บทที่ 2
ลำดับ
(Sequences)

นิยาม 2.1 ลำดับ (Sequences) ของจำนวนจริงคือฟังก์ชันซึ่งมีโดเมน (Domain) เป็นเซต ของจำนวนนับ N และ พิสัย (Range) เป็นเซตย่อยของจำนวนจริ J

กล่าวคือ ถ้า $X : N \to R$ แล้ว X คือลำดับของจำนวนจริง และแต่ละจำนวนนับ n เรียก X (n) ว่า สมาชิก (element) ของลำดับ หรือ ค่า (value) ของลำดับ

โดยทั่วไปนิยมเขียน x_n หรือ a_n หรือ z_n แทน X(n) และลำดับ X มักเขียนแทนด้วย (x_n) หรือ (a,) หรือ (z_n)

และ $\{x_n \mid n \in N\}$ คือเซ็ตของค่า (value) ของลำดับ X

ตัวอย่าง 2.1 กำหนด $(x_n) = ((-1)^n)$

ดังนั้น $(x_n) = (-1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$

และ $\{x_n \mid n \in N\} = \{-1, 1\}$

กำหนด $(y_n) = (2n)$

ดังนั้น $(y_n) = (2,4,6,8,10, \ldots)$

และ $\{y_n \mid n \in N\} = \{2,4,6,8,10,\ldots\}$

กำหนด $(z_n) = (1 + \frac{1}{10^n})$

ดังนั้น $(z_n) = (1.1, 1.01, 1.001, 1.0001,\ldots)$

และ $\{z_n \mid n \in N\} = \{1.1, 1.01, 1.001, 1.0001,\ldots\}$ #

ตัวอย่าง 2.2 กำหนด b เป็นจำนวนจริง และลำดับ $B = (b,b,b,\ldots)$ เรียก B ว่าเป็นลำดับค่าคงตัว (the constant sequence)

นิยาม 2.2 ถ้า $X = (x_n)$ และ $Y = (y_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง แล้วผลบวก (sum) ของลำดับคือ $X + Y = (x_n + y_n)$

ผลต่าง (difference) ของลำดับคือ $X - Y = (x_n - y_n)$ และถ้า c เป็นจำนวนจริง ลำดับ $cX = (cx_n)$

ลำดับผลคูณ (product) คือ XY = (xnyn)

และถ้า $Z = (z_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $z_n \neq 0$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

$$\frac{X}{Z} = \left(\frac{x_n}{z_n}\right)$$

ตัวอย่าง 2.3 กำหนด $X = (2n)$ และ $Y = \left(\frac{1}{n}\right)$

ดังนั้น $X + Y = \left(3, \frac{9}{2}, \frac{19}{3}, \ldots, \frac{2n^2+1}{n}, \ldots\right)$

$X - Y = \left(1, \frac{7}{2}, \frac{17}{3}, \ldots, \frac{2n^2-1}{n}, \ldots\right)$

$XY = (2,2,2,\ldots)$ ซึ่งเป็นลำดับค่าคงตัว

$3x = (6,12,18,\ldots,6n,\ldots)$

$\frac{X}{Y} = (2,8,18,\ldots,2n^2,\ldots)$

#

2.1 ลิมิตของลำดับ (Limit of the Sequences)

นิยาม 2.3 กำหนด x เป็นจำนวนจริง และ $X = (x_n)$ เป็นลำดับใด ๆ จะกล่าวว่า x เป็นลิมิตของลำดับ X เมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมีจำนวนนับ n_ε ซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq n_\varepsilon$ แล้ว $|x_n - x| < \varepsilon$

และถ้า x เป็นลิมิตของลำดับ $X = (x_n)$ แล้วมักเขียนแทนด้วย $\lim x_n = x$ หรือ $x_n \to x$

หมายเหตุ ถ้า X เป็นลำดับที่หาลิมิตได้เรียก X ว่าเป็นลำดับลู่เข้า (convergent sequence) และถ้า X เป็นลำดับที่หาลิมิตไม่ได้เรียก X ว่าเป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence)

ทฤษฎีบท 2.1 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว X มีลิมิตได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น

พิสูจน์ ให้ x, x' เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\lim x_n = x$ และ $\lim x_n = x'$ กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยนิยาม 2.3 มีจำนวนนับ N_1 และ N_2 โดยที่ ถ้า n เป็นจำนวนนับ และ $n \geq N_1$ แล้ว $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ และถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ n 2 N_2 แล้ว $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $N = \max\{N_1, N_2\}$

ให้ n เป็นจำนวนนับโดยที่ n 2 N ดังนั้น $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|x_n - x'| < \frac{\varepsilon}{2}$

และ $|x - x'| = |x_n - x' - x_n + x| \leq |x_n - x'| + |x - x_n|$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้น $|x - x'| < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริงบวก ε

นั่นคือ $|x - x'| = 0$ และ $x = x'$

#

ตัวอย่าง 2.4 $\lim \frac{1}{n} = 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22 จะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

ดังนั้นสำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|\frac{1}{n} - 0| \leq |\frac{1}{n_0} - 0| < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim \frac{1}{n} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.5 $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22 จะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < \sqrt{\varepsilon}$

ดังนั้น สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ซึ่ง $n \geq n_0$ แล้ว

$$|\frac{1}{n^2} - 0| \leq |\frac{1}{n_0^2} - 0| < \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim \frac{1}{n^2} = 0$

#

นิยาม 2.4 ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง M เป็นจำนวนนับใด ๆ
กำหนด ลำดับ $X_M = (x_{M+n} \mid n \in N)$

ตัวอย่าง 2.6 ให้ $X = (2,4,6,8,\ldots,2n,\ldots)$ แล้ว

$$X_3 = (8,10,12,\ldots,2n + 6,\ldots)$$

ทฤษฎีบท 2.2 ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง M เป็นจำนวนนับแล้ว ลำดับ X_M จะเป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อลำดับ X เป็นลำดับลู่เข้า และ

$$\lim X_M = \lim X$$

พิสูจน์ ให้ได้ชัดแจ้งจากนิยามของลิมิตของลำดับ

#

ทฤษฎีบท 2.3 กำหนด $A = (a_n)$ และ $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ c เป็นจำนวนจริงบวกโดยที่ $|x_n - x| \leq c\,|a_n|$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า $\lim a_n = 0$ **แล้ว** $\lim x_n = x$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\lim a_n = 0$ จะมีจำนวนนับ K_A ซึ่งถ้า $n \geq K_A$ แล้ว

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{c}$

ให้ n เป็นจำนวนนับโดยที่ $n \geq K_A$ แล้วได้ว่า

$|x_n - x| \leq c\,|a_n| < c\frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim x_n = x$

#

ตัวอย่าง 2.7 ถ้า $a > 0$ แล้ว $\lim \frac{1}{1 + na} = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $a > 0$ ดังนั้น $0 < na < 1 + na$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $0 < \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้นโดยทฤษฎีบท 2.3 เนื่องจาก $\frac{1}{a} > 0$ และ $\lim \frac{1}{n} = 0$

จึงได้ว่า $\lim \frac{1}{1 + na} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.8 $\lim \frac{1}{2^n} = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\frac{1}{2^n} < \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n โดยทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่า

$\lim \frac{1}{2^n} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.9 ถ้า $0 < b < 1$ แล้ว $\lim b^n = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $0 < b < 1$ จึงสามารถเขียน $b = \frac{1}{1 + a}$ โดยที่ $a > 0$ ได้

และจากอสมการของแบร์นูลลี (Bernoulli's Inequality) ได้ว่า

$(1 + a)^n \geq 1 + na$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $0 < b^n \leq \frac{1}{1 + na} < \frac{1}{na}$ ทุกจำนวนนับ n

และโดยทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่า $\lim b^n = 0$

#

ตัวอย่าง 2.10 ถ้า $c > 0$ แล้ว $\lim c^{1/n} = 1$

พิสูจน์ กรณี $c = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\lim c^{1/n} = 1$

กรณี $c > 1$ เขียน $c^{1/n} = 1 + d_n$ โดยที่ $d_n > 0$

ดังนั้น โดยอสมการของแบร์นูลลี

$$c = (1 + d_n)^n \geq 1 + nd_n \text{ ทุกจำนวนนับ } n$$

นั่นคือ $c - 1 \geq nd_n$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้น $|c^{1/n} - 1| = |d_n| \leq (c-1)\frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะว่า $\lim \frac{1}{n} = 0$ และ $c - 1 > 0$ โดยทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่า $\lim c^{1/n} = 1$

กรณี $0 < c < 1$ เขียน $c^{1/n} = \frac{1}{1 + h_n}$ โดยที่ $h_n > 0$

ดังนั้นโดยอสมการของแบร์นูลลี

$$c = \frac{1}{(1 + h_n)^n} \leq \frac{1}{1 + nh_n} < \frac{1}{nh_n} \text{ ทุกจำนวนนับ } n$$

นั่นคือ $0 < h_n < \frac{1}{nc}$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้น $0 < |1 - c^{1/n}| = \left|\frac{h_n}{1 + h_n}\right| < |h_n| < \frac{1}{nc}$ ทุกจำนวนนับ n

โดยทฤษฎีบท 2.3 ได้ว่า $\lim c^{1/n} = 1$

#

ตัวอย่าง 2.11 $\lim n^{1/n} = 1$

พิสูจน์ เขียน $n^{1/n} = 1 + k_n$ โดยที่ $k_n \geq 0$

นั่นคือ $n = (1 + k_n)^n$

โดยทฤษฎีบททวินาม (Binomial's theorem) ได้ว่า

$$n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \ldots + \geq 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$$

ดังนั้น $n - 1 \geq \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2$

เพราะฉะนั้น $k_n^2 \leq \frac{2}{n}$ ทุกจำนวนนับ n

กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22 จะมีจำนวนนับ n_ε ซึ่ง $\frac{2}{n_\varepsilon} < \varepsilon^2$

เลือก $n_0 = \max\{2, n_\varepsilon\}$ จะได้ว่า $\frac{2}{n} < \varepsilon^2$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

นั่นคือ $k_n^2 \leq \frac{2}{n} < \varepsilon^2$ หรือ $k_n < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

เพราะฉะนั้น $0 \le n^{1/n} - 1 = k_n < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \ge n_0$

ดังนั้น $\lim n^{1/n} = 1$

#

แบบฝึกหัด 2.1

1. นิยามลำดับ (x_n) โดยสูตรต่อไปนี้ จงเขียน 5 เทอมแรกของลำดับ

   ก. $x_n = 1 + (-1)^n$

   ข. $x_n = (-1)^n n$

   ค. $x_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$

   ง. $x_n = \dfrac{1}{n^2 + 2}$

2. จงเขียนเทอม x_n ของลำดับ (x_n) ต่อไปนี้

   ก. $(5, 7, 9, 11, \ldots)$

   ข. $\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{-1}{16}, \ldots\right)$

   ค. $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\right)$

   ง. $(1, 4, 9, 16, \ldots)$

3. จงเขียน 5 เทอมแรกของลำดับซึ่งนิยาม โดยสูตรต่อไปนี้

   ก. $x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3x_n + 1$

   ข. $y_1 = 2,\ y_{n+1} = \frac{1}{2}\left(y_n + \frac{2}{y_n}\right)$

   ค. $z_1 = 1,\ z_2 = 2,\ z_{n+2} = \dfrac{z_{n+1} + z_n}{z_{n+1} - z_n}$

   ง. $s_1 = 3,\ s_2 = 5,\ s_{n+2} = s_n + s_{n+1}$

4. สำหรับจำนวน b ใด ๆ จงพิสูจน์ว่า $\lim \frac{b}{n} = 0$

5. จงใช้นิยามของลิมิตของลำดับพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   ก. $\lim \dfrac{1}{n^2 + 1} = 0$

ข. $\lim \frac{2n}{n + 1} = 2$

ค. $\lim \left(\frac{3n + 1}{2n + 5}\right) = \frac{3}{2}$

ง. $\lim \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + 3}\right) = \frac{1}{2}$

6. จงพิสูจน์

ก. $\lim \frac{1}{\sqrt{n + 7}} = 0$

ข. $\lim \frac{2n}{n + 2} = 2$

ค. $\lim \frac{\sqrt{n}}{n + 1} = 0$

ง. $\lim \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1} = 0$

7. กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $\lim x_n = x$ และ $x > 0$ จงพิสูจน์ว่า จะมีจำนวนนับ M ซึ่ง $x_n > 0$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geqslant M$

8. จงพิสูจน์ว่า

$$\lim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right) = 0$$

9. ถ้า b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0 < b < 1$ จงพิสูจน์ว่า $\lim nb^n = 0$
(แนะนำ : ใช้ทฤษฎีบททวินาม ดังตัวอย่าง 2.11.)

10. จงพิสูจน์ว่า $\lim (2n)^{1/n} = 1$

11. จงพิสูจน์ว่า $\lim \frac{n^2}{n!} = 0$

12. จงพิสูจน์ว่า $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$

(แนะนำ ถ้า $n \geq 3$ แล้ว $0 < \frac{2^n}{n!} \leq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$)

2.2 ทฤษฎีบทของลิมิต (Limit Theorems)

นิยาม 2.5 ลำดับ $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต (bounded sequence) เมื่อสามารถหาจำนวนจริง $M > 0$ ได้ที่ทำให้ $|x_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือลำดับ $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต เมื่อ $\{x_n | n \in N\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต

ตัวอย่าง 2.12 ก. ลำดับค่าคงตัวเป็นลำดับที่มีขอบเขต

ข. $((-1)^n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

เนื่องจาก $\left|x_n\right| = \left|((-1)^n)\right| = 1 \leq 1$

ค. $(\frac{1}{n})$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

เนื่องจาก $\left|x_n\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1$

ทฤษฎีบท 2.4 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว X เป็นลำดับที่มีขอบเขต

พิสูจน์ กำหนด $\lim x_n = x$ ดังนั้น จะสามารถหาจำนวนนับ n_0 ได้ซึ่งถ้า n เป็นจำนวนนับและ $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - x| < 1$

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_0$ ดังนั้น

$$|x_n| = |x_n - x + x| \leq |x_n - x| + |x| < 1 + |x|$$

นั่นคือ $|x_n| < 1 + |x|$ ทุก ๆ $n \geq n_0$

เลือก $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{n_0-1}|, 1 + |x|\}$

ดังนั้น $M > 0$ และ $|x_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

#

ทฤษฎีบท 2.5 กำหนด $X = (x_n)$ $Y = (y_n)$ และ $Z = (z_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $z_n \neq 0$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

ก. ถ้า $\lim x_n = x$ และ $\lim y_n = y$ แล้ว จะได้ว่า

$\lim x_n + y_n = x + y$ และ $\lim x_n - y_n = x - y$

ข. ถ้า $\lim x_n = x$ และ $\lim y_n = y$ แล้ว $\lim x_n y_n = xy$

ค. ถ้า $\lim x_n = x$ และ $\lim z_n = z \neq 0$ แล้ว $\lim \frac{x_n}{z_n} = \frac{x}{z}$

ง. ถ้า c ถ้าเป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\lim x_n = x$ แล้ว $\lim cx_n = cx$

พิสูจน์ ก. กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ n_1 และ n_2 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่า

ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_1$ แล้ว $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$

และถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_2$ แล้ว $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

เลือก $k = \max\{n_1, n_2\}$

ดังนั้นสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq k$ แล้ว จะได้ว่า

$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq k$ ดังนั้น

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

และ $$|(x_n - y_n) - (x - y)| \leq |x_n - x| + |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim x_n + y_n = x + y$ และ $\lim x_n - y_n = x - y$

ข. เนื่องจาก X เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 2.4 ให้ M เป็นจำนวนจริง โดยที่ $M > 0$ และ $|x_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ $M' = \max\{M, |y|\}$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M'}$ และ $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M'}$

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_0$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x_n y + x_n y - xy| \\ &\leq |x_n(y_n - y)| + |(x_n - x)y| \\ &\leq |x_n|\,|y_n - y| + |x_n - x|\,|y| \\ &< M'\frac{\varepsilon}{2M'} + \frac{\varepsilon}{2M'} \cdot M' = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim x_n y_n = xy$

ค. เนื่องจาก X เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 1.20 และทฤษฎีบท 2.4 ให้ M' เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $|x_n| \leq M'$ ทุกจำนวนนับ n $\frac{1}{|z|} < M'$ และ $|x| < M'$

เพราะว่า $\lim z_n = z$ ดังนั้นจะมีจำนวนนับ k ซึ่งถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq k$ แล้ว

$$|z_n - z| < \frac{|z|}{2}$$

นั่นคือ สำหรับจำนวนนับ $n \geq k$

$$|z| = |z - z_n + z_n| \leq |z - z_n| + |z_n| < \frac{|z|}{2} + |z_n|$$

นั่นคือ $|z_n| > \frac{|z|}{2}$ ทุกจำนวนนับ $n \geq k$

ให้ $K = 2M'$ จะได้ว่า $|x_n| < K$ ทุกจำนวนนับ n, $\frac{1}{|z|} < K$

$|x| < K$ และ $\frac{1}{z_n} < K$ ทุกจำนวนนับ $n \geq k$

กำหนด $\varepsilon > 0$ และ n_0 เป็นจำนวนนับ โดยที่ ถ้า n เป็นจำนวนนับใด ๆ ที่ $n \geq n_0$ แล้ว

$|z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2K^3}$, และ $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2K}$

เลือก $n_1 = \max\{n_0, k\}$

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_1$ แล้ว

$$\begin{aligned}\left|\frac{x_n}{z_n} - \frac{x}{z}\right| &= \left|\frac{x_n}{z_n} - \frac{x_n}{z} + \frac{x_n}{z} - \frac{x}{z}\right| \\ &\leq |x_n| \frac{|z - z_n|}{|z_n|\,|z|} + \frac{1}{|z|}|x_n - x| \\ &< K^3 \frac{\varepsilon}{2K^3} + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} = \varepsilon\end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim \frac{x_n}{z_n} = \frac{x}{z}$

ง. ผลจาก ข. โดยที่ ให้ (y_n) เป็นลำดับค่าคงตัว $(c, c, c, \ldots)$ #

ทฤษฎีบท 2.6 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $x_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

$\lim x_n \geq 0$

พิสูจน์ ให้ $\lim x_n = x$ และ สมมุติ $x < 0$

ดังนั้น จะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่งถ้า n เป็นจำนวนนับ และ $n \geq n_0$ แล้ว

$|x_n - x| < -x$

นั่นคือ $x < x_n - x < -x$ หรือ $2x < x_n < 0$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ซึ่งขัดแย้งกับกำหนดให้ ดังนั้น $\lim x_n = x \geq 0$

#

ทฤษฎีบท 2.7 ถ้า $X = (x_n)$ และ $Y = (y_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $x_n \leq y_n$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว $\lim x_n \leq \lim y_n$

พิสูจน์ ให้ $Z = (z_n) = Y - X$

ดังนั้น $z_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n

โดยทฤษฎีบท 2.6 $\lim z_n = \lim y_n - \lim x_n \geq 0$

นั่นคือ $\lim x_n \leq \lim y_n$

#

ทฤษฎีบท 2.8 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $a \leq x_n \leq b$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

$a \leq \lim x_n \leq b$

พิสูจน์ ให้ Y เป็นลำดับค่าคงที่ $(a, a, a, \ldots, \ldots)$ และ Z เป็นลำดับค่าคงที่ $(b, b, b, \ldots)$ โดยทฤษฎีบท 2.7 $a \leq \lim x_n \leq b$

#

ทฤษฎีบท 2.9 กำหนด $X = (x_n)$ $Y = (y_n)$ และ $Z = (z_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n \leq y_n \leq z_n$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า $\lim x_n = \lim z_n$ แล้ว Y เป็นลำดับลู่เข้า และ

$\lim x_n = \lim y_n = \lim z_n$

พิสูจน์ ให้ $w = \lim x_n = \lim z_n$

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - w| < \varepsilon$ และ $|z_n - w| < \varepsilon$

เนื่องจาก $x_n \leq y_n \leq z_n$ ทุกจำนวนนับ n ดังนั้น

$x_n - w \leq y_n - w \leq z_n - w$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_0$

ถ้า $y_n - w \geq 0$ จะได้ว่า $|y_n - w| = y_n - w \leq z_n - w \leq |z_n - w| < \varepsilon$

และถ้า $y_n - w < 0$ จะได้ว่า $|y_n - w| = w - y_n \leq w - x_n \leq |x_n - w| < \varepsilon$

นั่นคือ $|y_n - w| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$ ดังนั้น $\lim y_n = w$

ตัวอย่าง 2.13 (n) เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ ถ้า (n) ลำดับลู่เข้าแล้ว โดยทฤษฎีบท 2.4 จะมีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $n = |n| \leq M$

ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.20

ตัวอย่าง 2.14 $((-1)^n)$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ เนื่องจาก $\{(-1)^n \mid n \in N\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขต

ดังนั้น $((-1)^n)$ จึงอาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออกก็ได้

สมมุติ $\lim (-1)^n = a$ และให้ $\varepsilon = 1$

จะมีจำนวนนับ K ซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq K$ แล้ว

$|(-1)^n - a| < 1$

กรณี n เป็นเลขคี่ จะได้ว่า $|-1-a| < 1$ หรือ $-2<a<0$

กรณี n เป็นเลขคู่ จะได้ว่า $|1-a| < 1$ หรือ $0<a<2$

ซึ่งขัดแย้งกัน

ดังนั้น $((-1)^n)$ จึงต้องเป็นลำดับลู่ออก

#

ตัวอย่าง 2.15 $\lim \frac{2n+1}{n} = 2$

พิสูจน์ ให้ X เป็นลำดับค่าคงตัว (2, 2, 2,...) และ $Y = (\frac{1}{n})$

ดังนั้น $X + Y = (\frac{2n+1}{n})$

และ $\lim X + Y = \lim X + \lim Y = 2 + 0 = 2$

#

ตัวอย่าง 2.16 $\lim \frac{2n+1}{n+5} = 2$

พิสูจน์ เนื่องจากลำดับ $(2n+1)$ และ ลำดับ $(n+5)$ เป็นลำดับลู่ออก ดังนั้นจึงไม่สามารถใช้ทฤษฎีบท 2.5 โดยตรงได้

$$\text{แต่ } \frac{2n+1}{n+5} = \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{5}{n}}$$

ให้ $X = (2 + \frac{1}{n})$ และ $Y = (1 + \frac{5}{n})$

ดังนั้น $\lim X = 2$ และ $\lim Y = 1 \neq 0$

เพราะฉะนั้น $\lim \frac{2n+1}{n+5} = \lim \frac{X}{Y} = 2$

#

ตัวอย่าง 2.17 $\lim \frac{2n}{n^2+1} = 0$

พิสูจน์ ให้ $X = (\frac{2}{n})$ และ $Y = (1 + \frac{1}{n^2})$

จะได้ว่า $\lim X = 0$ และ $\lim Y = 1 \neq 0$

ดังนั้น $\lim \frac{2n}{n^2+1} = \lim \frac{X}{Y} = 0$

ตัวอย่าง 2.18 $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

พิสูจน์ เนื่องจาก $-1 \leq \sin n \leq 1$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n

โดยทฤษฎีบท 2.9 ได้ว่า $\lim \frac{\sin n}{n} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.19 กำหนด (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $\lim x_n = x$
ให้ p เป็นพหุนาม (polynomial) กล่าวคือ

$$p(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

โดยที่ k เป็นจำนวนนับ และ a_j เป็นจำนวนจริงสำหรับ $j = 0, 1, 2, \ldots, k$

โดยทฤษฎีบท 2.5 ได้ว่า $\lim p(x_n) = p(x)$

#

ตัวอย่าง 2.20 กำหนด (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $\lim x_n = x$
ให้ r เป็นฟังก์ชันตรรกยะ กล่าวคือ

$$r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$$ โดยที่ p และ q เป็นพหุนาม

สมมุติว่า $q(x_n) \neq 0$ ทุกจำนวนนับ n และ $q(x) \neq 0$
โดยทฤษฎีบท 2.5 ได้ว่า $\lim r(x_n) = r(x)$

#

ทฤษฎีบท 2.10 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $\lim x_n = x$ แล้ว
$\lim |x_n| = |x|$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 1.16 ได้ว่า $\big||x_n| - |x|\big| \leq |x_n - x|$ ทุกจำนวนนับ n
กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n

ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - x| < \varepsilon$

นั่นคือ $|\,|x_n| - |x|\,| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ดังนั้น $\lim |x_n| = |x|$

#

ทฤษฎีบท 2.11 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n ถ้า $\lim x_n = x$ แล้ว $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x}$

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.6 จะได้ว่า $x \geq 0$ ดังนั้นจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณีคือ กรณี $x = 0$ และ $x > 0$

กรณี $x = 0$

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - 0| < \varepsilon^2$

ดังนั้น จะได้ว่า $|\sqrt{x_n} - 0| < \varepsilon$ ทุก $n \geq n_0$

นั่นคือ $\lim \sqrt{x_n} = \sqrt{x} = 0$

กรณี $x > 0$

เนื่องจาก
$$\sqrt{x_n} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x_n} - \sqrt{x})(\sqrt{x_n} + \sqrt{x})}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}} = \frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}$$

และ $\sqrt{x_n} + \sqrt{x} \geq \sqrt{x} \geq 0$

ดังนั้น

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| = \left|\frac{x_n - x}{\sqrt{x_n} + \sqrt{x}}\right| \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}}$$

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่า ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq n_0$ แล้ว $|x_n - x| < \varepsilon\sqrt{x}$

เพราะฉะนั้น

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{x}| \leq \frac{|x_n - x|}{\sqrt{x}} < \frac{\varepsilon\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \varepsilon$$

สำหรับทุก $n \geq n_0$

นั่นคือ $\lim \sqrt{x_n} \quad = \quad \sqrt{x}$

#

ทฤษฎีบท 2.12 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n และ $L = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$

ถ้า $L < 1$ แล้ว $X = (x_n)$ จะเป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim x_n = 0$

พิสูจน์ อาศัยทฤษฎีบท 1.9 กำหนด r เป็นจำนวนจริงโดยที่ $L < r < 1$

ให้ K เป็นจำนวนนับที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ ถ้า $n \geq K$ แล้ว

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} - L \right| < r - L$$

เพราะฉะนั้น $\frac{x_{n+1}}{x_n} < r$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือสำหรับจำนวนนับ $n \geq K$

$$0 < x_{n+1} < x_n r < x_{n-1} r^2 < \ldots < x_K r^{n-K+1}$$

ให้ $c = \frac{x_K}{r^K}$ จะได้ว่า $0 < x_{n+1} < c r^{n+1}$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

เนื่องจาก $0 < r < 1$ จากตัวอย่าง 2.9 ได้ว่า $\lim r^{n+1} = 0$ และโดยทฤษฎีบท 2.2 และทฤษฎีบท 2.3 $\lim x_n = 0$

#

ตัวอย่าง 2.21 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$x_n = \frac{n}{2^n} \text{ ทุกจำนวนนับ } n$$

เนื่องจาก $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ และ $\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} < 1$

โดยทฤษฎีบท 2.12 ได้ว่า $\lim x_n = 0$

แบบฝึกหัด 2.2

1. สำหรับ x_n ซึ่งกำหนดโดยสูตรต่อไปนี้ จงพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับ $x = (x_n)$

   ก. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$

   ข. $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

   ค. $x_n = \dfrac{n^2}{n+1}$

   ง. $x_n = \dfrac{2n^2+3}{n^2+1}$

2. จงยกตัวอย่างลำดับลู่ออก X และ Y โดยที่ ลำดับ X + Y เป็นลำดับลู่เข้า
3. จงยกตัวอย่างลำดับลู่ออก X และ Y โดยที่ลำดับ XY เป็นลำดับลู่เข้า
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า X และ Y เป็นลำดับ โดยที่ X และ X + Y เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว ลำดับ Y ต้องเป็นลำดับลู่เข้า
5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า X และ Y เป็นลำดับ โดยที่ $\lim X = x \neq 0$ และ XY เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว Y เป็นลำดับลู่เข้า
6. จงแสดงว่าลำดับ (2^n) ไม่เป็นลำดับลู่เข้า
7. จงแสดงว่าลำดับ $((-1)^n n^2)$ ไม่เป็นลำดับลู่เข้า
8. จงหาค่าลิมิตของลำดับต่อไปนี้

   ก. $\lim \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)^2$

   ข. $\lim \dfrac{(-1)^n}{n+2}$

   ค. $\lim \dfrac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1}$

   ง. $\lim \dfrac{n+1}{n\sqrt{n}}$

9. แต่ละจำนวนนับ n ให้ $y_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

จงพิสูจน์ว่าลำดับ (y_n) และ $(\sqrt{n}\, y_n)$ ลู่เข้า

10. ถ้า $z_n = (a^n + b^n)^{1/n}$ โดยที่ $0<a<b$ จงพิสูจน์ว่า $\lim z_n = b$

11. กำหนด a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $0<a<1$ และ $b>1$

จงใช้ทฤษฎีบท2.12 พิจารณาลำดับของจำนวนจริงต่อไปนี้

ก. (a^n)

ข. $\left(\frac{b^n}{2^n}\right)$

ค. $\left(\frac{n}{b^n}\right)$

ง. $\left(\frac{2^{3n}}{3^{2n}}\right)$

12. จงพิจารณาการลู่เข้าของลำดับต่อไปนี้ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง และ $0<a<1,\ b>1$

ก. $(n^2 a^n)$

ข. $\left(\frac{b^n}{n^2}\right)$

ค. $\left(\frac{b^n}{n!}\right)$

ง. $\left(\frac{n!}{n^n}\right)$

13. จงพิสูจน์ว่า $\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}$

14. จงพิสูจน์ว่า $\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n} = 0$

15. จงพิสูจน์ว่า $\lim \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{2}$

2.3 ลำดับทางเดียว (Monotone Sequences)

นิยาม 2.6 กำหนด X เป็นลำดับของจำนวนจริง เรากล่าวว่า X **เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น** (increasing sequence) เมื่อ $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$

และกล่าวว่า X **เป็นลำดับค่าลดลง** (decreasing sequence) เมื่อ

$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots$

ในกรณีที่ X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น หรือลำดับค่าลดลง เรากล่าวว่า X เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence)

ตัวอย่าง 2.22 ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

ก. $(1,2,3,4,\ldots,n,\ldots)$

ข. $(3,3,5,5,7,7,\ldots)$

ค. (10^n)

ตัวอย่าง 2.23 ลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับค่าลดลง

ก. $(\frac{1}{n})$

ข. $(\frac{1}{10^n})$

ค. $(1 + \frac{1}{10^n})$

ตัวอย่าง 2.24 ลำดับต่อไปนี้ไม่เป็นลำดับทางเดียว

ก. $((-1)^n)$

ข. $((-1)^n n)$

ค. $(7,6,4,3,1,2,3,4,\ldots)$

ทฤษฎีบท 2.13 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับทางเดียว (monotone sequence) แล้ว X จะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อ X เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นอกจากนั้น

ก. ถ้า X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น และมีขอบเขตแล้ว $\lim x_n = \sup \{ x_n | n \in N \}$

ข. ถ้า X เป็นลำดับค่าลดลงและมีขอบเขตแล้ว $\lim x_n = \inf \{ x_n \mid n \in N \}$

พิสูจน์ กำหนด X เป็นลำดับลู่เข้า โดยทฤษฎีบท 2.4 X เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ในทางกลับกัน กำหนด X เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ก. X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

ให้ M เป็นจำนวนจริง โดยที่ $M > 0$ และ $x_n \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ $x^* = \sup \{ x_n \mid n \in N \}$

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ K เป็นจำนวนนับ โดยที่ $x^* - \varepsilon < x_K$

เพราะว่า $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots$

ดังนั้น $x^* - \varepsilon < x_K \leq x_n \leq x^* < x^* + \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $| x_n - x^* | < \varepsilon$ ทุก $n \geq K$

ดังนั้น $\lim x_n = x^* = \sup \{ x_n \mid n \in N \}$

ข. X เป็นลำดับค่าลดลง

เนื่องจาก X เป็นลำดับที่มีขอบเขตดังนั้น $Y = -X = (-x_n)$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น และมีขอบเข

ดังนั้น $\lim Y = -\lim X = \sup \{ -x_n \mid n \in N \}$

เพราะว่า $\sup \{ -x_n \mid n \in N \} = -\inf \{ x_n \mid n \in N \}$

ดังนั้น $\lim x_n = -\lim Y = \inf \{ x_n \mid n \in N \}$

#

ตัวอย่าง 2.25 $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

พิสูจน์ เนื่องจากลำดับ $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตและมีค่าลดลง

จะแสดงว่า $0 = \inf \{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N \}$

ให้ a เป็นขอบเขตล่างใด ๆ ของเซต $\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N \}$

สมมุติ $a > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.20 ให้ k เป็นจำนวนนับซึ่ง $\frac{1}{a^2} < k$

นั่นคือ $\frac{1}{\sqrt{k}} < a$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ a เป็นขอบเขตล่างของ $\{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N \}$

ดังนั้น $a \leq 0$ นั่นคือ $0 = \inf \{ \frac{1}{\sqrt{n}} \mid n \in N \}$

โดยทฤษฎีบท 2.13 $\lim \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

#

ตัวอย่าง 2.26 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

เนื่องจาก $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = x_n + \frac{1}{n+1} > x_n$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้นลำดับ (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

และสำหรับจำนวนนับ n ใด ๆ

$$x_{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^{n-1}+1} + \ldots + \frac{1}{2^n})$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^n})$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2} = 1 + \frac{n}{2}$$

นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับไม่มีขอบเขต ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับลู่ออก #

ตัวอย่าง 2.27 ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_1 = 1$

และ $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$ สำหรับจำนวนนับ $n \geq 1$

แล้ว $\lim x_n = \frac{3}{2}$

พิสูจน์ เพราะว่า $x_1 < x_2 < 2$ จะแสดงว่า $x_n < 2$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $x_k < 2$

ดังนั้น $x_{k+1} = \frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{1}{4}(4 + 3) = \frac{7}{4} < 2$

โดยทฤษฎีบท 1.12 $x_n < 2$ ทุกจำนวนนับ n

ดังนั้น (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ต่อไปจะแสดงว่า (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

เพราะว่า $x_1 < x_2 < 2$

สมมุติให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $x_k < x_{k+1}$

ดังนั้น $2x_k + 3 < 2x_{k+1} + 3$

และ $x_{k+1} = \frac{1}{4}(2x_k + 3) < \frac{1}{4}(2x_{k+1} + 3) = x_{k+2}$

โดยทฤษฎีบท 1.12 $x_n < x_{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.13 ได้ว่า $\lim x_n \leq 2$

และเนื่องจากเป็นการลำบากที่จะหาค่าขอบเขตบนต่ำสุดของ $\{ x_n \mid n \in N \}$ จึงต้องใช้ทฤษฎีบทอื่นมาช่วยหาค่า $\lim x_n$

โดยทฤษฎีบท 2.2 และ ทฤษฎีบท 2.5

$$x = \lim X_1 = \lim X = \lim \frac{1}{4}(2x_n + 3)$$

$$= \frac{1}{4}(2 \lim x_n + 3) = \frac{1}{4}(2x + 3)$$

ซึ่งทำให้ได้ $x = \frac{3}{2}$ ดังนั้น $\lim x_n = \frac{3}{2}$ #

ตัวอย่าง 2.28 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ แล้ว $\lim x_n = 2$

พิสูจน์ เนื่องจาก $x_1 = 1,\ x_2 = \sqrt{2}$

ดังนั้น $1 \le x_1 < x_2 < 2$

จะแสดงว่า (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น และ 2 เป็นขอบเขตบนของ $\{ x_n \mid n \in N \}$

โดยทฤษฎีบทอุปนัย สมมุติว่า $1 \le x_k < x_{k+1} < 2$ สำหรับจำนวนนับ k

ดังนั้น $2 \le 2x_k < 2x_{k+1} < 4$ นั่นคือ $1 < \sqrt{2} \le \sqrt{2x_k} < \sqrt{2x_{k+1}} < 2$

เพราะฉะนั้น $1 < \sqrt{2} \le x_{k+1} < x_{k+2} < 2$

โดยทฤษฎีบท 1.12 $1 \le x_n \le x_{n+1} < 2$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือลำดับ (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้นและมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.13 $\lim x_n = \sup\{x_n \mid n \in N\} \le 2$

จะแสดงว่า $\lim x_n = 2$ อาศัยทฤษฎีบท 2.2 และทฤษฎีบท 2.5

$$x = \lim X_1 = \lim X = \lim \sqrt{2x_n} = \sqrt{2x}$$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x = 2$

เนื่องจาก 0 ไม่ใช่ขอบเขตบนของ $\{ x_n \mid n \in N \}$ ดังนั้น $\lim x_n = 2$

#

ตัวอย่าง 2.29 ถ้า $a > 0$ แล้วสามารถสร้างลำดับ $A = (a_n)$ ได้โดยที่ $\lim a_n = \sqrt{a}$

พิสูจน์ เลือก a_1 เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a_1 > 0$

และให้ $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

จะแสดงว่า $a_n^2 \geq a$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

เนื่องจากแต่ละ a_n สอดคล้องกับเงื่อนไขของสมการกำลังสอง $a_n^2 - 2a_{n+1}a_n + a = 0$

นั่นคือ สมการ $a_n^2 - 2a_{n+1}a_n + a = 0$ มีรากเป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $4a_{n+1}^2 - 4a \geq 0$

นั่นคือ $a_{n+1}^2 \geq a$ ทุกจำนวนนับ n

หรือ กล่าวได้ว่า $a_n^2 \geq a$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

สำหรับจำนวนนับ $n \geq 2$

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a_n^2 - a}{a_n}\right) \text{r-0}$$

นั่นคือ $a_{n+1} \leq a_n$ ทุกจำนวนนับ $n \geq 2$

เพราะฉะนั้น $\sqrt{a} \leq \ldots \leq a_{n+1} \leq a_n \leq \ldots \leq \ldots \leq a_2$

นั่นคือ ลำดับ $A_1 = (a_{n+1})$ เป็นลำดับค่าลดลงและมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.13 ลำดับ (a_{n+1}) เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งทำให้ได้ว่า (a_n) เป็นลำดับลู่เข้าด้วย

ให้ $x = \lim a_n$ ดังนั้น $x > 0$ เนื่องจาก $\sqrt{a}$ เป็นขอบเขตล่างของ $\{a_{n+1}\}$

โดยทฤษฎีบท 2.5 $\quad x = \lim a_n = \lim \frac{1}{2}(a_n + \frac{a}{a_n})$

$$= \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$$

นั่นคือ $x = \frac{a}{x}$ หรือ $x^2 = a$ ซึ่งได้ว่า $x = \sqrt{a}$

เพราะฉะนั้น $\lim a_n = \sqrt{a}$

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนด $x_1 > 1$ และ $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$ สำหรับ $n \geq 2$
   จงแสดงว่า (x_n) เป็นลำดับทางเดียว และมีขอบเขต พร้อมทั้งหาค่าลิมิตของ (x_n)
2. กำหนด $y = 1$ และ $y_{n+1} = \sqrt{2 + y_n}$ จงแสดงว่า ลำดับ (y_n) ลู่เข้า และหาค่าของลิมิตของ (y_n)
3. กำหนด $a > 0$ และ $z_1 > 0$ ให้ $z_{n+1} = (a + z_n)^{1/2}$ สำหรับ จำนวนนับ n
   จงพิสูจน์ว่า ลำดับ (z_n) ลู่เข้า และหาค่าลิมิตของ (z_n)
4. ให้ $x_1 = a > 0$ และ $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ จงพิจารณาว่าลำดับ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก
5. ให้ (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต และสำหรับแต่ละจำนวนนับ n
   ให้ $s_n = \sup \{ x_k \mid k \geq n \}$ และ
   $t_n = \inf \{ x_k \mid k \geq n \}$ จงพิสูจน์ว่า ลำดับ (s_n) และ (t_n) เป็นลำดับลู่เข้า
   และถ้า $\lim s_n = \lim t_n$ แล้ว (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า
6. กำหนด A เป็นเซตอนันต์ และมีขอบเขตข้างบน ให้ $u = \sup A$
   จงพิสูจน์ว่า จะมีลำดับค่าเพิ่มขึ้น (x_n) โดยที่ $x_n \in A$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = u$
7. กำหนด $y_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n}$ ทุกจำนวนนับ n
   จงพิจารณาว่า ลำดับ (y_n) เป็นลำดับลู่เข้า หรือลำดับลู่ออก
8. สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $x_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$
   จงแสดงว่าลำดับ (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า โดยแสดงว่า (x_n) เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้นและมีขอบเขต
   (แนะนำ : ถ้า $k \geq 2$ แล้ว $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$)
9. จงหาค่าลิมิตของลำดับต่อไปนี้

   ก. $\left((1 + \frac{1}{n})^{n+1} \right)$

   ข. $\left((1 + \frac{1}{n})^{2n} \right)$

fl. $\left(\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}\right)$

ง. $\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\right)$

10. จงใช้วิธีเดียวกับตัวอย่าง 2.29 หาค่าประมาณของ $\sqrt{2}$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมอันดับสี่
11. จงใช้วิธีเดียวกับตัวอย่าง 2.29 หาค่าประมาณของ $\sqrt{5}$ ให้ถูกต้องถึงทศนิยมอันดับห้า

2.4 **ลำดับย่อย** (Subsequences)

นิยาม 2.7 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และให้ (r_k) เป็นลำดับของจำนวนนับที่มีค่าเพิ่มขึ้นโดยแท้ กล่าวคือ $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_k < r_{k+1}$ ...

ให้ X ' เป็นลำดับขอ งจำนวนจริ ง โดยที่

$$X' = (x_{r_1}, x_{r_2}, \dots, x_{r_k}, \dots)$$

เรียก X' ว่าเป็นลำดับย่อย (subsequence) ของ X

ตัวอย่าง 2.30 ให้ $X = \left(\frac{1}{n}\right)$ แล้วลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับย่อยของ X ทั้งสิ้น

ก. $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{\ }{n+2}, \dots\right)$

ข. $\left(1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2n-1}, \dots\right)$

ค. $\left(\frac{1}{2!}, \frac{1}{4!}, \dots, \frac{1}{(2n)!}, \dots\right)$

และลำดับต่อไปนี้ไม่ใช่ลำดับย่อยของ X

ง. $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \dots\right)$

จ. $\left(1, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{5}, 0, \dots\right)$

ตัวอย่าง 2.31 สำหรับลำดับ $X = (x_n)$ ใด ๆ ลำดับ X_M เป็นลำดับย่อยของ X เสมอ

ตัวอย่าง 2.32 ให้ $X = ((-1)^n)$

ลำดับ (1, 1, 1,...) และ (-1, -1, -1,....)

เป็นลำดับย่อยของ X #

จากตัวอย่าง 2.32 แสดงให้เห็นว่า X เป็นลำดับลู่ออก แต่มีลำดับย่อยของ X ที่เป็นลำดับลู่เข้า กล่าวคือ ถ้า X เป็นลำดับลู่ออกใด ๆ และ X′ เป็นลำดับย่อยของ X แล้ว X′ อาจเป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้ แต่ถ้า X เป็นลำดับลู่เข้า ทุกลำดับย่อยของ X ต้องเป็นลำดับลู่เข้าเสมอ ดังจะได้แสดงให้เห็นในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.14 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $X' = (x_{r_k})$ เป็นลำดับย่อยของ X ถ้า $\lim x_n = x$ แล้ว $\lim x_{r_k} = x$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$ $|x_n - x| < \varepsilon$

เนื่องจาก $r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_k < r_{k+1} < \dots$

ดังนั้นจะได้ว่า $r_k \geq k$ ทุกจำนวนนับ k

ดังนั้น ถ้า $k \geq n_0$ จะได้ $r_k \geq k \geq n_0$

นั่นคือ $|x_{r_k} - x| < \varepsilon$ ทุกจำนวนนับ $k \geq n_0$

เพราะฉะนั้น $\lim x_{r_k} = x$ #

ตัวอย่าง 2.33 กำหนด $0 < b < 1$ แล้ว $\lim b^n = 0$

พิสูจน์ ได้พิสูจน์ให้เห็นแล้ว ในตัวอย่าง 2.9 ว่า $\lim b^n = 0$ ถ้า $0 < b < 1$ โดยอาศัยอสมการของแบร์นูลลี่ แต่ในตัวอย่างนี้จะพิสูจน์ให้เห็นโดยวิธีอื่น

เนื่องจาก $0 < b < 1$ ดังนั้น $b^{n+1} < b^n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n นั่นคือ ลำดับ (b^n) เป็นลำดับค่าลดลง

และเนื่องจาก $0 < b^n < 1$ ทุกจำนวนนับ n ลำดับ (b^n) จึงเป็นลำดับค่าลดลงและมีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.13 ลำดับ (b^n) เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $x = \lim b^n = \inf \{ b^n \mid n \in N \}$

เนื่องจาก (b^{2n}) เป็นลำดับย่อยของ (b^n)

โดยทฤษฎีบท 2.14 ได้ว่า $x = \lim b^{2n} = \lim b^n$

และเนื่องจาก $b^{2n} = (b^n)^2$

โดยทฤษฎีบท 2.5 ได้ว่า $x = \lim b^{2n} = \lim (b^n)^2 = x^2$

ดังนั้น $x = 0$ หรือ $x = 1$

เนื่องจาก $x = \inf \{ x_n \mid n \in N \}$ และ 1 เป็นขอบเขตบนของ $\{ x_n \mid n \in N \}$

จึงได้ว่า $x = 0$ นั่นคือ $\lim b^n = 0$

#

แบบฝึกหัด 2.4

1. สมมุติว่าทุกลำดับย่อยของ $X = (x_n)$ มีลำดับย่อยที่ลู่เข้าสู่ 0 จงพิสูจน์ว่า $\lim x_n = 0$
2. สมมุติว่า (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต โดยที่ $x_m \neq x_n$ ถ้า $n \neq m$
   ถ้า $\{ x_n \mid n \in N \}$ มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว จงพิสูจน์ว่า (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า
3. ให้ (x_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต และแต่ละจำนวนนับ n ให้ $s_n = \sup \{ x_k \mid k \geq n \}$
   และ $s = \inf \{ s_n \mid n \in N \}$ จงพิสูจน์ว่ามีลำดับย่อย X' ของ (x_n) โดยที่ $\lim X' = s$
4. สมมุติว่า $x_n \geq 0$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim (-1)^n x_n$ หาค่าได้ จงพิสูจน์ว่า ลำดับ (x_n) ลู่เข้า
5. ให้ F เป็นเซตปิดใน R โดยที่ $0 \notin F$ จงพิสูจน์ว่าจะมี $x_0 \in F$ ซึ่ง
   $|x_0| = \inf \{ |x| \mid x \in F \}$

เกณฑ์ของการลู่ออก (Divergence Criterion)

จากนิยามของลำดับลู่เข้า จะทำให้ได้เกณฑ์ของลำดับลู่ออก ดังนี้

ทฤษฎีบท 2.15 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน (the following statement are equivalent)

ก. ลำดับ $X = (x_n)$ ไม่ลู่เข้าหาจำนวนจริง x

ข. มีจำนวนจริง $\varepsilon_0 > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k มีจำนวนนับ r_k ซึ่ง $r_k \geq k$ และ $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$

ค. มีจำนวนจริง $\varepsilon_0 > 0$ และลำดับย่อย $X = (x_{r_k})$ ของ X ซึ่ง $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ k

พิสูจน์ สมมุติ $\lim x_n \neq x$

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $\varepsilon_0 > 0$ โดยที่ไม่สามารถหาจำนวนนับ K ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $|x_n - x| < \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$ ได้

นั่นคือสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k จะมีจำนวนนับ r_k ซึ่ง $r_k \geq k$ และ $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$

สมมุติว่ามีจำนวนจริง $\varepsilon_0 > 0$ ซึ่งสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ k มีจำนวนนับ r_k ซึ่ง $r_k \geq k$ และ $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$

ให้ r_1 เป็นจำนวนนับ โดยที่ $r_1 \geq 1$ และ $|x_{r_1} - x| \geq \varepsilon_0$

ให้ r_2 เป็นจำนวนนับ โดยที่ $r_2 \geq r_1 + 1$ และ $|x_{r_2} - x| \geq \varepsilon_0$

ดังนั้น จะได้ $r_2 \geq 2$

ให้ r_3 เป็นจำนวนนับ โดยที่ $r_3 \geq r_2 + 1$ และ $|x_{r_3} - x| \geq \varepsilon_0$

ดังนั้น $r_3 \geq 3$

โดยทฤษฎีบทอุปนัย จะได้ลำดับย่อย $X' = (x_{r_k})$ ของ X ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ k

สมมุติว่าลำดับ $X = (x_n)$ มีลำดับย่อย $X' = (x_{r_k})$ และจำนวนจริง $\varepsilon_0 > 0$ ซึ่ง $|x_{r_k} - x| \geq \varepsilon_0$

ถ้า $\lim x_n = x$ โดยทฤษฎีบท 2.14 $\lim x_{r_k} = x$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ ดังนั้น $\lim x_n \neq x$

#

ตัวอย่าง 2.34 **ลำดับ** $((-1)')$ **เป็นลำดับลู่ออก**

พิสูจน์ สมมุติลำดับ $((-1)')$ **เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่** $\lim (-1)' = x$

เนื่องจาก $x = (1, 1, 1, \ldots)$ **และ** $Y = (-1, -1, -1, \ldots)$ **เป็นลำดับย่อยของ** $((-1)^n)$

โดยทฤษฎีบท 2.14 $\lim X = \lim Y = \lim (-1)^n = x$

แต่ $\lim X = I$ **และ** $\lim Y = -1$

ดังนั้นจึงเป็นไปไม่ได้ที่ลำดับ $((-1)^n)$ **จะเป็นลำดับลู่เข้า**

#

ตัวอย่าง 2.35 ลำดับ $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$ เป็นลำดับลู่ออก

พิสูจน์ ให้ $X = (x_n) = (1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$

ดังนั้น $x_n = \begin{cases} n & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคี่} \\ \frac{1}{n} & \text{ถ้า } n \text{ เป็นเลขคู่} \end{cases}$

เนื่องจากลำดับ (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต **ดังนั้น** โดยผลของทฤษฎีบท 2.4 ลำดับ $(1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, \ldots)$ เป็นลำดับลู่ออก

#

ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano-Weierstars's theorem)

ดังได้พิสูจน์ให้เห็นแล้วจากทฤษฎีบท 2.4 ว่า ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว X ต้องเป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่ไม่ได้หมายความว่า ทุกลำดับที่มีขอบเขตจะต้องเป็นลำดับลู่เข้า เช่น ลำดับ $((-1)^n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่เป็นลำดับลู่ออก แต่สังเกตได้อีกอย่างหนึ่งว่า ลำดับ $((-1)^n)$ มีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งข้อสังเกตนี้เป็นจริงสำหรับทุกลำดับของจำนวนจริงที่มีขอบเขต ดังจะได้พิสูจน์ให้เห็นต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.16 ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ สำหรับลำดับของจำนวนจริง ทุกลำดับของจำนวนจริงที่เป็นลำดับที่มีขอบเขตจะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

และ $S = \{ x_n \mid n \in N \}$ เป็นเซตของค่า (value) ของ X

เนื่องจาก S เป็นเซตจำกัดหรือเป็นเซตอนันต์ จึงจะแบ่งการพิสูจน์ออกเป็นสองกรณี

กรณี S เป็นเซตจำกัด

จะต้องมีสมาชิกของ S อย่างน้อยหนึ่งตัว ซึ่งสมมุติว่าเป็น s ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $x_n = s$ สำหรับจำนวนนับ n มากมายเป็นจำนวนอนันต์ (infinitely many value of n)

ให้ $r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_k < r_{k+1} < ...$ เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้นของจำนวนนับ โดยที่ $x_{r_k} = s$ ทุกจำนวนนับ k ดังนั้นลำดับย่อย (x_{r_k}) ลู่เข้าสู่ s

กรณี S เป็นเซตอนันต์

ดังนั้น S เป็นเซตอนันต์ที่มีขอบเขต โดยทฤษฎีบท 1.28 Sต้องมีจุดลิมิต ให้ x เป็นจุดลิมิตของ S จะแสดงว่ามีลำดับย่อย X′ ของ X ลู่เข้าหา x

ให้ $U_1 = (x - 1, x + 1)$ ดังนั้น U_1 เป็น 1 – neighborhood ของ x เนื่องจาก x เป็นจุดลิมิตของ S ให้ $x_{r_1} \in U_1 \cap S$ โดยที่ $x_{r_1} \neq x$

ดังนั้น $| x_{r_1} - x | < 1$

ให้ $U_2 = (x - \frac{1}{2} , x + \frac{1}{2})$ และ $S_1 = \{ x_n \mid n > r_1 \}$

จะได้ x เป็นจุดลิมิตของ S_1 ด้วย ทั้งนี้เนื่องจาก ถ้า x ไม่ใช่จุดลิมิตของ S_1

จะมีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N^*_\varepsilon(x) \cap S_1 = \phi$

นั่นคือสามารถหาจำนวนนับ k ได้ซึ่ง $k \leq r_1$ และ $x_k \in N^*_\varepsilon(x)$

ให้ $S^* = \{ | x - x_k | \mid k \leq r_1$ และ $| x - x_k | > 0 \}$

ดังนั้น S^* เป็นเซตจำกัด ให้ $\varepsilon_0 = \min S^*$ ดังนั้น $\varepsilon_0 > 0$ เลือก $\varepsilon_1 = \min \{ \varepsilon_0, \varepsilon \}$ ดังนั้น $\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq | x - x_n |$ ทุกจำนวนนับ $n > r_1$ และสำหรับจำนวนนับ $n \leq r_1$ ถ้า $x \neq x_n$, $\varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 \leq | x - x_n |$

นั่นคือ $x_n \notin N^*_{\varepsilon_1}(x)$ ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติการเป็นจุดลิมิตของ x

ดังนั้น x เป็นจุดลิมิตของ S_1

เลือก $x_{r_2} \in S_1 \cap U_2$ โดยที่ $x_{r_2} \neq x$ ดังนั้น $r_2 > r_1$ และ $| x_{r_2} - x | < \frac{1}{2}$

และโดยทั่วไปสำหรับจำนวนนับ k ให้ $U_k = (x - \frac{1}{k} , x + \frac{1}{k})$

โดยทฤษฎีบทอุปนัย จะได้ $X' = (x_{r_k})$ เป็นลำดับย่อยของ X โดยที่

$| x_{r_k} - x | < \frac{1}{k}$ ทุกจำนวนนับ k

กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22 ให้ n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$

ดังนั้น ถ้า k เป็นจำนวนนับ โดยที่ $k \geq n_0$ แล้ว $|x_{r_k} - x| < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$

นั่นคือ $\lim x_{r_k} = x$

#

ต่อไปจะได้กล่าวถึงเซตปิดใน R ในเทอมของลำดับ ดังจะได้แสดงให้เห็นในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 2.17 กำหนด F เป็นเซตย่อยของ R ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

ก. F เป็นเซตปิดใน R

ข. ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าใด ๆ โดยที่ $x_n \in F$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว $\lim x_n \in F$

พิสูจน์ กำหนด F เป็นเซตปิดใน R

ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้า โดยที่ $x_n \in F$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim x_n = x$

สมมุติ $x \notin F$ นั่นคือ $x \in R - F$ ซึ่งเป็นเซตเปิดใน R

ดังนั้น จะมีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ โดยที่ $N_\varepsilon(x) \subseteq R - F$

เนื่องจาก $\lim x_n = x$ ให้ n_0 เป็นจำนวนนับซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq n_0$

ต้องได้ว่า $|x_n - x| < \varepsilon$

นั่นคือ $x_n \in N_\varepsilon(x) \subseteq R - F$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เนื่องจาก $x_n \in F$ ทุก ๆ จำนวนนับ n ดังนั้น $x \in F$

ในทางกลับกัน สมมุติ F ไม่เป็นเซตปิดใน R นั่นคือ R – F ไม่เป็นเซตเปิดใน R

ให้ $G = R - F$ และ $y_0 \in G$ โดยมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$

$N_\varepsilon(y_0) \nsubseteq G$

ดังนั้นสำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ y_n เป็นจำนวนจริง โดยที่ $y_n \in R - G = F$ และ

$|y_0 - y_n| < \frac{1}{n}$

เพราะฉะนั้น $Y = (y_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $y_n \in F$ ทุกจำนวนนับ n

และ $\lim y_n = y_0$ แต่ $y_0 \in G = R - F$ ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติข้อ ข.

ดังนั้น F จึงเป็นเซตปิดใน R

#

ทฤษฎีบทที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้เป็นผลต่อเนื่องของทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตารสส์ และทฤษฎีบท 2.17

ทฤษฎีบท 2.18 กำหนด K เป็นเซตปิดใน R โดยที่ K เป็นเซตที่มีขอบเขต แล้วทุกทุกลำดับ $X = (x_n)$ โดยที่ $x_n \in K$ ทุกจำนวนนับ n จะมีลำดับย่อย X' โดยที่ X' เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim X' \in K$

พิสูจน์ เนื่องจาก K เป็นเซตที่มีขอบเขต

ดังนั้น ให้ M เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $|x| \le M$ ทุก $x \in K$

เนื่องจาก $x_n \in K$ ทุกจำนวนนับ n ดังนั้น $X = (x_n)$ เป็นลำดับ ที่มีขอบเขต

โดยทฤษฎีบท 2.16 ลำดับ X จะมีลำดับย่อย X' ที่เป็นลำดับลู่เข้า และโดยทฤษฎีบท 2.17 $\lim X' \in K$

#

ทฤษฎีบท 2.19 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต และ x เป็นจำนวนจริงที่มีคุณสมบัติว่า $\lim X' = x$ สำหรับทุกลำดับย่อย X' ของ X ที่เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว จะได้ว่า $\lim X = x$

พิสูจน์ ให้ M เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $|x_n| \le M$ ทุกจำนวนนับ n

สมมุติ $\lim x_n \ne x$ โดยทฤษฎีบท 2.15 ให้ ε_0 เป็นจำนวนจริงบวก และ $X' = (x_{r_k})$ เป็นลำดับย่อยของ X โดยที่ $|x_{r_k} - x| \ge \varepsilon_0$ ทุกจำนวนนับ k

ให้ $K = [-M, x - \varepsilon_0] \cup [x + \varepsilon_0, M]$

ดังนั้น K เป็นเซตปิด และมีขอบเขต และ $x_{r_k} \in K$ ทุกจำนวนนับ k

โดยทฤษฎีบท 2.18 ให้ X'' เป็นลำดับย่อยของ X' โดยที่ X'' เป็นลำดับลู่เข้า และ $\lim X'' \in K$

เนื่องจาก X'' เป็นลำดับย่อยของ X' และ X' เป็นลำดับย่อยของ X ดังนั้น X'' จึงเป็นลำดับย่อยของ X ด้วย

โดยคุณสมบัติของ X จะได้ $\lim X'' = x$ นั่นคือ $x \in K$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $\lim x_n = x$

#

2.5 ลำดับโคชี (Cauchy Sequences)

นิยาม 2.8 ลำดับ $X = (x_n)$ เรียกว่าเป็นลำดับโคชี (Cauchy Sequence) ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$ สามารถหาจำนวนนับ $K(\varepsilon)$ ได้ซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n,m ถ้า $n,m \ge K(\varepsilon)$ แล้ว $|x_n - x_m| < \varepsilon$

ทฤษฎีบท 2.20 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว X เป็นลำดับโค่ชี

พิสูจน์ ให้ $\lim x_n = x$ และ ε เป็นจำนวนจริงบวก
ดังนั้นจะมีจำนวนนับ K ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $| x_n - x | < \frac{\varepsilon}{2}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq K$

ให้ n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n, m \geq K$
ดังนั้น $| x_n - x_m | = | x_n - x + x - x_m | \leq | x_n - x | + | x - x_m |$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

นั่นคือ (x_n) เป็นลำดับโคชี #

ทฤษฎีบท 2.21 ทุกลำดับโคชีเป็นลำดับที่มีขอบเขต

พิสูจน์ ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี และ $\varepsilon = 1$
ให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n, m \geq k$

$| x_n - x_m | < 1$

ให้ n เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $n \geq k$ ดังนั้น $| x_n - x_k | < 1$
โดยทฤษฎีบท 1.16 $| x_n | \leq | x_k | + 1$ ทุกจำนวนนับ $n \geq k$

ให้ $M = \max \{ | x_1 |, | x_2 |, \ldots, | x_{k-1} |, | x_k | + 1 \}$

ดังนั้น $M > 0$ และ $| x_n | \leq k$ ทุก ๆ จำนวนนับ n

นั่นคือ $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต #

ทฤษฎีบท 2.22 ลำดับของจำนวนจริงจะเป็นลำดับลู่เข้าก็ต่อเมื่อลำดับนั้นเป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ โดยทฤษฎีบท 2.20 ถ้า $X = (x_n)$ เป็นลำดับลู่เข้าแล้ว X เป็นลำดับโคชี

ในทางกลับกัน ให้ $X = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี

โดยทฤษฎีบท 2.21 $X = (x_n)$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.16 $X = (x_n)$ จะมีลำดับย่อยที่เป็นลำดับลู่เข้า

ให้ $X' = (x_{r_k})$ เป็นลำดับย่อยของ X โดยที่ $\lim x_{r_k} = x^*$

จะพิสูจน์ว่า $\lim x_n = x^*$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $X = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี และ $\lim x_{r_k} = x^*$

จะมีจำนวนนับ K ซึ่ง $| x_n - x_m | < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุกจำนวนนับ $n, m \geq K$

และ $| x_{r_k} - X^* | < \frac{\varepsilon}{2}$ ทุกจำนวนนับ $k \geq K$

ให้ k เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $k \geq K$ ดังนั้น $r_k \geq k \geq K$ และ

$$|x_n - x_{r_k}| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq K$$

โดยทฤษฎีบท 1.16 ถ้า n เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n \geq K$ แล้ว

$$\begin{aligned} |x_n - x^*| &= |x_n - x_{r_k} + x_{r_k} - x^*| \\ &\leq |x_n - x_{r_k}| + |x_{r_k} - x^*| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

นั่นคือ $\lim x_n = x^*$

#

ตัวอย่าง 2.36 จากตัวอย่าง 2.4 พบว่าลำดับ $(\frac{1}{n})$ เป็นลำดับลู่เข้า ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 2.20 ลำดับ $(\frac{1}{n})$ เป็นลำดับโคชี

แต่ในที่นี้จะพิสูจน์ให้เห็นว่า ลำดับ $(\frac{1}{n})$ เป็นลำดับโคชี โดยนัยแห่งนิยาม 2.8

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$

โดยทฤษฎีบท 1.19 ให้ K เป็นจำนวนนับ ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $K < \frac{2}{\varepsilon}$

ให้ n, m เป็นจำนวนนับ โดยที่ $n, m \geq K$

ดังนั้น $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{K}$ และ $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{K}$

และ $\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} \leq \frac{2}{K} < \varepsilon$

นั่นคือลำดับ $(\frac{1}{n})$ เป็นลำดับโคชี

#

ตัวอย่าง 2.37 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ และ

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$$

แล้ว $x = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ ก่อนอื่นจะพิสูจน์ว่า $| x_n - x_{n+1} | = \frac{1}{2^{n-1}}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

เนื่องจาก $| x_1 - x_2 | = 1 = \frac{1}{2^0}$

ดังนั้น $| x_n - x_{n+1} | = \frac{1}{2^{n-1}}$ เป็นจริงเมื่อ n = 1

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ m $| x_k - x_{k+1} | = \frac{1}{2^{k-1}}$ ทุกจำนวนนับ k ซึ่ง $1 \leq k < m$

พิจารณา $| x_m - x_{m+1} |$

เนื่องจาก
$$
\begin{aligned}
| x_m - x_{m+1} | &= \frac{1}{2} | x_{m-2} - x_m | \\
&= \frac{1}{2} | x_{m-2} - \frac{1}{2} x_{m-2} - \frac{1}{2} x_{m-1} | \\
&= \frac{1}{4} | x_{m-2} - x_{m-1} | \\
&= \frac{1}{4} \frac{1}{2^{m-3}} = \frac{1}{2^{m-1}}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.13 $| x_n - x_{n+1} | = \frac{1}{2^{n-1}}$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้นสำหรับจำนวนนับ n, m ถ้า m > n แล้วจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|x_n - x_m| &\leq | x_n - x_{n+1} | + | x_{n+1} - x_{n+2} | + \ldots + | x_{m-1} - x_m | \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-2}} \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right) < \frac{1}{2^{n-1}} .2 = \frac{1}{2^{n-2}}
\end{aligned}
$$

กำหนด $\varepsilon < 0$ ให้ K เป็นจำนวนนับ โดยที่ $\frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{4}$

ดังนั้นสำหรับจำนวนนับ n, m ถ้า $m > n$ และ $n, m > K$ แล้ว จะได้ว่า

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{4}{2^n} \leq \frac{4}{2^K} < \varepsilon$$

นั่นคือ : $x = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี #

ตัวอย่าง 2.38 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$x_1 = \frac{1}{1!}, \quad x_2 = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!}$$

และ $x_n = \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ ทก $n > 2$ แล้ว X เป็นลำดับโคชี

พิสูจน์ สำหรับจำนวนนับ n, m ถ้า $m > n$ แล้ว

$$x_m - x_n = \frac{(-1)^{n+2}}{(n+1)!} + \frac{(-1)^{n+3}}{(n+2)!} + \cdots + \frac{(-1)^{m+1}}{m!}$$

เนื่องจาก $2^{r-1} \leq r!$ สำหรับทุกจำนวนนับ r

ดังนั้น ถ้า $m > n$ จะได้ว่า

$$|x_m - x_n| \leq \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \ldots + \frac{1}{m!}$$

$$\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{m-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

กำหนด $\varepsilon > 0$ ให้ K เป็นจำนวนนับ โดยที่ $\frac{1}{2^K} < \frac{\varepsilon}{2}$

ดังนั้น สำหรับจำนวนนับ n, m ถ้า $n, m \geq K$ แล้ว

$$|x_m - x_n| \leq \frac{2}{2^K} < \varepsilon$$

นั่นคือ $X = (x_n)$ เป็นลำดับโคชี

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงยกตัวอย่างลำดับที่มีขอบเขต ที่ไม่ใช่ลำดับโคชี
2. จงพิสูจน์ว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับโคชี

   ก. $\left(\frac{n+1}{n}\right)$

   ข. $\left(1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$
3. จงพิสูจน์ว่าลำดับต่อไปนี้ไม่เป็นลำดับโคชี

   ก. $((-1)^n)$

   ข. $\left(n + \frac{(-1)^n}{n}\right)$
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับโคชีแล้ว $(x_n + y_n)$ และ $(x_n y_n)$ เป็นลำดับโคชีด้วย
5. กำหนด (x_n) เป็นลำดับโคชี โดยที่ x_n เป็นจำนวนเต็มทุกจำนวนนับ n
   จงพิสูจน์ว่า จะมีจำนวนนับ K และจำนวนจริง c ซึ่ง $x_n = c$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$
6. จงพิสูจน์ว่า ลำดับค่าเพิ่มขึ้น และมีขอบเขตเป็นลำดับโคชี
7. ถ้า $x_1 < x_2$ เป็น จำนวนจริงใด ๆ และ $x_n = \frac{1}{2}(x_{n-2} + x_{n-1})$ สำหรับ $n > 2$
   จงพิสูจน์ว่า (x_n) เป็นลำดับลู่เข้า

a. ถ้า $y_1 < y_2$ เป็น จำนวนจริงใด ๆ และ $y_n = \frac{1}{3} y_{n-1} + \frac{2}{3} y_{n-2}$ สำหรับ $n > 2$
   จงพิสูจน์ว่า (y_n) เป็นลำดับลู่เข้า

2.6 ลำดับลู่ออกแท้ (Properly Divergent Sequences)

ต่อไปจะได้อธิบายถึงความหมายของการที่ลำดับ (x_n) โน้มสู่ค่า $\pm\infty$ (tend to $\pm\infty$)

นิยาม 2.9 กำหนด (x_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง

ก. เรากล่าวว่าลำดับ (x_n) โน้มสู่ค่า ∞ (tends to ∞) และเขียน $\lim x_n = \infty$ ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง α สามารถหาจำนวนนับ K ได้ ซึ่งถ้า $n \geq K$ แล้ว $x_n > \alpha$

ข. เรากล่าวว่าลำดับ (x_n) โน้มสู่ค่า $-\infty$ (tend to $-\infty$) และเขียน $\lim x_n = -\infty$ ถ้าสำหรับทุก ๆ จำนวนจริง β สามารถหาจำนวนนับ K ได้ ซึ่งถ้า $n \geq K$ แล้ว $x_n < \beta$

และกล่าวว่าลำดับ (x_n) ลู่ออกโดยแท้ (properly divergent) ในกรณีที่ $\lim x_n = \infty$ หรือ $\lim x_n = -\infty$

ตัวอย่าง 2.39 $\lim n = \infty$

พิสูจน์ กำหนด α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

และให้ K เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $K > \alpha$

ดังนั้น $x_n = n \geq K > \alpha$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $\lim n = \infty$

#

ตัวอย่าง 2.40 $\lim n^2 = \infty$

พิสูจน์ กำหนด α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ให้ K เป็นจำนวนนับ โดยที่ $K > \alpha$

ดังนั้น $x_n = n^2 \geq n > \alpha$ ทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq K$

นั่นคือ $\lim n^2 = \infty$

#

ตัวอย่าง 2.41 ถ้า c เป็นจำนวนจริง โดยที่ $c > 1$ แล้ว $\lim c^n = \infty$

พิสูจน์ เขียน $c = 1 + b$ โดยที่ $b > 0$

กำหนด α เป็นจำนวนจริงใด ๆ และให้ K เป็นจำนวนนับโดยที่ $K > \frac{\alpha}{b}$

โดยอสมการของแบร์นูลลี ได้ว่า $c^n = (1 + b)^n > 1 + nb$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $c^n \geq 1 + nb \geq 1 + Kb > \alpha$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \geq K$

เพราะฉะนั้น $\lim c^n = \infty$

#

ทฤษฎีบท 2.23 กำหนด $X = (x_n)$ เป็นลำดับทางเดียว (Monotone sequence) แล้ว $X = (x_n)$ จะเป็นลำดับลู่ออกโดยแท้ ก็ต่อเมื่อ X เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต และนอกจากนั้น

ก. ถ้า X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้นแล้ว $\lim x_n = \infty$

ข. ถ้า X เป็นลำดับค่าลดลงแล้ว $\lim x_n = -\infty$

พิสูจน์ สมมุติ X เป็นลำดับลู่ออกโดยแท้
ถ้า X เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะมีจำนวนจริง $M>0$ ซึ่ง $|x_n| \leq M$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ สำหรับจำนวนนับ n $x_n \leq M$ หรือ $x_n \geq -M$ ซึ่งขัดแย้งกับการเป็นลำดับลู่ออกโดยแท้

ดังนั้น X เป็นลำดับไม่มีขอบเขต

ในทางกลับกันสมมุติ X เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต

ก. ถ้า X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น เนื่องจาก X เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต จะได้ว่า สำหรับทุกจำนวนจริง α จะมีจำนวนนับ $n(\alpha)$ ซึ่ง $\alpha < x_{n(\alpha)}$

และเนื่องจาก X เป็นลำดับค่าเพิ่มขึ้น จะได้ $\alpha < x_n$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n(\alpha)$
นั่นคือ $\lim x_n = \infty$

ข. ถ้า X เป็นลำดับค่าลดลง เนื่องจาก X เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต จะได้ว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง β จะสามารถหาจำนวนนับ $n(\beta)$ ได้ซึ่ง $x_{n(\beta)} < \beta$
เนื่องจาก X เป็นลำดับค่าลดลง ดังนั้น $x_n < \beta$ ทุกจำนวนนับ $n \geq n(\beta)$

นั่นคือ $\lim x_n = -\infty$

#

ทฤษฎีบท 2.24 ให้ (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $x_n \leq y_n$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

ก. ถ้า $\lim x_n = \infty$ แล้ว $\lim y_n = \infty$

ข. ถ้า $\lim y_n = -\infty$ แล้ว $\lim x_n = -\infty$

พิสูจน์ ก. กำหนด $\lim x_n = \infty$
ให้ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้นจะมีจำนวนนับ K ซึ่งมีคุณสมบัติว่าสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq K$ แล้ว $x_n > \alpha$

นั่นคือ $y_n \geq x_n > \alpha$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

เพราะฉะนั้น $\lim y_n = \infty$

ข. กำหนด $\lim y_n = -\infty$

ให้ β เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้นจะมีจำนวนนับ K ซึ่งมีคุณสมบัติว่า สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n ถ้า $n \geq K$ แล้ว $y_n < \beta$

นั่นคือ $x_n \leq y_n < \beta$ ทุกจำนวนนับ $n \geq K$

เพราะฉะนั้น $\lim x_n = -\infty$

#

หมายเหตุ 1. ทฤษฎีบท 2.24 ยังคงเป็นจริง ถ้า (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง และ n_0 เป็นจำนวนนับ โดยที่ $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ $n \ge n_0$

2. ถ้า (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงโดยที่ $x_n \le y_n$ ทุกจำนวนนับ n และ $\lim y_n = \infty$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $\lim x_n = \infty$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $\lim x_n = -\infty$ แล้ว ไม่จำเป็นที่ $\lim y_n = -\infty$

ทฤษฎีบท 2.25 กำหนด (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ

$\lim \frac{x_n}{y_n} = L$ โดยที่ L เป็นจำนวนจริงบวก แล้ว

$\lim x_n = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim y_n = \infty$

พิสูจน์ เนื่องจาก $\lim \frac{x_n}{y_n} = L$ และ $L > 0$

ดังนั้นจะมีจำนวนนับ K ซึ่ง

$\frac{1}{2} L < \frac{x_n}{y_n} < 2L$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ $n \ge K$

นั่นคือ $(\frac{1}{2} L)\, y_n < x_n < (2L)\, y_n$ ทุกจำนวนนับ $n \ge K$

ดังนั้นจากหมายเหตุ (1) หลังทฤษฎีบท 2.24 ได้ว่า $\lim x_n = \infty$ ก็ต่อเมื่อ $\lim y_n = \infty$

#

แบบฝึกหัด 2.6

1. ถ้า (x_n) เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า (x_n) มีลำดับย่อย ที่เป็นลำดับลู่ออกโดยแท้
2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x_n > 0$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว

   $\lim x_n = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim \frac{1}{x_n} = \infty$
3. จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่ออกโดยแท้

   ก. $(\sqrt{n})$

   ข. $(\sqrt{n+1})$

   ค. $(\sqrt{n-1})$

   ง. $\left(\frac{n}{\sqrt{n+1}}\right)$
4. จงพิจารณาว่าลำดับ $(n \sin n)$ เป็นลำดับลู่ออกโดยแท้หรือไม่
5. กำหนด (x_n) เป็นลำดับลู่ออกโดยแท้ และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $\lim x_n y_n$ หาค่าที่เป็นจำนวนจริงได้ จงพิสูจน์ว่า $\lim y_n = 0$
6. กำหนด (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ $\lim \frac{x_n}{y_n} = 0$

   ก. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim x_n = \infty$ แล้ว $\lim y_n = \infty$

   ข. จงพิสูจน์ว่า ถ้า (y_n) เป็นลำดับที่มีขอบเขต แล้ว $\lim x_n = 0$
7. จงพิจารณาการลู่เข้าหรือลู่ออกของลำดับต่อไปนี้

   ก. $(\sqrt{n^2+2})$

   ข. $\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}\right)$

   ค. $\left(\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}\right)$

   ง. $(\sin \sqrt{n})$
8. กำหนด (x_n) และ (y_n) เป็นลำดับของจำนวนจริงบวก และ $\lim \frac{x_n}{y_n} = \infty$

   ก. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\lim y_n = \infty$ แล้ว $\lim x_n = \infty$

   ข. จงพิสูจน์ว่า ถ้า (x_n) เป็นลำดับมีขอบเขตแล้ว $\lim y_n = 0$