บทที่ 5

อนุกรม

(Shies)

การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันวิเคราะห์มีหลายลักษณะดังได้กล่าวแล้วในบทที่ 4 ถ้าสามารถแทนฟังก์ชันวิเคราะห์ได้ด้วยอนุกรมก็จะสามารถหาค่าอินทิกรัลได้ โดยใช้ทฤษฎีเรซิดิว ในบทนี้จะศึกษาถึงการเขียนฟังก์ชันวิเคราะห์ในรูปอนุกรม เช่น อนุกรมเทย์เลอร์ อนุกรมโลรองต์ เป็นต้น

5.1 ลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน

(Sequences and Series of complex numbers)

การเขียนจำนวนเชิงซ้อนเรียงกัน เช่น $z_1, z_2, z_3, \ldots$ ตามลำดับของกฎต่าง ๆ จะเรียกว่าเป็น **ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน** แต่ละ $z_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ จะเรียกว่าเทอม และ z_n เรียกว่าเทอมที่ n จะเขียนแทนลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $z_1, z_2, \ldots$ คือ $\{z_n\}$ ลำดับของจำนวนเชิงซ้อนจะกล่าวว่านับได้ (finite sequence) หรือลำดับอนันต์ (infinite sequence) ขึ้นอยู่กับจำนวนเทอม เช่น

$i, i^2, i^3, \ldots, i^{100}$ เป็นลำดับนับได้ เทอมที่ n คือ $z_n = i^n, \quad n = 1, 2, \ldots, 100$

$i, \frac{i^2}{2}, \frac{i^3}{3}, \ldots$ เป็นลำดับอนันต์ เทอมที่ n คือ $z_n = \frac{i^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ หาค่าได้เท่ากับ ℓ จะกล่าวว่า **ลำดับลู่เข้า** (sequence converge)

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ หาค่าไม่ได้ จะกล่าวว่า **ลำดับลู่ออก** (sequence diverge)

นิยาม ถ้า $\{z_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน ℓ เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้าทุกค่า $\varepsilon > 0$ จะมี n_0 ซึ่งสำหรับทุก n ถ้า $n > n_0$ จะได้ $|z_n - \ell| < \varepsilon$ นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$

อนุกรมของจำนวนเชิงซ้อน (Series of complex numbers)

พิจารณา $z_1, z_2, z_3, \ldots$ เป็นลำดับของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $\quad S_1 = z_1$

$$S_2 = z_1+z_2$$
$$S_3 = z_1+z_2+z_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = z_1+z_2+z_3+\ldots+z_n$$

จะเรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** (partial sum) ที่ n ซึ่งเป็นผลบวกของ z_n n เทอม และ $\{S_n\}$ เรียกว่า **ลำดับของผลบวกย่อย** (sequence of partial sum)

ให้ $$z_1+z_2+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

จะเรียกว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series)

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ หาค่าได้ จะกล่าวว่าอนุกรมลู่เข้า และเรียก S ว่าผลบวกของอนุกรมอนันต์ เขียนแทนด้วย $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n = S$ ถ้าอนุกรมไม่ลู่เข้าจะกล่าวว่าอนุกรมลู่ออก บางครั้งจะเขียนแทน $\sum\limits_{n=1}^{\infty} z_n$ ด้วย $\sum z_n$

คุณสมบัติต่าง ๆ ของอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนคล้ายกับอนุกรมของจำนวนจริง

ทฤษฎีบทที่ 5.1 ถ้า $z_n = x_n+iy_n$ และ $\ell = a+ib$ จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ และ } \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

พิสูจน์

1. ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \ell$ ในที่นี้ต้องการพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

สำหรับ $\varepsilon > 0$

เลือก n_0 ซึ่งทุกค่า n $(n > n_0 \to |z_n-\ell| < \varepsilon)$

พิจารณา $|x_n-a| = \sqrt{(x_n-a)^2} \leqslant \sqrt{(x_n-a)^2+(y_n-b)^2} = |z_n-\ell| < \varepsilon$ ทุกค่า n ซึ่ง $n > n_0$

ดังนั้น $$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

2. ให้ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

สำหรับ $\varepsilon > 0$

เลือก n_1 ซึ่งทุกค่า n $\left(n > n_1 \to |x_n-a| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

และเลือก n_2 ซึ่งทุกค่า n $\left(n > n_2 \to |y_n-b| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$

ให้ $n_0 = \max\cdot\{n_1, n_2\}$

ดังนั้น สำหรับจำนวน n ซึ่ง $n > n_0$ จะได้ $n > n_1$ และ $n > n_2$

นั่นคือ $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ และ $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

พิจารณา
$$|z_n - \ell| = |(x_n - a) + i(y_n - b)|$$
$$= \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

ดังนั้น
$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell$$

บทแทรก ถ้า $z_n = x_n + iy_n$ และ $S = A + iB$ จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \text{ ก็ต่อเมื่อ } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = B$$

พิสูจน์ เพราะว่า
$$S_n = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$$
$$= (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) + i(y_1 + y_2 + \ldots + y_n)$$
$$= A_n + iB_n$$

จากทฤษฎีบทจะได้

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{n\to\infty} A_n = A \text{ และ } \lim_{n\to\infty} B_n = B$$

นั่นคือ
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \text{ ก็ต่อเมื่อ } \sum_{n=1}^{\infty} x_n = A \text{ และ } \sum_{n=1}^{\infty} y_n = B$$

นิยาม อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ กล่าวว่า **ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์** (absolutely convergent) ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า และกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ **ลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข** (conditionally convergent) ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้า แต่ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่ออก

ทฤษฎีบทที่ 5.2 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ ลู่เข้า แล้วอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้าด้วย นั่นคืออนุกรมที่ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์จะลู่เข้า

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทที่ 5.3 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่เข้า จะได้ $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทนี้ใช้ในการตรวจสอบการลู่เข้าของอนุกรม นั่นคือ ถ้า $\lim_{n \to \infty} z_n \neq 0$ จะสรุปได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ ลู่ออก

ในการนิยามลำดับของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน (sequences of functions) และอนุกรมของฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน (series of functions) นิยามโดยขยายจากลำดับและอนุกรมของจำนวนเชิงซ้อนดังนี้

ให้ $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z),$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเชิงซ้อนนิยามบนเซต S เขียนแทนด้วย $\{f_n(z)\}$ ถ้า $\lim_{n \to \infty} f_n(z) = f(z)$ ทุกค่า $z \in S$ จะกล่าวว่า $\{f_n(z)\}$ ลู่เข้าสู่ f บน S

ให้ $\{f_n(z)\}$ เป็นลำดับของฟังก์ชันเชิงซ้อน นิยามลำดับของผลบวกย่อย $\{S_n(z)\}$ เช่นเดียวกัน นั่นคือ

$$\begin{aligned} S_1(z) &= f_1(z) \\ S_2(z) &= f_1(z) + f_2(z) \\ &\vdots \\ S_n(z) &= f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) \end{aligned}$$

และ
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \ldots$$

และถ้า $\{S_n(z)\}$ ลู่เข้าสู่ f หมายถึงอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ ลู่เข้าสู่ $f(z)$ และจะได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f(z) \text{ บน } S$$

ถ้าอนุกรมลู่เข้าทุกค่า z ในบริเวณ R จะกล่าวว่า R เป็น **บริเวณของการลู่เข้าของอนุกรม** (region of convergence)

อนุกรมกำลัง (Power Series)

อนุกรมซึ่งอยู่ในรูปของ

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

เรียกว่า อนุกรมกำลังใน $z - z_0$ อาจจะเขียนแทนด้วย $\sum a_n(z - z_0)^n$

ในการตรวจสอบว่าอนุกรมกำลังลู่เข้าจะใช้ทฤษฎีบทต่าง ๆ ต่อไปนี้ ซึ่งคล้ายกับทฤษฎีบทของอนุกรมกำลังของตัวแปรจริง

ทฤษฎีบทที่ 5.4 ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1 - z_0)^n$ ลู่เข้า จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทุกค่า z ซึ่ง $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$

พิสูจน์ เพราะว่า $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\{a_n(z_1-z_0)^n\}$ มีขอบเขต

นั่นคือ $\exists M \ni |a_n(z_1-z_0)^n| \leqslant M$ ทุกค่า n

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z-z_0| < |z_1-z_0|$

และ $$\frac{|z-z_0|}{|z_1-z_0|} = c \;, \quad 0<c<1$$

พิจารณา $$|a_n(z-z_0)^n| = |a_n(z_1-z_0)^n| \frac{|(z-z_0)^n|}{|(z_1-z_0)^n|} < Mc^n$$

เพราะว่า $\sum_{n=1}^{\infty} Mc^n$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(z-z_0)^n|$ ลู่เข้า

นั่นคือ อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทุกค่า z เมื่อ $|z-z_0| < |z_1-z_0|$

ตัวอย่าง อนุกรม $\frac{z}{1}+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\ldots$

สำหรับ $z = 1$ จะได้ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ ซึ่งเป็นอนุกรมของจำนวนจริงที่ลู่ออก

$z = -1$ จะได้ $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\ldots$เป็นอนุกรมสลับของจำนวนจริงที่ลู่เข้า

ดังนั้น อนุกรมจะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ทุกค่า z ซึ่ง $|z-0| < |(-1)-0| = 1$

นั่นคือ $|z| < 1$

ทฤษฎีบทที่ 5.5 ให้ $R = \text{lub}\{|z-z_0| \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า$\} < \infty$ จะได้ว่า

1. ถ้า $|z-z_0| < R$ จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า และ
2. ถ้า $|z-z_0| > R$ จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก

พิสูจน์

1. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z-z_0| < R$

ให้ $\varepsilon = R-|z-z_0|$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

และ $R-\varepsilon$ ไม่เป็นค่าขอบเขตบนของ $\{|z-z_0| \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า$\}$

ดังนั้นจะมี z_1 ซึ่ง $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ ลู่เข้า และ $R-\varepsilon < |z_1-z_0|$

แต่ $R-\varepsilon = |z-z_0|$

ดังนั้น $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ และ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ ลู่เข้า

โดยทฤษฎีบทจะได้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า

2. ให้ $|z-z_0| > R$

โดยนิยามของ R ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า

จะได้ $|z-z_0| \leqslant R$

นั่นคือ ถ้า $|z-z_0| > R$ จะได้ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่ออก

บทแทรก ถ้า $R = \text{lub}\{|z-z_0| \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ ลู่เข้า}\} = \infty$ จะได้ว่า อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าทุกค่า z

นิยาม ถ้า $R = \text{lub}\{|z-z_0| \,/\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ ลู่เข้า}\}$ จะกล่าวว่า R เป็น **รัศมีของการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$

ดังนั้น จากนิยามของ R จะเห็นว่า ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้า จะได้ $|z-z_0| \leqslant R$

ทฤษฎีบทประกอบ 1 ถ้า $z_n \neq 0$ และ $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < c < 1$ ทุกค่า n ซึ่ง $n > n_0$ สำหรับบางค่า n_0 จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

พิสูจน์ $\because$ $|z_{n_0+1}| < |z_{n_0}|c$

$|z_{n_0+2}| < |z_{n_0+1}|c < |z_{n_0}|\cdot c^2$

โดยทั่วไป $|z_{n+n_0}| < |z_n|c^{n_0}$

เพราะว่า $|z_{n_0}| + |z_{n_0}|\cdot c + \ldots$ ลู่เข้า

ดังนั้น $|z_{n_0}| + |z_{n_0+1}| + |z_{n_0+2}| + \ldots$ ลู่เข้า

นั่นคือ $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ทฤษฎีบทประกอบ 2 ถ้า $z_n \neq 0$ และ $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqslant 1$ ทุกค่า n ซึ่ง $n > n_0$ สำหรับบางค่า n_0 จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่ออก

พิสูจน์ ถ้า $\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| \geqslant 1$

ดังนั้น $|z_{n_0+1}| \geqslant |z_{n_0}|,\ |z_{n_0+2}| \geqslant |z_{n_0}|, \ldots$

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} z_n \neq 0$

ดังนั้น $\sum z_n$ ลู่ออก

ทฤษฎีบทที่ 5.6 ถ้า $z_n \neq 0$ ทุกค่า n และ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = L$ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่ออก

พิสูจน์

1. ให้ $\varepsilon = \frac{1-L}{2}$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

เลือก n_0 ซึ่งทุกค่า n $\left(n > n_0 \rightarrow \left|\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| - L\right| < \varepsilon\right)$

สำหรับทุกค่า n ถ้า $n > n_0$ จะได้

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| - L < \varepsilon$$

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < \varepsilon + L = \frac{1-L}{2} + L = \frac{1+L}{2} < 1$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 1 จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

2. ให้ $\varepsilon = \frac{L-1}{2}$ เพราะว่า $L > 1$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

เลือก n_0 ซึ่งทุกค่า n $\left(n > n_0 \rightarrow \left|\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| - L\right| < \varepsilon\right)$

$$L - \varepsilon < \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

$$1 < \frac{L+1}{2} = L - \frac{L-1}{2} < \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 2 จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่ออก

บทแทรก ถ้าอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ มีค่า $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$ จะได้ว่า รัศมีของการลู่เข้า R มีค่าเท่ากับ $\frac{1}{L}$

พิสูจน์ ให้ $z_n = a_n(z-z_0)^n$

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |z-z_0|$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z-z_0|$$

$$= L|z-z_0|$$

ถ้า $L = 0$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = 0$ ทุกค่า z

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ลู่เข้าทุกค่า z

ถ้า $L \neq 0$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| < 1$

นั่นคือ $L|z-z_0| < 1$

$$|z-z_0| < \frac{1}{L}$$

$$\therefore \operatorname{lub}\left\{|z-z_0 \Big/ \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ ลู่เข้า}\right\} = \frac{1}{L}$$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_n)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า $R = \frac{1}{L}$

ทฤษฎีบทประกอบ 3 ถ้า $\sqrt[n]{|z_n|} < c < 1$ ทุกค่า n ซึ่ง $n > n_0$ จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

พิสูจน์ เพราะว่า $\sqrt[n]{|z_n|} < c$ ทุกค่า n ซึ่ง $n > n_0$

$\therefore |z_n| < c^n$

และเพราะว่า $c^{n_0} + c^{n_0+1} + \ldots$ ลู่เข้า

ดังนั้น $\sum |z_n|$ ลู่เข้า

นั่นคือ $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ทฤษฎีบทประกอบ 4 ถ้า $\sqrt[n]{|z_n|} \geqslant 1$ สำหรับ n จำนวนอนันต์ (infinitely many n) จะได้ว่า $\sum z_n$ ลู่ออก

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ทฤษฎีบทที่ 5.7 ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = L$ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์
2. ถ้า $L > 1$ แล้ว $\sum z_n$ ลู่ออก

พิสูจน์

1. ให้ $\varepsilon = \dfrac{1-L}{2}$ ดังนั้น $\varepsilon > 0$

$$\exists n_0 \ni \forall n \left(n > n_0 \rightarrow \sqrt[n]{|z_n|} < L+\varepsilon\right)$$

สำหรับ $n > n_0$ จะได้ $\sqrt[n]{|z_n|} < L+\varepsilon = L+\dfrac{1-L}{2} = \dfrac{L+1}{2} < 1$

โดยทฤษฎีบทประกอบ 3 $\sum z_n$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

2. พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

บทแทรก ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$ จะได้ว่า $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า $= \dfrac{1}{L}$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n(n+1)}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ เมื่อ $|z| \leqslant 1$

วิธีทำ เมื่อ $|z| \leqslant 1$

พิจารณา $\left|\dfrac{z^n}{n(n+1)}\right| = \dfrac{|z|^n}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n(n+1)} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$

เพราะว่า $\sum \dfrac{1}{n^2}$ ลู่เข้า ดังนั้น $\sum \left|\dfrac{z^n}{n(n+1)}\right|$ ลู่เข้าด้วย

นั่นคือ $\sum \dfrac{z^n}{n(n+1)}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

ตัวอย่าง จงหารัศมีของการลู่เข้าของ $1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{3}+\ldots$

วิธีทำ อนุกรมนี้คือ $1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 1+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}$$

$$= 1$$

ดังนั้น $$R = 1$$

ตัวอย่าง จงหารัศมีของการลู่เข้าของ $1+z+z^4+z^9+z^{16}+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

วิธีทำ ในที่นี้ไม่ควรใช้วิธีการทดสอบอัตราส่วน เพราะมีค่า 0 หลายค่า จะเห็นว่า

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n = 0, 1, 4, \ldots \\ 0 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นค่าอื่น ๆ} \end{cases}$$

แต่ $\sqrt[n]{|a_n|} < 1+\varepsilon$ ทุกค่า $n \geqslant 0$

และ $1-\varepsilon < \sqrt[n]{|a_n|}$ สำหรับ n จำนวนอนันต์

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

$\therefore$ รัศมีของการลู่เข้า $= 1$

ตัวอย่าง จงหาบริเวณการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n}$

วิธีทำ ในที่นี้ $$a_n = \frac{1}{(n+1)^3 4^n}$$

และ $$a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)^3 4^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)^3 4^n}{(n+2)^3 4^{n+1}} \right|$$

$$= \frac{1}{4}$$

อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|z+2| < 4$

ถ้า $|z+2| = 4$ จะพิจารณา

$$\left| \frac{(z+2)^{n-1}}{(n+1)^3 4^n} \right| = \frac{1}{4(n+1)^3} \leqslant \frac{1}{n^3}$$

และอนุกรม $\sum \frac{1}{n^3}$ ลู่เข้า ดังนั้นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|z+2| = 4$ ด้วย

นั่นคือ อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $|z+2| \leqslant 4$

ตัวอย่าง จงหาบริเวณของการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = n!$, $a_{n+1} = (n+1)!$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}(n+1)$$
$$= \infty$$

$\therefore$ บริเวณของการลู่เข้าคือที่ $z = 0$ จุดเดียว

ตัวอย่าง จงหาบริเวณของการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}(z-2)^n$

วิธีทำ ให้ $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

พิจารณา $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

ให้ $$y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

$$\ell n\, y = n\,\ell n\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \frac{\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty}\ell n\, y = \lim_{n\to\infty}\frac{\ell n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$$ ซึ่งอยู่ในรูป $\frac{0}{0}$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} y = \lim_{n\to\infty} e^{\ell n\, y} = e^1 = e$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = e$$

บริเวณของการลู่เข้าคือ $|z-2| = \frac{1}{e}$ นั่นเอง

แบบฝึกหัดที่ 5.1

1. จงแสดงว่า อนุกรม $\frac{1}{2}+\frac{z}{2^2}+\frac{z^2}{2^3}+\ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{2^n}$ ลู่เข้าเมื่อ $|z| < 2$ และหาค่า $S(z)$

2. จงหารัศมีของการลู่เข้าของ

   2.1 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{(n+1)(n+2)}$

   2.2 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n!}$

   2.3 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{n!}$

   2.4 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(z-i)^n}{n+1}$

3. จงหาผลรวมของอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n$ เมื่อ $|z| < 1$

4. จงหารัศมีของการลู่เข้าของ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ เมื่อ

   4.1 $a_n = n(n+1)$

   4.2 $a_n = n^{\log n}$

   4.3 $a_n = \frac{n}{3^n-1}$

5.2 อนุกรมเทย์เลอร์ (Taylor Series)

ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์เป็นทฤษฎีบทที่สำคัญที่เราจะศึกษาถึงในบทนี้

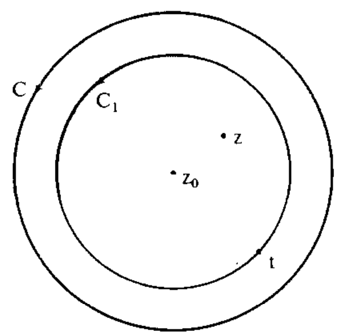
ทฤษฎีบทที่ 5.8 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในวงกลม C ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี r_0 สำหรับแต่ละค่า z ใน Int C จะได้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

นั่นคือ อนุกรมกำลังลู่เข้าสู่ $f(z)$ เมื่อ $|z-z_0| < r_0$

พิสูจน์ ให้ z เป็นจุดใด ๆ ใน Int(C) และ $|z-z_0| = r < r_0$ สร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี r_1 เมื่อ $r < r_1 < r_0$ ดังรูป



รูป 5.1

ให้ t เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม C_1 ดังนั้น $|t-z_0| = r_1$ เพราะว่า $z \in \text{Int}(C_1)$ และ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน C_1 และใน $\text{Int}(C_1)$ โดยสูตรอินทิกรัลโคชี จะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

เมื่อ C_1 มีทิศทางบวก

พิจารณา
$$\frac{1}{t-z} \quad \frac{1}{(t-z_0)-(z-z_0)}$$
$$= \frac{1}{(t-z_0)}\left\{\frac{1}{1-(z-z_0)/(t-z_0)}\right\}$$

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน w ใด ๆ จะได้

$$\frac{1}{1-w} = 1+w+w^2+\ldots+w^{N-1}+\frac{w^N}{1-w}$$

ดังนั้น $$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)}\left\{1+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^2+\ldots+\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n + \frac{1}{1-(z-z_0)/(t-z_0)}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n\right\}$$

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0}+\frac{z-z_0}{(t-z_0)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{(t-z_0)^3}+\ldots+\frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n} + \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^n}\frac{1}{t-z} \qquad \ldots\ldots\ldots (5.2.1)$$

คูณสมการ (5.2.1) ด้วย $f(t)$ แล้วอินทิเกรตเทียบกับตัวแปร t แล้วหารด้วย $\frac{1}{2\pi i}$ จะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}dt+(z-z_0)\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt + \ldots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^n}dt+U_n(z)$$

เมื่อ $$U_n(z) = \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)dt}{(t-z)(t-z_0)^n}$$

โดยสูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น $$f(z) = f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\frac{f''(z_0)}{2!}(z-z_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+U_n$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$

เพราะว่า t อยู่บน C_1

ดังนั้น $\left|\frac{z-z_0}{t-z_0}\right| = \frac{r}{r_1} = \gamma < 1$ เมื่อ γ เป็นค่าคงตัว

และ $|t-z| = |(t-z_0)-(z-z_0)| \geqslant |t-z_0|-|z-z_0| = r_1-r$

เพราะว่า $|f(t)| < M$ เมื่อ M เป็นค่าคงตัว ดังนั้น

$$|U_n(z)| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_C\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n\frac{f(t)}{t-z}dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n M}{r_1-r}\cdot 2\pi r_1 = \frac{\gamma_n M r_1}{r_1-r}$$

เมื่อ $n\to\infty$ จะได้ $U_n(z)\to 0$

นั่นคือ $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(z) = 0$

ดังนั้น $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad , \quad |z-z_0| < r_0$

หมายเหตุ จากทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n \quad , \quad (z-z_0) < r_0$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์**

ถ้า $z_0 = 0$ อนุกรมนี้คือ

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad , \quad |z| < r_0$$

จะเรียกว่า **อนุกรมแมคคลอริน** (Maclaurin Series)

ในการกระจายฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์ ถ้าทราบว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณภายในวงกลมจุดศูนย์กลาง z_0 แล้วโดยทฤษฎีบทของเทย์เลอร์จะได้ว่า อนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0 ลู่เข้าสู่ $f(z)$ สำหรับแต่ละค่า z ในวงกลม ถ้าต้องการหารัศมีการลู่เข้าของอนุกรม เมื่อทราบจุดเอกฐานของ f ที่อยู่ใกล้จุด z_0 มากที่สุด ดังบทแทรกต่อไปนี้

บทแทรก ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ D ให้ $f(z) = f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า R และ z_1 เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$ ที่อยู่ใกล้ z_0 มากที่สุด จะได้ว่า $R = |z_1 - z_0|$

พิสูจน์ เพราะว่า $f(z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$ ลู่เข้าทุกค่า z ซึ่ง $|z-z_0| < r$ เมื่อ r เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\{z / |z-z_0| \leqslant r\} \subseteq D$

เพราะฉะนั้น รัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมคือ R จะเป็นขอบเขตบนของ r

นั่นคือ $R \geqslant l \cdot u \cdot b$ ของ r

แต่ค่า $l \cdot u \cdot b$ นี้จะมีระยะห่างน้อยที่สุด จาก z_0 ไปยังจุดต่าง ๆ ที่ไม่อยู่ใน D

ดังนั้น $R \geqslant |z_1 - z_0|$

ถ้า $R > |z_1 - z_0|$ จะได้ว่า z_1 อยู่ในบริเวณของการลู่เข้า

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_1 ซึ่งเกิดการขัดแย้ง

นั่นคือ $R = |z_1 - z_0|$

หมายเหตุ ฟังก์ชันเอนไทร์เมื่อกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์จะมีรัศมีการลู่เข้าเป็น ∞

ตัวอย่าง จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุด z_0 เมื่อ

1. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}, \quad z_0 = i$

2. $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-i)}, \quad z_0 = 1$

วิธีทำ

1. $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 1$

ดังนั้น $R = |z_1 - z_0| = |1-i| = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

รัศมีของการลู่เข้าคือ $\sqrt{2}$

2. $f(z) = \dfrac{z}{(z-2)(z-i)}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 2, i$

ระยะทางระหว่างจุด 2 และ 1 คือ $|2-1| = 1$

ระยะทางระหว่างจุด i และ 1 คือ $|i-1| = \sqrt{(-1)^2+1^2} = \sqrt{2}$

ดังนั้น ระยะที่สั้นที่สุดจากจุด 2, i ไปยัง i คือ 1

รัศมีของการลู่เข้าคือ 1

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินของ $f(z) = e^z$

วิธีทำ จะเห็นว่า $f'(z) = e^z \; f^n(z) = e^z$

ดังนั้น $f^n(0) = 1$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad , \quad |z| < \infty$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินของ $f(z) = \sin z$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sin z & f(0) &= 0 \\
f'(z) &= \cos z & f'(0) &= 1 \\
f''(z) &= -\sin z & f''(0) &= 0 \\
f'''(z) &= -\cos z & f'''(0) &= -1 \\
f^{IV}(z) &= \sin z & f^{IV} &= 0
\end{aligned}$$

จะได้ว่า $f^n(0) = (-1)^{n+1}$

และจาก $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)}{n!} z^n$

จะได้ $\sin z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ เมื่อ $|z| < \infty$

ในทำนองเดียวกันสำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ ที่ควรทราบมีดังนี้

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\sinh z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad , \quad |z| < \infty$$

$$\cosh z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad |z| < \infty$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินของ $f(z) = \frac{1}{1+z}$

วิธีทำ

$$f(z) = \frac{1}{1+z}$$

$$f'(z) = \frac{-1}{(1+z)^2}$$

$$f''(z) = \frac{2}{(1+z)^3}$$

$$\vdots$$

$$f^n(z) = \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}}$$

เมื่อ $z = 0$, $f^n(0) = (-1)^n n!$

ดังนั้น $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n!} z^n$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad , \quad |z| < 1$$

นั่นคือ $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots + (-1)^n z^n + \ldots \quad , \quad |z| < 1$

โดยทั่วไปจะได้สูตรทวินาม (binomial formula) คือ

$$(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \ldots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{n!} z^n + \ldots \quad , \quad |z| < 1$$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\ldots+z^n+\ldots \quad , \qquad |z| < 1$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z) = \frac{1}{z+z^2}$ รอบจุด $z = 1$ และหารัศมีของการลู่เข้า

วิธีทำ

$$f(z) = \frac{1}{z(1+z)} \qquad f(1) = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{1+z}$$

$$f'(z) = -\frac{1}{z^2} + \frac{1}{(1+z)^2} \qquad f'(1) = -\frac{3}{4}$$

$$f''(z) = \frac{2}{z^3} - \frac{2}{(1+z)^3} \qquad f''(1) = \frac{7}{4}$$

$$f^n(z) = (-1)^n\frac{n!}{2^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(1+z)^{n+1}} \qquad f^n(1) = (-1)^n n!\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

$$f(z) = \frac{1}{z+z^2} = f(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n(1)}{n!}(z-z_0)^n$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n!\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)}{n!}$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-1)^n$$

เพราะว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0, -1$ ในที่นี้ $z_0 = 1$

ดังนั้น ระยะใกล้ที่สุดรอบ $z_0 = 1$ คือจุด $z = 0$

$$R = |0-1| = 1$$

ตัวอย่าง จงกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$ รอบ $z = 0$

วิธีทำ

$$f(z) = \mathrm{Log}(1+z) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f(z) = -(1+z)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(z) = (-1)(-2)(1+z)^{-3} \qquad f'''(0) = 2!$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(n+1)}(z) = (-1)^n n!\,(1+z)^{-(n+1)} \qquad f^{(n+1)}(0) = (-1)^n n!$$

ดังนั้น
$$f(z) = \mathrm{Log}(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)z^n}{n!}$$
$$= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \ldots$$
$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots$$

จะเห็นว่าในการกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์นั้น จะได้อนุกรมในเทอมของ $(z-z_0)^n$ ซึ่ง $n \geqslant 0$

ถ้าพิจารณา
$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3}$$
$$= \frac{1}{z^2}\left(2 - \frac{1}{1+z}\right)$$

ในการกระจาย $f(z)$ เป็นอนุกรมนั้น เราไม่สามารถกระจายเป็นอนุกรมแมคคลอรินได้ เพราะว่าฟังก์ชัน f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0$ แต่สำหรับ $\frac{1}{1+z}$ สามารถกระจายได้ เมื่อ $0 < |z| < 1$

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}(2-(1-z+z^2+z^3+\ldots))$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \ldots$$

อนุกรมที่ได้อยู่ในรูปของ $(z-z_0)^n$ ค่า n มีได้ทั้งบวกและลบ ในการหาอนุกรมดังกล่าว จะเรียกว่าอนุกรมโลรองต์

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดที่กำหนดให้

   1.1 e^{-z}, $z = 0$

   1.2 $\cos z$, $z = \frac{\pi}{2}$

   1.3 $\sinh z$, $z = \pi i$

   1.4 $\sin z$, $z = \frac{\pi}{4}$

2. จงแสดงว่า $\frac{1}{z^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-2}{2}\right)^n$ เมื่อ $|z-2| < 2$

3. จงหารัศมีของการลู่เข้าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ถ้าฟังก์ชันต่อไปนี้สามารถกระจายเป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบจุดที่กำหนดให้ได้

   3.1 $\frac{\sin z}{z^2+4}$, $z = 0$

   3.2 $\frac{e^z}{z(z-1)}$, $z = 4i$

   3.3 $\frac{z}{e^z+1}$, $z = 0$

4. จงแสดงว่า $\tan^{-1}z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots$,$|z| < 1$

5. จงแสดงว่า เมื่อ $0 < |z| < 4$

$$\frac{1}{4z-z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n-1}}{4^{n+1}}$$

6. จงกระจาย $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ เป็นอนุกรมเทย์เลอร์รอบ $z = 0$

7. จงหาอนุกรมแมคคลอรินของ $f(z) = \frac{-1}{(z-1)(z-2)}$ ใน $|z| < 1$

8. จงกระจายอนุกรมแมคคลอรินของ

   8.1 $f(z) = \sin^2 z$

   8.2 $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$, $|z| < 1$

5.3 อนุกรมโลรองต์ (Laurent Series)

ฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ ที่จุด z_0 นั้น เขียนอยู่ในรูปอนุกรมกำลังได้คือ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ ซึ่งหาค่าได้ในบางย่านจุด z_0 ในหัวข้อนี้จะพิจารณาถึงอนุกรมในรูป $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ | ถ้าแผ่นวงแหวนมีรัศมี r_1 และ r_2 โดยที่ $r_2 < r_1$ และ $f(z)$ เขียนได้ในรูป

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad r_2 < |z-z_0| < r_1$$

จะเรียก $f(z)$ ว่าเป็นอนุกรมโลรองต์

ทฤษฎีบทที่ 5.9 ทฤษฎีบทของโลรองต์ (Laurent's Theorem)

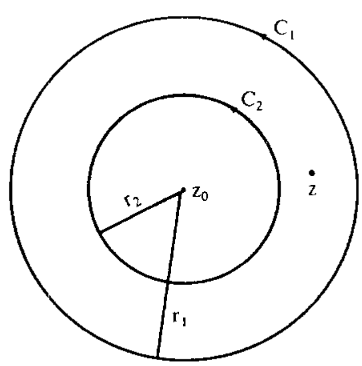
ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนซึ่งมี C_1 และ C_2 เป็นขอบ C_1 และ C_2 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี r_1 และ r_2 ตามลำดับ โดยที่ $r_2 < r_1$ และมีทิศทางเป็นบวก ดังรูปที่ 5.2

สำหรับแต่ละ z ในแผ่นวงแหวน $f(z)$ สามารถเขียนได้ดังนี้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

เมื่อ $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

และ $$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} (t-z_0)^{n-1} f(t)\,dt \quad , \quad n = 1, 2, \ldots$$



รูป 5.2

พิสูจน์ ถ้า z เป็นจุดในวงแหวนดังรูป โดยสูตรอินทิกรัลโคชีจะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt$$

การหาค่าของอินทิกรัลบน C_1 และ C_2 หาในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ พิจารณาอินทิกรัลแรกของ $f(z)$ บน C_1

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(t-z_0)\left\{1-\dfrac{(z-z_0)}{t-z_0}\right\}}$$

$$= \frac{1}{t-z_0} + \frac{z-z_0}{(t-z_0)^2} + \ldots + \frac{(z-z_0)^{n-1}}{(t-z_0)^n} + \left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n \frac{1}{t-z}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{t-z_0}dt + \frac{z-z_0}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt + \ldots$$

$$+ \frac{(z-z_0)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^n}dt + U_n$$

$$= a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + U_n \qquad \text{..........} (5.3.1)$$

เมื่อ $a_0 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{f(t)}{t-z_0}dt,\quad a_1 = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^2}dt,\quad \ldots,\quad a_{n-1} = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\dfrac{f(t)}{(t-z_0)^n}dt$

และ $U_n = \dfrac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\dfrac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n\dfrac{f(t)}{t-z}dt$

สำหรับอินทิกรัลหลังของ $f(z)$ บน C_2

$$-\frac{1}{t-z} = \frac{1}{(z-z_0)-(t-z_0)}$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)\{1-(t-z_0)/z-z_0\}}$$

$$\therefore\quad -\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z-z_0} + \frac{t-z_0}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{(t-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n} + \left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n\frac{1}{z-t}$$

ดังนั้น

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{t-z}dt = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(t)}{z-z_0}dt + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(t-z_0)}{(z-z_0)^2}f(t)dt$$

$$+ \ldots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(t-z_0)^{n-1}}{(z-z_0)^n}f(t)dt + V_n$$

$$= \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + V_n \qquad \text{..........} (5.3.2)$$

เมื่อ $b_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(t)dt, \quad b_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(t-z_0)f(t)dt, \quad \ldots,$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(t-z_0)^{n-1}f(t)dt$$

และ $$V_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n \frac{f(t)}{z-t}\,dt$$

จาก (5.3.1) และ (5.3.2) จะได้

$$f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + \ldots + a_{n-1}(z-z_0)^{n-1} + U_n + \frac{b_1}{z-z_0}$$

$$+ \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + V_n$$

ต่อไปจะแสดงว่า $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$

การพิสูจน์ว่า $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = 0$ เหมือนกับในทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

สำหรับการพิสูจน์ $\lim\limits_{n\to\infty} V_n = 0$ ให้ $r = |z-z_0|$ และ $r_2 < r < r_1$

เมื่อ t อยู่บน C_2 จะได้ $\left|\frac{t-z_0}{z-z_0}\right| = k < 1$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

และ $|z-t| = |(z-z_0)-(t-z_0)| \geqslant |z-z_0|-|t-z_0| = r-r_2$

ถ้า M เป็นค่าสูงสุดของ $|f(t)|$ บน C_2 ได้

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{t-z_0}{z-z_0}\right)^n \frac{f(t)}{z-t}\,dt\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{k^nM}{r-r_2}\cdot 2\pi r_2 = \frac{k^nMr_2}{r-r_2}$$

นั่นคือ $$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$$

ดังนั้น $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

หมายเหตุ ถ้าให้ $A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว

จาก $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

และ $$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}\,dt \quad , \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(t-z_0)^{n-1}f(t)dt \quad , \qquad n = 1, 2, \ldots$$

จะเห็นว่า $A_n = a_n$ เมื่อ $n \geqslant 0$

สำหรับค่า $n < 0$ ให้ $n = -k\ (k > 0)$

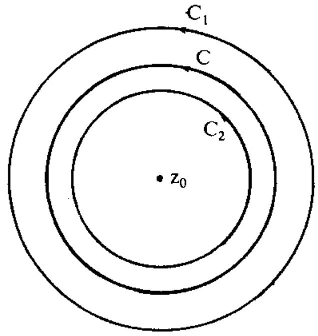
$$A_{-k} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(t)}{(t-z_0)^{-k+1}}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_C (t-z_0)^{k-1}f(t)dt$$

ดังนั้น $$f(z) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z-z_0)^n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

หรือ $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n \qquad \text{..........} (5.3.3)$$

จากทฤษฎีบทของโลรองต์จะเห็นว่า เมื่อ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนแล้ว f(z) เขียนอยู่ในรูปอนุกรมโลรองต์ได้ ดังนั้นถ้าพิจารณาคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวใด ๆ ที่อยู่ในแผ่นวงแหวนและล้อมรอบจุด z_0 ดังรูป จะได้ว่า f(z) สามารถเขียนในรูป (5.3.3) ได้ ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้



รูป 5.3

ทฤษฎีบทที่ 5.10 ให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ซึ่ง $r_1 < |z-z_0| < r_2$ เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นรัศมีของวงกลม C_1 และ C_2 ตามลำดับ ซึ่งมี z_0 เป็นจุดศูนย์กลาง จะได้ว่า

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n \quad \text{ซึ่งมี} \quad A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวในแผ่นวงแหวน $r_1 < |z-z_0| < r_2$ ซึ่งล้อมรอบบริเวณซึ่งรวมขอบในของแผ่นวงแหวน

พิสูจน์ เลือก r_1', r_2' ซึ่ง $r_1 < r_1' < r_2' < r_2$ และ C อยู่ภายในแผ่นวงแหวนเล็ก

$$r_1' \leqslant |z-z_0| < r_2'$$

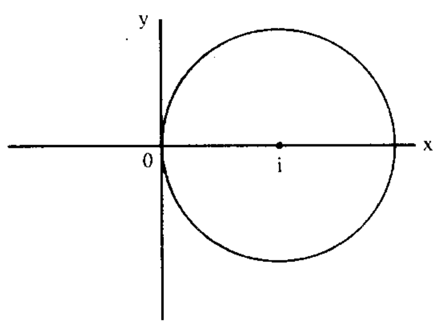
โดยทฤษฎีบทของโลรองต์สรุปได้ทันทีว่า

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n \qquad \#$$

ในการกระจายฟังก์ชันให้อยู่ในรูปอนุกรมโลรองต์ จะไม่หาโดยตรงจากทฤษฎีบท เพราะว่าการหาค่า a_n และ b_n จากทฤษฎีบทนั้นยุ่งยากเกินไป แต่จะอาศัยอนุกรมเทย์เลอร์และการกระจาย โดยพิจารณาคล้าย ๆ กับการพิสูจน์ในทฤษฎีบทดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมโลรองต์ของ $\frac{1}{z(z-1)}$ บน $0 < |z-1| < 1$

วิธีทำ ให้ $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ ในที่นี้ f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0, 1$ ซึ่งอยู่ในแผ่นวงกลม $|z-1| < 1$



รูป 5.4

เราต้องการกระจายให้อยู่ในรูป $(z-z_0)^n$ ในที่นี้ $z_0 = 1$ และบริเวณของการลู่เข้าคือ $|z-1| < 1$ ตัวประกอบของ $f(z)$ ตัวหนึ่งอยู่ในรูป $z-1$ อยู่แล้ว ดังนั้นพิจารณาเฉพาะตัวประกอบที่เหลือ

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)}, \qquad |z-1| < 1$$

$$= 1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + \dots$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมโลรองต์ของ $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$ เมื่อ $1 < |z-1| < \infty$

วิธีทำ เราต้องการกระจาย $f(z)$ อยู่ในรูปกำลังของ $(z-1)$ บริเวณของการลู่เข้าคือ

$$1 < |z-1| \quad \text{หรือ} \quad \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$$

พิจารณา

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+(z-1)}$$

$$= \frac{1}{z-1}\left\{\frac{1}{\frac{1}{z-1}+1}\right\}, \qquad \left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$$

$$= \frac{1}{z-1}\left\{1-\frac{1}{z-1}+\left(\frac{1}{z-1}\right)^2-\ldots\right\}$$

$$= \frac{1}{z-1}-\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}-\ldots$$

$$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{(z-1)^4}-\ldots$$

ตัวอย่าง จงกระจาย $f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ

1. $1 < |z| < 3$
2. $|z| < 1$

วิธีทำ

1.

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+3}\right)$$

ถ้า $|z| > 1$ จะได้ $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z\left(1+\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{2z}\left(1-\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{2z}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^4}+\ldots$$

ถ้า $|z| < 3$ จะได้ $\left|\frac{z}{3}\right| < 1$

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6\left(1+\frac{z}{3}\right)} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{z}{3}+\frac{z^2}{9}-\frac{z^3}{27}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\frac{z^3}{162}+\ldots$$

ดังนั้น เมื่อ $|z| > 1$ และ $|z| < 3$ นั่นคือ $1 < |z| < 3$ จะได้อนุกรม

$$\ldots-\frac{1}{2z^4}+\frac{1}{2z^3}-\frac{1}{2z^2}+\frac{1}{2z}-\frac{1}{6}+\frac{z}{18}-\frac{z^2}{54}+\frac{z^3}{162}-\ldots$$

2. ถ้า $|z| < 1$ จะได้

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2(1+z)} = \frac{1}{2}(1-z+z^2-z^3+\ldots)$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{2}z^3+\ldots$$

ถ้า $|z| < 3$ จะได้เหมือนข้อ 1

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6}-\frac{z}{18}+\frac{z^2}{54}-\frac{z^3}{162}+\ldots$$

เมื่อ $|z| < 1$ และ $|z| < 3$ นั่นคือ $|z| < 1$ จะได้อนุกรม

$$\frac{1}{3}-\frac{4}{9}z+\frac{13}{27}z^2-\frac{40}{81}z^3+\ldots$$

ซึ่งจะเห็นว่าผลลัพธ์เป็นอนุกรมเทย์เลอร์นั่นเอง

ตัวอย่าง จงกระจาย $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ

1. $|z| > 2$
2. $|z-1| > 1$

วิธีทำ

$$f(z) = \frac{-z}{(z-1)(z-2)}$$

$$= \frac{1}{z-1}-\frac{2}{z-2}$$

1. ในที่นี้ต้องการบริเวณการลู่เข้าเป็น $|z| > 2$

พิจารณาเมื่อ $|z| > 1$ หรือ $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}$$

$$= \frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\ldots\right)$$

$$= \frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\ldots$$

เมื่อ $|z| > 2$ **หรือ** $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = \frac{2}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\ldots\right)$$

$$= \frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}+\frac{8}{z^3}+\frac{16}{z^4}+\ldots$$

ดังนั้นอนุกรมโลรองต์เมื่อ $|z| > 1$ **และ** $|z| > 2$ **นั่นคือ** $|z| > 2$ **มีค่าเท่ากับ**

$$\left(\frac{1}{z}-\frac{2}{z}\right)+\left(\frac{1}{z^2}-\frac{4}{z^2}\right)+\left(\frac{1}{z^3}-\frac{8}{z^3}\right)+\ldots = -\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}-\frac{7}{z^3}-\frac{15}{z^4}-\ldots$$

2. **ถ้าบริเวณของการลู่เข้าคือ** $|z-1| > 1$

หรือ $\left|\frac{1}{z-1}\right| < 1$

จาก $f(z) = \dfrac{-z}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{1}{z-1}-\dfrac{2}{z-2}$

$$\frac{2}{z-2} = \frac{2}{(z-1)-1}$$

$$= \frac{2}{(z-1)\left\{1-\frac{1}{z-1}\right\}}$$

$$= \frac{2}{(z-1)}\left\{1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\ldots\right\}$$

$$= \frac{2}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}+\ldots$$

$$f(z) = \frac{1}{z-1}-\left\{\frac{2}{z-1}+\frac{2}{(z-1)^2}+\frac{2}{(z-1)^3}+\ldots\right\}$$

$$= -\frac{1}{z-1}-\frac{2}{(z-1)^2}-\frac{2}{(z-1)^3}-\ldots$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมโลรองต์ของ $f(z) = \dfrac{z-\sin z}{z^3}$ รอบจุด $z = 0$

วิธีทำ จะเห็นว่า $z = 0$ เป็นจุดที่ $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และฟังก์ชัน $\sin z$ เราทราบการกระจายแล้ว คือ

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots$$

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z-\sin z}{z^3} \\
&= \frac{1}{z^3}\left\{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots\right)\right\} \\
&= \frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \ldots
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุกรมโลรองต์ของ $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$ รอบจุด $z = 3$

วิธีทำ ให้ $u = z-3$ ดังนั้น $z = (3+u)$

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{9u^2\left(1+\frac{u}{3}\right)^2}$$

โดยสูตรทวินาม

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2(z-3)^2} &= \frac{1}{9u^2}\left\{1+(-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \ldots\right\} \\
&= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \ldots \\
&= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \ldots
\end{aligned}$$

อนุกรมลู่เข้าเมื่อ $0 < |z-3| < 3$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุกรมโลรองต์รอบจุดที่กำหนดให้

   1.1 $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$, $z = 1$

   1.2 $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$, $z = -2$

2. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{1}{z-3}$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ

   2.1 $|z| < 3$

   2.2 $|z| > 3$

3. จงกระจาย $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(2-z)}$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ

   3.1 $|z| < 1$

   3.2 $1 < |z| < 2$

   3.3 $0 < |z-2| < 1$

4. จงกระจาย $\dfrac{5z-2}{z(z-1)}$ เป็นอนุกรมโลรองต์ เมื่อ $0 < |z| < 1$

5. จงกระจายฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นอนุกรมโลรองต์รอบ $z = 0$

   5.1 $\dfrac{1-\cos z}{z}$

   5.2 $z^{-1}\cosh z^{-1}$

   5.3 $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   5.4 $z\cos\dfrac{1}{z}$

6. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(z) = \dfrac{1}{z}$ รอบจุด $z = 1$ แล้วใช้ผลที่ได้หาอนุกรมโลรองต์ของฟังก์ชัน $g(z) = z^{-1}(z-1)^{-2}$ บน $0 < |z-1| < 1$

5.4 เรซิดิวและโพล (Residues and Poles)

จากทฤษฎีบทของอินทิกรัลโคชีจะได้ว่า ถ้าฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดภายในคอนทัวร์ปิด C จะได้ว่า $\int_C f(z)dz = 0$ แต่ถ้าฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่บางจุดภายใน C เราจะหาค่าของอินทิกรัลโดยค่าเรซิดิว ในช่วงแรกจะศึกษาถึงนิยามต่าง ๆ ของจุดที่ฟังก์ชันไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

นิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$ และมี $r > 0$ ซึ่งทำให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในเซต $\{z / 0 < |z-z_0| < r\}$ จะเรียก z_0 ว่าเป็นจุด **เอกฐานแบบเอกเทศ** (isolated singular point) ของ $f(z)$

ตัวอย่าง

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

มีจุดเอกฐานที่ $z = 1$ และเป็นแบบเอกเทศ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดอื่นยกเว้นที่ $z = 1$ จุดเดียว

ถ้าให้ $r = 1$ จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในเซต $\{z / 0 < |z-1| < 1\}$

นิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ $f(z)$ และ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้ จะกล่าวว่า z_0 เป็น **จุดเอกฐานที่ขจัดได้** (removable singularity)

ตัวอย่าง 1. $$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

ในที่นี้ $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ $f(z)$

และ $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$$

ดังนั้น $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

ถ้าเขียน $\frac{\sin z}{z}$ ในรูปอนุกรม จะได้

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

จะเห็นว่า อนุกรมที่ได้ไม่มีเทอม z ยกกำลังลบเลย ดังนั้น $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

2. $$f(z) = z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$= z\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3!z^2} + \frac{1}{5!z^4} - \dots$$

ในที่นี้ $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศ แต่ $f(z)$ ทำให้มีกำลังเป็นบวกทั้งหมดไม่ได้ ที่ $z = 0$ ไม่เป็นจุดเอกฐานที่ขจัดได้

นิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$

และ $f(z)$ เขียนเป็นอนุกรมโลรองต์ในบริเวณ $0 < |z - z_0| < r$

นั่นคือ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$ ซึ่ง $A_n = 0$ ทุกค่า $n < -m (m > 0)$ และ $A_{-m} \neq 0$

จะกล่าวว่า $f(z)$ มี **โพลอันดับที่** m **ที่** z_0 (pole of order m)

นั่นคือ จาก $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$$

ถ้า $A_n = 0$ ทุกค่า $n < -m$ และ $A_{-m} \neq 0$ จะได้ $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m ที่ z_0 เขียนได้เป็น

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{A_{-1}}{(z-z_0)} + A_0 + A_1(z-z_0) + \dots$$

$$(z-z_0)^m f(z) = A_{-m} + \dots + A_{-1}(z-z_0)^{m-1} + A_0(z-z_0)^m + \dots$$

$$\lim_{z \to z_0} (z-z_0)^m f(z) = A_{-m} \neq 0 \qquad \dots\dots\dots (5.4.1)$$

ดังนั้น ในการตรวจสอบว่าฟังก์ชันมีโพลอันดับที่ m ที่ z_0 ก็จะดูได้จากสมการ (5.4.1) นั่นเอง

ถ้า $m = 1$ จะกล่าวว่า $f(z)$ มี **โพลเชิงเดียว** (simple pole) ที่ z_0

ตัวอย่าง 1. $$f(z) = \frac{z^2 - 2z + 3}{z-2}$$

$$= 2 + (z-2) + \frac{3}{z-2}$$

ในที่นี้ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียวที่ $z = 2$

2. $$f(z) = \frac{z+1}{z^2+9} = \frac{z+1}{(z+3i)(z-3i)}$$ พิจารณาโพลที่ $z = 3i$

เพราะว่า $\lim_{z\to 3i} (z-3i)\frac{z+1}{z^2+9} = \lim_{z\to 3i} \frac{z+1}{z+3i} = \frac{3-i}{6} \neq 0$

ดังนั้น f(z) มีโพลเชิงเดียวที่ $z = 3i$

ในทำนองเดียวกันที่ $z = -3i$ f มีโพลเชิงเดียว

3. $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$ มีโพลอันดับที่ 3 ที่ $z = 2$

เพราะว่า $\lim_{z\to 2} (z-2)^3 \frac{1}{(z-2)^3} = 1 \neq 0$

นิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ f(z) และอนุกรมโลรองต์ของ f(z) รอบจุด z_0 คือ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$ ซึ่ง $A_n \neq 0$ สำหรับค่า $n > 0$ จำนวนอนันต์ (infinitely many $n > 0$) จะกล่าวว่า f(z) มีจุด **เอกฐานเอซเซนเชียล** (essential singularity)

เช่น
$$f(z) = e^{1/z-2}$$
$$= 1 + \frac{1}{z-2} + \frac{1}{2!(z-2)^2} + \frac{1}{3!(z-2)^3} + \ldots$$

f มีจุดเอกฐานเอซเซนเชียลที่ $z = 2$

นิยาม ถ้า z_0 เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ f(z) และอนุกรมโลรองต์ของ f(z) รอบจุด z_0 ในบริเวณ $0 < |z-z_0| < r$ คือ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$ จะเรียก A_{-1} ว่า **ค่าเรซิดิว** (Residue) ของ f ที่ z_0 ใช้สัญลักษณ์ $\mathrm{Res}(z_0)$

ตัวอย่าง $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ ที่ $z = 0$ เป็นจุดเอกฐานเอซเซนเชียล

และ $e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \ldots$

จากนิยามจะได้ $\mathrm{Res}(0) = A_{-1} = -1$

การหาค่าเรซิดิว

จากอนุกรมโลรองต์ของ f(z) จะได้

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$$

และนิยาม A_{-1} ว่าค่าเรซิดิว ดังนั้นในการหาค่าเรซิดิวถ้าฟังก์ชันนั้นสามารถกระจายเป็นอนุกรมโลรองต์ได้ก็จะบอกได้ทันที แต่อาจจะพิจารณาโดยอาศัยสูตรต่อไปนี้ คือ

1. $f(z)$ **มีโพลเชิงเดียวที่** z_0

จะได้ $$\text{Res}(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z)$$

พิสูจน์ เพราะว่า f มีโพลเชิงเดียวที่ z_0 ดังนั้น $f(z)$ เขียนได้ในรูปของ

$$f(z) = \frac{A_{-1}}{z - z_0} + A_0 + A_1(z - z_0) + \ldots$$

$$(z - z_0)f(z) = A_{-1} + A_0(z - z_0) + A_1(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)f(z) = A_{-1}$$

2. $f(z)$ **มีโพลอันดับที่** $m \geqslant 2$ **ที่** z_0

จะได้ $$\text{Res}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} \right]$$

พิสูจน์ เพราะว่า $f(z)$ มีโพลอันดับที่ m

$$f(z) = \frac{A_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{A_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{(z - z_0)} + A_0 + A_1(z - z_0) + \ldots$$

$$(z - z_0)^m f(z) = A_{-m} + A_{-m+1}(z - z_0) + \ldots + A_{-1}(z - z_0)^{m-1} + A_0(z - z_0)^m + \ldots$$

หาอนุพันธ์เทียบกับ z ทั้ง 2 ข้าง $m - 1$ ครั้ง จะได้

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)!A_{-1} + m(m-1)\ldots 2A_0(z - z_0) + \ldots$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\} = (m-1)!A_{-1}$$

$$A_{-1} = \text{Res}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z - z_0)^m f(z)\}$$

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = \dfrac{z^2 + 3z - 2}{z^2 + 4}$ จงหาค่า $\text{Res}(2i)$

วิธีทำ $$f(z) = \frac{z^2 + 3z - 2}{z^2 + 4} = \frac{z^2 + 3z - 2}{(z - 2i)(z + 2i)}$$

ที่ $z = 2i$ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียว

$$\text{Res}(2i) = \lim_{z \to 2i} (z - 2i)f(z)$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{(z - 2i)(z^2 + 3z - 2)}{(z - 2i)(z + 2i)}$$

$$= \lim_{z \to 2i} \frac{(z^2+3z-2)}{z+2i}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \quad = \quad \frac{3}{2}(1+i)$$

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = \frac{z}{(z^2+1)^2}$ จงหาค่า $\text{Res}(-i)$

วิธีทำ $$f(Z)' = \frac{z}{(z^2+1)^2} = \frac{Z}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

ที่ $z = -i$ $f(z)$ มีโพลอันดับสอง

$$\text{Res}(-i) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left\{(z+i)^2 \frac{z}{(z^2+1)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z \to -i} \frac{d}{dz}\left\{\frac{z}{(z-i)^2}\right\}$$

$$= \lim_{z \to -i}\left[\frac{-z-i}{(z-i)^3}\right]$$

$$= 0$$

จาก $$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(z-z_0)^n$$

เมื่อ $$A_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

$$\text{Res}(z_0) = A_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

ดังนั้น $$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \text{Res}(z_0)$$

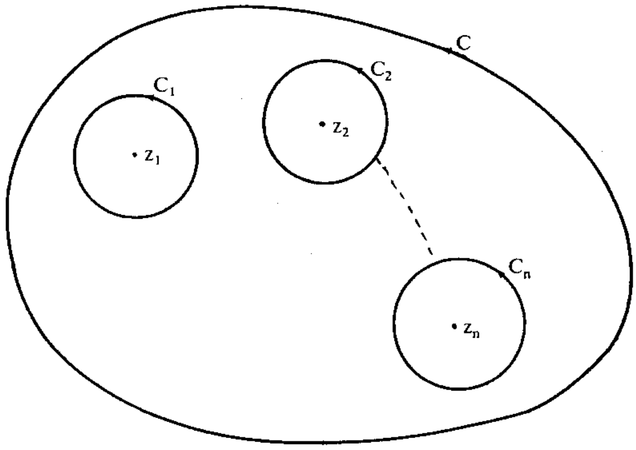
เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวและมีทิศทางบวกใน $0 < |z-z_0| < r$

ทฤษฎีบทที่ 5.11 ทฤษฎีเรซิดิว (Residue Theorem)

ให้ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวซึ่งมีทิศทางบวก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดใน Int(C) ยกเว้นจุด $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ซึ่งเป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ f ซึ่งมีจำนวนจำกัด จะได้

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \text{Res}(z_k)$$

พิสูจน์ ที่จุด $z_1, z_2, \ldots, z_n$ สร้างวงกลม C_k ล้อมรอบ โดยให้ z_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และ C_k อยู่ใน Int(C) ดังรูป



รูป 5.5

โดยทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนหลายเชิง จะได้

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{C_k} f(z)dz$$

แต่ $$\oint_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}(z_k)$$

ดังนั้น $$\oint_C f(z) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(z_k)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{3z-2}{z(z-1)} dz$ โดยทฤษฎีบทเรซิดิว เมื่อ $C : |z| = 2$

วิธีทำ ให้ $$f(z) = \frac{3z-2}{z(z-1)}$$

ในที่นี้ f(z) มีโพลเชิงเดียวที่ $z = 0,\ z = 1$ จุด 0, 1 อยู่ใน C

$$\oint_C \frac{3z-2}{z(z-1)} dz = 2\pi i\big(\operatorname{Res}(0) + \operatorname{Res}(1)\big)$$

$$\operatorname{Res}(0) = \lim_{z\to 0} z \frac{(3z-2)}{z(z-1)}$$

$$= 2$$

$$\operatorname{Res}(1) = \lim_{z\to 1} (z-1) \frac{(3z-2)}{z(z-1)}$$

$$= \quad 1$$

$$\oint_C \frac{3z-2}{z(z-1)}\,dz \quad = \quad 2\pi i(2+1) \quad = \quad 6\pi i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz$ โดยทฤษฎีบทเรซิดิว เมื่อ $C : |z| = 2$

วิธีทำ ให้ $f(z) = \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$

เพราะว่า $\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}$ มีโพลอันดับ 2 ที่ $z = 1$ และ $1 \in C$

$$\text{Res}(1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left|(z-1)^2\frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\right|$$

$$= \lim_{z\to 1}(-e^{-z})$$

$$= -e^{-1}$$

$$\oint_C \frac{e^{-z}}{(z-1)^2}\,dz = 2\pi i\,\text{Res}(1)$$

$$= -\frac{2\pi i}{e}$$

#

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}dz}{z^2(z^2+2z+2)}$ เมื่อ $C : |z| = 3$ โดยทฤษฎีเรซิดิว

วิธีทำ ให้ $f(z) = \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$

ในที่นี้ $f(z)$ มีโพลเชิงเดียวที่ $z = -1\pm i$ (รากของสมการ $z^2+2z+2 = 0$) และมีโพลอันดับ 2 ที่ $z = 0$ และค่า z เหล่านี้อยู่ใน C

โดยทฤษฎีเรซิดิว

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i\big(\text{Res}(0)+\text{Res}(-1-i)+\text{Res}(-1+i)\big)$$

ค่าเรซิดิวที่ $z = 0$

$$\text{Res}(0) = \frac{1}{1!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[z^2\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{(z^2+2z+2)(te^{zt})-(e^{zt})(2z+2)}{(z^2+2z+2)^2}$$

$$= \frac{t-1}{2}$$

ค่าเรซิดิวที่ $z = -1-i$

$$\mathrm{Res}(-1-i) = \lim_{z\to -1-i}\left\{[z-(-1-i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$

$$= \lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{e^{zt}}{z^2}\right\}\lim_{z\to -1-i}\left\{\frac{1}{z-(-1+i)}\right\}$$

$$= \frac{e^{(-1-i)t}}{(-1-i)^2}\frac{1}{(-2i)}$$

$$= \frac{e^{(-1-i)t}}{4}$$

ค่าเรซิดิวที่ $z = -1+i$

$$\mathrm{Res}(-1+i) = \lim_{z\to -1+i}\left\{[z-(-1+i)]\frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}\right\}$$

$$= \frac{e^{(-1+i)t}}{4}$$

$$\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz = 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2}+\frac{e^{(-1-i)t}}{4}+\frac{e^{(-1+i)t}}{4}\right\}$$

$$= 2\pi i\left\{\frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t\right\}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}dz = \frac{t-1}{2}+\frac{1}{2}e^{-t}\cos t$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz = \frac{t}{2}\sin t$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวซึ่งรวมจุด $z = \pm i$

วิธีทำ เพราะว่า $\frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ยกเว้น $z = \pm i$ ซึ่งอยู่ใน C

โดยทฤษฎีบทเรซิดิว $\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i\,(\mathrm{Res}(i)+\mathrm{Res}(-i))$

ที่ $z = \pm i$ ฟังก์ชันมีโพลอันดับ 2

$$\mathrm{Res}(i) = \lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[(z-i)^2\frac{ze^{zt}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to i}\left|-2(z+i)^{-3}ze^{zt}+\frac{e^{zt}}{(z+i)^2}+\frac{zte^{zt}}{(z+i)^2}\right|$$

$$= -\frac{ite^{it}}{4}$$

$$\operatorname{Res}(-i) = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left[(z+i)^2 \frac{ze^{zt}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -i}\left[-\frac{2ze^{zt}}{(z-i)^3} + \frac{e^{zt}}{(z-i)^2} + \frac{zte^{zt}}{(z-i)^2}\right]$$

$$= \frac{ite^{-it}}{4}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz = -\frac{ite^{it}}{4} + \frac{ite^{-it}}{4}$$

$$= \frac{t}{2}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$$

$$= \frac{t}{2}\sin t$$

ในการหาค่าอินทิกรัลในรูป $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ สามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของ $\int_C f(z)dz$ ได้ดังนี้

ให้ $z = e^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ เมื่อ z อยู่บนวงกลม $|z| = 1$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

$$= \frac{z-z^{-1}}{2i}$$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

$$= \frac{z+z^{-1}}{2}$$

$$dz = izd\theta$$

นั่นคือ $\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ จะเปลี่ยนไปอยู่ในรูปของ $\oint_C R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{dz}{iz}$ เมื่อ $C : |z| = 1$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta}$

วิธีทำ $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = \oint_C \frac{dz/iz}{5-4\left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{i}\oint_C \frac{dz}{5z-2z^2-2}$$

$$= -\frac{1}{i}\oint_C \frac{dz}{(2z-1)(z-2)}$$

$$= -\frac{1}{2i}\oint_C \frac{dz}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$$

จะเห็นว่า $z = \frac{1}{2}, 2$ เป็นจุดเอกฐานแบบเอกเทศของ $\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$ แต่ $z = \frac{1}{2}$ เท่านั้นที่อยู่ใน C

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = -\frac{1}{2i}2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{z\to\frac{1}{2}} \left(z-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)(z-2)}$$

$$= -\frac{2}{3}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5-4\cos\theta} = -\frac{1}{2i}2\pi i\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2}$

วิธีทำ $\sin\theta = \frac{z-z^{-1}}{2i}$, $d\theta = \frac{dz}{iz}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5-3\sin\theta)^2} = \oint_C \frac{dz/iz}{\left\{5-3\frac{(z-z^{-2})}{2i}\right\}^2}$$

$$= -\frac{4}{i}\oint_C \frac{z\,dz}{(3z^2-10iz-3)^2}$$

รากของสมการ $3z^2-10iz-3 = 0$ คือ

$$z = \frac{10i\pm\sqrt{-100+36}}{6}$$

$$= \frac{10i \pm 8i}{6} = 3i, \frac{i}{3}$$

ดังนั้น $f(z) = \dfrac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}$ มีโพลอันดับ 2 ที่ $z = 3i, \dfrac{i}{3}$

แต่ $z = \dfrac{i}{3}$ เท่านั้นที่อยู่ใน C

$$\operatorname{Res}\left(\frac{i}{3}\right) = \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left\{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 \frac{z}{(3z^2 - 10iz - 3)^2}\right\}$$

i

$$= \lim_{z \to \frac{i}{3}} \frac{d}{dz}\left\{\left(z - \frac{i}{3}\right)^2 \frac{z}{(3z - i)^2(z - 3i)^2}\right\}$$

$$= -\frac{5}{256}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5 - 3\sin\theta)^2} = -\frac{4}{i} 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{i}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{i} 2\pi i \left(-\frac{5}{256}\right) = \frac{5\pi}{32}$$

#

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาค่าและบอกชนิดของจุดเอกฐานของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $\dfrac{1-\cos z}{z}$ 1.2 $\dfrac{z^2}{(z-1)^2(z+3)}$

1.3 $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ 1.4 $z\cos\dfrac{1}{z}$

1.5 $\dfrac{\sin z}{z-\pi}$

2. จงหาค่าเรซิดิวของฟังก์ชันต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{2z+3}{z^2-4}$ 2.2 $\dfrac{e^{zt}}{(z-2)^3}$

2.3 $\dfrac{\sin z}{z^2}$ 2.4 $\dfrac{2z+1}{z^2-z-2}$

2.5 $\dfrac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$

3. จงหาค่าอินทิกรัลโดยทฤษฎีบทเรซิดิว

3.1 $\displaystyle\oint_C \frac{z^2dz}{(z+1)(z+3)}$ เมื่อ $C : |z| = 4$

3.2 $\displaystyle\oint_C \frac{e^z dz}{(z-1)(z+3)^2}$ เมื่อ $C : |z| = 10$

3.3 $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^{zt}}{z(z^2+1)}dz,\ t > 0$ เมื่อ C เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสมีจุดยอดที่ $1+i,\ -1+i,$ $-1-i,\ 1-i$

3.4 $\displaystyle\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z^2+1)^2}dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวซึ่งรวมจุด $z = \pm i$

3.5 $\displaystyle\oint_C \frac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวซึ่งรวมจุด $z = 0,\ -1\pm i$

4. จงหาค่าของ

4.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin 3\theta}{5-3\cos\theta}d\theta$

4.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5+3\sin\theta}$

5. จงแสดงว่า

5.1 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(2+\cos\theta)^2} = \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

5.2 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos n\theta \, d\theta}{1-2a\cos\theta+a^2} = \frac{2\pi a^n}{1-a^2}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, 0 < a < 1$