บทที่ 6
การส่งคงรูป
(Conformal Mapping)

ในบทที่ 2 และ 3 ได้กล่าวถึงการส่งของฟังก์ชันเชิงซ้อนมาบ้างแล้ว ซึ่งเป็นเพียงการส่งของฟังก์ชันเฉพาะ ในบทนี้จะกล่าวถึงการส่งของฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งจะพิจารณาถึงการส่งคงรูปและการส่งของฟังก์ชันประถมรูปอื่น ๆ เพิ่มเติม เช่น ฟังก์ชันเชิงเส้น ตลอดจนฟังก์ชันตรีโกณมิติ เช่น $\sin z$, $\cos z$ เป็นต้น

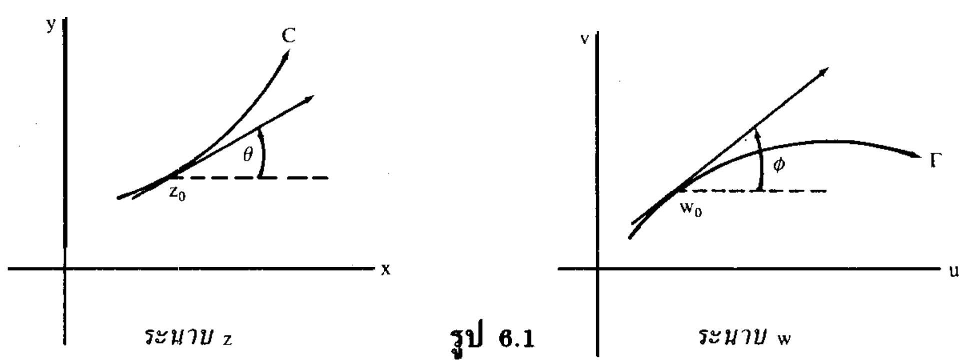
6.1 การส่งคงรูป

พิจารณาฟังก์ชันวิเคราะห์ $w = f(z)$ ในที่นี้จะพิจารณาการเปลี่ยนทิศทางของเส้นกราฟที่ผ่านจุด z_0 และ $f'(z_0) \neq 0$

ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ (smooth curve) ที่ผ่านจุด z_0 และมีสมการเป็น

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad , \quad a \leqslant t \leqslant b$$

จุดประสงค์ของเราคือ ต้องการจะเปรียบเทียบมุมเอียงของเส้นสัมผัสโค้งที่จุดสัมผัสกับมุมเอียงของเส้นสัมผัส **ภาพของเส้นโค้ง** (image curve) ที่จุดสัมผัส ให้ Γ เป็นภาพของเส้นโค้ง C ดังรูป



รูป 6.1

ให้ $z_0 = z(t_0)$ เป็นจุดบนกราฟ

ให้ θ เป็นมุมที่เส้นสัมผัสกราฟ C ที่ z_0 ทำกับแกน x

และให้ ϕ เป็นมุมที่เส้นสัมผัสกราฟ Γ ที่ w_0 ทำกับแกน u

สำหรับ z ใด ๆ บนกราฟ C จะได้

$$w - w_0 = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}(z - z_0)$$

ดังนั้น $$\arg(w - w_0) = \arg\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} + \arg(z - z_0)$$

จะเห็นว่า $\arg(z - z_0)$ เป็นมุมในระนาบ z ระหว่างแกน x และเส้นตรงที่ผ่านจุด z และ z_0 ในขณะที่ $\arg(w - w_0)$ เป็นมุมในระนาบ w ระหว่างแกน u และเส้นตรงที่ผ่านจุด w และ w_0 ดังนั้น เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 ตามเส้นโค้ง C ค่า $\arg(z - z_0)$ จะเข้าใกล้ θ ซึ่งเป็นมุมที่เส้นสัมผัสกราฟ C ทำกับแกน x ที่จุด z_0 ในทำนองเดียวกัน ค่า $\arg(w - w_0)$ จะเข้าใกล้ ϕ ซึ่งเป็นมุมที่เส้นสัมผัสกราฟ Γ ทำกับแกน u ที่ w_0

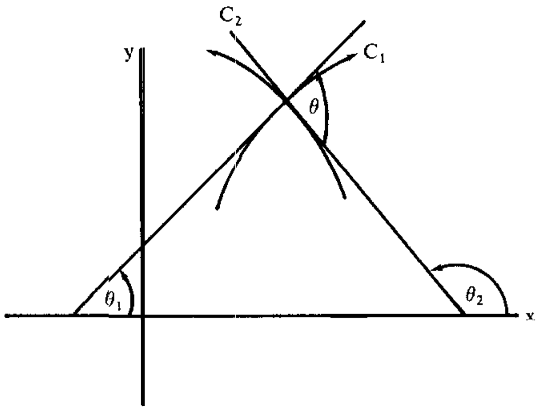
ถ้า $f'(z_0) \neq 0$ ดังนั้น $\arg f'(z_0)$ มีความหมาย เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 จะได้

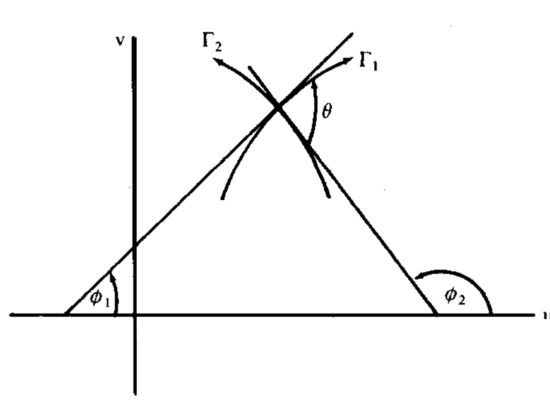
$$\phi = \arg f'(z_0) + \theta$$

นั่นคือ ผลต่างระหว่างมุมเอียงของเส้นสัมผัสกราฟ C ที่จุดสัมผัสและมุมเอียงของเส้นสัมผัสกราฟ Γ ที่จุดสัมผัส จะขึ้นอยู่กับอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุด z_0

ถ้ามีกราฟ 2 เส้น คือ C_1 และ C_2 ตัดกันที่จุดหนึ่ง แล้วมุมระหว่างกราฟทั้งสองจะนิยามในรูปของมุมระหว่างเส้นสัมผัสกราฟที่จุดสัมผัสนั่นเอง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.1 ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 ซึ่ง $f'(z_0) \neq 0$ ให้ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเรียบในระนาบ z ซึ่งตัดกันที่ z_0 ให้ Γ_1 และ Γ_2 เป็นภาพของ C_1 และ C_2 ในระนาบ w ตามลำดับ จะได้ว่ามุมระหว่าง C_1 และ C_2 วัดจาก C_1 ไปยัง C_2 จะเท่ากับมุมระหว่าง Γ_1 และ Γ_2 เมื่อวัดจาก Γ_1 ไป Γ_2 ดังรูป 6.2





รูปที่ 6.2

พิสูจน์ ให้มุม θ_1 และมุม θ_2 เป็นมุมเอียงของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C_1 และ C_2 ที่จุด z_0 ตามลำดับ

เพราะฉะนั้น $\phi_1 = \arg f'(z_0) + \theta_1$

และ $\phi_2 = \arg f'(z_0) + \theta_2$

เมื่อ ϕ_1 และ ϕ_2 เป็นมุมเอียงของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง Γ_1 และ Γ_2 ที่จุด $w_0 = f(z_0)$ ตามลำดับ

$$\begin{aligned}\phi_2 - \phi_1 &= (\arg f'(z_0) + \theta_2) - (\arg f'(z_0) + \theta_1) \\ &= \theta_2 - \theta_1\end{aligned}$$

นั่นคือ $\phi_2 - \phi_1$ เป็นมุมจาก Γ_1 ไปยัง Γ_2 **มีขนาด** (magnitude) และ **การวางทิศทาง** (orientation) เหมือนกับมุม $\theta_2 - \theta_1$ จาก C_1 ไปยัง C_2

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนจากจำนวนเชิงซ้อน C ไปยัง C ซึ่ง f ทำให้มุมระหว่างเส้นโค้ง 2 เส้นตัดกันที่จุด ๆ หนึ่ง และมุมระหว่างภาพของเส้นโค้งทั้งสองนั้นมีขนาดและการวางทิศทางเหมือนกัน จะกล่าวว่า f เป็น **การส่งคงรูป** (conformal mapping)

นั่นคือ จากทฤษฎีบทที่ 6.1 เป็นลักษณะที่ f เป็นการส่งคงรูป ถ้าฟังก์ชันนั้นทำให้เกิดเฉพาะขนาดของมุมเท่ากัน แต่การวางทิศทางต่างกัน จะเรียก **การส่งแบบ** isogonal

ตัวอย่าง จงพิจารณาการส่งของ $f(z) = z^2$ ที่จุด $z = 1+i$ ซึ่งเป็นจุดตัดของเส้นตรง $y = x$ และ $x = 1$ ว่าเป็นการส่งคงรูป

วิธีทำ ให้ $w = f(z) = z^2$

$$= x^2 - y^2 + 2xyi$$

ในที่นี้ $\quad u(x, y) = x^2 - y^2$

$$v(x, y) = 2xy$$

พิจารณาเส้นตรง $y = x$

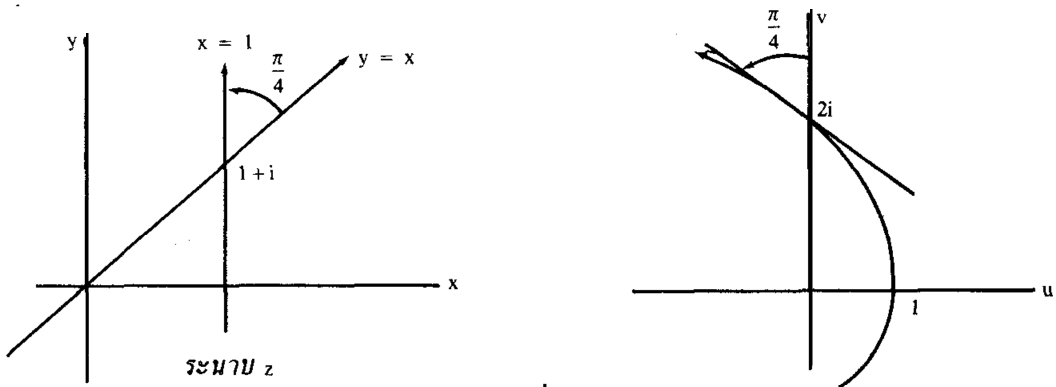
จะได้ $\quad u = 0, \quad v = 2y^2 \geqslant 0$

นั่นคือ เส้นตรง $y = x$ จะส่งไปยังระนาบ w ไปยังครึ่งบนของแกนจินตภาพ คือ $u = 0$ และ $v \geqslant 0$

พิจารณาเส้นตรง $x = 1$

จะได้ $\quad u = 1 - y^2 \quad$ และ $\quad v = 2y$

หรือ $\quad v^2 = -4(u-1)$ ซึ่งเป็นพาราโบลา ดังรูป



รูปที่ 6.3

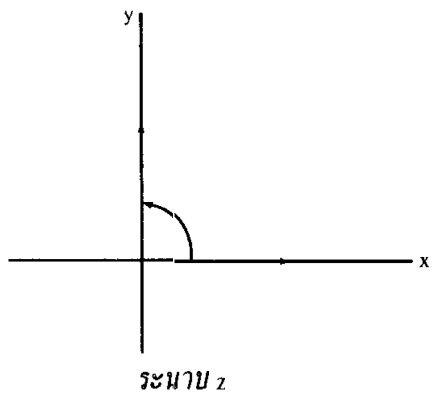
บนระนาบ z เราจะวัดมุมระหว่างเส้นตรงทั้งสองโดยพิจารณาจากการที่ y มีค่าเพิ่มขึ้นเป็นทิศทางบวก ซึ่งจะได้เท่ากับ $\frac{\pi}{4}$ เรเดียน บนระนาบ w เมื่อ $y > 0$ และ y มีค่าเพิ่มขึ้นตามเส้นตรง $y = x$ จะได้ $v = 2y^2$ มีค่าเพิ่มขึ้นตาม $u = 0$ ดังนั้น ทิศทางบวกของภาพของเส้นตรงมีทิศขึ้นบน (upward)

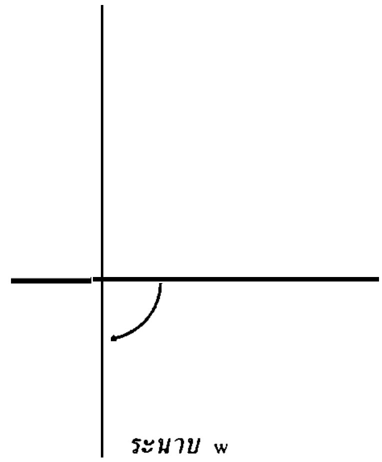
ในทำนองเดียวกัน เมื่อ y มีค่าเพิ่มขึ้นตามเส้นตรง $x = 1$ จะได้ $v = 2y$ มีค่าเพิ่มขึ้นตามพาราโบลาในทิศขึ้นบนด้วย และมุมที่ $w = 2i$ วัดจาก v ไปยังพาราโบลา คือ $\frac{\pi}{4}$

จะเห็นว่าค่า $\frac{\pi}{4}$ หาได้จาก $\arg[2(1+i)] = \frac{\pi}{4}$ นั่นคือ ภายใต้ $w = z^2$ จะถูกหมุนไปด้วยมุมคงที่ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\pi}{4}$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ที่กำหนดให้เป็นลักษณะของการส่งคงรูป

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = \bar{z}$ จากตัวอย่างเรื่องการส่งในหัวข้อ 2.2 จะเห็นว่า $\bar{z}$ เป็นการส่งแบบ isogonal





รูปที่ 6.4

จากนิยามและทฤษฎีบทที่ 6.1 สามารถสรุปเป็นทฤษฎีบทดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 6.2 ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z บนเซต S และ $f'(z) \neq 0$ จะได้ว่า $w = f(z)$ เป็นการส่งคงรูป

นิยาม ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 และ f ไม่เป็นฟังก์ชันคงตัว ถ้า $f'(z_0) = 0$ จะเรียก z_0 ว่าเป็น **จุดวิกฤต** (critical point)

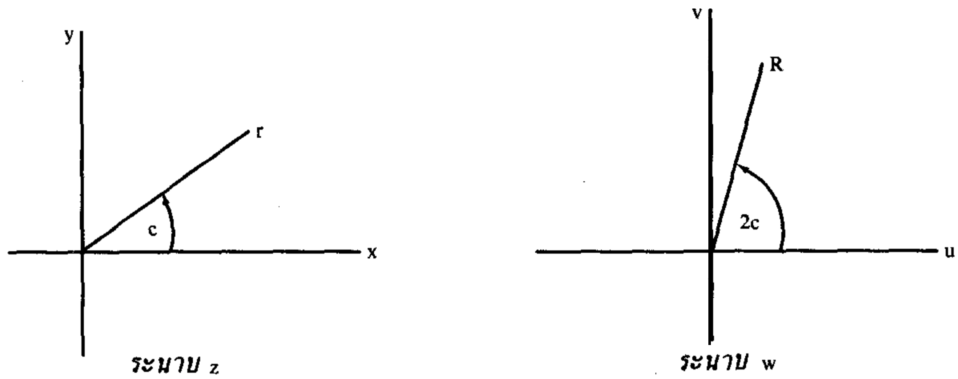
ตัวอย่าง ให้ $w = f(z) = z^2$ จงพิจารณาการส่งของ f ที่ $z = 0$

วิธีทำ เพราะว่า $f'(z) = 2z$

ดังนั้น ที่ $z = 0$ $f'(z) = 0$

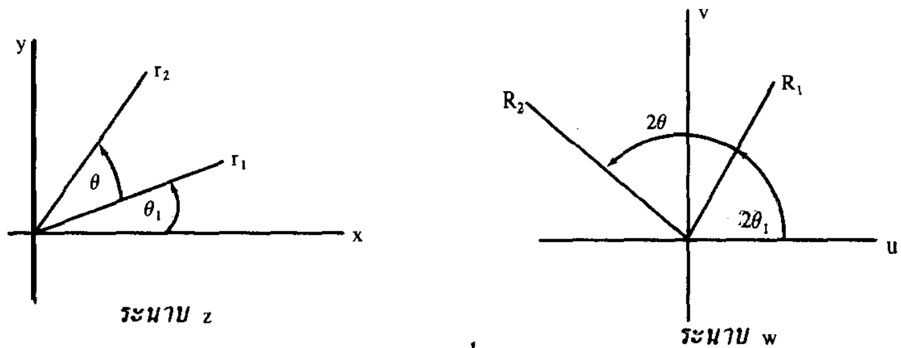
นั่นคือ 0 เป็นจุดวิกฤต

ถ้าให้เส้นรัศมี r จากจุด 0 ทำมุม $\theta = c$ กับแกน x จะถูกส่งไปยังเส้นรัศมี R จากจุด $w = 0$ และทำมุม $\phi = 2\theta = 2c$ กับแกน u ดังรูป



รูป 6.5

ถ้าพิจารณามุมระหว่างเส้นรัศมีใด ๆ ก็ตาม จากจุดกำเนิด $z = 0$ ก็จะได้มุมระหว่างเส้นรัศมีจากจุด $w = 0$ ในระนาบ w เป็น 2 เท่าของมุมระหว่างเส้นรัศมีในระนาบ z



รูปที่ 6.6

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหามุมของการหมุนภายใต้การส่งของ $w = \frac{1}{z}$ ที่จุด

   1.1 $z = 1$ 1.2 $z = i$

2. จงหามุมของการหมุนที่จุด $z = 2+i$ ของฟังก์ชัน $w = z^2$

3. กำหนดให้ $w = \frac{1}{z}$ จงแสดงว่า ภาพของเส้นตรง $y = x-1$ และ $y = 0$ คือวงกลม $u^2+v^2-u-v = 0$ และเส้นตรง $v = 0$ ตามลำดับ เขียนกราฟของการส่ง และจงแสดงว่าการส่งนี้คงรูปที่จุด $z = 1$

4. จงแสดงว่า $w = \exp z$ เป็นการส่งคงรูปทุกค่า z

5. จงหามุมของการหมุนที่ $z_0 = r_0\exp(i\theta_0)$ $(z_0 \neq 0)$ ภายใต้ฟังก์ชัน $w = z^n$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

6.2 การส่งของฟังก์ชันต่าง ๆ

ในหัวข้อนี้จะพิจารณาการส่งของฟังก์ชันต่าง ๆ ที่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังได้ทราบแล้วว่า การส่งของฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใด ๆ ที่ไม่ใช่จุดวิกฤตเป็นการส่งคงรูป ดังนั้นจะพิจารณาการส่งของฟังก์ชันต่าง ๆ ดังนี้

6.2.1 ฟังก์ชันเชิงเส้น (Linear Function)

การส่งจากระนาบ z ไปยังระนาบ w โดยสมการ

$$w = z+c$$

เมื่อ c เป็นจำนวนเชิงซ้อนคงตัว จะเห็นว่าเมื่อ $z = x+iy$ และ $c = c_1+ic_2$ จะได้

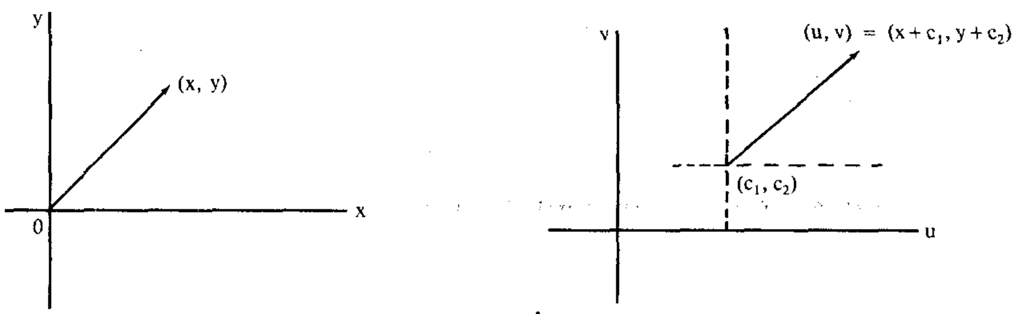
$$w = u+iv = (x+c_1)+i(y+c_2)$$

ซึ่งเป็น **การเลื่อนทางขนาน** (Translation)

$$u = x+c_1$$

และ $$v = y+c_2$$

จุด (x, y) ในระนาบ z จะถูกส่งไปยังจุด $(x+c_1, y+c_2)$ ในระนาบ u, v



รูปที่ 6.7

ถ้าพิจารณาการส่งโดยสมการ

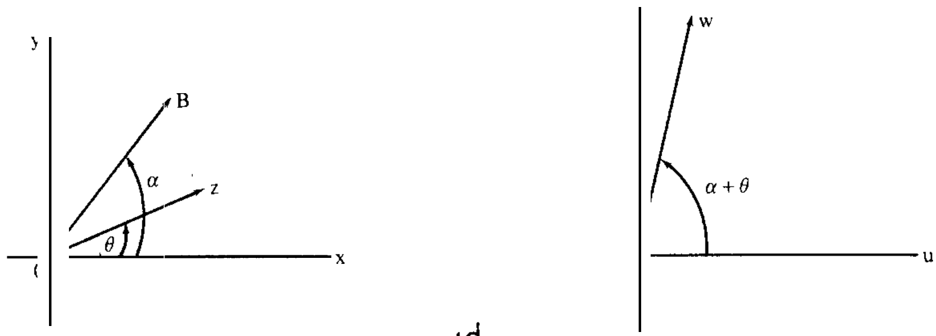
$$w = Bz$$

เมื่อ B เป็นจำนวนเชิงซ้อน โดยการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว

ให้ $B = be^{i\alpha}$ และ $z = re^{i\theta}$ จะได้

$$w = br\,e^{i(\alpha+\theta)}$$

จะเห็นว่าจุด z ในระนาบ z จะถูกส่งไปยังระนาบ $r\theta$ ด้วยจุด $(br, \alpha+\theta)$ นั่นคือ ค่ามอดูลัสจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงด้วย r และมุมเพิ่มขึ้นด้วย θ ซึ่งกล่าวว่า **เป็นการหมุน**



รูปที่ 6.8

จากการส่งแบบเลื่อนทางขนานและการหมุน จะได้สมการทั่วไปซึ่งเป็นการแปลงเชิงเส้น (linear transformation) คือ

$$w = Bz + C$$

ซึ่งประกอบไปด้วยการหมุนและการขยาย (rotation and expansion) ต่อด้วยการเลื่อนทางขนาน

ตัวอย่าง จงพิจารณาการส่งของ $(1-i)z+(2+i)$

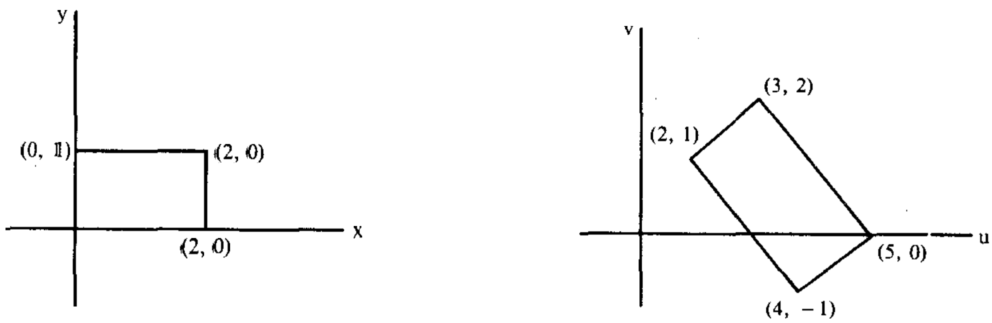
วิธีทำ ให้ $w = (1-i)z+(2+i)$

มุมของการหมุนคือ $\arg(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ และ $|1-i| = \sqrt{2}$

นั่นคือ จุด z ใด ๆ ถูกหมุนไปด้วยมุม $-\frac{\pi}{4}$ และ z ถูกขยายด้วย $\sqrt{2}$ ต่อจากนั้นเลื่อนไปทางขวา 2 หน่วย และเลื่อนขึ้น 1 หน่วย

เช่น จุด $z = (2, 0)$ ถูกหมุนไป $-\frac{\pi}{4}$ และ $|z| = 2$ ถูกขยายอีก $\sqrt{2}$ เท่า ได้ภาพคือจุด $2-2i$ และเลื่อนจุด $2-2i$ ไปทางขวา 2 หน่วย และขึ้น 1 หน่วย

ดังนั้น จุดยอดของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ (0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1) ถูกส่งไปยังรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามุมที่สมนัยทั้ง 4 มุม คือ (4, −1), (5, 0), (3, 2), (2, 1) ดังรูป



รูป 6.9

6.2.2 ฟังก์ชัน $\frac{1}{z}$

ให้ $\quad w = \frac{1}{z}$

เพราะว่า $\quad z \cdot \bar{z} = |z|^2$

พิจารณา $\quad \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}} = w_1$

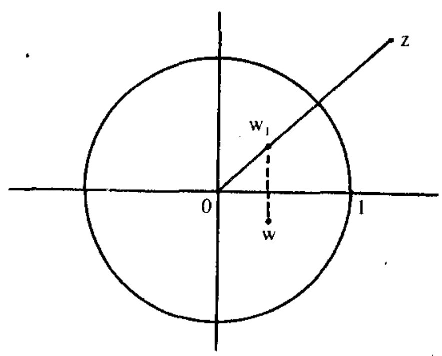
$$\bar{w}_1 = \frac{1}{\bar{\bar{z}}} = \frac{1}{z} = w$$

ดังนั้น จะพิจารณาการส่งของ $w = \frac{1}{z}$ ในรูปของ $w_1 = \frac{1}{|z|^2}z$ และ $w = \bar{w}_1$

1. การส่งของ $w_1 = \frac{1}{|z|^2} \cdot z$ จะได้

$$|w_1| = \frac{1}{|z|} \quad \text{และ} \quad \arg w_1 = \arg z$$

นั่นคือ ถ้าพิจารณาวงกลม $|z| = 1$ จะเห็นว่าจุดนอกวงกลม $|z| = 1$ จะถูกส่งไปยังจุดภายในวงกลมหนึ่งหน่วย เพราะว่า w_1 และ z เป็นส่วนกลับกัน แต่อยู่ในแนวรัศมีเดียวกัน เพราะว่า $\arg w_1 = \arg z$



รูปที่ 6.10

2. การส่งของ $w = \bar{w}_1$ เป็นการสะท้อนกับแกนจริงนั่นเอง

คือ $$u = u_1$$
$$v = -v_1$$

พิจารณาเมื่อ $z \neq 0,\ z = x+iy$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy}$$

$$u+iv = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\,i$$

นั่นคือ $$u = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

หรือ $$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \quad y = \frac{v}{x^2+y^2}$$

พิจารณาสมการวงกลมหรือเส้นตรงรูปทั่วไปในระนาบ z คือ

$$a(x^2+y^2)+bx+cy+d = 0$$

เมื่อ a, b, c, d เป็นจำนวนจริง

จัดสมการใหม่จะได้

$$a+b\frac{x}{x^2+y^2}+c\frac{y}{x^2+y^2}+\frac{d}{x^2+y^2} = 0$$

จาก $w = \frac{1}{z}$ แทนค่า x, y ในรูป u, v จะได้

$$d(u^2+v^2)+bu-cv+a = 0$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลมหรือเส้นตรงในระนาบ w นั่นเอง

ตัวอย่าง ให้ $w = \frac{1}{z}$ จงพิจารณาการส่งของเส้นตรง $x = c_1$ และ $y = c_2$ ภายใต้ w

วิธีทำ เมื่อ $x = c_1$

จาก $$u^2+v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

และ $$u = \frac{x}{x^2+y^2}$$

ดังนั้น $$u^2+v^2-\frac{u}{x} = 0$$

นั่นคือ $$u^2+v^2-\frac{u}{c_1} = 0$$

$$\left(u-\frac{1}{2c_1}\right)^2+v^2 \quad = \quad \left(\frac{1}{2c_1}\right)^2$$

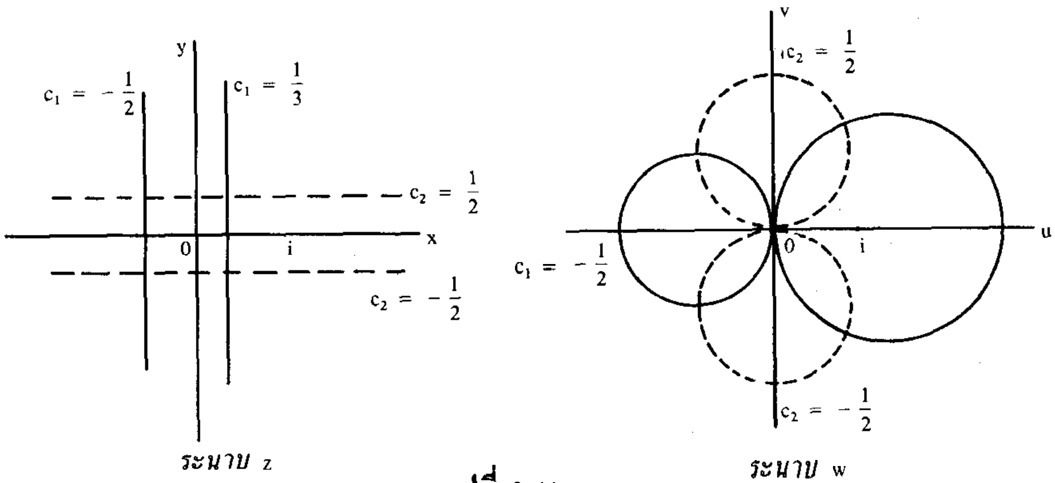
ซึ่งเป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $\left(\frac{1}{2c_1}, 0\right)$ รัศมี $\frac{1}{2c_1}$ และวงกลมสัมผัสแกน v ที่จุด (0, 0)

เมื่อ $y = c_2$ เช่นเดียวกันจะได้สมการ

$$u^2+v^2+\frac{v}{c_2} \quad = \quad 0$$

หรือ
$$u^2+\left(v+\frac{1}{2c_2}\right)^2 \quad = \quad \left(\frac{1}{2c_2}\right)^2$$

ซึ่งเป็นสมการวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $\left(0, -\frac{1}{2c_2}\right)$ รัศมี $\frac{1}{2c_2}$ วงกลมสัมผัสแกน u ที่จุด (0, 0) ดังรูป



รูปที่ 0.11

รูป 6.11 เป็นการแสดงการสมนัยของเส้นตรง $x = -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ และเส้นตรง $y = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$ กับวงกลมในระนาบ w

6.2.3 การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น (Linear Fractional Transformations)

การแปลงเศษส่วน $\quad w = \dfrac{az+b}{cz+d}$ .... (6.2.3.1)

เมื่อ a, b, c, d เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน $ad-bc \neq 0$ เรียกว่า การแปลงเศษส่วนเชิงเส้น จะเห็นว่าเมื่อ $c = 0$ จะได้ฟังก์ชันเชิงเส้น $w = Bz+C$

เมื่อ $c \neq 0$ จะได้

$$w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} \quad \frac{1}{cz+d} \qquad \ldots . (6.2.3.2)$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$Azw + Bz + Cw + D = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (6.2.3.3)$$

ซึ่งเป็นสมการเชิงเส้นในตัวแปร z และ w ดังนั้น เราอาจจะเรียกการแปลงนี้ว่า **การแปลงเชิงเส้นคู่** (bilinear transformation)

จากสมการ (6.2.3.3) จะได้ค่า z อยู่ในรูปของ

$$z = \frac{-dw+b}{cw-a}$$

ถ้า $c = 0$ แต่ละจุดในระนาบ w เป็นภาพของจุดเพียงจุดเดียวของระนาบ z ในระนาบเชิงซ้อนขยาย จุด $w = \frac{a}{c}$ จะสมนัยกับจุด $z = \infty$ และจากสมการ (6.2.3.1) เมื่อ $z = -\frac{d}{c}$ จุด $w = \infty$ จะสมนัยกับจุด $z = -\frac{d}{c}$ นั่นเอง ดังนั้นฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นนี้จึงเป็นการสมนัยแบบ $1-1$ ระหว่างจุดในระนาบเชิงซ้อนขยาย z และจุดในระนาบเชิงซ้อนขยาย w

จะเห็นว่าเมื่อ $c = 0$ จะได้ฟังก์ชันเชิงเส้น $w = Bz+C$ $(B \neq 0)$ และถ้า $c \neq 0$ จะได้สมการ (6.2.3.2) ดังนั้นในการพิจารณาการส่งของฟังก์ชันจะแบ่งพิจารณาดังนี้ คือ

ให้ $Z = cz+d$, $W = \frac{1}{Z}$ และ $w = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c} W$

การส่งของ Z เป็นการส่งเชิงเส้น การส่งของ W เป็นการส่งแบบผกผัน และ w ก็เป็นการส่งเชิงเส้นเช่นเดียวกับ z

ถ้าพิจารณาการส่งของวงกลมและเส้นตรงในระนาบ z ภายใต้ $w = \frac{az+b}{cz+d}$ จะถูกส่งไปยังวงกลมหรือเส้นตรงในระนาบ w เพราะว่าการส่งเชิงเส้นและการส่งแบบผกผันก็ยังทำให้ได้ภาพวงกลมเช่นเดิม

ถ้ากำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจุด 3 จุดในระนาบ z ที่ต่างกัน และ w_1, w_2, w_3 เป็นจุด 3 จุดในระนาบ w ที่ต่างกัน พิจารณาสมการต่อไปนี้

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad \ldots\ldots\ldots (6.2.3.4)$$

จัดสมการใหม่จะได้

$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3) = (z-z_1)(w-w_3)(z_2-z_3)(w_2-w_1)$$

ถ้ากระจายผลคูณออกจะเห็นว่าสมการจะอยู่ในรูป (6.2.3.3) ได้

ถ้า $z = z_1$ จะได้ $(z-z_1) = 0$ และ

$$(z-z_3)(w-w_1)(z_2-z_1)(w_2-w_3) = 0$$

แต่ $z-z_3 = z_1-z_3 \neq 0$

และ z_2-z_1, w_2-w_3 ต่างก็ไม่เท่ากับศูนย์ เพราะเป็นจุดที่ต่างกัน

ดังนั้น $$w = w_1$$

ในทำนองเดียวกัน ถ้า $z = z_3$ จะได้ $w = w_3$ แต่ถ้า $z = z_2$ จะได้

$$(w-w_1)(w_2-w_3) = (w-w_3)(w_2-w_1)$$

$$ww_2-ww_3-w_1w_2+w_1w_3 = ww_2-ww_1-w_3w_2+w_3w_1$$

$$w(w_1-w_3)-w_2(w_1-w_3) = 0$$

$$(w-w_2)(w_1-w_3) = 0$$

แต่ $w_1 \neq w_3$ ดังนั้น $w = w_2$

นั่นคือ การส่งฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นนั้นจะส่งจุด z_1, z_2, z_3 ไปยัง w_1, w_2, w_3 ตามลำดับ และฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นนี้จะเป็นการส่งเดียวเท่านั้นที่มีคุณสมบัตินี้ นั่นคือ ถ้าให้ $w' = \frac{az+b}{cz+d}$ เป็นฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นใด ๆ ที่มีคุณสมบัติ $w' = w_i$ เมื่อ $z = z_i$, $i = 1, 2, 3$ จะได้ $w = w'$

เพราะว่า $$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

และ $$\frac{(w'-w_1)(w_2-w_3)}{(w'-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

ดังนั้น $$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(w'-w_1)(w_2-w_3)}{(w'-w_3)(w_2-w_1)}$$

$$\frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{w'-w_1}{w'-w_3}$$

นั่นคือ $$w(w_1-w_3)-w'(w_1-w_3) = 0$$

$$(w-w')(w_1-w_3) = 0$$

แต่ $w_1 \neq w_3$ นั่นคือ $w = w'$

ดังนั้น ฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นจะมีเพียงฟังก์ชันเดียวเท่านั้นที่ z_i สมนัยกับ w_i เมื่อ $i = 1, 2, 3$

การส่ง $w = \frac{az+b}{cz+d}$ เป็นการส่งคงรูปที่ z ใด ๆ ยกเว้นที่ $z = -\frac{d}{c}$

เพราะว่า ถ้าให้ $$f(z) = w = \frac{az+b}{cz+d}$$

$$f'(z) = \left(\frac{az+b}{cz+d}\right)'$$

$$= \frac{(cz+d)a-(az+b)c}{(cz+d)^2}$$

$$= \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0 \qquad (\text{เพราะว่า } ad-bc \neq 0)$$

จากทฤษฎีบทที่ 6.2 การส่งฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นเป็นการส่งคงรูป

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นที่ส่งจุด $z = 1, 0, -1$ ไปยังจุด $w = 0, i, -i$ ตามลำดับ

วิธีทำ จากสมการ (6.2.3.4) แทนค่า $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = -1$ และ $w_1 = 0,\ w_2 = i,\ w_3 = -i$ จะได้

$$\frac{(w-0)(i+i)}{(w+i)(i-0)} = \frac{(z-1)(0+1)}{(z+1)(0-1)}$$

$$\frac{2iw}{i(w+i)} = \frac{(z-1)}{-(z+1)}$$

แก้สมการหา w ในรูปของ z จะได้

$$w = -i\frac{(z-1)}{3z+1}$$

ซึ่งเป็นฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นที่ต้องการ

จากสมการ (6.2.3.4) สามารถกล่าวถึงระนาบเชิงซ้อนขยาย z หรือ w ได้ นั่นคือ จุด ∞ สามารถพิจารณาได้ เช่น ถ้า $w_2 = \infty$ จะพิจารณาดังนี้

จาก
$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

$$\frac{(w-w_1)\left(1-\frac{w_3}{w_2}\right)}{(w-w_3)\left(1-\frac{w_1}{w_2}\right)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

เมื่อ $w_2 = \infty$ จะได้ $\dfrac{w_3}{w_2} = \dfrac{w_1}{w_2} = 0$

ดังนั้นจะได้
$$\frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นที่ส่งจุด $z = 1, 0, -1$ ไปยัง $w = i, \infty, 1$ ตามลำดับ

วิธีทำ ในที่นี้ $z_1 = 1,\ z_2 = 0,\ z_3 = 1$ และ $w_1 = i,\ w_2 = \infty,\ w_3 = 1$

จากสมการ $$\frac{w-w_1}{w-w_3} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

แทนค่า $$\frac{w-i}{w-1} \quad \frac{(z-1)\ (0+1)}{(z+1)(0-1)}$$

$$\frac{w-i}{w-1} = \frac{z-1}{-(z+1)}$$

$$(w-i)(-z-1) = (z-1)(w-1)$$

$$-wz-w+iz+i = wz-z-w+1$$

$$-2wz = -z+1-iz-i$$

$$w = \frac{(1+i)z+(i-1)}{2z}$$

ตัวอย่าง จงหาจุดตรึง (fixed or invariant points) ของการส่ง $w = \frac{2z-5}{z+4}$

วิธีทำ จุดตรึงหาได้จากการแก้สมการ $z = \frac{2z-5}{z+4}$

จะได้ $$z^2+2z+5 = 0$$

$$z = -1 \pm 2i$$

นั่นคือ จุดตรึงของการส่งของ $w = \frac{2z-5}{z+4}$ อยู่ที่จุด $-1+2i$ และ $-1-2i$

6.2.4 การส่งของฟังก์ชัน sin z และ cos z

การส่งของฟังก์ชัน $w = \sin z$

เพราะว่า $\sin z = \sin x \cosh y + i\cos x \sinh y$

ให้ $w = u+iv = \sin z$

จะได้ $u = \sin x \cosh y$

และ $v = \cos x \sinh y$

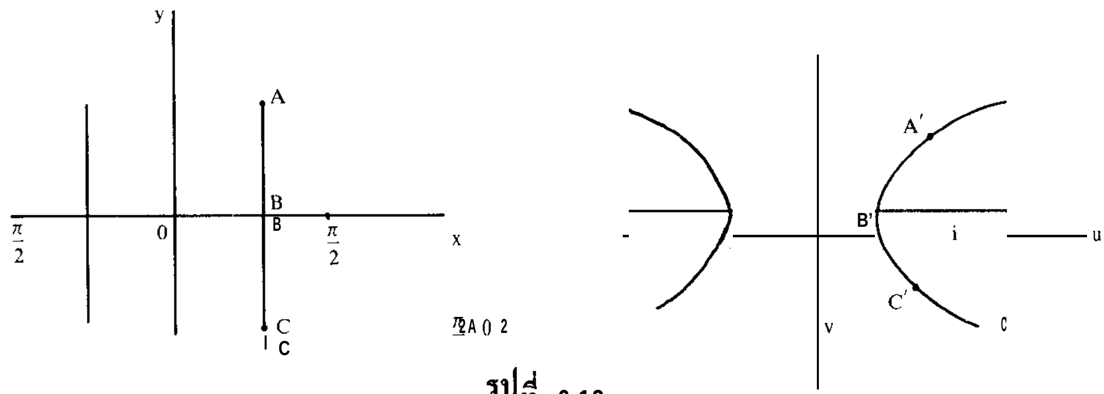
พิจารณาการส่งของฟังก์ชัน $\sin z$ ดังนี้

1. **เส้นดิ่ง** $x = c$ เมื่อ $-\frac{\pi}{2} < c < \frac{\pi}{2}$

ดังนั้น $u = \sin c \cosh y,\quad v = \cos c \sinh y$ จะได้

$$\frac{u^2}{\sin^2 c} - \frac{v^2}{\cos^2 c} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการไฮเพอร์โบลา จุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(\pm 1, 0)$ ดังรูป



รูปที่ 6.12

นั่นคือ เมื่อ $x = c$ และ $-\frac{\pi}{2} < c < 0$ เส้นดิ่ง $x = c$ ในระนาบ z จะถูกส่งไปยังไฮเพอร์โบลาทางด้านซ้ายมือ และถ้า $x = c$ เมื่อ $0 < c < \frac{\pi}{2}$ เส้นตรง $x = c$ จะถูกส่งไปยังไฮเพอร์โบลาทางด้านขวามือ จุด A, B, C บนเส้นตรงจะอยู่บนไฮเพอร์โบลา คือ จุด A', B', C' ดังรูป

เมื่อ $x = \frac{\pi}{2}$ จะถูกส่งไปยังจุด $(u, 0)$ เมื่อ $u \geqslant 1$ ซึ่งการส่งของเส้น $x = \frac{\pi}{2}$ นั้นไม่เป็นแบบ 1 – 1 เพราะว่าจุด $\frac{\pi}{2} + iy$ และ $\frac{\pi}{2} - iy$ มีภาพเดียวกัน ในทำนองเดียวกันเมื่อ $x = -\frac{\pi}{2}$ จะถูกส่งไปยังจุด $(u, 0)$ เมื่อ $u \leqslant -1$

2. **เส้นระดับ** $0 \leqslant x \leqslant \pi$

จะได้ $u = \sin x \cosh c$, $v = \cos x \sinh c$

ถ้า $c \neq 0$ จะได้

$$\frac{u^2}{\cosh^2 c} + \frac{v^2}{\sinh^2 c} = 1$$

ซึ่งเป็นสมการวงรี (ellipse) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$

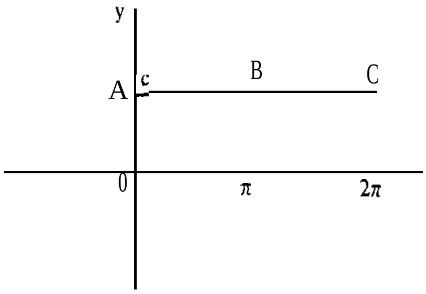
เมื่อ $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $y = c$ จะได้

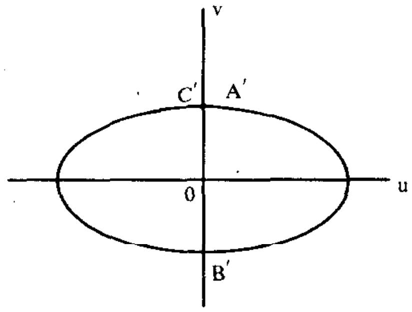
$$0 \leqslant u \leqslant \cosh c \quad \text{และ} \quad |v| \leqslant |\sinh c|$$

นั่นคือ จุด (u, v) อยู่บนส่วนครึ่งทางขวาของวงรี และเมื่อ $\pi \leqslant x \leqslant 2\pi$, $y = c$ จะได้

$$-\cosh c \leqslant u \leqslant 0 \quad \text{และ} \quad |v| \leqslant |\sinh c|$$

จุด (u, v) จะอยู่บนส่วนครึ่งซ้ายของวงรี และการส่งเป็นแบบ $1-1$ ดังรูป





รูปที่ 6.13

จะเห็นว่า การส่งของ $w = \sin z$ เป็นการส่งคงรูปยกเว้นที่ $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

เพราะว่า $(\sin z)' = \cos z \neq 0$ เมื่อ $z \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

การส่งของ $w = \cos z$

เพราะว่า $\cos z = \sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right)$

ให้ $w = \cos z$

ให้ $z = z + \frac{\pi}{2}$ และ $w = \sin z$

จะเห็นว่าการส่งของ $\cos z$ เป็นการเลื่อนไปทางขวา $\frac{\pi}{2}$ หน่วย แล้วต่อด้วยการส่งของฟังก์ชันไซน์

ตัวอย่าง จงแสดงการส่งของ $w = \cos z$ เมื่อ $-\pi \leqslant x \leqslant 0,\ y = 0$

วิธีทำ ให้ $z = z + \frac{\pi}{2}$

ให้ $s = \{(x, y) / -\pi \leqslant x \leqslant 0,\ y = 0)$

ภายใต้ Z เซต S ถูกส่งไปยัง T ซึ่ง $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Re} Z \leqslant \frac{\pi}{2}$ และ $\operatorname{Im} z = 0$

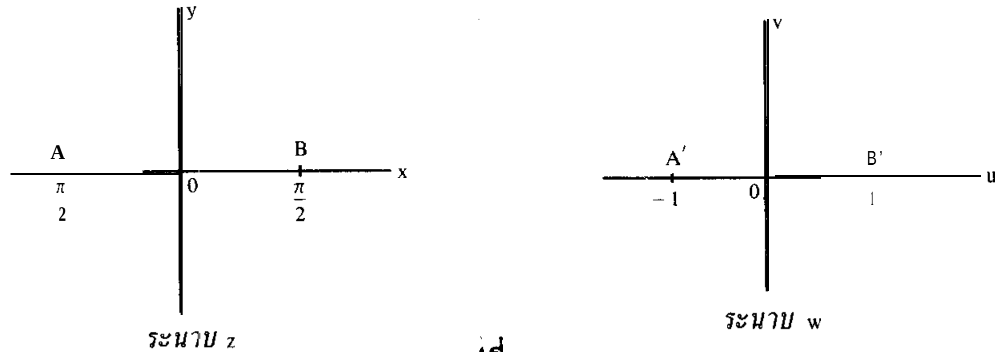
ให้ $w = \sin Z = \cos z$

เมื่อ $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $y = 0$ จะได้

$$-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \quad \cosh 0 = 1, \quad \sinh 0 = 0$$

นั่นคือ $-1 \leqslant u \leqslant 1$ และ $v = 0$

ภาพของ w คือส่วนของ $-1 \leqslant u \leqslant 1,\ v = 0$ ดังรูป



รูปที่ 6.14

นั่นคือ ภายใต้ $w = \cos z$ ภาพของส่วน $-\pi \leqslant x \leqslant 0,\ y = 0$

คือส่วนของ $-1 \leqslant u \leqslant 1,\ \ v = 0$

ในทำนองเดียวกับการส่งของ $\cos z$ จะพิจารณาฟังก์ชัน $\sinh z,\ \cosh z$ ได้ในรูปของฟังก์ชันไซน์ เช่น การส่งของ $\sinh z$

ให้ $$w = \sinh z = -i \sin(iz)$$

ดังนั้น ให้ $Z = iz,\quad W = \sin Z,\quad w = -iW$

นั่นคือ เริ่มด้วยการหมุนต่อด้วยการส่งของฟังก์ชันไซน์และต่อด้วยการหมุนกลับ

แบบฝึกหัด 6.2

1. ภายใต้ฟังก์ชัน $|z| = 1$ และ $\operatorname{Im} z = 2$ จงหาภาพของเส้นโค้ง เมื่อ

   1.1 $w = z-1$

   1.2 $w = iz-2i$

2. จงหาการส่งเชิงเส้นที่ส่งจุด $z = i$ และ $z = -i$ ไปยังจุด $w = 0$ และ $w = 1$ ตามลำดับ

3. จงแสดงว่า การแปลง $w = iz+i$ ส่งครึ่งระนาบ $x > 0$ ไปยังครึ่งระนาบ $v > 1$

4. จงหาภาพของบริเวณ $y > 1$ ภายใต้การส่ง $w = (1-i)z$

5. จงหาภาพของ $x > 1,\ y > 0$ ภายใต้ $w = \frac{1}{z}$

6. จงหาฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นที่ส่งจุด $z_1 = 2,\ z_2 = i,\ z_3 = -2$ ไปยังจุด $w_1 = 1,\ w_2 = i,\ w_3 = -1$

7. จงหาฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นที่ส่งจุด z_i ต่อไปนี้ไปยัง $w_i,\ i = 1, 2, 3$

   7.1 $z_1 = -i,\ z_2 = 0,\ z_3 = i,\quad w_1 = -1,\ w_2 = i,\ w_3 = 1$

   7.2 $z_1 = \infty,\ z_2 = 1,\ z_3 = 0,\quad w_1 = 0,\ w_2 = i,\ w_3 = \infty$

8. จงหาการแปลงฟังก์ชันเศษส่วนเชิงเส้นของจุด z_1, z_2, z_3 ไปยังจุด $w_1 = 0,\ w_2 = 1,\ w_3 = \infty$

9. จงหาภาพของการส่ง $w = \frac{z-1}{z+1}$

10. จงหาภาพของการส่งแผ่น $x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi$ ภายใต้ $w = \exp z$

11. จงหาภาพของการส่ง $x = c\ \left(-\pi < c < -\frac{\pi}{2}\right)$ ภายใต้ $w = \sin z$

12. จงพิจารณาการแปลงของ $w = \cosh z$ ในเทอมของ $w = \sin z$

13. จงใช้การเปลี่ยน z ในรูปเชิงขั้ว แสดงว่าการส่ง

$$w = z+\frac{1}{z}$$

    ส่งส่วนบนและส่วนล่างของวงกลม $r = 1$ ไปยังเส้นตรง $-2 \leqslant u \leqslant 2,\ v = 0$

14. จงอธิบายการส่งของ $w = \cosh z$ ในเทอมของ

$$Z = e^z,\quad w = \frac{1}{2}\left(Z+\frac{1}{Z}\right)$$