บทที่ 1
จำนวนจริง
(Real Numbers)

จากความรู้ทางคณิตศาสตร์พื้นฐานทราบว่า เซตของจำนวนจริง R คือผลผนวก (union) ของเซตของจำนวนตรรกยะ Q (rational numbers) และเซตของจำนวนอตรรกยะ $\overline{Q}$ (irrational numbers) และถ้ากำหนด "+" และ "·" เป็นการดำเนินการทวิภาค (binary operations) บน R เรียก+ ว่าการบวก (addition) และ · ว่าการคูณ (multiplication) แล้วจะพบว่าเซตของจำนวนจริงจะมีคุณสมบัติต่อไปนี้

1.1 คุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริง (The Algebraic Properties of The Real Numbers)

1. $a+b = b+a$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b
2. $(a+b)+c = a+(b+c)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b, c
3. สามารถหาจำนวนจริง 0 ได้ซึ่ง $0+a = a+0 = a$ ทุกจำนวนจริง a
4. สำหรับแต่ละจำนวนจริง a สามารถหาจำนวนจริง $-a$ ได้ซึ่ง

   $a+(-a) = (-a)+a = 0$

   เรียก $-a$ ว่าเป็นตัวผกผัน (inverse) สำหรับการบวกของ a
5. $a \cdot b = b \cdot a$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b
6. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b, c
7. สามารถหาจำนวนจริง 1 ได้ซึ่ง $1 \neq 0$ และ

   $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ทุกจำนวนจริง a
8. สำหรับแต่ละจำนวนจริง $a \neq 0$ สามารถหาจำนวนจริง $\frac{1}{a}$ ได้ซึ่ง

   $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

   เรียก $\frac{1}{a}$ ว่าเป็นตัวผกผัน (inverse) สำหรับการคูณของ a
9. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ และ

   $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ ทุก ๆ จำนวนจริง a, b, c

ทฤษฎีบท 1.1 ก. ถ้า z, a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $z+a = a$ แล้ว $z = 0$

ข. ถ้า w, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $b \neq 0$ และ $w \cdot b = b$ แล้ว $w = 1$

พิสูจน์ ก)

$$\begin{aligned} 0 &= a+(-a) \\ &= (z+a) + (-a) \\ &= z+(a+(-a)) = z+0 = z \end{aligned}$$

ข)

$$\begin{aligned} 1 &= b \cdot \frac{1}{b} \\ &= (w \cdot b) \cdot \frac{1}{b} \\ &= w \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) = w \cdot 1 = w \end{aligned}$$

#

จากทฤษฎีบท 1.1 จะพบว่า มีจำนวนจริง 0 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่มีคุณสมบัติว่า $a+0 = 0+a = a$ สำหรับทุกจำนวนจริง a และมีจำนวนจริง 1 เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่มีคุณสมบัติว่า $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ ทุกจำนวนจริง a

ทฤษฎีบท 1.2 ก. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a+b = 0$ แล้ว $b = -a$

ข. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ และ $a \cdot b = 1$ แล้ว $b = \frac{1}{a}$

พิสูจน์ ก)

$$\begin{aligned} -a &= (-a)+0 \\ &= (-a) + (a+b) \\ &= (-a+a)+b = 0+b = b \end{aligned}$$

ข)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} &= \frac{1}{a} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) \\ &= \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = 1 \cdot b = b \end{aligned}$$

#

ทฤษฎีบท 1.2 แสดงให้เห็นว่าตัวผกผันการบวกและการคูณสำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ มีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 1.3 ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงแล้ว

n. $a.0 = 0 \cdot a = 0$

ข. $-a = (-1) \cdot a$

ค. $-(a+b) = (-a) + (-b)$

ง. $--(-a) = a$

จ. $(-1) \cdot (-1) = 1$

พิสูจน์ n) $a \cdot 0 + a = a + a \cdot 0$

$= a.1 + a \cdot 0$

$= a \cdot (1+0)$

$= a.1 = a$

ดังนั้นจากทฤษฎีบท 1.1 $a.0 = 0$

ข) $a+(-1)a = 1 \cdot a + (-1) \cdot a$

$= (1+(-1)) \cdot a$

$= 0 \cdot a = 0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.2 $(-1)a = -a$

ค) $-(a+b) = (-1) \cdot (a+b)$

$= (-1) \cdot a + (-1) \cdot b$

$= (-a) + (-b)$

ง) เนื่องจาก $(-a)+a = 0$

ดังนั้น จากทฤษฎีบท 1.2 $a = -(-a)$

จ) $(-1) \cdot (-1) = -(-1) = 1$

#

ทฤษฎีบท 1.4 n) ถ้า a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{a} \neq 0$ และ $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$

ข) ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \cdot b = 0$ แล้ว $a = 0$ หรือ $b = 0$

ค) ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงแล้ว $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

ง) ถ้า a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $\frac{1}{-a} = -\frac{1}{a}$

พิสูจน์ ก) ถ้า $\frac{1}{a} = 0$ แล้ว $1 = a\cdot\frac{1}{a} = a\cdot 0 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

'3) สมมุติ $a \neq 0$

ดังนั้น $b = 1\cdot b = \left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot b$

$$= \frac{1}{a}\cdot(a\cdot b) = \frac{1}{a}\cdot 0 = 0$$

ค) $(-a).(-b) = \big((-1)\cdot a\big) . \big((-1)\cdot b\big)$

$$= \big(a\cdot(-1)\big) . \big((-1)\cdot b\big)$$

$$= a\cdot\big((-1) . (-1)\cdot b\big)$$

$$= a\cdot(1\cdot b) = a\cdot b$$

ง) $(-a). \left(-\frac{1}{a}\right) = a\cdot\frac{1}{a} = 1$

ดังนั้น $\frac{1}{-a} = \frac{-1}{a}$ #

แบบฝึกหัด 1.1

1. ถ้า a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a\cdot a = a$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $a = 0$ หรือ $a = 1$
2. ถ้า $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $\frac{1}{(a\cdot b)} = \left(\frac{1}{a}\right)\cdot\left(\frac{1}{b}\right)$
3. ถ้า x และ y เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า $x+y$ และ xy เป็นจำนวนตรรกยะ
4. จงพิสูจน์ว่า ถ้า ξ เป็นจำนวนอตรรกยะ และ $r \neq 0$ เป็นจำนวนตรรกยะแล้ว $r+\xi$ และ $r\xi$ เป็นจำนวนอตรรกยะ
5. ถ้า x และ y เป็นจำนวนอตรรกยะแล้ว จงแสดงว่า $x+y$ และ xy ไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนอตรรกยะ

1.2 คุณสมบัติอันดับของจำนวนจริง (The Order Properties of Real Numbers)

นิยาม 1.1 กำหนด S เป็นเซตใด ๆ อันดับ (order) บนเซต S คือความสัมพันธ์ซึ่งเขียนแทนด้วย $<$ และมีคุณสมบัติต่อไปนี้คือ

1. ถ้า $x \in S$ และ $y \in S$ แล้ว ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงกรณีเดียวเท่านั้น คือ $x < y$, $x = y$ หรือ $y < x$

2. ถ้า $x, y, z \in S$ โดยที่ $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

หมายเหตุ 1. $x < y$ อ่านว่า x น้อยกว่า y (x is less than y)

2. $x \leqslant y$ หมายความว่า $x < y$ หรือ $x = y$

3. $x \leqslant y$ มีความหมายตรงข้ามกับ $y < x$

นิยาม 1.2 ถ้าสามารถนิยามอันดับ (order) บนเซต S ได้ เรียกเซต S ว่าเซตที่เป็นอันดับ (ordered set)

คุณสมบัติที่สำคัญอันหนึ่งของเซตของจำนวนจริง R ก็คือ สามารถหาเซตย่อย (subset) P ของ R ได้ ซึ่ง P ไม่ใช่เซตว่างและมีคุณสมบัติดังต่อไปนี้

1. สำหรับทุกจำนวนจริง a, b ถ้า $a, b \in P$ แล้ว $a+b \in P$

2. สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง a, b ถ้า $a, b \in P$ แล้ว $a \cdot b \in P$

3. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง และเป็นจริงเพียงอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น คือ $a \in P$, $a = 0$ หรือ $-a \in P$

ซึ่งคุณสมบัตินี้เรียกว่า *กฎไตรวิภาค* (trichotomy law)

เซต P นี้เรียกว่า เซตของจำนวนจริงบวกโดยแท้ (the set of strictly positive real numbers)

และถ้าให้ $P^- = \{-a | a \in P\}$ เรียกเซต P^- ว่าเซตของจำนวนจริงลบโดยแท้ (the set of strictly negative real numbers)

นอกจากนั้น เซตของจำนวนจริง R เป็นผลผนวกของเซตต่างสมาชิกกัน (disjoint sets) 3 เซตคือ $P, \{0\}, P^-$

นิยาม 1.3 ก. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ถ้า $a \in P$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนจริงบวก (positive real number) และเขียนแทนด้วย $a > 0$

ข. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ถ้า $a \in P$ หรือ $a = 0$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นลบ (non-negative real number) และเขียนแทนด้วย $a \geqslant 0$

ค. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ถ้า $-a \in P$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนจริงลบ (negative real number) และเขียนแทนด้วย $a < 0$.

ง. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ ถ้า $-a \in P$ หรือ $a = 0$ แล้ว กล่าวว่า a เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นบวก (non-positive real number) และเขียนแทนด้วย $a \leqslant 0$

ทฤษฎีบท 1.5 นิยามความสัมพันธ์ $<$ บน R โดย $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $b - a \in P$

ก. ถ้า $a < b$ และ $b < c$ แล้ว $a < c$

ข. ข้อความต่อไปนี้เป็นจริง และเป็นจริงเพียงอย่างหนึ่งอย่างใดเท่านั้น คือ

$a < b$, $a = b$ หรือ $b < a$

ค. ถ้า $a \leqslant b$ และ $b \leqslant a$ แล้ว $a = b$

พิสูจน์ ก) กำหนด $a < b$ และ $b < c$

ดังนั้น b-a E'P และ $c-b \in P$

โดยคุณสมบัติของเซต P, $c-a = (b-a) + (c-b) \in P$

นั่นคือ $a < c$

ข) โดยคุณสมบัติของเซต P, $b-a \in P$, $b-a = 0$ หรือ $-(b-a) \in P$

นั่นคือ $a < b$, $a = b$ หรือ $b < a$

ค) กำหนด $a \leqslant b$ และ $b \leqslant a$

สมมุติ $a \neq b$ ดังนั้น $b-a \in P$ หรือ $a-b \in P$

นั่นคือ $a < b$ หรือ $b < a$ ซึ่งขัดแย้งกับกำหนดให้ ดังนั้น $a = b$

#

ทฤษฎีบท 1.6 เซตของจำนวนจริง R เป็นเซตที่เป็นอันดับ

ทฤษฎีบท 1.7 ก) ถ้า a เป็นจำนวนจริงโดยที่ $a \neq 0$ แล้ว $a^2 > 0$

ข) $I > 0$

พิสูจน์ ก) กำหนด $a \neq 0$ ดังนั้น $a \in P$ หรือ $-a \in P$

ถ้า $a \in P$ แล้ว โดยคุณสมบัติของ P ได้ว่า $a^2 = a \cdot a \in P$

ถ้า $-a \in P$ แล้วโดยคุณสมบัติของ P ได้ว่า $a^2 = (-a) \cdot (-a) \in P$

ทั้งสองกรณีสรุปได้ว่า $a^2 > 0$

ข) เนื่องจาก $1 = (1)^2$ ดังนั้น $1 > 0$

#

ทฤษฎีบท 1.8 กำหนด a, b, c เป็นจำนวนจริง

ก. ถ้า $a < b$ แล้ว $a+c < b+c$

II. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ แล้ว $a+c < b+d$

ค. ถ้า $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$

J. ถ้า $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $bc < ac$

จ. ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$

ฉ. ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$

พิสูจน์ n) กำหนด $a < b$ ดังนั้น $b-a \in P$

เพราะว่า $(b+c) - (a+c) = h-a \in P$ ดังนั้น $a+c < h+c$

ข) กำหนด $a < b$ และ $c < d$ ดังนั้น $b-a \in P$ และ $d-c \in P$

เพราะว่า $(b+d) - (a+c) = (b-a) + (d-c) \in P$

เพราะฉะนั้น $a + c < b + d$

ค) กำหนด $a < b$ และ $c > 0$ ดังนั้น $b-a \in P$ และ $c \in P$

เพราะว่า $bc-ac = (b-a)c \in P$ เพราะฉะนั้น $ac < bc$

ง) กำหนด $a < b$ และ $c < 0$ ดังนั้น $b-a \in P$ และ $-c \in P$

เพราะว่า $ac - bc = (b-a)(-c) \in P$ เพราะฉะนั้น $bc < ac$

จ) กำหนด $a > 0$

ถ้า $\frac{1}{a} = 0$ แล้ว $1 = a \cdot \frac{1}{a} = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $\frac{1}{a} < 0$ แล้ว $1 = a \cdot \frac{1}{a} < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

เพราะฉะนั้น $\frac{1}{a} > 0$

ฉ) กำหนด $a < 0$

ถ้า $\frac{1}{a} = 0$ แล้ว $1 = a \cdot \frac{1}{a} = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ถ้า $\frac{1}{a} > 0$ แล้ว $1 = a \cdot \frac{1}{a} < 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $\frac{1}{a} < 0$

ทฤษฎีบท 1.9 ถ้า $a < b$ แล้ว $a < \frac{1}{2} \cdot (a+b) < b$

พิสูจน์ กำหนด $a < b$ ดังนั้น $2a < a+b$ และ $a+b < 2b$

เพราะว่า $1 > 0$ เพราะฉะนั้น $2 = 1 + 1 > 0$ นั่นคือ $\frac{1}{2} > 0$

เพราะฉะนั้น $(2a) \cdot \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot (a+b)$ และ $\frac{1}{2} \cdot (a+b) < \frac{1}{2} \cdot (2b)$

นั่นคือ $a < \frac{1}{2} \cdot (a+b) < b$

#

ข้อสังเกต ทฤษฎีบท 1.9 แสดงให้เห็นว่า ถ้า $a = 0$ จะพบว่า จำนวนจริงบวก b ใด ๆ สามารถหาจำนวนจริงบวก $\frac{1}{2} \cdot b$ ซึ่งน้อยกว่า b ได้เสมอ นั่นคือเราไม่สามารถหาจำนวนจริงบวกที่น้อยที่สุดได้

ทฤษฎีบท 1.10 สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ ถ้า $a \cdot b > 0$ แล้ว $a > 0$ และ $b > 0$ หรือ $a < 0$ และ $b < 0$

พิสูจน์ กำหนด $a \cdot b > 0$ ดังนั้น $a \neq 0$ และ $b \neq 0$

ถ้า $a > 0$ แล้ว $\frac{1}{a} > 0$ ดังนั้น $b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) > 0$

ถ้า $a < 0$ แล้ว $\frac{1}{a} < 0$ และ $b = \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot b = \frac{1}{a} \cdot (a \cdot b) < 0$

#

บทแทรก 1.11 สำหรับจำนวนจริง a, b ใด ๆ ถ้า $a \cdot b < 0$ แล้ว $a > 0$ และ $b < 0$ หรือ $a < 0$ และ $b > 0$

ต่อไปนี้เพื่อความสะดวกจะเขียน ab แทน $a \cdot b$

แบบฝึกหัด 1.2

1. ถ้า $a \leqslant b$ และ $c < d$ จงพิสูจน์ว่า $a + c < b + d$
2. ถ้า $a \leqslant b$ และ $c \leqslant d$ จงพิสูจน์ว่า $a + c \leqslant b + d$
3. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 < c < d$ จงพิสูจน์ว่า $0 < ac < bd$
4. ถ้า $0 < a < b$ และ $0 \leqslant c \leqslant d$ จงพิสูจน์ว่า $0 \leqslant ac \leqslant bd$
5. ถ้า $a < b$ และ $c < d$ จงพิสูจน์ว่า $ad + bc < ac + bd$
6. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $a^2 + b^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ และ $b = 0$
7. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a - \varepsilon < b$ ทุก ๆ จำนวนจริง $\varepsilon > 0$
   ก. จงพิสูจน์ว่า $a \leqslant b$
   ข. จงแสดงว่าข้อความ $a < b$ ไม่จริง
8. จงพิสูจน์ว่า $\left\{\frac{1}{2}(a+b)\right\}^2 \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ทุก ๆ จำนวนจริง a, b
9. ถ้า $0 < c < 1$ จงพิสูจน์ว่า $0 < c^2 < c < 1$
10. ถ้า $1 < c$ จงพิสูจน์ว่า $1 < c < c^2$
11. ถ้า $c > 1$ และ m, n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $c^m > c^n$ ก็ต่อเมื่อ $m > n$
12. ถ้า $0 < c < 1$ และ m, n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $c^m < c^n$ ก็ต่อเมื่อ $m > n$
13. ถ้า $a > 0$, $b > 0$ และ n เป็นจำนวนนับ จงแสดงว่า $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a^n < b^n$

1.3 จำนวนนับและทฤษฎีอุปนัย (Natural Numbers and Induction Theory)

จากที่กล่าวมาข้างต้นเราพบว่า เซตของจำนวนจริง คือผลผนวกของเซตของจำนวนตรรกยะ และเซตของจำนวนอตรรกยะ ในส่วนที่เป็นจำนวนตรรกยะนั้น จะพบว่าเซตของจำนวนตรรกยะยังมีเซตย่อยที่สำคัญ คือเซตของจำนวนนับ (Natural Numbers) และเซตของจำนวนเต็ม (Integers)

เนื่องจากเซตของจำนวนนับ $= N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$ และ $N \subseteq R$ ดังนั้น ทุกสมาชิกใน N เราสามารถพูดถึงตัวผกผันสำหรับการบวกได้

และถ้าให้ $N^- = \{-n | n \in N\}$ เราจะได้ว่า

เซตของจำนวนเต็ม (integers) $Z = N \cup \{0\} \cup N^-$

นั่นคือ $Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

และนอกจากนั้น จำนวนตรรกยะทุกตัวสามารถเขียนอยู่ในรูปเศษส่วนของจำนวนเต็มได้ นั่นคือ เซตของจำนวนตรรกยะ $Q = \left\{\frac{n}{m} | n, m \in Z \text{ และ } m \neq 0\right\}$

สัจพจน์ของการเป็นอันดับที่ดี (Well-ordering Axiom)

คุณสมบัติที่สำคัญอย่างยิ่งของจำนวนนับคือ สัจพจน์ของการเป็นอันดับที่ดี ซึ่งกล่าวว่า "ทุกเซตย่อยของจำนวนนับซึ่งไม่ใช่เซตว่าง จะมีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดเสมอ" นั่นคือ ถ้า S เป็นเซตย่อยของ N และ $S \neq \phi$ แล้ว จะมี $m \in S$ ซึ่ง $m \leq k$ ทุก $k \in S$

เช่น ถ้า $S = \{2, 7, 9\}$ ซึ่งเป็นเซตย่อยของจำนวนนับที่ไม่ใช่เซตว่าง ดังนั้นจากสัจพจน์ของการเป็นอันดับที่ดี S มีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดคือ 2 เนื่องจาก 2 น้อยกว่าหรือเท่ากับสมาชิกทุกตัวใน S

ทฤษฎีบท 1.12 ทฤษฎีอุปนัยแบบที่ 1 (The Induction Theory : first form) ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนนับ n กำหนดคุณสมบัติ A(n) และสามารถพิสูจน์คุณสมบัติต่อไปนี้ คือ

1. A(1) เป็นจริง
2. สำหรับแต่ละจำนวนนับ k ถ้า A(k) เป็นจริงแล้ว A(k+1) เป็นจริง

แล้ว จะได้ว่า A(n) เป็นจริง ทุกจำนวนนับ n

พิสูจน์ สมมุติว่าทฤษฎีนี้ไม่จริง

ให้ S เป็นเซตของจำนวนนับ n ซึ่งคุณสมบัติ A(n) ไม่จริง

โดยข้อสมมุติ $S \neq \phi$

จากสัจพจน์ของการเป็นอันดับที่ดี S มีสมาชิกตัวที่น้อยที่สุด ให้ n_0 เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดของ S

เนื่องจาก A(1) เป็นจริง ดังนั้น $n_0 \neq 1$

เพราะว่า $n_0 - 1 \notin S$ ดังนั้น $A(n_0 - 1)$ เป็นจริง โดยคุณสมบัติข้อ 2 $A(n_0)$ เป็นจริง เนื่องจาก $n_0 = (n_0 - 1) + 1$ ซึ่งเกิดข้อขัดแย้ง

ดังนั้น ทฤษฎีเป็นจริง

#

ทฤษฎีบท 1.13 ถ้า n เป็นจำนวนนับแล้ว $n > 0$

พิสูจน์ กำหนด $A(n)$ คือข้อความ $n > 0$

จากทฤษฎีบท 1.7(ข) $1 > 0$ ดังนั้น $A(1)$ เป็นจริง

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ $k \geqslant 1$ $A(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $k > 0$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.8(ข) $1 + k > 0$

เพราะฉะนั้น จากทฤษฎีบท 1.12 $n > 0$ ทุกจำนวนนับ n

#

ตัวอย่าง 1.1 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n, $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

พิสูจน์ กำหนด $A(n)$ คือข้อความ $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

คุณสมบัติ $A(1)$ เป็นจริงเนื่องจาก $1 = \frac{1(1+1)}{2}$

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ $k \geqslant 1$ $A(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $1+2+\ldots+k = \frac{k(k+1)}{2}$

ดังนั้น
$$(1+2+\ldots+k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

นั่นคือคุณสมบัติ $A(k+1)$ เป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 1.12 $A(n)$ เป็นจริง สำหรับทุกจำนวนนับ n

#

ตัวอย่าง 1.2 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

พิสูจน์ กำหนด $A(n)$ คือข้อความ $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

คุณสมบัติ $A(1)$ เป็นจริงเนื่องจาก $1^2 = \frac{1}{6}1(2)(3)$

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ $k \geqslant 1$, $A(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$

ดังนั้น $(1^2 + 2^2 + \dots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

เพราะฉะนั้น $A(k+1)$ เป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 1.12 $A(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

#

ตัวอย่าง 1.3 ถ้า r เป็นจำนวนจริง โดยที่ $r \neq 1$ และ n เป็นจำนวนนับ แล้ว

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

พิสูจน์ กำหนด $A(n)$ คือข้อความ $1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

คุณสมบัติ $A(1)$ เป็นจริง เนื่องจาก $1 + r = \frac{1-r^2}{1-r}$

สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ $k \geqslant 1$ $A(k)$ เป็นจริง

นั่นคือ $1 + r \quad + \dots + r^k = \frac{1-r^{k+1}}{1-r}$

ดังนั้น $(1 + r \quad + \dots + r^k) + r^{k+1} = \frac{1-r^{k+1}}{1-r} + {}^{k+1}$

$$= \frac{1-r^{k+2}}{1-r}$$

เพราะฉะนั้น $A(k+1)$ เป็นจริง

โดยทฤษฎีบท 1.12 $A(n)$ เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.4 ถ้า x เป็นจำนวนจริงโดยที่ $x > -1$ แล้ว
$(1+x)^n \geqslant 1+nx$ ทุกจำนวนนับ n
(อสมการของแบร์นูลลี Bernoulli's Inequality)

พิสูจน์ ให้ $A(n)$ คือข้อความ $(1+x)^n \geqslant 1+nx$
คุณสมบัติ $A(1)$ เป็นจริงเนื่องจาก $1+x \geqslant 1+x$
สมมุติว่าสำหรับจำนวนนับ $k \geqslant 1$ $(1+x)^k \geqslant 1+kx$
ดังนั้น

$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)^k(1+x)\\ &\geqslant (1+kx)(1+x) = 1+(k+1)x+kx^2\\ &\geqslant 1+(k+1)x\end{aligned}$$

นั่นคือ $A(k+1)$ เป็นจริง
โดยทฤษฎีบท 1.12 $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ ทุกจำนวนนับ n

#

ทฤษฎีบท 1.14 ทฤษฎีอุปนัย แบบที่ 2 (Induction Theory : second form) ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนนับ n กำหนดคุณสมบัติ $A(n)$ และสามารถพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้คือ

1. $A(1)$ เป็นจริง
2. สำหรับจำนวนนับ m ถ้า $A(k)$ เป็นจริง ทุกๆ $1 \leqslant k < m$ แล้ว $A(m)$ เป็นจริง

แล้วจะได้ว่า $A(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ n

พิสูจน์ ให้ S เป็นเซตของจำนวนนับซึ่งไม่เป็นจริงตามทฤษฎี
สมมุติ $S \neq \phi$ ให้ n_0 เป็นสมาชิกตัวที่น้อยที่สุดของ S
ดังนั้น $n_0 \neq 1$ และสำหรับทุกจำนวนนับ k ซึ่ง $1 \leqslant k < n_0$ แล้ว $A(k)$ เป็นจริง โดยคุณสมบัติข้อ 2 จะได้ว่า $A(n_0)$ เป็นจริง ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของ n_0 ดังนั้น $S = \phi$
นั่นคือ ทฤษฎีบทเป็นจริง

#

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงพิสูจน์ว่า $n^2 \geqslant n$ ทุกจำนวนนับ n และ $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n
2. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $c > 1$ แล้ว $c^n \geqslant c$ ทุก ๆ จำนวนนับ n
   (แนะนำ ใช้อสมการแบร์นูลลี โดยที่ $c = 1+x$)
3. กำหนด $f : N \to N$ โดยที่ $f(1) = a$ และ $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$ ทุก ๆ x, y&N แล้ว
   จงพิสูจน์ว่า $f(n) = a^n$
4. จงพิสูจน์ว่า $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$ ทุกจำนวนนับ n

5. ถ้า n เป็นจำนวนนับ จงพิสูจน์ว่า $\frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$ เป็นจำนวนนับ

6. สำหรับแต่ละจำนวนนับ n จงพิสูจน์ว่ามีจำนวนนับ k ซึ่ง $(\sqrt{2}-1)^n = \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$

7. จงพิสูจน์ว่า $1+3+5+ \dots +(2n-1) = n^2$ ทุกจำนวนนับ n

8. ถ้า $x \neq 1$ จงพิสูจน์ว่า $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\dots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ ทุกจำนวนนับ n

9. ถ้า n และ k เป็นจำนวนนับใด ๆ

ให้ $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot \dots \cdot n$

$0! = 1$

และ $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$

จงพิสูจน์ว่า

ก. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ สำหรับ $k>0$

ข. $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ สำหรับ $k>0$

10. จงพิสูจน์ว่า $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ ทุกจำนวนนับ k

1.4 ค่าสัมบูรณ์ (Absolute Value)

จากกฎไตรวิภาค (trichotomy law) จะเห็นว่า ถ้า a เป็นจำนวนจริง โดยที่ $a \neq 0$ แล้ว a จะเป็นจำนวนจริงบวก (positive real number) หรือ $-a$ เป็นจำนวนจริงบวก ดังนั้น การให้นิยามของค่าสัมบูรณ์ของจำนวนจริง a ใด ๆ จึงใช้หลักความจริงข้อนี้ ดังจะได้กล่าวต่อไป

นิยาม 1.4 ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของ a เขียนแทนด้วย $|a|$ นิยามโดย

$$|a| = \begin{cases} a & \text{ถ้า } a \geqslant 0 \\ -a & \text{ถ้า } a < 0 \end{cases}$$

ทฤษฎีบท 1.15 ก. สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ $|a| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$

ข. $|-a| = |a|$ ทุกจำนวนจริง a

ค. $|ab| = |a|\,|b|$ ทุกจำนวนจริง a, b

ง. ถ้า $c \geqslant 0$ แล้ว $|a| \leqslant c$ ก็ต่อเมื่อ $-c \leqslant a \leqslant c$

จ. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ ทุกจำนวนจริง a

พิสูจน์ ก. ถ้า $a = 0$ แล้ว $|a| = |0| = 0$ โดยนิยาม

กำหนด $|a| = 0$ ถ้า $a \neq 0$ แล้ว $-a \neq 0$ ดังนั้น $|a| \neq 0$

นั่นคือ ถ้า $|a| = 0$ แล้ว $a = 0$

ข. ถ้า $a = 0$ แล้ว $|a| = 0 = |-a|$

ถ้า $a > 0$ แล้ว $|a| = a = |-a|$

ถ้า $a < 0$ แล้ว $|a| = -a = |-a|$

นั่นคือ $|a| = |-a|$ ทุกจำนวนจริง a

ค. ถ้า $a > 0$ และ $b > 0$

จะได้ $ab > 0$ ดังนั้น $|ab| = ab = |a||b|$

ถ้า $a > 0$ และ $b < 0$

จะได้ $ab < 0$ และ $|ab| = -(ab) = a(-b) = |a||b|$

และสำหรับกรณีอื่น ๆ ที่เหลือ สามารถพิสูจน์ได้ว่า $|ab| = |a||b|$

ง. กำหนด $|a| \leqslant c$ และ $c \geqslant 0$ ดังนั้น $a \leqslant c$ และ $-a \leqslant c$

โดยทฤษฎีบท 1.8(ง) $-c \leqslant a$ เพราะฉะนั้น $-c \leqslant a \leqslant c$

ในทางกลับกัน กำหนด $-c \leqslant a \leqslant c$ และ $c \geqslant 0$

โดยทฤษฎีบท 1.8(ง) $-a \leqslant c$ นั่นคือ $|a| \leqslant c$

จ. เนื่องจาก $|a| \geqslant 0$ และ $|a| \leqslant |a|$ ดังนั้นจากข้อ ง. ได้ว่า $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$

#

ทฤษฎีบท 1.16 อสมการอิงรูปสามเหลี่ยม (The triangle **Inequality)**

ถ้า a, b เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว $||a| - |b|| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบท 1.15 จ. $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$ และ $-|b| \leqslant \pm b \leqslant |b|$

ดังนั้น $-(|a| + |b|) \leqslant a \pm b \leqslant |a| + |b|$

เพราะฉะนั้น โดยทฤษฎีบท 1.15 ง. $|a \pm b| \leqslant |a| + |b|$

เนื่องจาก $|a| = |(a-b) + b|$ ดังนั้น จากการพิสูจน์ข้างต้นได้ว่า

$|a| \leqslant |a-b| + |b|$ นั่นคือ $|a| - |b| \leqslant |a-b|$

และในทำนองเดียวกันก็พิสูจน์ได้ว่า $|b| - |a| \leqslant |a-b|$ นั่นคือ

$-|a-b| \leqslant |a| - |b| \leqslant |a-b|$ เพราะฉะนั้น $||a| - |b|| \leqslant |a-b|$

และเพราะว่า $|a| = |(a+b) - b| \leqslant |a+b| + |b|$

$|b| = |(b+a) - a| \leqslant |a+b| + |a|$

ดังนั้น $|a| - |b| \leqslant |a+b|$ และ $|b| - |a| \leqslant |a+b|$

จึงได้ว่า $||a| - |b|| \leqslant |a+b|$

#

บทแทรก 1.17 ถ้า a,, a_2, . . . , a, เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$|a_1+a_2+\ldots+a_n|\ 6\ |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงหาค่า x ที่ทำให้ x + lx-21 = $1+|x|$
2. จงหาค่า x ที่ทำให้ (x-31 + $|x-1| < 4$
3. ถ้า x, y, ε เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\varepsilon>0$ และ $|x-y|<\varepsilon$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า

   ก. $|x|<|y|+\varepsilon$ และ $|y|<|x|+\varepsilon$

   ข. $|x|>|y|-\varepsilon$ และ $|y|>|x|-\varepsilon$
4. ถ้า b, ε เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\varepsilon>0$ จงพิสูจน์ว่า $|x-b|<\varepsilon$ ก็ต่อเมื่อ b--E < x $< b+\varepsilon$
5. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง และ $b\neq 0$ จงพิสูจน์ว่า $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$
6. ถ้า a, b เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า $|a+b|=|a|+|b|$ ก็ต่อเมื่อ $ab\geqslant 0$
7. ถ้า x, y, z เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x\leqslant z$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $x<y<z$ ก็ต่อเมื่อ

   $|x-y|+|y-z|=|x-z|$
8. ถ้า $a<x<b$ และ $a<y<b$ จงพิสูจน์ว่า $|x-y|<b-a$

1.5 คุณสมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง (The Completeness Property of Real Numbers)

นิยาม 1.5 กำหนด S เป็นเซตย่อยของ R

ก. จำนวนจริง u จะเรียกว่าเป็นขอบเขตบน (upper bound) ของ S เมื่อ $s \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ $s \in S$

และถ้าเซต S หาขอบเขตบนได้ เรากล่าวว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขตบน (a bounded above set)

ข. จำนวนจริง w จะเรียกว่าเป็นขอบเขตล่าง (lower bound) ของเซต S เมื่อ $w \leqslant s$ สำหรับทุก ๆ $s \in S$

และถ้าเซต S หาขอบเขตล่างได้เรากล่าวว่า S เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (a bounded below set)

ค. ถ้า S เป็นเซตที่มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง เรียก S ว่าเป็นเซตที่มีขอบเขต (a bounded set)

และถ้า S ไม่มีขอบเขตบนหรือขอบเขตล่าง เรียก S ว่าเป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต (unbounded set)

ตัวอย่าง 1.5 กำหนด $S_1 = \{x \in R | x \leqslant 1\}$

ดังนั้น 1 เป็นขอบเขตบนของ S_1 เนื่องจาก $x \leqslant 1$ ทุก ๆ $x \in S_1$ และถ้ากำหนด r เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ $1+r$ จะเป็นขอบเขตบนของ S_1 ด้วยเนื่องจาก $x \leqslant 1 \leqslant 1+r$ ทุก $x \in S_1$

#

ตัวอย่าง 1.6 กำหนด $S_2 = \{x \in R | x \geqslant 1\}$

ดังนั้น 1 เป็นขอบเขตล่างของ S_2 เนื่องจาก $x \geqslant 1$ ทุก $x \in S_2$ และถ้ากำหนด r เป็นจำนวนจริงลบใด ๆ $1+r$ จะเป็นขอบเขตล่างของ S_2 ด้วย เนื่องจาก $x \geqslant 1 \geqslant 1+r$ ทุก $x \in S_2$

#

ตัวอย่าง 1.7 กำหนด $S_3 = \{x \in R | 0 < x < 1\}$

จากนิยามของ S_3 พบว่า 0 เป็นขอบเขตล่างของ S_3 และ 1 เป็นขอบเขตบนของ S_3 ดังนั้น S_3 เป็นเซตที่มีขอบเขต (bounded set)

ตัวอย่าง 1.8 พิจารณาเซตจำนวนจริง

กำหนด u เป็นจำนวนจริงใดๆ พบว่าถ้า u เป็นจำนวนจริงบวก

$\frac{1}{2}u < u < u+1$ เสมอ และถ้า u เป็นจำนวนจริงลบ $u - 1 < u < 0$ เสมอ

นั่นคือ เซตของจำนวนจริงเป็นเซตไม่มีขอบเขต

ข้อสังเกต 1. เซตย่อย S ใด ๆ ของ R อาจมีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง หรือมีขอบเขตบน แต่ไม่มีขอบเขตล่าง หรือมีขอบเขตล่าง แต่ไม่มีขอบเขตบน หรือไม่มีทั้งขอบเขตล่างและขอบเขตบนก็ได้

2. ถ้าเซตย่อย S ของ R มีขอบเขตบน S จะมีขอบเขตบนมากมาย (เป็นจำนวนอนันต์) และทำนองเดียวกัน ถ้า S มีขอบเขตล่าง S จะมีขอบเขตล่างมากมาย (เป็นจำนวนอนันต์) ด้วย

3. ขอบเขตบนหรือขอบเขตล่างของ S อาจเป็นสมาชิกของ S หรือไม่เป็นก็ได้

นิยาม 1.6 กำหนด S เป็นเซตที่มีขอบเขตบน (a bounded above set) และ a เป็นขอบเขตบนของ S จะกล่าวว่า a เป็นขอบเขตบนค่าน้อยสุด (the least upper bound or supremum) ของ S เมื่อ $a \leqslant u$ สำหรับทุก ๆ ขอบเขตบน u ของ S และเขียนแทนด้วย $a = \sup S$

นิยาม 1.7 กำหนด S เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง (a bounded below set) และ b เป็นขอบเขตล่างของ S กล่าวว่า b เป็นขอบเขตล่างค่าสูงสุด (the greatest lower bound or infimum) เมื่อ $w \leqslant b$ สำหรับทุก ๆ ขอบเขตล่าง w ของ S และเขียนแทนด้วย $b = \inf S$

ตัวอย่าง 1.9 กำหนด $S_1 = \{x \in R \mid x \leqslant 1\}$ แล้ว $\sup S_1 = 1$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 1.5 1 เป็นขอบเขตบนของ S_1

ให้ u เป็นขอบเขตบนของ S_1 ถ้า $u < 1$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 1.9 $u < \frac{1}{2}(u+1) < 1$ ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติการเป็นขอบเขตบนของ u เนื่องจาก $\frac{1}{2}(u+1) \in S_1$

ดังนั้น $1 \leqslant u$

นั่นคือ $1 = \sup S_1$

ตัวอย่าง 1.10 กำหนด $S_2 = \{x \in R | x \geqslant 1\}$ แล้ว $\inf S_2 = 1$

พิสูจน์ จากตัวอย่าง 1.6 1 เป็นขอบเขตล่างของ S_2

ให้ w เป็นขอบเขตล่างใด ๆ ใดของ S_2

ถ้า $1 < w$ แล้ว โดยทฤษฎีบท 1.9 $1 < \frac{1}{2}(1+w) < w$ ซึ่งขัดแย้งกับการที่ w เป็นขอบเขตล่างของ S_2 เนื่องจาก $\frac{1}{2}(1+w) \in S_2$ ดังนั้น $w \leqslant 1$ นั่นคือ $\inf S_2 = 1$

ทฤษฎีบท 1.18 กำหนด S เป็นเซตย่อยของ R $a = \sup S,\ b = \inf S$

ก. สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ ถ้า $x < a$ แล้ว จะสามารถหา $s_x \in S$ ได้ ซึ่ง $x < s_x \leqslant a$

ข. สำหรับจำนวนจริง y ใด ๆ ถ้า $b < y$ แล้วจะสามารถหา $s_y \in S$ ได้ ซึ่ง $b \leqslant s_y < y$

พิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนจากนิยาม 1.6 และนิยาม 1.7 #

คุณสมบัติที่สำคัญของจำนวนจริงที่จะกล่าวถึงต่อไป คือคุณสมบัติขอบเขตบนค่าน้อยสุด (the least upper bound property or supremum property) และคุณสมบัติขอบเขตล่างค่ามากที่สุด (the greatest lower bound property or infimum property) ซึ่งทั้งสองคุณสมบัตินี้เรียกว่าเป็นคุณสมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง (the completeness property of real numbers)

คุณสมบัติขอบเขตบนค่าน้อยสุด

กล่าวว่า "ถ้า S เป็นเซตย่อยใด ๆ ของเซตของจำนวนจริง R โดยที่ S ไม่ใช่เซตว่าง และ S เป็นเซตที่มีขอบเขตบนแล้ว S จะต้องมีขอบเขตบนค่าน้อยสุด"

คุณสมบัติขอบเขตล่างค่ามากสุด

กล่าวว่า "ถ้า S เป็นเซตย่อยใด ๆ ของเซตของจำนวนจริง R โดยที่ S ไม่ใช่เซตว่าง และ S เป็นเซตที่มีขอบเขตล่างแล้ว S จะต้องมีขอบเขตล่างค่ามากสุด"

ทฤษฎีบท 1.19 กำหนด S เป็นเซตย่อยของ R

ก. ถ้า S มีขอบเขตบน ขอบเขตบนค่าน้อยสุดของ S มีเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

ข. ถ้า S มีขอบเขตล่าง ขอบเขตล่างค่ามากสุดของ S มีเพียงหนึ่งตัวเท่านั้น

พิสูจน์ เห็นได้ชัดเจนจากนิยาม 1.6, 1.7 และทฤษฎีบท 1.5 (ค) #

หมายเหตุ 1. ถ้า $u = \sup S$ และ $u \in S$ เราอาจกล่าวว่า u เป็นค่าสูงสุด (maximum) ของ S และเขียนแทนด้วย $u = \max S$

2. ถ้า $s = \inf S$ และ $s \in S$ เราอาจกล่าวว่า s เป็นค่าต่ำสุด (minimum) ของ S และเขียนแทนด้วย $s = \min S$

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนด $S = \left\{1 - \frac{(-1)^n}{n} \mid n \in N\right\}$ จงหา $\sup S$ และ $\inf S$
2. กำหนด $S_1 = \{x \in R \mid x \geqslant 0\}$ จงพิสูจน์ว่า S_1 มีขอบเขตล่างแต่ไม่มีขอบเขตบน
3. กำหนด $S \subseteq R$, $s^* = \sup S$ โดยที่ $s^* \in S$
   ถ้า u เป็นจำนวนจริง โดยที่ $u \notin S$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $\sup (S \cup \{u\}) = \max\{s^*, u\}$
4. กำหนด $S \subseteq R$ โดยที่ S เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า $\inf S$ และ $\sup S$ ต้องเป็นสมาชิกของเซต S
   (แนะนำ ใช้ทฤษฎีบทอุปนัย)
5. กำหนด $S \subseteq R$ ถ้าสมาชิกตัวหนึ่งของ S คือขอบเขตบนของ S สมาชิกตัวนั้นจะต้องเป็นขอบเขตบนค่าต่ำสุดของ S
6. กำหนด $S \subseteq R$ โดยที่ S ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า u จะเป็นขอบเขตบนของ S ก็ต่อเมื่อ ถ้า $t \in R$ และ $t > u$ แล้ว $t \notin S$
7. กำหนด $S \subseteq R$ โดยที่ S ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า $u = \sup S$ ก็ต่อเมื่อสำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n $u - \frac{1}{n}$ ไม่เป็นขอบเขตบนของ S แต่ $u + \frac{1}{n}$ เป็นขอบเขตบนของ S
8. จงพิสูจน์ว่า ถ้า A และ B เป็นเซตที่มีขอบเขตแล้ว $A \cup B$ เป็นเซตที่มีขอบเขตด้วย และ $\sup (A \cup B) = \sup \{\sup A, \sup B\}$
9. กำหนด S เป็นเซตที่มีขอบเขตใด ๆ ใน R และ S_0 เป็นเซตย่อยของ S จงพิสูจน์ว่า $\inf S \leqslant \inf S_0 \leqslant \sup S_0 \leqslant \sup S$
10. ให้ S เป็นเซตที่มีขอบเขตใน R
    ก. กำหนด $a > 0$ และ $aS = \{as \mid s \in S\}$
    จงพิสูจน์ว่า $\inf (aS) = a \inf S$ และ $\sup(aS) = a \sup S$
    ข. กำหนด $b < 0$ และ $bS = \{bs \mid s \in S\}$
    จงพิสูจน์ว่า $\inf(bS) = b \sup S$ และ $\sup (bS) = b \inf S$
11. กำหนด A และ B เป็นเซตย่อยของ R ที่เป็นเซตมีขอบเขต และ $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ จงพิสูจน์ว่า $\sup (A + B) = \sup A + \sup B$ และ $\inf (A + B) = \inf A + \inf B$

12. ให้ X เป็นเซตย่อยของ R ที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $f : X \to R$ โดยที่ range f เป็นเซตที่มีขอบเขต ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

$\sup\{a+f(x) \mid x \in X\} = a + \sup\{f(x) \mid x \in X\}$ และ $\inf\{a+f(x) \mid x \in X\} = a + \inf\{f(x) \mid x \in X\}$

13. ให้ X เป็นเซตย่อยของ R ที่ไม่ใช่เซตว่าง $f, g : X \to R$ โดยที่ range f และ range g เป็นเซตที่มีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า

$\sup\{f(x)+g(x) \mid x \in X\} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in X\} + \sup\{g(x) \mid x \in X\}$ และ

$\inf\{f(x)+g(x) \mid x \in X\} \geqslant \inf\{f(x) \mid x \in X\} + \inf\{f(x) \mid x \in X\}$

1.6 คุณสมบัติอาร์คีมีเดียน (The Archemedean Property)

ถ้ากำหนด n เป็นจำนวนนับใด ๆ จะพบว่า $n < n+1$ เสมอ นั่นคือเซตของจำนวนนับ N เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขตบน ซึ่งจากความจริงดังกล่าวทำให้ได้คุณสมบัติที่สำคัญของจำนวนจริงที่เรียกว่าคุณสมบัติของอาร์คีมีเดียน ดังจะได้กล่าวต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.20 คุณสมบัติอาร์คีมีเดียน (The Archemedean Property)

กำหนด x เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะสามารถหาจำนวนนับ n_x ได้ ซึ่ง $x < n_x$

พิสูจน์ ให้ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ และสมมุติ $n \leqslant x$ ทุก ๆ จำนวนนับ n

ดังนั้น x เป็นขอบเขตบนของ N

โดยคุณสมบัติขอบเขตบนค่าน้อยสุดให้ $u = \sup N$

ดังนั้น $u \leqslant x$

เนื่องจาก $u-1 < u$ โดยทฤษฎีบท 1.18 (ก) สามารถหาจำนวนนับ n_1 ได้ซึ่ง $u-1 < n_1$ นั่นคือ $u < n_1+1$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ $u = \sup N$ เนื่องจาก $n_1+1 \in N$

#

บทแทรก 1.21 กำหนด y เป็นจำนวนจริงบวก และ z เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว จะสามารถหาจำนวนนับ n ได้ ซึ่ง $ny > z$

บทแทรก 1.22 กำหนด ε เป็นจำนวนจริงบวก

ก. จะหาจำนวนนับ n ได้ซึ่ง $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

ข. จะหาจำนวนนับ m ได้ซึ่ง $m-1 \leqslant \varepsilon < m$

ทฤษฎีบท 1.23 กำหนด a เป็นจำนวนจริงใด ๆ โดยที่ $0 \leqslant a < \frac{1}{n}$ สำหรับทุก ๆ จำนวนนับ n แล้ว $a = 0$

พิสูจน์ ถ้า $a > 0$ จะได้ $n < \frac{1}{a}$ ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบท 1.20

ดังนั้น $a = 0$

#

ทฤษฎีบท 1.24 กำหนด x, y เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x < y$ แล้ว จะสามารถหาจำนวนตรรกยะ r ได้ซึ่ง $x < r < y$

พิสูจน์ *กรณีที่ 1* $0 \leqslant x < y$

เนื่องจาก $y - x > 0$ โดยบทแทรก 1.22 (ก) จะมีจำนวนนับ m ซึ่ง $0 < \frac{1}{m} < y - x$

ให้ $A = \{n \in N \mid \frac{n}{m} > x\}$ โดยบทแทรก 1.21 $A \neq \phi$

และโดยสัจพจน์ของการเป็นอันดับที่ดี (well-ordering axiom) A มีสมาชิกที่เล็กที่สุด

ให้ n_0 เป็นสมาชิกที่เล็กที่สุดของ A ดังนั้น $\frac{n_0 - 1}{m} \leqslant x < \frac{n_0}{m}$

ถ้า $y \leqslant \frac{n_0}{m}$ จะพบว่า $y - x \leqslant \frac{n_0}{m} + \frac{1 - n_0}{m} = \frac{1}{m}$

ซึ่งขัดแย้งกับคุณสมบัติของ m ดังนั้น $x < \frac{n_0}{m} < y$

กรณีที่ 2 $x \leqslant 0 < y$

โดยบทแทรก 1.22(ก) จะมีจำนวนนับ k ซึ่ง $0 < \frac{1}{k} < y$

ดังนั้น $x < \frac{1}{k} < y$

กรณีที่ 3 $x < y \leqslant 0$

ดังนั้น $0 \leqslant -y < -x$ จากการพิสูจน์กรณีที่ 1 จะได้ว่า มีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $-y < r < -x$

เพราะฉะนั้น $x < -r < y$ และ $-r$ เป็นจำนวนตรรกยะด้วย

#

แบบฝึกหัด 1.6

1. ถ้า $y>0$ จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n ซึ่ง $\frac{1}{2^n} < y$
2. จงพิสูจน์ว่า สามารถหาจำนวนจริง $b>0$ ได้ ซึ่ง $b^2 = 2$
3. กำหนด x, ε เป็นจำนวนจริง โดยที่ $\varepsilon>0$ แล้ว จะหาจำนวนจริง a ได้ซึ่ง $|x-a| < \varepsilon$

1.7 **ช่วง** (Intervals)

ถ้า a, b **เป็นจำนวนจริง โดยที่** $a \leqslant b$ **แล้ว**

$(a, b) = (x \in R | a < x < b\}$

$[a, b] = \{x \in R | a \leqslant x \leqslant b\}$

$[a, b) = \{x \in R | a \leqslant x < b\}$

$(a. b] = (x \in R | a < x\ 6\ b\}$

เรียก (a, b) **ว่า ช่วงเปิด** (open interval) **ใน** R

$[a, b]$ **ว่า ช่วงปิด** (closed interval) **ใน** R

$[a, b)$ **และ** $(a, b]$ **เรียกว่า ช่วงครึ่งเปิดหรือช่วงครึ่งปิด** (half open or half closed) **ใน** R

a **และ** b **เรียกว่า จุดปลายช่วง** (end point)

ความยาวช่วง (a, b), $[a, b]$, $[a, b)$ **และ** $(a, b]$ **มีค่าเท่ากันคือ** $b-a$

หมายเหตุ 1. $(a, a) = \phi$

2. $[a, a] = [a]$

นอกจากนั้น ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$(a, \infty) = (x \in R | x > a)$

$(-\infty, a) = \{x \in R | x < a]$

ทั้งสองเซตเรียกว่าช่วงเปิดอนันต์ (infinite open intervals or open rays) **และ**

$[a, \infty) = \{x \in R | x \geqslant a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in R | x \leqslant a\}$

ซึ่งสองเซตหลังนี้เรียกว่าช่วงปิดอนันต์ (infinite closed intervals or closed rays)

และดังนั้นบางครั้งจึงเขียน $(-\infty, \infty)$ **แทนเซตของจำนวนจริง** R **และเรียกว่าช่วงอนันต์** (infinite intervals)

ช่วงหนึ่งหน่วย (unit interval) คือช่วงปิด $[0, 1]$ ซึ่งมีความยาวช่วงเป็น 1 และโดยทั่วไปเขียนแทนด้วย I กล่าวคือ $I = [0, 1]$

ช่วงสอดแทรก (Nested Interval) สำหรับแต่ละจำนวนนับ n, I_n เป็นช่วง และ $\{I_n | n \in N\}$ เรียกว่าเป็นช่วงสอดแทรกถ้า $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$

ตัวอย่าง 1.11 ให้ $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ดังนั้น $I_n \supseteq I_{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\{I_n | n \in N\}$ เป็นช่วงสอดแทรก และ $\bigcap_{n \in N} I_n = \{0\}$ ซึ่งพิสูจน์ได้ดังนี้

เพราะว่า $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ทุกจำนวนนับ n จึงได้ว่า $0 \in I_n$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\{0\} \subseteq \bigcap_{n \in N} I_n$

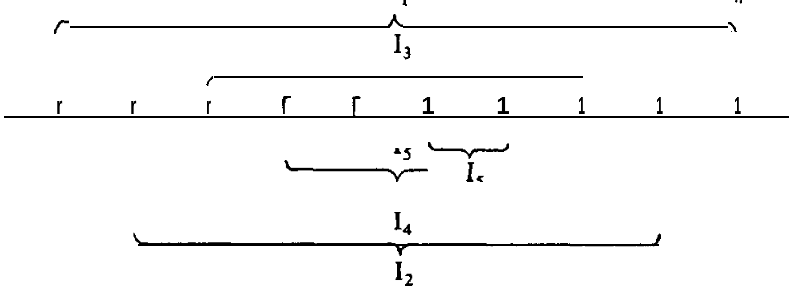
ให้ $x \in \bigcap_{n \in N} I_n$ ดังนั้น $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n

ถ้า $x \neq 0$ จะได้ว่า $n \leqslant \frac{1}{x}$ ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดกับทฤษฎีบท 1.20

ดังนั้น $x = 0$ และ $\bigcap_{n \in N} I_n = \{0\}$

#



รูป 1.1 ช่วงสอดแทรก (Nested Intervals)

ตัวอย่าง 1.12 ให้ $J_n = (0, \frac{1}{n})$ $n \in N$

ดังนั้น $J_n \supseteq J_{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n นั่นคือ $\{J_n | n \in N\}$ เป็นช่วงสอดแทรก และ $\bigcap_{n \in N} J_n = \phi$ เนื่องจาก

ถ้า $x \in J_n$ ทุกจำนวนนับ n แล้ว จะได้ $0 < x < \frac{1}{n}$ ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดแย้งกับบทแทรก 1.22

#

ตัวอย่าง 1.13 ให้ $K_n = (n, \infty)$ $n \in N$

ดังนั้น $K_n \supseteq K_{n+1}$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\{K_n | n \in N\}$ เป็นช่วงสอดแทรก และ $\bigcap_{n \in N} K_n = \phi$ เนื่องจาก

ถ้า $x \in \bigcap_{n \in N} K_n$ แล้วจะได้ $n < x$ ทุกจำนวนนับ n ซึ่งขัดกับทฤษฎีบท 1.20

#

จากตัวอย่างข้างต้นพบว่า ถ้า $\{I_n | n \in N\}$ เป็นช่วงสอดแทรกใด ๆ แล้ว $\bigcap_{n\in N} I_n$ อาจเป็นเซตว่างหรือไม่ใช่ก็ได้ ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับลักษณะของช่วง I_n ดังจะได้กล่าวถึงในทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.25 ทฤษฎีบทช่วงสอดแทรก (The Nested Interval Theorem)

ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนนับ n $I_n = [a_n, b_n]$ และ $\{I_n | n \in N\}$ เป็นช่วงปิดสอดแทรกที่มีขอบเขต (a nested sequence of closed and bounded intervals) แล้ว $\bigcap_{n\in N} I_n \neq \phi$

และนอกจากนั้น ถ้า $\inf \{b_n - a_n | n \in N\} = 0$ แล้ว จะมีจำนวนจริง ξ ซึ่ง

$$\bigcap_{n\in N} I_n = \{\xi\}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$

ดังนั้น $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant \ldots \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n \leqslant \ldots \leqslant b_2 \leqslant b_1$

เพราะฉะนั้น $\{a_n | n \in N\}$ เป็นเซตที่มีขอบเขตบน

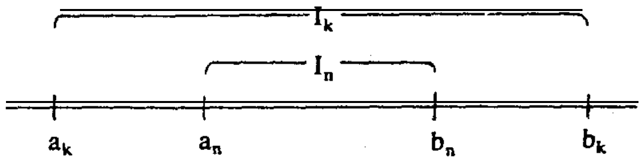
ให้ $\xi = \sup \{a_n | n \in N\}$ ดังนั้น $a_n \leqslant \xi$ ทุกจำนวนนับ n

จะพิสูจน์ว่า $\xi \leqslant b_n$ ทุกจำนวนนับ n

ให้ n เป็นจำนวนนับ และพิจารณา a_k ใด ๆ

ถ้า $n \leqslant k$ จะได้ $I_n \supseteq I_k$ นั่นคือ $a_k \leqslant b_k \leqslant b_n$

ถ้า $k < n$ จะได้ $I_k \supseteq I_n$ นั่นคือ $a_k \leqslant a_n \leqslant b_n$



ถ้า $k < n$ แล้ว $I_n \subseteq I_k$

รูป 1.2

ดังนั้น b_n เป็นขอบเขตบนของเซต $\{a_k | k \in N\}$

เพราะฉะนั้น $\xi \leqslant b_n$

เนื่องจาก n เป็นจำนวนนับใด ๆ จะได้ $\xi \leqslant b_n$ ทุกจำนวนนับ n

และเพราะว่า $a_n \leqslant \xi \leqslant b_n$ ทุกจำนวนนับ n

เพราะฉะนั้น $\xi \in \bigcap_{n\in N} I_n$

ต่อไปสมมุติว่า $\inf\{b_n - a_n | n \in N\} = 0$

ให้ $\eta = \inf\{b_n | n \in N\}$ เนื่องจากแต่ละ a_k; $a_k \leqslant b_n$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ a_k เป็นขอบเขตล่างของเซต $\{b_n | n \in N\}$ ทุกจำนวนนับ k

เพราะฉะนั้น $a_k \leqslant \eta$ ทุกจำนวนนับ k

และเพราะว่า $\xi = \sup\{a_k | k \in N\}$ ดังนั้น $\xi \leqslant \eta$

ให้ $x \in \bigcap_{n \in N} I_n$ ดังนั้น $a_n \leqslant x \leqslant b_n$ ทุกจำนวนนับ n

นั่นคือ $\xi \leqslant x \leqslant \eta$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เนื่องจาก $\inf\{b_n - a_n | n \in N\} = 0$ ดังนั้น สามารถหาจำนวนนับ n_0 ได้ ซึ่ง $0 \leqslant \eta - \xi \leqslant b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon$

นั่นคือ $0 \leqslant \eta - \xi < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ดังนั้น $\eta = \xi$

เพราะฉะนั้น ถ้า $x \in \bigcap_{n \in N} I_n$ แล้ว $x = \xi = \eta$ นั่นคือ $\bigcap_{n \in N} I_n = \{\xi\}$

#

ย่านจุด a **และย่านใกล้จุด** a (Neighborhood of the Point a and Deleted Neighborhood of the Point a)

สำหรับจำนวนจริง x และ a ใด ๆ ระยะทาง (distance) ระหว่าง x และ a คือค่า $|x-a|$ ดังนั้น ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ เรากล่าวว่า x อยู่ใกล้ (closed to) จุด a เมื่อระยะทางระหว่าง x และ a คือ $|x-a|$ มีค่าน้อย ซึ่งเราจะได้ใช้หลักอันนี้นิยามย่านจุด a และย่านใกล้จุด a ใด ๆ ดังนี้

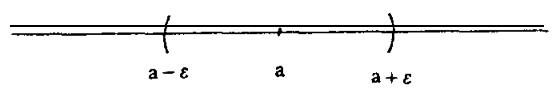
นิยาม 1.8 ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ และ $\varepsilon > 0$

ย่านจุด a รัศมี ε (ε - neighborhood of a) คือ เซต

$$N_\varepsilon(a) = \{x \in R \mid |x-a| < \varepsilon\}$$

หมายเหตุ จากนิยาม 1.8 พบว่า

$$N_\varepsilon(a) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$



รูป 1.3 ย่านจุด a รัศมี ε

ทฤษฎีบท 1.26 กำหนด a เป็นจำนวนจริง

ถ้า x เป็นจำนวนจริง โดยที่ $x \in N_{\varepsilon}(a)$ ทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

แล้ว $x = a$

พิสูจน์ เนื่องจาก $x \in N_{\varepsilon}(a)$ ทุกๆจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

ดังนั้น $|x-a| < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

ถ้า $|x-a| \neq 0$ จะได้ว่า $0 < |x-a|$

โดยทฤษฎีบท 1.24 จะมีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $0 < r < |x-a|$

ซึ่งขัดแย้งกับที่ว่า $|x-a| < \varepsilon$ ทุกจำนวนจริง $\varepsilon > 0$

เพราะฉะนั้น $|x-a| = 0$ นั่นคือ $x = a$

#

นิยาม 1.0 ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ย่านใกล้จุด a รัศมี ε (deleted ε – neighborhood of a) คือเซต

$$N'_{\varepsilon}(a) = N_{\varepsilon}(a) - \{a\}$$

นั่นคือ $N'_{\varepsilon}(a) = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$

แบบฝึกหัด 1.7

1. ถ้า $I = [a, b]$ และ $I' = [a', b']$ เป็นช่วงปิดใน R จงพิสูจน์ว่า $I \subseteq I'$ ก็ต่อเมื่อ $a' \leqslant a$ และ $b \leqslant b'$
2. ถ้า S เป็นเซตย่อยของ R ที่ไม่ใช่เซตว่าง จงพิสูจน์ว่า S เป็นเซตมีขอบเขตก็ต่อเมื่อมีช่วงปิด $I \subseteq R$ ซึ่ง $S \subseteq I$
3. ถ้า S เป็นเซตที่มีขอบเขตและไม่ใช่เซตว่าง และ I_S เป็นช่วงปิดโดยที่ $I_S = [\inf S, \sup S]$ แล้ว $S \subseteq I_S$ นอกจากนั้น ถ้า J เป็นช่วงปิดใด ๆ ใน R โดยที่ $S \subseteq J$ แล้ว $I_S \subseteq J$
4. ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $I_n = \left[0, \frac{1}{n}\right]$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า $x > 0$ แล้ว $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$
5. ถ้า $\{I_n | n \in N\}$ เป็นช่วงปิดสอดแทรกที่มีขอบเขต โดยที่ $I_n = [a_n, b_n]$ ทุกจำนวนนับ n และ $\xi = \sup\{a_n | n \in N\}$ และ $\eta = \inf\{b_n | n \in N\}$ แล้ว จงพิสูจน์ว่า $[\xi, \eta] = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

1.8 จุดเกาะกลุ่มหรือจุดลิมิต (Cluster Point or Limit Point)

นิยาม 1.10 กำหนด $S \subseteq R$ จำนวนจริง x_0 จะเป็นจุดเกาะกลุ่มหรือจุดลิมิตของ S เมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ สามารถหา $x \in S$ ได้ ซึ่ง $x \neq x_0$ และ $|x - x_0| < \varepsilon$

หมายเหตุ นิยาม 1.10 สามารถกล่าวได้อีกว่า x_0 จะเป็นจุดเกาะกลุ่มหรือจุดลิมิตของ S ได้เมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ใด ๆ $N_\varepsilon^*(x_0) \cap S \neq \phi$

ตัวอย่าง 1.14 กำหนด $S_1 = (0, 1)$

แล้วทุก ๆ จำนวนจริง x ที่อยู่ในเซต [0, 1] เป็นจุดเกาะกลุ่มหรือจุดลิมิตของ S_1 ทั้งสิ้น และจะสังเกตได้ว่า 0 และ 1 เป็นจุดเกาะกลุ่มหรือจุดลิมิตของ S_1 แต่ $0, 1 \notin S_1$

#

ตัวอย่าง 1.15 ทุกเซตย่อยของ R ที่เป็นเซตจำกัด (finite set) จะไม่มีจุดลิมิต แต่เซตย่อยของ R ที่เป็นซตอนันต์ (infinite set) อาจมีจุดลิมิตหรือไม่มีก็ได้ เช่น เซตของจำนวนนับ N เป็นเซตอนันต์ และ N ไม่มีจุดลิมิต

#

ตัวอย่าง 1.16 กำหนด $S_3 = \left\{\frac{1}{n} | n \in N\right\}$

ให้ $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22(ก.) $N_\varepsilon^*(0) \cap S_3 \neq \phi$

ดังนั้น 0 เป็นจุดลิมิตของ S_3 และ 0 เป็นจุดลิมิตเพียงจุดเดียวเท่านั้นของ S_3

#

ตัวอย่าง 1.17 กำหนด Q เป็นเซตของจำนวนตรรกยะ และ $I = [0, 1]$

ให้ $S_4 = I \cap Q$ และ $S_5 = I - Q$

ดังนั้น จำนวนจริงทุกตัวในช่วงหนึ่งหน่วย (unit interval) I จะเป็นจุดลิมิตของ S_4 และ S_5

ตัวอย่าง 1.18 กำหนด S เป็นเซตอนันต์และมีขอบเขตบน ให้ $u = \sup S$ และ $u \notin S$
กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยทฤษฎีบท 1.18 จะมี $x \in S$ ซึ่ง $u-\varepsilon < x < u < u+\varepsilon$
นั่นคือ u เป็นจุดลิมิตของ S

ทฤษฎีบท 1.27 จำนวนจริง x ใด ๆ จะเป็นจุดลิมิตของเซต S ถ้าสำหรับแต่ละจำนวนนับ n มี $s_n \in S$ ซึ่ง $0 < |x-s_n| < \frac{1}{n}$

พิสูจน์ กำหนด $\varepsilon > 0$ โดยบทแทรก 1.22 มีจำนวนนับ n ซึ่ง $\frac{1}{n} < \varepsilon$

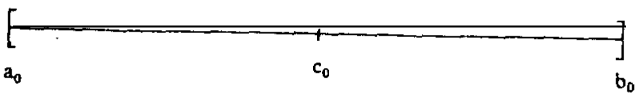
และโดยข้อกำหนดให้ จะมี $s_n \in S$ ซึ่ง $0 < |x-s_n| < \frac{1}{n} < \varepsilon$
นั่นคือ x เป็นจุดลิมิตของ S

#

ทฤษฎีบท 1.28 ทฤษฎีบทของโบลซาโน-ไวแยร์สตราสส์ (Bolzano-Weierstrass's Theorem)-
ทุกเซตย่อยของ R ที่เป็นเซตอนันต์ และมีขอบเขต ต้องมีจุดลิมิต

พิสูจน์ ให้ E เป็นเซตย่อยของ R โดยที่ E เป็นเซตอนันต์และมีขอบเขต
ดังนั้นจะมีจำนวนจริง a_0, b_0 ซึ่ง $E \subseteq [a_0, b_0]$

ให้ $I_0 = [a_0, b_0]$ และ $c_0 = \frac{a_0+b_0}{2}$



รูป 1.4

และ $I_1 = \begin{cases} [a_0, c_0] & \text{ถ้า } E \cap [a_0, c_0] \text{ เป็นเซตอนันต์} \\ [c_0, b_0] & \text{นอกจากนั้น} \end{cases}$

สมมุติ $I_1 = [a_1, b_1]$ ดังนั้น $E \cap I_1$ เป็นเซตอนันต์

และ $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$, $b_1 - a_1 = \frac{b_0-a_0}{2}$

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$

และ $I_{n+1} = \begin{cases} [a_n, c_n] & \text{ถ้า } E \cap [a_n, c_n] \text{ เป็นเซตอนันต์} \\ [c_n, b_n] & \text{นอกจากนั้น} \end{cases}$

เพราะฉะนั้น $E \cap I_n$ เป็นเซตอนันต์ทุกจำนวนนับ n

และ $I_0 \supseteq I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \ldots$

และ $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$ ทุกจำนวนนับ n

จากทฤษฎีบท 1.25 ให้ $a \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก n_0 เป็นจำนวนนับโดยที่ $\dfrac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \varepsilon$

จะพิสูจน์ว่า $I_{n_0} \subseteq N_\varepsilon(a)$

ให้ $x \in I_{n_0}$ เนื่องจาก $a \in I_{n_0}$ ดังนั้น $|x-a| \leqslant \dfrac{b_0 - a_0}{2^{n_0}} < \varepsilon$

ดังนั้น $I_{n_0} \subseteq N_\varepsilon(a)$ และจึงได้ว่า $E \cap I_{n_0} \subseteq E \cap N_\varepsilon(a)$

เนื่องจาก $E \cap I_{n_0}$ เป็นเซตอนันต์ เพราะฉะนั้น $E \cap N_\varepsilon(a)$ เป็นเซตอนันต์ด้วย

ซึ่งทำให้ $E \cap N_\varepsilon^*(a) \neq \phi$ นั่นคือ a เป็นจุดลิมิตของ E

#

แบบฝึกหัด 1.8

1. จงพิสูจน์ว่าทุกจุดในช่วงปิด $[0, 1]$ เป็นจุดลิมิตของช่วงเปิด $(0, 1)$
2. จงพิสูจน์ว่าทุกเซตจำกัดไม่มีจุดลิมิต
3. ถ้า x เป็นจำนวนจริงบวก และ $0<\varepsilon<x$ จงพิสูจน์ว่า มีจำนวนนับ n จำนวนจำกัดที่ $\dfrac{1}{n} \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$
4. จงพิสูจน์ว่าทุกจุดในช่วงปิด $I = [0, 1]$ เป็นจุดลิมิตของ $I \cap Q$ และ $I - Q$
5. จงพิจารณาจุดลิมิตทั้งหมดต่อไปนี้ของเซตย่อยของ R

   ก. เซตของจำนวนเต็ม

   ข. ช่วง $(a, b]$

   ค. $\{\frac{1}{n} \mid n \in N\}$

   ง. เซตของจำนวนตรรกยะ

   จ. $\{2^{-n} + 5^{-m} \mid m, n \in N\}$

   ฉ. $\{(-1)^n + \frac{1}{m} \mid m, n \in N\}$

   ช. $\{\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \mid m, n \in N\}$

   ฌ. $\left\{\dfrac{(-1)^n}{1+\frac{1}{n}} \mid n \in N\right\}$

1.9 เซตเปิดและเซตปิดใน R (Open Sets and Closed Sets in R)

นิยาม 1.11 กำหนด $G \subseteq R$ จะกล่าวว่า G เป็นเซตปิดใน R ถ้าสำหรับแต่ละ x ใน G สามารถหาจำนวนจริง $\varepsilon_x > 0$ ได้ซึ่ง $N_{\varepsilon_x}(x) \subseteq G$

ตัวอย่าง 1.19 **1. R เป็นเซ็ตเปิดใน R เนื่องจากทุก x ใน R**

$N_\varepsilon(x) \subseteq R$ สำหรับทุก $\varepsilon > 0$ เสมอ

2. สำหรับจำนวนจริง a , b ใดๆที่ $a \le b$ แล้ว (a,b) เป็นเซ็ตเปิดใน R เนื่องจากถ้า $x \in (a,b)$

ให้ $\varepsilon = \min\{|x-a|, |b-x|\}$ จะได้ $N_\varepsilon(x) \subseteq (a,b)$

3. สำหรับจำนวนจริง a , b ใดๆ $(-\infty, a)$ และ (b, ∞) เป็นเซ็ตเปิดใน R เนื่องจาก ถ้าให้ $x \in (-\infty, a)$ เลือก

$\varepsilon = |a-x|$ จะได้ $N_\varepsilon(x) \subseteq (-\infty, a)$

และถ้า $x \in (b, \infty)$ เลือก $\varepsilon = |x-b|$ จะได้

$N_\varepsilon(x) \subseteq (b, \infty)$

4. โดยเหตุผลทางตรรกศาสตร์ $\varnothing$ เป็นเซ็ตเปิดใน R

ทฤษฎีบท 1.29 ก. กลุ่มของเซตเปิดใด ๆ ใน R (arbitrary collection of open sets in R) จะมีผลผนวก (union) เป็นเซตเปิด

ข. กลุ่มจำกัดของเซตเปิดใน R (a finite collection of open sets in R) จะมีผลตัด (intersection) เป็นเซตเปิด

พิสูจน์ ก. ให้ $\{G_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ เป็นกลุ่มของเซตเปิดใน R

ให้ $x \in \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ ดังนั้นจะมี $\alpha_0 \in \Lambda$ ซึ่ง $x \in G_{\alpha_0}$

เพราะว่า G_{α_0} เป็นเซตเปิดใน R ดังนั้นจะมีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N_\varepsilon(x) \subseteq G_{\alpha_0}$

เนื่องจาก $G_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ จึงได้ $N_\varepsilon(x) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$

ดังนั้น $\bigcup_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$ เป็นเซตเปิดใน R

ข. กำหนด $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ เป็นกลุ่มจำกัดของเซตเปิดใน R

ให้ $x \in \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ดังนั้น $x \in G_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

เนื่องจากแต่ละ G_i เป็นเซตเปิดใน R จึงสามารถหา $\varepsilon_i > 0$ ได้ซึ่ง

$N_{\varepsilon_i}(x) \subseteq G_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

ให้ $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\}$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$ และ $\varepsilon \leqslant \varepsilon_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

เพราะฉะนั้น $x \in N_\varepsilon(x) \subseteq N_{\varepsilon_i}(x) \subseteq G_i$ ทุก $i = 1, 2, \ldots, n$

นั่นคือ $x \in N_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ ดังนั้น $\bigcap_{i=1}^{n} G_i$ เป็นเซตเปิดใน R

#

นิยาม 1.12 กำหนด $F \subseteq R$ จะกล่าวว่า F เป็นเซตปิดใน R ถ้า R – F เป็นเซตเปิดใน R

ตัวอย่าง 1.20 1. **R เป็นเซ็ตปิดใน R เนื่องจาก R–R = ∅ ซึ่งเป็นเซ็ตเปิดใน R**

2. สำหรับจำนวนจริง a , b ใดๆ ที่ $a \le b$ แล้ว [a , b] เป็นเซ็ตปิดใน R เนื่องจาก

$R - [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, \infty)$ เป็นเซ็ตเปิดใน R

3. สำหรับจำนวนจริง a , b ใดๆ $(-\infty, a]$ และ $[b, \infty)$ เป็นเซ็ตปิดใน R เนื่องจาก

$R-(-\infty, a] = (a, \infty)$ และ

$R-[b, \infty) = (-\infty, b)$ เป็นเซ็ตเปิดใน R

4. โดยเหตุผลทางตรรกศาสตร์ ∅ เป็นเซ็ตปิดใน R

ทฤษฎีบท 1.30 ก. ผลตัดของกลุ่มของเซตปิดใด ๆ ใน R เป็นเซตปิด

ข. ผลผนวกของกลุ่มจำกัดของเซตปิดใน R เป็นเซตปิด

พิสูจน์ ก. กำหนด $\{F_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เป็นกลุ่มของเซตปิดใด ๆ ใน R

ให้ $F = \bigcap_{\alpha\in\wedge} F_\alpha$ ดังนั้น $R - F = \bigcup_{\alpha\in\wedge} (R - F_\alpha)$

เนื่องจากแต่ละ F_α เป็นเซตปิดใน R ดังนั้น $R-F_\alpha$ เป็นเซตเปิดใน R

จากทฤษฎีบท 1.29(ก.) $R - F = \bigcup_{\alpha\in\wedge} (R - F_\alpha)$ เป็นเซตเปิดใน R

เพราะฉะนั้น $F = \bigcap_{\alpha \in \wedge} F_\alpha$ เป็นเซตปิดใน R

ข. กำหนด $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\}$ เป็นกลุ่มจำกัดของเซตปิดใน R

ให้ $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ ดังนั้น $R - F = \bigcap_{i=1}^{n} (R - F_i)$

เนื่องจากแต่ละ F_i เป็นเซตปิด ดังนั้น $R - F_i$ เป็นเซตเปิด

โดยทฤษฎีบท 1.29(ข) $R - F = \bigcap_{i=1}^{n} (R - F_i)$ เป็นเซตเปิด

เพราะฉะนั้น $F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ เป็นเซตปิดใน R

#

ตัวอย่าง 1.21 สำหรับจำนวนจริง a , b ใดๆที่ $a \le b$ แล้ว [a , b) และ (a , b] ไม่เป็นทั้งเซ็ตเปิดและเซ็ตปิดใน R

หมายเหตุ จากตัวอย่างข้างต้นพบว่า $\varnothing$ และ **R** เป็นทั้งเซ็ตเปิดและเซ็ตปิดใน **R** ในขณะเดียวกันเซตย่อยของ **R** เซ็ตอื่นอาจจะไม่ใช่ทั้งเซ็ตเปิดและเซ็ตปิด

ตัวอย่าง 1.22 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $G_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ แล้ว $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = (0, 1]$

พิสูจน์ ให้ $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ ดังนั้น $x \in G_n = \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right)$ ทุก $n \in N$

นั่นคือ x เป็นขอบเขตล่างของ $\left\{1 + \frac{1}{n} \middle| n \in N\right\}$

เพราะว่า $1 = \inf\left\{1 + \frac{1}{n} \middle| n \in N\right\}$ ดังนั้น $0 < x \leqslant 1$

นั่นคือ $x \in (0,1]$ เพราะฉะนั้น $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subseteq (0, 1]$

และเห็นได้ว่า $(0, 1] \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$

ดังนั้น $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(0, 1 + \frac{1}{n}\right) = (0, 1]$

หมายเหตุ ตัวอย่าง 1.22 แสดงให้เห็นว่า ผลตัดของกลุ่มอนันต์ของเซตเปิดใน R ไม่จำเป็นต้องเป็นเซตเปิด

ตัวอย่าง 1.23 สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ แล้ว $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0,1]$

พิสูจน์ ให้ $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ดังนั้นจะมีจำนวนนับ n_0 ซึ่ง $0 < \frac{1}{n_0} \leqslant x \leqslant 1$

เพราะฉะนั้น $x \in (0, 1]$ นั่นคือ $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq (0, 1]$

และถ้าให้ $x \in (0, 1]$ โดยบทแทรก 1.22 จะมีจำนวนนับ k ซึ่ง $0 < \frac{1}{k} < x \leqslant 1$

นั่นคือ $x \in F_k = \left[\frac{1}{k}, 1\right]$ และ $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $(0, 1] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$

เพราะฉะนั้น $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$

#

หมายเหตุ ตัวอย่าง 1.23 แสดงให้เห็นว่าผลผนวกของกลุ่มอนันต์ของเซตปิดใน R ไม่จำเป็นจะต้องเป็นเซตปิด

ทฤษฎีบท 1.31 กำหนด $F \subseteq R$ F จะเป็นเซตปิดใน R ก็ต่อเมื่อ ถ้า x เป็นจุดลิมิตใด ๆ ของ F แล้ว $x \in F$

พิสูจน์ กำหนด F เป็นเซตปิดใน R ให้ x เป็นจุดลิมิตของ F

สมมุติ $x \in R - F$ เนื่องจาก $R - F$ เป็นเซตเปิดใน R

ดังนั้น จะมี $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $x \in N_\varepsilon(x) \subseteq R - F$

เพราะฉะนั้น $N_\varepsilon(x) \cap F = \phi$ ซึ่งขัดกับคุณสมบัติการเป็นจุดลิมิตของ x

ดังนั้น $x \in F$

ในทางกลับกัน สมมุติว่าทุก ๆ จุดลิมิตของ F ต้องเป็นสมาชิกของ F ให้ $y \in R - F$ ดังนั้น y ไม่ใช่จุดลิมิตของ F

นั่นคือ สามารถหา $\varepsilon_y > 0$ ได้ซึ่ง $N_{\varepsilon_y}(y) \cap F = \phi$

เพราะฉะนั้น $N_{\varepsilon_y}(y) \subseteq R - F$

ดังนั้น $R - F$ เป็นเซตเปิดใน R และได้ว่า F เป็นเซตปิดใน R

#

แบบฝึกหัด 1.9

1. ให้ $x \in (0, 1)$ และ $\varepsilon_x = \min\{x, 1-x\}$
   จงพิสูจน์ว่า ถ้า $|u-x| < \varepsilon_x$ แล้ว $u \in (0, 1)$
2. กำหนด G เป็นเซตเปิดใน R และ $x \in G$
   ให้ $A_x = \{a \in R \mid (a, x] \subseteq G\}$, $B_x = \{b \in R \mid [x, b) \subseteq G\}$
   จงพิสูจน์ว่า $A_x \neq \phi$ และ $B_x \neq \phi$
3. ถ้า A_x (ในข้อ 2) เป็นเซตที่มีขอบเขตล่าง และ $a_x = \inf A_x$ จงพิสูจน์ว่า $a_x \notin G$
4. จากข้อ 2. และ 3. ถ้า y เป็นจำนวนจริงที่ $a_x < y < x$ จงพิสูจน์ว่า $y \in G$
5. จำนวนจริง x จะกล่าวว่าเป็นจุดข้างใน (interior point) ของเซต A ถ้ามีจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ ซึ่ง $N_\varepsilon(x) \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า A เป็นเซตเปิดใน R ก็ต่อเมื่อทุก ๆ จุดใน A เป็นจุดข้างในของเซต A
6. จำนวนจริง x เรียกว่า เป็นจุดขอบ (boundary point) ของเซต A เมื่อสำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ $N_\varepsilon(x) \cap A \neq \phi$ และ $N_\varepsilon(x) \cap (R-A) \neq \phi$ จงพิสูจน์ว่า A และ $R-A$ มีจุดขอบจุดเดียวกัน
7. จงพิสูจน์ว่า G จะเป็นเซตเปิดใน R ก็ต่อเมื่อ ถ้า x เป็นจุดขอบของ G แล้ว $x \notin G$
8. จงพิสูจน์ว่า F จะเป็นเซตปิดใน R ก็ต่อเมื่อ ถ้า x เป็นจุดขอบของ F แล้ว $x \in F$

1.10 เซตปกคลุมแน่น (Compact Sets)

นิยาม 1.13 กำหนด $E \subseteq R$ กลุ่มของเซตย่อยของ R $\{G_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เรียกว่าเป็นชุดปกคลุม (cover) ของ E ถ้า $E \subseteq \bigcup_{\alpha \in \wedge} G_\alpha$

และชุดปกคลุม $\{G_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เรียกว่าเป็นชุดปกคลุมเปิด (open cover) ของ E ถ้า G_α เป็นเซตเปิดใน R ทุก ๆ $\alpha \in \wedge$

นิยาม 1.14 กำหนด $E \subseteq R$, ς และ ς' เป็นชุดปกคลุมของ E

จะกล่าวว่า ς' เป็นชุดปกคลุมย่อย (sub cover) ของ ς ถ้า $\varsigma' \subseteq \varsigma$

นิยาม 1.15 กำหนด $K \subseteq R$

จะกล่าวว่า K เป็นเซตปกคลุมแน่น (compact set) ถ้าทุก ๆ ชุดปกคลุมเปิดของ K มีชุดปกคลุมย่อยที่เป็นเซตจำกัด (finite subcover)

ตัวอย่าง 1.24 ทุกเซตย่อยของ R ที่เป็นเซตจำกัด จะเป็นเซตปกคลุมแน่น

พิสูจน์ ให้ $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ เป็นเซตจำกัด

และ $\varsigma = \{G_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดใด ๆ ของ K

นั่นคือ $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{\alpha \in \wedge} G_\alpha$

ดังนั้นสำหรับแต่ละ $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ จะสามารถหา $\alpha_j \in \wedge$ ได้ ซึ่ง $x_i \in G_{\alpha_i}$ เพราะ

ฉะนั้น $K = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G_{\alpha_j}$ โดยที่ $k \leqslant n$

นั่นคือ K เป็นเซตปกคลุมแน่น

#

ตัวอย่าง 1.25 ให้ $H = [0, \infty)$ แล้ว H ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น

พิสูจน์ สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $G_n = (-1, n)$

ดังนั้น $H \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ นั่นคือ $\varsigma = \{G_n | n \in N\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดของ N

ให้ $\{G_{n_1}, G_{n_2}, \ldots, G_{n_k}\}$ เป็นเซตย่อยใด ๆ ของ ς ที่เป็นเซตจำกัด

เลือก $M = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$

ดังนั้น $\bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i} = G_M$ และ $M+1 \in H$ แต่ $M+1 \notin G_M$

นั่นคือ $H \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{k} G_{n_i}$ เพราะฉะนั้น H ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น

ตัวอย่าง 1.26 ให้ $J = (0, 1)$ แล้ว J ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น

พิสูจน์ สำหรับแต่ละ $n \in \{3, 4, 5, \ldots\}$ ให้ $G_n = \left(\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$

ให้ $x \in J = (0, 1)$ โดยบทแทรก 1.22 จะมีจำนวนนับ k_1, k_2 ซึ่ง $\frac{1}{k_1} < x$ และ

$\frac{1}{k_2} < 1-x$ ให้ $k = \max\{k_1, k_2\}$

ดังนั้น $\frac{1}{k} < x$ และ $\frac{1}{k} < 1-x$

นั่นคือ $0 < \frac{1}{k} < x < 1-\frac{1}{k} < 1$ ดังนั้น $x \in G_k$

และ $J \subseteq \bigcup_{n=3}^{\infty} G_n$

สมมติว่า J เป็นเซตปกคลุมแน่น ดังนั้นจะมีจำนวนนับ p ซึ่ง

$J \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} G_{n_i}$ ให้ $M = \max\{n_1, n_2, \ldots n_p\}$

จะได้ว่า $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} G_i = G_M$

เพราะว่า $\frac{1}{M} \in J = (0, 1)$ แต่ $\frac{1}{M} \notin G_M$

ดังนั้น จึงเป็นไปไม่ได้ที่ $J \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} G_i = G_M$

นั่นคือ J ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น

#

ทฤษฎีบทประกอบ 1.32 กำหนด u เป็นจำนวนจริง และแต่ละจำนวนนับ n

ให้ $G_n = \{y \in R \mid |y-u| > \frac{1}{n}\}$ แล้ว G_n เป็นเซตเปิดใน R

พิสูจน์ ให้ $y \in G_n$

เลือก ε เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $0 < \varepsilon < |y-u| - \frac{1}{n}$ ให้ $x \in N_\varepsilon(y)$

โดยทฤษฎีบท 1.16 ได้ว่า $\big||y-u| - |y-x|\big| \leqslant |x-u|$

นั่นคือ $|x-u| > \frac{1}{n}$ ดังนั้น $x \in G_n$ ซึ่งทำให้ได้ว่า $N_\varepsilon(y) \subseteq G_n$

นั่นคือ G_n เป็นเซตเปิดใน R

#

ทฤษฎีบท 1.33 ทฤษฎีบทไฮเน-โบเรล (Heine-Borel Theorem)

กำหนด $K \subseteq R$ แล้ว K จะเป็นเซตปกคลุมแน่นก็ต่อเมื่อ K เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

พิสูจน์ ให้ K เป็นเซตปกคลุมแน่น

สำหรับแต่ละจำนวนนับ n ให้ $H_n = (-n, n)$

ดังนั้น $K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n$

เนื่องจาก K เป็นเซตปกคลุมแน่น จะมีจำนวนนับ k ซึ่ง $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} H_{n_i}$

เลือก $M = \max\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$

จะได้ $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} H_{n_i} = H_M = (-M, M)$

นั่นคือ K เป็นเซตที่มีขอบเขต

ต่อไปจะพิสูจน์ว่า K เป็นเซตปิด

ให้ $u \in R-K$ และสำหรับแต่ละจำนวนนับ n

ให้ $G_n = \{y \in R \mid |y-u| > \frac{1}{n}\}$ โดยทฤษฎีบทประกอบ 1.32 G_n เป็นเซ็ตเปิด

และเห็นได้ชัดว่า $R-\{u\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

เพราะว่า $u \in R-K$ ดังนั้น $K \subseteq R-\{u\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$

เนื่องจาก K เป็นเซตปกคลุมแน่น จะมีจำนวนนับ k ซึ่ง $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G_{i_j}$

ให้ $L = \max\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$ ดังนั้น $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} G_{i_j} = G_L$

นั่นคือ $K \cap \left(u-\frac{1}{L}, u+\frac{1}{L}\right) = \phi$ ซึ่งได้ว่า $\left(u-\frac{1}{L}, u+\frac{1}{L}\right) \subseteq R-K$

ดังนั้น $R-K$ เป็นเซตเปิด และ K เป็นเซตปิดใน R

ในทางกลับกันสมมติว่า K เป็นเซตปิดและมีขอบเขต

ให้ $\zeta = \{G_\alpha \mid \alpha \in \wedge\}$ เป็นชุดปกคลุมเปิดใด ๆ ของ K

สมมติว่าทุกเซตย่อยของ ζ ที่เป็นเซตจำกัดไม่เป็นชุดปกคลุมของ K เนื่องจาก K เป็นเซตที่มีขอบเขต ดังนั้น ให้ r เป็นจำนวนจริงบวก โดยที่ $K \subseteq [-r, r]$

ให้ $I_1 = [-r, r]$, $I_1' = [-r, 0]$ และ $I_1'' = [0, r]$

ดังนั้น อย่างน้อย $K \cap I_1'$ หรือ $K \cap I_1''$ ต้องไม่เป็นเซตย่อยของทุก ๆ ผลผนวกจำกัด (finite union) ของสมาชิกใน ζ เพราะมิฉะนั้น $K = (K \cap I_1') \cup (K \cap I_1'')$ จะต้องเป็นเซตย่อยของผลผนวกจำกัดของสมาชิกใน ζ

ดังนั้น สมมติว่า $K \cap I_1'$ ไม่เป็นเซตย่อยของทุก ๆ ผลผนวกจำกัดของสมาชิกในζ และให้ $I_2 = I_1'$

ต่อไปแบ่งช่วงปิด I_2 ออกเป็นสองช่วงย่อยปิด I_2' และ I_2''

ดังนั้น อย่างน้อย $K \cap I_2'$ หรือ $K \cap I_2''$ ต้องไม่เป็นเซตย่อยของทุก ๆ ผลผนวกจำกัดของสมาชิกใน ζ

และสมมติว่า $K \cap I_2'$ ไม่เป็นเซตย่อยของทุก ๆ ผลผนวกจำกัดของสมาชิกใน ζ และให้ $I_3 = I_2'$

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทอุปนัย จะมีช่วงปิดสอดแทรก $\{I_n | n \in N\}$ โดยที่ $K \cap I_n$ ไม่เป็นเซตย่อยของทุก ๆ ผลผนวกจำกัดของสมาชิกใน ζ ทุก ๆ จำนวนนับ n และแต่ละ I_n มีความยาวช่วง คือ $\frac{r}{2^{n-2}}$

เนื่องจากแต่ละ I_n เป็นช่วงปิดที่มีขอบเขต ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 1.25 จะมีจำนวนจริง- $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

กำหนด $\varepsilon > 0$ เลือก n_0 เป็นจำนวนนับ ซึ่ง $\frac{r}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$

เพราะว่า $K \cap I_{n_0}$ ไม่เป็นเซตย่อยของทุกผลผนวกจำกัดของสมาชิกใน ζ
ดังนั้น $K \cap I_{n_0} \neq \phi$ ให้ $x \in K \cap I_{n_0}$

เพราะว่า $z \in I_{n_0}$ จะได้ $|z - x| < \frac{r}{2^{n_0-2}} < \varepsilon$

นั่นคือ $x \in N_\varepsilon(z)$ และ $N_\varepsilon^*(z) \cap K \neq \phi$
ดังนั้น z เป็นจุดลิมิตของ K
เพราะว่า K เป็นเซตปิดโดยทฤษฎีบท 1.31 $z \in K \subseteq \bigcup_{\alpha \in \wedge} G_\alpha$

นั่นคือ จะมี $\alpha_0 \in \wedge$ ซึ่ง $z \in G_{\alpha_0}$ และเนื่องจาก G_{α_0} เป็นเซตเปิด
จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $N_\delta(z) \subseteq G_{\alpha_0}$ เลือก n^* เป็นจำนวนนับ โดยที่ $\frac{r}{2^{n^*-2}} < \delta$
จะได้ว่า $I_{n^*} \subseteq N_\delta(z) \subseteq G_{\alpha_0}$

นั่นคือ $K \cap I_{n^*} \subseteq I_{n^*} \subseteq G_{\alpha_0}$ ซึ่งขัดแย้งกับโครงสร้างของช่วงปิด I_{n^*}
ดังนั้น K เป็นเซตปกคลุมแน่น #

หมายเหตุ 1. จากตัวอย่าง 1.25 เซตปิด $[0, \infty)$ ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น ทั้งนี้เนื่องจาก $[0, \infty)$ เป็นเซตที่ไม่มีขอบเขต

2. จากตัวอย่าง 1.26 เซตที่มีขอบเขต $J = (0, 1)$ ไม่ใช่เซตปกคลุมแน่น เนื่องจาก-J ไม่ใช่เซตปิด

ดังนั้น เงื่อนไขทั้งสองเงื่อนไขในทฤษฎีบท 1.33 จึงจำเป็นและไม่อาจตัดเงื่อนไขใดเงื่อนไขหนึ่งทิ้งไปได้

แบบฝึกหัด 1.10

1. กำหนด K เป็นเซตปกคลุมแน่น และ $F \subseteq K$ โดยที่ F เป็นเซตปิด จงพิสูจน์ว่า F เป็นเซตปกคลุมแน่น
2. กำหนด K_1 และ K_2 เป็นเซตปกคลุมแน่น จงพิสูจน์ว่า $K_1 \cup K_2$ เป็นเซตปกคลุมแน่น
3. ให้ $\{K_\alpha | \alpha \in \wedge\}$ เป็นชุดของเซตปกคลุมแน่น โดยที่ $K_\alpha \neq \phi$ ทุก $\alpha \in \wedge$ จงพิสูจน์ว่า $\bigcap_{\alpha \in \wedge} K_\alpha$ เป็นเซตปกคลุมแน่น
4. ให้ $\{K_n | n \in N\}$ เป็นชุดของเซตปกคลุมแน่น โดยที่ $K_n \neq \phi$ ทุกจำนวนนับ n และ $K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$ จงพิสูจน์ว่า $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \phi$
5. ให้ K เป็นเซตปกคลุมแน่น จงพิสูจน์ว่า $\inf K$ และ $\sup K$ ต้องเป็นสมาชิกของ K