บทที่ 3
อนุกรมของจำนวนจริง
(The Series of Real Numbers)

3.1 นิยามและคุณสมบัติทั่วไป

นิยาม 3.1 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง อนุกรมอนันต์ (infinite series) หรือเรียกง่าย ๆ ว่า อนุกรม (series) คือ ลำดับ $S = (s_n)$ โดยที่

$$s_1 = x_1$$
$$s_2 = x_1 + x_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ถ้า S เป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) เรากล่าวว่าอนุกรมอนันต์ลู่เข้า (an infinite series converges) และ lim S คือ ผลบวกของอนุกรมอนันต์ (the sum of the infinite series)

เรียก x_n ว่า เทอม (terms) และ s_n ว่าผลบวกย่อย (partial sum) ของอนุกรมอนันต์

เพื่อความสะดวกโดยทั่วไป เขียน $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ หรือ Σx_n แทนอนุกรมอนันต์ S

และถ้า $\lim S = s$ แล้วจะเขียนว่า $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$ หรือ $\Sigma x_n = s$

ถ้า S เป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence) เรากล่าวว่าอนุกรมอนันต์ลู่ออก (diverges)

ทฤษฎีบท 3.1 อนุกรม Σx_n ลู่เข้าก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนนับ M ได้ซึ่ง ถ้า n เป็นจำนวนนับ และ $n \geq M$ แล้ว $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k \right| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ p ใด ๆ

พิสูจน์ กำหนด อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ให้ $s_1 = x_1$

$$s_2 = x_1 + x_2$$

....

....

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$$

....

ดังนั้น ลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า

กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.20 $S = (s_n)$ เป็นลำดับโคชี

นั่นคือสามารถหาจำนวนนับ M ได้ ซึ่งถ้า n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n, m \geq M$ แล้ว

$$| s_m - s_n | < \varepsilon$$

นั่นคือ ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq M$ แล้ว

$$| s_{n+p} - s_n | = | \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

ในทางกลับกัน กำหนด $\varepsilon > 0$

สามารถหาจำนวนนับ M ได้ ซึ่ง ถ้า $n \geq M$ แล้ว

$$| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

นั่นคือ ถ้า n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $m > n \geq M$ แล้ว

$$| s_m - s_n | = | \sum_{k=n+1}^{n+(m-n)} x_k | < \varepsilon$$

เพราะฉะนั้นลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับโคชี และโดยทฤษฎีบท 2.22 $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า

นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ทฤษฎีบท 3.2 ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าแล้ว $\lim x_n = 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะมีจำนวนนับ M ซึ่งถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq M$ แล้ว

$$| \sum_{k=n+1}^{n+p} x_k | < \varepsilon \text{ ทุกจำนวนนับ } p$$

ให้ $p = 1$ จะได้ $| x_{n+1} | < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq M$

นั่นคือ $\lim x_n = 0$

#

หมายเหตุ 1. สำหรับ อนุกรม Σx_n ใด ๆ ถ้า $\lim x_n \neq 0$ แล้ว สามารถสรุปได้ทันทีว่า อนุกรม Σx_n ลู่ออก

2. สำหรับ อนุกรม Σx_n ใด ๆ ถ้า $\lim x_n = 0$ แล้ว ไม่จำเป็นที่อนุกรม Σx_n จะเป็นอนุกรมลู่เข้า ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.1 อนุกรม ฮาร์โมนิค (Harmonic Series) $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim \frac{1}{n} = 0$ จึงยังสรุปไม่ได้ว่า อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

สำหรับ จำนวนนับ n ใด ๆ ให้ $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

เลือก $k_1 = 2$ นั่นคือ $s_{k_1} = 1 + \frac{1}{2}$

$k_2 = 2^2$ นั่นคือ $s_{k_2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > s_{k_1} + 2(\frac{1}{4}) = 1 + \frac{2}{2}$

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ r

$s_{k_m} > 1 + \frac{m}{2}$ ทุกจำนวนนับ m ซึ่ง $1 \leq m < r$

และ $s_{k_r} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{r-1}} + \frac{1}{2^{r-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^r} > s_{k_{r-1}} + 2^{r-1}\left(\frac{1}{2^r}\right)$

$= s_{k_{r-1}} + \frac{1}{2} > 1 + \frac{r}{2}$

นั่นคือ $s_{k_n} > 1 + \frac{n}{2}$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า (s_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะได้ว่ามีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $|s_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $M - 1 < n_0$

ดังนั้น $s_{k_{2n_0}} > 1 + \frac{2n_0}{2} = 1 + n_0 > M$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น ลำดับ (s_n) เป็นลำดับที่ ไม่มีขอบเขต

โดยผลของทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ (s_n) เป็นลำดับลู่ออก

นั่นคืออนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออก

#

ตัวอย่าง 3.2 ให้ r เป็นจำนวนจริง อนุกรม Σr^{n-1} เรียกว่า อนุกรมเรขาคณิต (geometric series)

และอนุกรม Σr^{n-1} ลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

นอกจากนั้น ถ้า อนุกรมเรขาคณิต Σr^{n-1} ลู่เข้าแล้วจะได้ว่า

$$\Sigma r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$$

พิสูจน์ ให้

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + r$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_n = 1 + r + \ldots + r^{n-1}$$

ถ้า $r \neq 1$ จากตัวอย่าง *1.3* ได้ว่า $s_n = \frac{1-r^n}{1-r}$

ดังนั้น ถ้า $|r| < 1$ เนื่องจาก $|r^n| = |r|^n = ||r|^n|$ ทุกจำนวนนับ n

และโดยตัวอย่าง 2.9 ได้ว่า $\lim r^n = 0$

นั่นคือ ถ้า $|r| < 1$ $\lim s_n = \lim \frac{1-r^n}{1-r} = \frac{1}{1-r}$

เพราะฉะนั้น อนุกรม Σr^{n-1} ลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ และ $\Sigma r^{n-1} = \frac{1}{1-r}$

สมมุติ $|r| \geq 1$ ถ้า $\lim r^n$ หาค่าได้แล้ว $\lim r^n \neq 0$ เนื่องจาก $|r^n| \geq 1$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น โดยผลของทฤษฎีบท 3.2 อนุกรม Σr^{n-1} ลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

#

ตัวอย่าง 3.3 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เรียกว่า อนุกรมพี (p-series)

ก. ถ้า $0 < p \leq 1$ แล้วอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก

ข. ถ้า $p > 1$ แล้ว อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า

พิสูจน์ ก. ถ้า $0 < p \leq 1$ แล้ว $n^p \leq n$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$ ทุกจำนวนนับ n

โดยตัวอย่าง 3.1 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

และเนื่องจากลำดับของผลบวกย่อย ของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

ดังนั้น ลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ต้องเป็นลำดับไม่มีขอบเขต

เพราะฉะนั้นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตด้วย

และเนื่องจากลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น ดังนั้น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่ออก

ข. กำหนด $p > 1$

ให้ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n^p}$

เนื่องจาก $\frac{1}{n^p} > 0$ ทุกจำนวนนับ n จึงได้ว่า $S = (s_n)$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

จะแสดงว่า $S = (s_n)$ มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ให้ $r_1 = 2^1 - 1 = 1$ ดังนั้น $s_{r_1} = 1$

$$r_2 = 2^2 - 1 = 3 \text{ ดังนั้น } s_{r_2} = 1 + \left(\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}\right) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}$$

$$r_3 = 2^3 - 1 = 1 \text{ ดังนั้น } s_{r_3} = s_{r_2} + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p}$$

$$< s_{r_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^2$$

ให้ $a = \frac{1}{2^{p-1}}$ เนื่องจาก $p > 1$ จะได้ว่า $0 < a < 1$

โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ถ้า $r_k = 2^k - 1$ แล้ว

$$0 < s_{r_k} < 1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1}$$

เนื่องจาก อนุกรม Σa^{n-1} เป็นอนุกรมเรขาคณิต โดยที่ $|a| < 1$

จะได้ $\Sigma a^{n-1} = \frac{1}{1-a}$

นั่นคือ $0 < s_{r_k} < 1 + a + a^2 + \ldots + a^{k-1} \leq \frac{1}{1-a}$ ทุกจำนวนนับ k

เพราะฉะนั้น (s_{r_k}) เป็นลำดับย่อยของ (s_n) ที่มีขอบเขต ซึ่งจะทำให้ได้ว่า ลำดับ (s_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย เนื่องจาก $k \leq r_k$ ทุกจำนวนนับ k ดังนั้น $0 \leq s_k \leq s_{r_k} \leq \frac{1}{1-a}$ ทุกจำนวนนับ k

นั่นคือ (s_n) เป็นลำดับทางเดียวที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 2.13 (s_n) เป็นลำดับลู่เข้า

เพราะฉะนั้น $\Sigma \frac{1}{n^p}$ ลู่เข้า

#

ทฤษฎีบท 3.3 กำหนด Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมของจำนวนจริง
ให้ c เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ก. ถ้า Σx_n และ Σy_n ลู่เข้าแล้ว $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่เข้าด้วย และ

$$\Sigma (x_n + y_n) = \Sigma x_n + \Sigma y_n$$

ข. ถ้า Σx_n ลู่เข้าแล้ว Σcx_n ลู่เข้าด้วย และ

$$\Sigma cx_n = c \Sigma x_n$$

พิสูจน์ พิสูจน์ได้โดยง่าย โดยอาศัยทฤษฎีบท 2.5

#

ทฤษฎีบท 3.4 ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าและอนุกรม Σy_n ลู่ออกแล้วอนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่ออก

พิสูจน์ กำหนดอนุกรม Σx_n ลู่เข้า และอนุกรม Σy_n ลู่ออก
สมมุติว่าอนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ลู่เข้า

เนื่องจาก Σx_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3 (ข) อนุกรม $\Sigma (-1)\, x_n$ ลู่เข้า ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 3.3 (ก)

$$\Sigma y_n = \Sigma ((x_n + y_n) + (-1)\, x_n)$$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ซึ่งขัดแย้งกับกำหนดให้

นั่นคือ อนุกรม $\Sigma(x_n + y_n)$ ลู่ออก

#

หมายเหตุ ถ้าอนุกรม Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมลู่ออกแล้วไม่จำเป็นที่อนุกรม $\Sigma (x_n + y_n)$ ต้องเป็นอนุกรมลู่ออก

เช่น ให้ Σx_n เป็นอนุกรมที่ $x_n = 1$ ทุกจำนวนนับ n และ Σy_n เป็นอนุกรมที่ $y_n = -1$ ทุกจำนวนนับ n

จะเห็นว่าทั้ง Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรมลู่ออก แต่ $\Sigma (x_n + y_n) = 0$

#

3.1.1 อนุกรมที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ (Series with Nonnegative Terms)

ในหัวข้อต่อไปนี้จะได้กล่าวถึงการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ

ทฤษฎีบท 3.5 กำหนด Σx_n เป็นอนุกรมที่แต่ละเทอมมีค่าไม่เป็นลบ จะได้ว่า
อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $S = (s_n)$ ของอนุกรม Σx_n เป็นลำดับที่มีขอบเขต

พิสูจน์ เนื่องจาก $x_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า $S = (s_n)$ เป็นลำดับทางเดียว ค่าเพิ่มขึ้น

โดยทฤษฎีบท 2.13 $S = (s_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ S เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับของผลบวกย่อย $S = (s_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

#

ทฤษฎีบท 3.6 การทดสอบแบบเปรียบเทียบ (Comparison Test)

กำหนด Σx_n และ Σy_n เป็นอนุกรม ที่มีเทอมมีค่าไม่เป็นลบ และ $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า Σy_n ลู่เข้าแล้ว Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม Σx_n

และ $T = (t_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม Σy_n

เนื่องจาก $x_n \ge 0$ และ $y_n \ge 0$ ทุกจำนวนนับ n จะได้ว่า $S = (s_n)$ และ $T = (t_n)$ เป็นลำดับทางเดียวค่าเพิ่มขึ้น

และเพราะว่า $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ n ดังนั้น $s_n \le t_n$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า Σy_n ลู่เข้า จะได้ลำดับ $T = (t_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 2.15 ลำดับ $T = (t_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นคือลำดับ $S = (s_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตด้วย

โดยทฤษฎีบท 2.15 ลำดับ $S = (s_n)$ ลู่เข้า

นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.4 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n!}$ ลู่เข้า

พิสูจน์ เนื่องจาก $n! \ge 2^{n-1}$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นอนุกรมเรขาคณิต และ $\frac{1}{2} < 1$ ดังนั้น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{2^{n-1}}$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n!}$ ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.5 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

พิสูจน์ เพราะว่า $\sqrt{n} \le n$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ ทุกจำนวนนับ n

สมมุติ $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่เข้าด้วย
ซึ่งเป็นไปไม่ได้เพราะ $\Sigma \frac{1}{n}$ ลู่ออกตามตัวอย่าง 3.1

ดังนั้น อนุกรม $\Sigma \frac{1}{\sqrt{n}}$ ลู่ออก

#

ทฤษฎีบท 3.7 การทดสอบแบบเปรียบเทียบโดยลิมิต (Limit Comparison Test)
กำหนด (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับ โดยที่ $x_n > 0$ และ $y_n > 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ก. ถ้า $\lim \frac{x_n}{y_n} \neq 0$ แล้ว
อนุกรม Σx_n ลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ Σy_n ลู่เข้า

ข. ถ้า $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ และอนุกรม Σy_n ลู่เข้าแล้วอนุกรม Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ ก. เนื่องจาก $\lim \frac{x_n}{y_n} \neq 0$ ดังนั้น $\lim \frac{y_n}{x_n}$ หาค่าได้

โดยทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ และลำดับ $\left(\frac{y_n}{x_n}\right)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นคือ จะมีจำนวนจริง $M_1 > 0$ และ $M_2 > 0$ ซึ่ง $0 < \frac{x_n}{y_n} \leq M_1$ และ

$0 < \frac{y_n}{x_n} \leq M_2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้นจะได้ว่า $0 < \alpha y_n \leq x_n \leq \beta y_n$ เมื่อ $\alpha = \frac{1}{M_2}$ และ $\beta = M_1$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.6 $\Sigma \alpha y_n$ ลู่เข้า

และโดยทฤษฎีบท 3.3 อนุกรม $\Sigma y_n = \Sigma \frac{1}{\alpha}(\alpha y_n)$ ลู่เข้า

ถ้าอนุกรม Σy_n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3 $\Sigma \beta y_n$ ลู่เข้าด้วย
ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. กำหนด $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$ โดยทฤษฎีบท 2.4 จะมีจำนวนจริง $M > 0$

ซึ่ง $0 < \frac{x_n}{y_n} \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $0 < x_n \leq My_n$ ทุกจำนวนนับ n
ถ้าอนุกรม Σy_n ลู่เข้าแล้วอนุกรม ΣMy_n ลู่เข้าด้วย
โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.6 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\Sigma \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ เป็นอนุกรมลู่ออกหรือลู่เข้า

วิธีทำ ให้ (a_n) เป็นลำดับโดยที่ $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

และ (b_n) เป็นลำดับโดยที่ $b_n = \dfrac{1}{n}$

ดังนั้น $\dfrac{b_n}{a_n} = \dfrac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \sqrt{1+\dfrac{1}{n}}$

และ $\lim \dfrac{b_n}{a_n} = 1$

เนื่องจากอนุกรม $\Sigma b_n = \Sigma \dfrac{1}{n}$ เป็นอนุกรมลู่ออก

โดยทฤษฎีบท 3.7 อนุกรม $\Sigma a_n = \Sigma \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ ลู่ออก

#

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{1}{n^2+n}$ ลู่เข้า พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

แนะนำ : $\frac{1}{n^2+n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

2. จงแสดงว่า $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ ลู่ออก

แนะนำ : แสดงว่าลำดับผลบวกย่อยเป็นลำดับไม่มีขอบเขต

3. จงแสดงว่าอนุกรม $\sum \frac{1}{n^2+2n}$ ลู่เข้า พร้อมทั้งหาผลบวกของอนุกรม

สำหรับข้อต่อไปนี้ให้พิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรม

4. $\sum n^{-n}$

5. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2-3n+2}$

6. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-2)}$

7. $\sum \frac{3^n+4^n}{5^n}$

8. $\sum \frac{1}{2+3n^2}$

9. $\sum \frac{1+n}{2+3n^2}$

10. $\sum \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

11. $\sum \frac{n}{(n+1)(n+2)}$

12. $\sum 2^{-\frac{1}{n}}$

13. $\sum (n(n+1))^{-\frac{1}{2}}$

14. $\sum (n^2(n+1))^{-\frac{1}{2}}$

15. $\sum \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$

3.2 อนุกรมสลับ การทดสอบโดยอัตราส่วน และการทดสอบโดยราก

3.2.1 การลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์และอย่างมีเงื่อนไข

(Absolute convergence and conditional convergence)

ในหัวข้อที่แล้วได้กล่าวถึงการลู่เข้าและลู่ออกของอนุกรมที่มีเทอมที่มีค่าไม่เป็นลบ ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้จะแสดงให้เห็นว่าสามารถนำทฤษฎีบทที่ได้ มาทดสอบการลู่เข้าของอนุกรมที่มีเทอมเป็นลบได้เช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบท 3.8 ถ้าอนุกรม $\Sigma\,|x_n|$ ลู่เข้าแล้วอนุกรม Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ กำหนดอนุกรม $\Sigma\,|x_n|$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบท 3.1 จะมีจำนวนนับ M ซึ่งถ้า $n \geq M$ แล้ว

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} |x_k|\right| < \varepsilon \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } p$$

ให้ n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $m \geq n \geq M$

$$\text{ดังนั้น} \quad \left|\sum_{k=n+1}^{m} x_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} |x_k| < \varepsilon$$

นั่นคือลำดับของผลบวกย่อย $S = (s_n)$ ของอนุกรม Σx_n เป็นลำดับโคชี

โดยทฤษฎีบท 2.22 $S = (s_n)$ ลู่เข้า

นั่นคืออนุกรม Σx_n ลู่เข้า #

หมายเหตุ บทกลับของทฤษฎีบท 3.8 ไม่จริงดังจะได้แสดงให้เห็นภายหลัง

นิยาม 3.2 ถ้าอนุกรม $\Sigma\,|x_n|$ ลู่เข้าแล้ว กล่าวว่าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ (converges absolutely)

ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้า แต่ $\Sigma\,|x_n|$ ลู่ออกแล้ว เรากล่าวว่าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข (converges conditionally)

3.2.2 อนุกรมสลับ (Alternating series)

นิยาม 3.3 กำหนด (x_n) เป็นลำดับ โดยที่ $x_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n (หรือ $x_n < 0$ ทุกจำนวนนับ n)

เรียกอนุกรม $\Sigma(-1)^{n+1}x_n$ ว่า อนุกรมสลับ (Alternating series)

ทฤษฎีบท 3.9 อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}x_n$ ลู่เข้า เมื่อ

ลำดับ (x_n) เป็นลำดับทางเดียวค่าลดลง และ $\lim x_n = 0$

พิสูจน์ กำหนดลำดับ (x_n) เป็นลำดับค่าลดลง และ $\lim x_n = 0$

โดยนิยาม 2.6 และทฤษฎีบท 2.13 $x_n \geq x_{n+1} \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma(-1)^{n+1}x_n$

พิจารณาลำดับย่อย $S' = (s_{2n})$ ของ S

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n

$$s_{2n+2} - s_{2n} = x_{2n+1} - x_{2n+2} \geq 0$$

นั่นคือลำดับย่อย $S' = (s_{2n})$ เป็นลำดับทางเดียวค่าเพิ่มขึ้น

จาก

$$s_{2n} = (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) + \ldots + (x_{2n-1} - x_{2n})$$

และ $x_{n+1} \leq x_n$ ทุกจำนวนนับ n

จึงได้ว่า $s_{2n} \geq 0$ และจาก

$$s_{2n} = x_1 - (x_2 - x_3) - (x_4 - x_5) \ldots - (x_{2n-2} - x_{2n-1}) - x_{2n}$$

จะได้ว่า $0 \leq s_{2n} \leq x_1$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้นลำดับ $S' = (s_{2n})$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.13 ลำดับ $S' = (s_{2n})$ ลู่เข้า

ให้ $\lim s_{2n} = s$

เนื่องจากสำหรับแต่ละจำนวนนับ n

$$s_{2n+1} = s_{2n} + x_{2n+1}$$

และลำดับ (s_{2n}) และ (x_{2n+1}) เป็นลำดับลู่เข้า

ดังนั้น $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} + \lim x_{2n+1} = s + 0 = s$

เนื่องจาก $\lim s_{2n} = s = \lim s_{2n+1}$ จึงพิสูจน์ได้ว่า ลำดับ (s_n) เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim s_n = s$

นั่นคือ อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}x_n$ ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.7 อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

พิสูจน์ เพราะว่า $\lim \frac{1}{n} = 0$ และ $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

โดยทฤษฎีบท 3.9 อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ลู่เข้า

แต่จากตัวอย่าง 3.1 อนุกรม $\Sigma\,|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}| = \Sigma\frac{1}{n}$ ลู่ออก

นั่นคือ อนุกรม $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

#

หมายเหตุ ตัวอย่าง 3.7 แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบท 3.8 ไม่จริง

ตัวอย่าง 3.8 อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{4n-3}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

พิสูจน์ เพราะว่า $\lim \frac{1}{4n-3} = 0$

และ $\frac{1}{4(n+1)-3} \leq \frac{1}{4n-3}$ ทุกจำนวนนับ n

โดยทฤษฎีบท 3.9 อนุกรมสลับ $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{4n-3}$ ลู่เข้า

พิจารณา $\lim \dfrac{\frac{1}{4n-3}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{4n-3} = \frac{1}{4} \neq 0$

เนื่องจาก อนุกรม $\Sigma\frac{1}{n}$ ลู่ออก โดยทฤษฎีบท 3.7 อนุกรม $\Sigma\frac{1}{4n-3}$ ลู่ออกด้วย

นั่นคือ อนุกรม $\Sigma(-1)^{n+1}\frac{1}{4n-3}$ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข

#

3.2.3 การทดสอบโดยอัตราส่วน (RATIO TEST) และการทดสอบโดยราก (ROOT TEST)

ทฤษฎีบท 3.10 การทดสอบโดยอัตราส่วน (Ratio Test)

ถ้า (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $x_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n และ

$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell$ แล้ว

ก. ถ้า $\ell < 1$ จะได้ว่า อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. ถ้า $\ell > 1$ จะได้ว่า อนุกรม Σx_n ลู่ออก

พิสูจน์ ก. กำหนด $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell < 1$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < \varepsilon < 1 - \ell$

ดังนั้นจะมีจำนวนนับ K ซึ่ง $0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \ell + \varepsilon < 1$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

ให้ $\eta = \ell + \varepsilon$ ดังนั้น $x_{n+1} < \eta x_n$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $x_{K+1} < \eta x_K$

$x_{K+2} < \eta x_{K+1} < \eta^2 x_K$

....

....

โดยทฤษฎีอุปนัยทางคณิตศาสตร์ ได้ว่า

$x_{K+m} < \eta^m x_K$ ทุกจำนวนนับ m

เพราะว่า $0 < \eta < 1$ โดยตัวอย่าง 3.2 อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} \eta^m$ ลู่เข้า

เนื่องจาก x_K เป็นค่าคงที่ ดังนั้น อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} \eta^m x_K$ ลู่เข้าด้วย

โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} x_{K+m}$ ลู่เข้า นั่นคือ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. กำหนด $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \ell > 1$

ให้ ε เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < \varepsilon < \ell - 1$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ K ซึ่ง $1 < \ell - \varepsilon < \frac{x_{n+1}}{x_n} < \ell + \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $x_n > x_K > 0$ สำหรับทุกจำนวนนับ $n > K$

เพราะฉะนั้น ลำดับ (x_{K+m})เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

และถ้า $\lim x_{K+m}$ หาค่าได้แล้ว โดยทฤษฎีบท 2.13 $\lim x_{K+m} \neq 0$

นั่นคือ $\lim x_n \neq 0$ เพราะฉะนั้น อนุกรม Σx_n ลู่ออก

#

ตัวอย่าง 3.8 อนุกรม $\Sigma \frac{2^n}{n!}$ ลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $x_n = \frac{2^n}{n!}$ ดังนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{n+1}$

อาศัยตัวอย่าง 2.17 พิสูจน์ได้ว่า $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 0$

เนื่องจาก $0 < 1$ โดยทฤษฎีบท 3.10 อนุกรม $\Sigma \frac{2^n}{n!}$ ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.9 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{2^n n^p}$ โดยที่ $p > 0$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $x_n = \frac{1}{2^n n^p}$

ดังนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{n+1}\right)^p$ และ $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}$

เนื่องจาก $\frac{1}{2} < 1$ โดยทฤษฎีบท 3.10 อนุกรม $\Sigma \frac{1}{2^n n^p}$ $(p > 0)$ ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.10 อนุกรม $\Sigma \frac{3^n}{n}$ ลู่ออก

พิสูจน์ ให้ $x_n = \frac{3^n}{n}$ ดังนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{3n}{n+1}$

และ $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 3 > 1$

โดยทฤษฎีบท 3.10 อนุกรม $\Sigma \frac{3^n}{n}$ ลู่ออก

#

หมายเหตุ พิจารณาอนุกรม $\Sigma \frac{1}{n}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่ออก และ อนุกรมพี $\Sigma \frac{1}{n^2}$ ซึ่งเป็นอนุกรมลู่เข้า

ถ้าให้ $x_n = \frac{1}{n}$ และ $y_n = \frac{1}{n^2}$

จะได้ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1}$ และ $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}$

ซึ่งทำให้ $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n}$

ซึ่งแสดงให้เห็นว่าจากทฤษฎีบท 3.10 ถ้า $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$ แล้วไม่สามารถสรุปผลได้

ทฤษฎีบท 3.11 การทดสอบโดยราก (Root Test)

ถ้า (x_n) เป็นลำดับ โดยที่ $x_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell$ แล้ว

ก. ถ้า $\ell < 1$ อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. ถ้า $\ell > 1$ อนุกรม Σx_n ลู่ออก

พิสูจน์ ก. กำหนด $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell < 1$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < \varepsilon < 1 - \ell$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ K ซึ่ง $\sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq K$

ให้ $r = \ell + \varepsilon$

ดังนั้น $\sqrt[n]{x_n} < r < 1$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $x_n < r^n < 1$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

เพราะว่า อนุกรม Σr^n ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

ข. กำหนด $\lim \sqrt[n]{x_n} = \ell > 1$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $0 < \varepsilon < \ell - 1$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ K ซึ่ง $1 < \ell - \varepsilon < \sqrt[n]{x_n} < \ell + \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

ให้ $r = \ell - \varepsilon$

ดังนั้น $1 < r < \sqrt[n]{x_n}$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $1 < r^n < x_n$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

เนื่องจาก $r > 1$ โดยตัวอย่าง 3.2 อนุกรม Σr^n ลู่ออก

โดยผลของทฤษฎีบท 3.6 อนุกรม Σx_n ลู่ออก

#

ตัวอย่าง 3.11 กำหนด x_n เป็นลำดับ โดยที่ $x_{2k} = \dfrac{1}{3^k}$ และ $x_{2k-1} = \dfrac{1}{3^{k+1}}$

แล้วอนุกรม Σx_n ลู่เข้า

พิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ k ใด ๆ

ถ้า k เป็นเลขคี่แล้ว $x_k = \dfrac{1}{3^{(k+3)/2}}$

ถ้า k เป็นเลขคู่แล้ว $x_k = \dfrac{1}{3^{k/2}}$

นั่นคือ $\dfrac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} 3 & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{1}{9} & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$

เพราะฉะนั้นจึงไม่สามารถหาค่าของ $\lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$

ดังนั้นจึงไม่สามารถทดสอบการลู่เข้าของอนุกรม Σx_n โดยวิธีทดสอบแบบอัตราส่วน

แต่

$$\sqrt[k]{x_k} = \begin{cases} \dfrac{1}{3^{1/2+3/2k}} & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \dfrac{1}{3^{1/2}} & \text{ถ้า } k \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim \sqrt[n]{x_n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} < 1$

โดยทฤษฎีบท 3.11 อนุกรม Σx_n ลู่เข้า

#

ตัวอย่าง 3.12 อนุกรม $\Sigma 2^{n+\sqrt{n}}$ ลู่ออก

พิสูจน์ ให้ $x_n = 2^{n+\sqrt{n}}$

ดังนั้น $\sqrt[n]{x_n} = 2^{1+1/\sqrt{n}}$

และ $\lim \sqrt[n]{x_n} = 2 > 1$ โดยทฤษฎีบท 3.11 อนุกรม Σx_n ลู่ออก

#

หมายเหตุ ทฤษฎีบท 3.11 สรุปผลไม่ได้ถ้า $\lim \sqrt[n]{x_n} = 1$

3.2.4 การเปลี่ยนอันดับของอนุกรม (Rearrangement of Series)

นิยาม 3.4 อนุกรม $\Sigma x'_n$ เรียกว่า อนุกรมเปลี่ยนอันดับของอนุกรม Σx_n เมื่อมี $f : N \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} N$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (one-to-one and onto) โดยที่

$$x'_n = x_{f(n)} \quad \text{ทุกจำนวนนับ } n$$

ข้อสังเกต ถ้าให้ (s_n) และ (s'_n) เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม Σx_n และ $\Sigma x'_n$ ตามลำดับแล้ว จะเห็นได้ง่ายว่าลำดับ (s_n) และ (s'_n) ไม่ใช่ลำดับเดียวกัน นั่นคือถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าแล้ว อนุกรมเปลี่ยนอันดับ $\Sigma x'_n$ อาจเป็นอนุกรมลู่ออก หรือถ้าเป็นอนุกรมลู่เข้าด้วยกัน ผลบวกของอนุกรมทั้งสองอาจไม่เท่ากัน เพราะฉะนั้นต่อไปนี้จะได้ศึกษาถึงเงื่อนไขการลู่เข้าของอนุกรมเปลี่ยนอันดับ $\Sigma x'_n$ ในกรณีที่อนุกรม Σx_n เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 3.13 พิจารณาอนุกรมสลับ ฮาร์โมนิค (the alternating harmonic series)

$$\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

ให้ $s = \Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots \dots$ (1)

และ $S = (s_n)$ เป็นลำดับของผลบวกย่อยของอนุกรม $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

จากการพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.9 พบว่า (s_{2n}) เป็นลำดับทางเดียวค่าเพิ่มขึ้น

และ $s_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ นั่นคือ $s_{2n} \geq \frac{1}{2}$ ทุก ๆ จำนวนนับ n

ดังนั้น $s = \lim s_n = \lim s_{2n} \geq \frac{1}{2}$

พิจารณาอนุกรมสลับ $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$

เนื่องจากอนุกรม $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.3 อนุกรม $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{2n}$ ลู่เข้าด้วย

และ $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{2n} = \frac{s}{2}$

กล่าวคือ $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots = \frac{s}{2}$ (2)

นอกจากนั้นอนุกรม

$$0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \dots = \frac{s}{2} \qquad (3)$$

ด้วย

ดังนั้นผลบวกของอนุกรม (1) และ (3) คือ

$$1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3s}{2}$$

เพราะฉะนั้น $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots = \frac{3s}{2}$ ด้วย

เนื่องจาก $s \neq 0$ ดังนั้น $s \neq \frac{3s}{2}$

และอนุกรม $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ เป็นอนุกรมเปลี่ยนอันดับของ

อนุกรม $\Sigma (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$

#

ทฤษฎีบท 3.12 ถ้าอนุกรม Σx_n ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์แล้ว ทุก ๆ อนุกรมเปลี่ยนอันดับ $\Sigma x'_n$ ของอนุกรม Σx_n ลู่เข้าด้วย และ $\Sigma x_n = \Sigma x'_n$

พิสูจน์ เนื่องจากอนุกรม $\Sigma x'_n$ เป็นอนุกรมเปลี่ยนอันดับของอนุกรม Σx_n
ดังนั้น จะมี $f : N \xrightarrow[\text{onto}]{1-1} N$ โดยที่ $x'_n = x_{f(n)}$ ทุกจำนวนนับ n

กำหนด $\varepsilon > 0$ เนื่องจากอนุกรม $\Sigma | x_n |$ ลู่เข้า
โดยทฤษฎีบท 3.1 ให้ K เป็นจำนวนนับ โดยที่

$$\sum_{k=K+1}^{K+p} | x_k | < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } p$$

นั่นคือ $\sum_{k=K+1}^{\infty} | x_k | < \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ m เป็นจำนวนนับโดยที่ $\{ 1,2,\ldots,K \} \in \{ f(1), f(2),\ldots, f(m) \}$
ดังนั้น ถ้า $n \geq m$ แล้ว $\{ x_1,x_2,\ldots,x_K \} \in \{ x_{f(1)}, x_{f(2)},\ldots, x_{f(n)} \}$
นั่นคือ ถ้า $n \geq m$ แล้ว $\{ x_1,x_2,\ldots,x_K \} \in \{ x'_1,x'_2,\ldots, x'_n \}$
และ

$$\left| \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} | x_k | < \frac{\varepsilon}{2}$$

เนื่องจากอนุกรม $\Sigma | x_n |$ ลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 3.8 อนุกรม Σx_n ลู่เข้าด้วย
ให้ $s = \Sigma x_n$

ดังนั้น สำหรับ $n \geq m$

$$
\begin{aligned}
\left| s - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| &= \left| s - \sum_{k=1}^{K} x_k + \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| \\
&\leq \left| s - \sum_{k=1}^{K} x_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| \\
&= \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} x_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| \\
&\leq \sum_{k=K+1}^{\infty} |x_k| + \left| \sum_{k=1}^{K} x_k - \sum_{k=1}^{n} x'_k \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

นั่นคือ $\lim \sum_{k=1}^{n} x'_k = s$ ดังนั้น $\sum x'_n = s$

#

แบบฝึกหัด 3.2

จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้อนุกรมใดลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไขหรือลู่ออก

1. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2. $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$

3. $\sum (-1)^n \frac{2n+1}{n^3-4}$

4. $\sum (-1)^n \frac{2^n n^2}{n!}$

5. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$

6. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

7. $\sum (-1)^{n+1} \frac{1}{3n-2}$

8. $\sum (-1)^{n-1} \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$

9. $\sum (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$

จงทดสอบการลู่เข้าหรือลู่ออกของอนุกรมต่อไปนี้

10. $\sum \frac{1}{n^{n}}$

11. $\sum \frac{n!}{n^{n}}$

แนะนำ : $\lim(1+\frac{1}{n})^{n} = e$

12. $\sum \frac{3^{n}}{n!}$

13. $\sum \frac{n^{3}}{2^{n}}$

14. $\sum \frac{n^{3}}{2^{n}+5}$

15. $\sum \frac{n^{2}}{n!}$

16. $\sum \frac{(n+1)^{2}}{n!}$

17. $\sum \frac{(n+2)^{n}}{n^{2n}}$

18. $\sum \frac{n}{2^{n}}$

19. $\sum 2^{n} e^{-n}$

20. $\sum n^{n} e^{-n}$

21. $\sum n! e^{-n}$

22 . (Raabe's Test) กำหนด $c_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n

ก. สมมุติ มีจำนวนจริง $a > 1$ และ $K > 0$ ซึ่ง $\frac{c_{n+1}}{c_n} \le 1 - \frac{a}{n}$

ทุกจำนวนนับ $n \ge K$ จงพิสูจน์ว่า อนุกรม Σc_n ลู่เข้า

(แนะนำ : $(k-1)\, c_k - k c_{k+1} \ge (a-1)\, c_k$ ทุกจำนวนนับ $k \ge K$)

ข. สมมุติ มีจำนวนจริง $a \le 1$ และ $K > 0$ ซึ่ง $\frac{c_{n+1}}{c_n} \ge 1 - \frac{a}{n}$

ทุกจำนวนนับ $n \ge K$ จงพิสูจน์ว่า อนุกรม Σc_n ลู่ออก

(แนะนำ : (nc_{n+1}) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น เมื่อ $n \ge K$)

23 จงใช้แบบฝึกหัด 3.2 ข้อ22 พิสูจน์ว่า ถ้า (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงที่ไม่เป็นศูนย์

และ $a = \lim n\,(1 - \frac{|x_{n+1}|}{|x_n|})$

แล้วอนุกรม Σx_n ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $a > 1$ และ
ไม่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $a < 1$