maximum point for f on A)

x_* เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์สำหรับ f **บน** A (x_* is an absolute minimum point for f on A)

หมายเหตุ 1. ฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต A ไม่จำเป็นต้องมีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน A

เช่น $f(x) = \frac{1}{x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเซต $\{x \in R \mid x > 0\} = A$

แต่ f หาค่าสูงสุดสัมบูรณ์ไม่ได้ เนื่องจาก f ไม่มีขอบเขตข้างบนบนเซต A (f is not bounded above on A)

และเนื่องจาก $0 = \inf \{f(x) \mid x \in A\}$ แต่ $f(x) \neq 0$ ทุก $x \in A$

ดังนั้น f จึงไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน A ด้วย

2. ฟังก์ชันใดที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ หรือต่ำสุดสัมบูรณ์แล้วอาจมีจุดสูงสุดสัมบูรณ์หรือจุดต่ำสุดสัมบูรณ์หลายจุด

เช่น $g(x) = x^2$ นิยามบนเซต $A = [-1, 1]$ มีจุดสูงสุดสัมบูรณ์สองจุดคือ $x = \pm 1$

3. ฟังก์ชันที่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนเซตใดแล้ว อาจไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซตนั้น ในขณะเดียวกัน ฟังก์ชันที่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซตใดแล้ว อาจไม่มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์บนเซตนั้น

เช่น พิจารณา $f(x) = \frac{1}{x}$ บน $\{ x \in R \mid x \geq 1 \}$

จะเห็นว่า $\frac{1}{x} \leq 1 = f(1)$ ทุก $x \in \{ x \in R \mid x \geq 1 \}$

ดังนั้น 1 เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์สำหรับ f บน $\{ x \in R \mid x \geq 1 \}$
แต่ในขณะเดียวกัน f ไม่มีค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บนเซตนี้

ทฤษฎีบท 4.28 ทฤษฎีบทค่าสูงสุด - ค่าต่ำสุด (Maximum - Minimum Theorem)
ให้ $I = [a,b]$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต และ $f: I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I
แล้ว f มีค่าสูงสุดสัมบูรณ์ และค่าต่ำสุดสัมบูรณ์บน I

พิสูจน์ ให้ $f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$
จากทฤษฎีบท 4.27 $f(I)$ เป็นเซตที่มีขอบเขต

ให้ $s^* = \sup f(I)$ และ $s_* = \inf f(I)$
จะแสดงว่า หา x^* และ x_* ใน I ได้ซึ่ง $f(x^*) = s^*$ และ $f(x_*) = s_*$

เนื่องจาก $s^* = \sup f(I)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนนับ n
$s^* - \frac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ $f(I)$

นั่นคือสำหรับแต่ละจำนวนนับ n จะมี $x_n \in I$ ซึ่ง
$s^* - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq s^*$

เนื่องจาก I เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้น ลำดับ (x_n) จึงเป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 2.16 จะมีลำดับย่อย $X' = (x_{r_k})$ ของ (x_n) ซึ่งเป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $x^* = \lim x_{r_k}$
เนื่องจาก I เป็นเซตปิด โดยทฤษฎีบท 2.17 $x^* \in I$
ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ x^* และได้ว่า $\lim f(x_{r_k}) = f(x^*)$

และเนื่องจาก $s^* - \frac{1}{r_k} < f(x_{r_k}) \le s^*$ ทุกจำนวนนับ k

โดยทฤษฎีบท 2.9 ได้ว่า $\lim f(x_{r_k}) = s^*$

นั่นคือ $f(x^*) = s^* = \sup f(I)$

เพราะฉะนั้น x^* เป็นจุดสูงสุดสัมบูรณ์ของ f บน I

เนื่องจาก $s_* = \inf f(I)$ ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนนับ n $s_* + \frac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตล่างของเซต f(I)

นั่นคือสำหรับแต่ละจำนวนนับ n จะมี $y_n \in I$ ซึ่ง $s_* \le f(y_n) < s_* + \frac{1}{n}$

เนื่องจาก I เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้น ลำดับ (y_n) จึงเป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 2.16 จะมีลำดับย่อย $y' = (y_{r_k})$ ของ (y_n) ซึ่งลำดับลู่เข้า

ให้ $x_* = \lim y_{r_k}$

เนื่องจาก I เป็นเซตปิด โดยทฤษฎีบท 2.17 $x_* \in I$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ x_* นั่นคือ $\lim f(y_{r_k}) = f(x_*)$

และเพราะว่า $s_* \le f(y_{r_k}) < s_* + \frac{1}{r_k}$ ทุกจำนวนนับ k

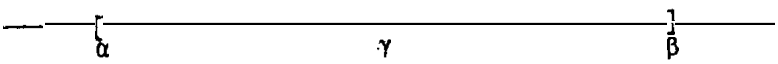
โดยทฤษฎีบท 2.9 ได้ว่า $\lim f(y_{r_k}) = s_*$

นั่นคือ $f(x_*) = s_*$ เพราะฉะนั้น x_* เป็นจุดต่ำสุดสัมบูรณ์ของ f บน I #

ทฤษฎีบท 4.29 ให้ I เป็นช่วงใด ๆ และ $f: I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ถ้า $\alpha, \beta \in I$ โดยที่ $\alpha < \beta$ และ $f(\alpha) < 0 < f(\beta)$ (หรือ $f(\beta) < 0 < f(\alpha)$) แล้วจะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = 0$

พิสูจน์ ให้ $I_1 = [\alpha, \beta]$ และ $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$

สมมุติ $f(a) < 0 < f(\beta)$



รูป 4.10 $I_1 = [a, \beta]$

ถ้า $f(\gamma) = 0$ ให้ $c = \gamma$

ถ้า $f(Y) > 0$ ให้ $\alpha_2 = \alpha$ $\beta_2 = \gamma$

ถ้า $f(\gamma) < 0$ ให้ $\alpha_2 = \gamma$ $\beta_2 = 9$

และให้ $I_2 = [\alpha_2, \beta_2]$

ดังนั้น $f(\alpha_2) < 0 < f(\beta_2)$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ k ให้ $\gamma_k = \frac{1}{2}(\alpha_k + \beta_k)$

ถ้า $f(\gamma_k) = 0$ เลือก $c = \gamma_k$

ถ้า $f(\gamma_k) > 0$ ให้ $\alpha_{k+1} = a.$ $\beta_{k+1} = \gamma_k$

ถ้า $f(\gamma_k) < 0$ ให้ $\alpha_{k+1} = \gamma_k$ $\beta_{k+1} = \beta_k$

และให้ $I_{k+1} = [\alpha_{k+1}, \beta_{k+1}]$

ดังนั้น $f(\alpha_{k+1}) < 0 < f(\beta_{k+1})$

ถ้ามีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $f(\gamma_{n_0}) = 0$ เลือก $c = \gamma_{n_0}$

ถ้าทุกจำนวนนับ n $f(\gamma_n) \neq 0$

จะได้ช่วง $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq \ldots$

โดยที่ $I_n = [\alpha_n, \beta_n]$ และ $\beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\inf \{ \beta_n - \alpha_n \mid n \in N \} = 0$

โดยทฤษฎีบท 1.25 จะมี $c \in R$ ซึ่ง $\bigcap_{n \in N} I_n = \{c\}$

นั่นคือ $\alpha_n \leq c \leq \beta_n$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้น $0 \leq c - \alpha_n \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

และ $\beta_n - c \leq \beta_n - \alpha_n = \frac{\beta - \alpha}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะว่า $\lim \frac{\beta-\alpha}{2^{n-1}} = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.9 จะได้ว่า

$\lim \beta_n - c = 0 = \lim c - \alpha_n$ นั่นคือ $\lim \beta_n = c = \lim \alpha_n$

เพราะว่า f ต่อเนื่องที่จุด c จะได้ว่า $\lim f(\alpha_n) = f(c)$

และ $\lim f(\beta_n) = f(C)$

และเพราะว่า $f(\alpha_n) < 0$ และ $f(\beta_n) > 0$ ทุกจำนวนนับ n

จะได้ $\lim f(\alpha_n) = f(c) \leq 0$ และ $\lim f(\beta_n) = f(c) \geq 0$

ดังนั้น $f(c) = 0$

#

ทฤษฎีบท 4.30 ทฤษฎีบทค่ากลางของโบลซาโน (Bolzano's Intermediate Value Theorem)
ให้ I เป็นช่วงใด ๆ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ถ้า $a, b \in I$
และ k เป็นจำนวนจริงซึ่ง $f(a) < k < f(b)$ แล้ว จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = k$

พิสูจน์ สมมุติ $a < b$ ให้ $g(x) = f(x) - k$ ทุก $x \in I$
เพราะฉะนั้น $g(a) < 0 < g(b)$.

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน I จะได้ว่า g ต่อเนื่องบน I ด้วย
โดยทฤษฎีบท 4.29 จะมี $c \in I$ ซึ่ง $g(c) = 0$

นั่นคือ $f(c) - k = 0$ 4 งได้ว่า $T(c) = k$

#

บทแทรก 4.31 ให้ $I = [a,b]$ เป็นช่วงปิดและมีขอบเขต
$f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I ถ้า k เป็นจำนวนจริงซึ่ง
$\inf f(I) \leq k \leq \sup f(I)$ แล้วจะมีจำนวนจริง $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = k$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 4.23 จะมี c^* และ $c_* \in I$ ซึ่ง $f(c^*) = \sup f(I)$
และ $f(c_*) = \inf f(1)$

นั่นคือ $f(c_*) \leq k \leq f(c^*)$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 4.30 จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = k$ #

ทฤษฎีบท 4.32 ให้ I เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต และ $f: I \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I แล้ว $f(I) = \{ f(x) \mid x \in I \}$ เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 4.27 $f(I)$ เป็นเซตที่มีขอบเขต

ให้ $m = \inf f(I)$ และ $M = \sup f(I)$

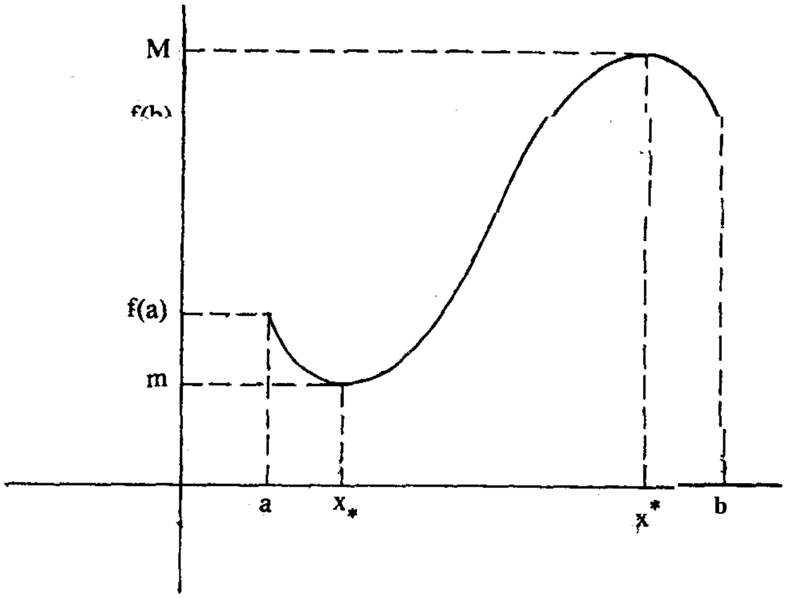
โดยทฤษฎีบท 4.28 $m, M \in f(I)$ และ $m \leq f(x) \leq M$ ทุก $x \in I$

ดังนั้น $f(I) \subseteq [m, M]$

ถ้า k เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $m \leq k \leq M$ แล้ว โดยบทแทรก 4.31 จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = k$ นั่นคือ $[m, M] \subseteq f(I)$

เพราะฉะนั้น $[m, M] = f(I)$ #

ข้อควรจำ ถ้า $I = [a, b]$ เป็นช่วงปิด และ $f : I \rightarrow R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยทฤษฎีบท 4.23 จะได้ว่ามีจำนวนจริง m, M ซึ่ง $f(I) = [m, M]$ เท่านั้น ไม่ได้พิสูจน์ว่า $f(I)$ คือช่วง $[f(a), f(b)]$



รูป 4.11 $f(I) = [m, M]$

จากทฤษฎีบท 4.32 พบว่า ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงปิด และมีขอบเขตแล้ว พิสัย (range) ของ f จะเป็นช่วงปิดที่มีขอบเขตด้วย

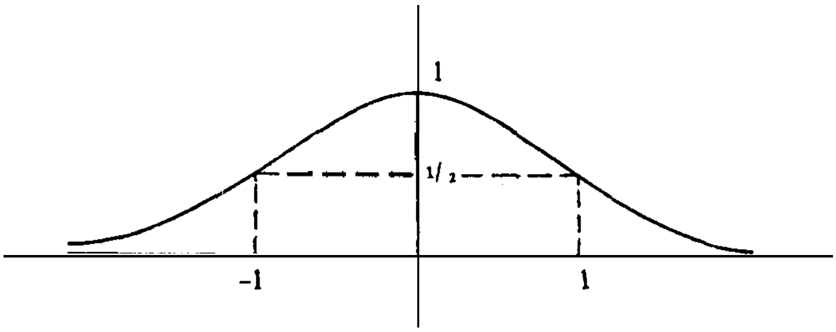
แต่ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงเปิด หรือ ช่วงปิดที่ไม่มีขอบเขตแล้ว พิสัยของ f ไม่จำเป็นจะต้องเป็นช่วงเปิดหรือช่วงปิด

ตัวอย่าง 4.33 ให้ $f:R \to R$ โดยที่ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

ให้ $I_1 = (-1, 1)$ และ $I_2 = [0, \infty)$ ดังนั้น I_1 เป็นช่วงเปิด และ I_2 เป็นช่วงปิด

เนื่องจาก f ต่อเนื่องบน R จึงได้ว่า f ต่อเนื่องบน I_1 และ I_2 ด้วย

แต่ $f(I_1) = (\frac{1}{2}, 1]$ ซึ่งไม่ใช่ช่วงเปิด และ $f(I_2) = (0, 1]$ ซึ่งไม่ใช่ช่วงปิด #



รูป 4.12 $f(X) = \frac{1}{x^2+1}$

แบบฝึกหัด 4.7

1. กำหนด $I = [a,b]$ และ $f: I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยที่ $f(x)>0$ ทุก ๆ $x \in I$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $\alpha>0$ ซึ่ง $f(x) \geq \alpha$ ทุก ๆ $x \in I$
2. ให้ $I = [a,b]$ และ $f : I \to R$ $g : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I จงพิสูจน์ว่า $\{x \in I \mid f(x) = g(x)\}$ เป็นเซตปิด
3. ให้ $I = [a,b]$ และ $f : I \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน I โดยที่สำหรับแต่ละ $x \in I$ จะมี $y \in I$ ซึ่ง $|f(y)| \leq \frac{1}{2} |f(x)|$ จงพิสูจน์ว่า จะมี $c \in I$ ซึ่ง $f(c) = 0$
4. จงพิสูจน์ว่า ทุก ๆ พหุนาม (polynomial) ที่มีกำลังเป็นเลขคี่ จะต้องมีรากที่เป็นจำนวนจริงอย่างน้อยหนึ่งราก
5. จงแสดงว่า พหุนาม $p(x) = x^4 + 7x^3 - 9$ มีรากเป็นจำนวนจริงอย่างน้อยสองราก

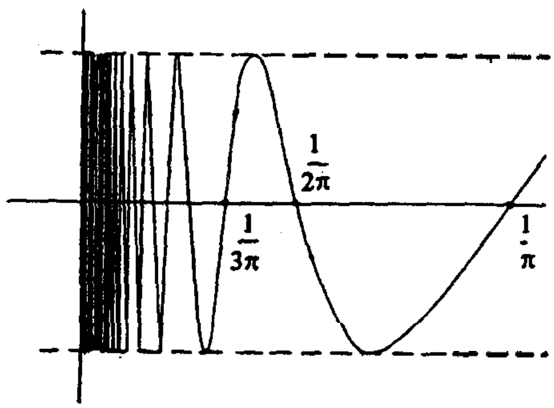
4.8 การต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (Uniform Continuity)

จากนิยาม 4.9 จะพบว่าถ้าให้ $A \subseteq R$ $f:A \to R$ ข้อความต่อไปนี้สมมูล กันคือ

1. f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุด $u \in A$

2. กำหนด $\varepsilon > 0$ และ $u \in A$ แล้วจะมี $\delta(\varepsilon,u) > 0$ ซึ่งถ้า $x \in A$ และ $|x-u| < \delta(\varepsilon,u)$ แล้ว $|f(x)-f(u)| < \varepsilon$

สังเกตได้ว่า ค่า δ ที่หาได้นั้นขึ้นอยู่กับ $\varepsilon>0$ และ $u \in A$ และโดยตามความเป็นจริงแล้ว การที่ δ ขึ้นอยู่กับ u เนื่องจาก f มีค่าเปลี่ยนไปเร็วมาก เมื่อ x เข้าใกล้จุดที่แน่นอนจุดหนึ่ง และจะเปลี่ยนค่าอย่างช้า ๆ เมื่อ x เข้าใกล้จุดอื่น



รูป 4.13 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x>0)$

จากรูป 4.13 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x>0)$ จะพบว่า ค่า f เปลี่ยนไปเร็วมาก เมื่อ x เข้าใกล้ 0 และเปลี่ยนค่าอย่างช้า ๆ บริเวณห่างจุดศูนย์ออกไป

และบางครั้งอีกเหมือนกันที่มีฟังก์ชัน f ชนิดที่สามารถเลือก δ ได้โดยไม่ต้องคำนึงถึงจุด $u \in A$ นั่นคือ δ ขึ้นอยู่กับ ε เท่านั้น

เช่น ให้ $f(x) = 2x$ $(x \in R)$

จะพบว่า $|f(x)-f(u)| = 2|x-u|$ ดังนั้นจึงสามารถเลือก $\delta(\varepsilon,u) = \frac{\varepsilon}{2}$

สำหรับ ทุก ๆ $\varepsilon>0$ และ $u \in R$

ในบางกรณี ถ้าเราพิจารณาฟังก์ชัน $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x>0)$ จะพบว่า

(1) $g(x) - g(u) = \frac{u-x}{ux}$

ดังนั้น ถ้า $u \in A = (0, \infty)$ เลือก

(2) $\delta(\varepsilon,u) = \min\{\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}u^2\varepsilon\}$

แล้วจะได้ว่า ถ้า $|x-u| < \delta(\varepsilon,u)$ แล้ว $|x-u| < \frac{1}{2}u$

นั่นคือ $\frac{1}{2}u < x < \frac{3}{2}u$ ซึ่งได้ว่า $\frac{1}{x} < \frac{2}{u}$

ดังนั้น ถ้า $|x-u| < \frac{1}{2}u$ จากสมการ (1) ได้ว่า

(3) $|g(x)-g(u)| \leq \frac{2}{u^2}|x-u|$

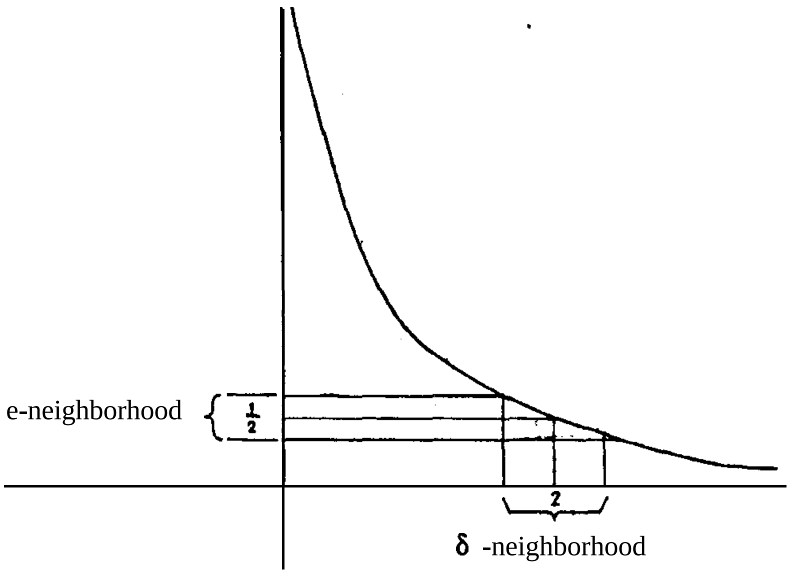
และจาก $|x-u| < \delta(\varepsilon,u)$ เมื่อ $\delta(\varepsilon,u) = \min\{\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\varepsilon\}$

อสมการ (3) ทำให้สรุปได้ว่า $|g(x)-g(u)| \leq \frac{2}{u^2}(\frac{1}{2}u^2\varepsilon) = \varepsilon$

จากการเลือก $\delta(\varepsilon,u) = \min\{\frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u^2\varepsilon\}$ พบว่า ค่า δ นี้ ทำให้

$|f(x)-f(u)| < \varepsilon$ เมื่อ $x, u \in A$ และ $|x-u| < \delta$

กล่าวคือ การเลือก δ วิธีนี้ ค่า δ ขึ้นอยู่กับ $u \in A$ และ ค่า δ จะเปลี่ยนไปเมื่อ u เปลี่ยนไป และถ้าเราอยากจะเลือก δ เพื่อให้ใช้ได้สำหรับทุก ๆ ค่า $u \in A$ การเลือก δ โดยสูตร (2) นั้นใช้ไม่ได้ เนื่องจาก $\inf\{\delta(\varepsilon,u) \mid u>0\} = 0$



รูป 4.14 $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x>0)$

จากรูป 4.14 จะเห็นว่าถ้ากำหนด $\varepsilon>0$ ค่า $\delta(\varepsilon,2)$ และ $\delta(\varepsilon,\frac{1}{2})$ ที่หาจากสูตร (2) แตกต่างกัน และถ้า u เข้าใกล้จุดศูนย์ จะพบว่า ค่า $\delta(\varepsilon\ u)$ เข้าใกล้ศูนย์

นิยาม 4.14 ให้ $A\subseteq R$ และ $f:A\to R$ เรากล่าวว่า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A (f is uniform continuous on A) ถ้าสำหรับทุก ๆ $\varepsilon>0$ มี $\delta(\varepsilon)>0$ ซึ่งถ้า $x,u\in A$ และ $|x-u|<\delta(\varepsilon)$ แล้ว $|f(x)-f(u)|<\varepsilon$

จากนิยาม 4.14 จะเห็นว่า ถ้า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A แล้ว f จะต่อเนื่องบนเซต A ด้วย ดังจะได้พิสูจน์ให้เห็นต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.33 ให้ $A\subseteq R$ และ $f:A\to R$
ถ้า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A แล้ว f ต่อเนื่องบนเซต A

พิสูจน์ ให้ $u\in A$ กำหนด $\varepsilon>0$
เนื่องจาก f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A จะมี $\delta(\varepsilon)>0$ ซึ่ง
ถ้า $x,y\in A$ และ $|x-y|<\delta(\varepsilon)$ แล้ว $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$

ให้ $x\in A$ โดยที่ $|x-u|<\delta(\varepsilon)$ ดังนั้นจะได้ว่า $|f(x)-f(u)|<\varepsilon$ นั่นคือ f ต่อเนื่องที่ u เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องบนเซต A #

ตัวอย่าง 4.34 ให้$A = (0, 1]$ และ $f(x) = x^2$ แล้ว f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ $x, y \in A$ โดยที่ $|x-y| < \delta$

เนื่องจาก $x, y \in A$ จะได้ $x \leq 1$ และ $y \leq 1$

ดังนั้น $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x-y|\,|x+y| \leq 2|x-y| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

เพราะฉะนั้น f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A #

จากนิยาม 4.14 เราได้ศึกษาเกณฑ์การต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นเงื่อนไขของการไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำ โดยนัยแห่งนิยาม 4.14 จึงเป็นดังนี้

เกณฑ์การไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ (Non-Uniform Continuity Criteria)

ให้ $A \subseteq R$ และ $f: A \to R$ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. f ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A
2. มี $\varepsilon_0 > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ $\delta > 0$ จะมีจำนวนจริง x_δ และ u_δ ใน A โดยที่ $|x_\delta - u_\delta| < \delta$ และ $|f(x_\delta) - f(u_\delta)| \geq \varepsilon_0$
3. มี $\varepsilon_0 > 0$ และลำดับ $(x_n), (y_n)$ ใน A โดยที่ $\lim (x_n - y_n) = 0$ และ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ n

จากทฤษฎีบท 4.33 จะเห็นว่าถ้า f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A แล้ว f ต้องต่อเนื่องบนเซต A ซึ่งบทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง ดังจะแสดงให้เห็นต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.35 ให้ $g(x) = \frac{1}{x}$ $(x \neq 0)$ แล้ว g ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต $A = (0, \infty)$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 4.13 g ต่อเนื่องบนเซต A

ให้ $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ และ $(x_n), (y_n)$ เป็นลำดับใน A โดยที่

$x_n = \frac{1}{n}$ และ $y_n = \frac{1}{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

จะได้ $\lim (x_n - y_n) = 0$ แต่ $|g(x_n) - g(y_n)| = 1 \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ n

โดยเกณฑ์การไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ข้อ 3 g ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต A

#

ทฤษฎีบท 4.34 **ให้** $I = [a,b]$ **เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต** $f:I \to R$ **เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน** I **แล้ว** f **ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน** I

พิสูจน์ สมมุติ f ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน I
โดยเกณฑ์การไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ จะมี $\varepsilon_0 > 0$ และ ลำดับ $(x_n), (y_n)$ ใน I
โดยที่ $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ และ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก I เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้น ลำดับ (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 2.16 จะมีลำดับย่อย (x_{r_k}) ของ (x_n) ที่เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $\lim x_{r_k} = z$ เนื่องจาก I เป็นเซตปิด โดยทฤษฎีบท 2.17 $z \in I$

พิจารณาลำดับย่อย (y_{r_k}) ของลำดับ (y_n)

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก k_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|x_{r_k} - z| < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุก $k \geq k_0$

ดังนั้น ถ้า k เป็นจำนวนนับ โดยที่ $k \geq k_0$ แล้ว

$$\begin{aligned}
|y_{r_k} - z| &= |y_{r_k} - x_{r_k} + x_{r_k} - z| \\
&\leq |y_{r_k} - x_{r_k}| + |x_{r_k} - z| \\
&< \frac{1}{r_k} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{1}{k_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim y_{r_k} = z$

เนื่องจาก f ต่อเนื่องที่จุด z จะได้ $\lim f(x_{r_k}) = f(z)$ และ $\lim f(y_{r_k}) = f(z)$
แต่เป็นไปไม่ได้เพราะว่า $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ n
ดังนั้น f ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน I

#

แบบฝึกหัด 4.8

1. จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $f(x) = \frac{1}{x}$ $x \in [1, \infty)$ ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนเซต $[1, \infty)$
2. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ บนโดเมนที่กำหนดให้

   ก. $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad D(f) = \{x \in R \mid 0<x<1\}$

   ข. $g(x) = x^2$ $\quad D(g) = R$

   ค. $h(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad D(h) = \{x \in R \mid x>0\}$

   ง. $k(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad D(k) = \{x \in R \mid x>0\}$

3. จงพิสูจน์ว่า $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $(x \in R)$ ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ g ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R แล้ว $f+g$ ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R
5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า f และ g ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R โดยที่ f และ g มีขอบเขตบน R แล้ว fg ต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน R
6. ให้ $A \subseteq R$ และ $f : A \to R$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ถ้า (x_n) เป็นลำดับโคชี ใน A แล้ว จงพิสูจน์ว่า $(f(x_n))$ เป็นลำดับโคชีใน R