บทที่ 4
อินทิกรัลเชิงซ้อน
(Complex Integral)

การพิสูจน์คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันวิเคราะห์นั้น อาจจะต้องอาศัยเรื่องการอินทิเกรตฟังก์ชันเชิงซ้อนเพื่อให้ง่ายขึ้น ดังนั้นการศึกษาถึงการอินทิเกรตฟังก์ชันเชิงซ้อนจึงสำคัญมาก ทฤษฎีบทต่าง ๆ มีประโยชน์ในทางคณิตศาสตร์และการประยุกต์ในสาขาอื่น ๆ มากเช่นเดียวกับในกรณีของฟังก์ชันค่าจริง คือจะพิจารณาถึงอินทิกรัลจำกัดเขต (definite integral) และอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (indefinite integral) สำหรับอินทิกรัลไม่จำกัดเขตนั้นจะเป็นฟังก์ชันซึ่งอนุพันธ์ของฟังก์ชันเท่ากับฟังก์ชันวิเคราะห์ที่กำหนดให้ในบริเวณหนึ่ง ส่วนอินทิกรัลจำกัดเขตจะหาบนส่วนโค้ง (arcs) ที่หาอนุพันธ์ได้ และไม่จำกัดเฉพาะฟังก์ชันวิเคราะห์เท่านั้น ดังนั้นในช่วงแรกจะศึกษาถึงอินทิกรัลจำกัดเขตและเส้นทางที่ใช้ในการหาค่าอินทิกรัลตามเส้นโค้ง

4.1 อินทิกรัลจำกัดเขต (Definite Integrals)

ในการหาค่าอินทิกรัลของ $f(z)$ อย่างง่าย จะพิจารณาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน F ของตัวแปร t (complex-value function F of a real variable t)

สำหรับ $U(t)$ และ $V(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ (piecewise continuous) และ $a \leqslant t \leqslant b$

ให้ $$F(t) = U(t) + iV(t)$$

ดังนั้น F เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องเป็นช่วง ๆ และนิยามอินทิกรัลจำกัดเขตของ F ในช่วง $[a, b]$ ในรูปของ

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b U(t)dt + i\int_a^b V(t)dt$$

และจะได้คุณสมบัติต่าง ๆ เหมือนกับฟังก์ชันค่าจริง นอกจากนี้จะได้

1. $$\operatorname{Re}\int_a^b F(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]dt$$

2. **สำหรับ** $z = c_1 + ic_2$ **จะได้**

$$\int_a^b zF(t)dt = z\int_a^b F(t)dt$$

เพราะว่า
$$\begin{aligned}\int_a^b zFdt &= \int_a^b (c_1U - c_2V)dt + i\int_a^b (c_2U + c_1V)dt \\ &= (c_1 + ic_2)\left(\int_a^b Udt + i\int_a^b Vdt\right) \\ &= z\int_a^b F(t)dt\end{aligned}$$

3. $$\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |F(t)|dt$$

พิสูจน์ ให้ r_0 เป็นค่ามอดูลัส และ θ_0 เป็นค่าอาร์กิวเมนต์ของ $\int_a^b F(t)dt$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}r_0e^{i\theta_0} &= \int_a^b F(t)dt \\ r_0 &= e^{-i\theta_0}\int_a^b F(t)dt \\ &= \int_a^b e^{-i\theta_0}F(t)dt \qquad \text{(จากข้อ 2)}\end{aligned}$$

เพราะว่า r_0 เป็นค่าจริง ดังนั้น

$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}F(t))dt$$

แต่
$$\operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}F(t)) \leqslant |e^{-i\theta_0}F(t)| = |e^{-i\theta_0}|\,|F(t)| = |F(t)|$$

นั่นคือ
$$r_0 = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-i\theta_0}F(t))dt \leqslant \int_a^b |F(t)|dt$$

$$r_0 = |r_0| = |e^{-i\theta_0}|\left|\int_a^b F(t)dt\right| = \left|\int_a^b F(t)dt\right|$$

ดังนั้น
$$\left|\int_a^b F(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |F(t)|dt$$

4.2 คอนทัวร์หรือเส้นทาง (Contours)

เส้นโค้งที่ใช้ในการศึกษาอินทิกรัลเชิงซ้อนของฟังก์ชัน $f(z)$ คือ เส้นโค้งซึ่งสามารถเขียนแทนในรูปของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม **เส้นโค้ง** C เป็นเซตของจุด $z = (x, y)$ ในระนาบเชิงซ้อน ซึ่ง

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad a \leqslant t \leqslant b$$

เมื่อ $x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปร t ที่มีความต่อเนื่อง และอาจเขียนแทน C ด้วย $z(t)$

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) = (x(t), y(t))$$

$z(t)$ มีความต่อเนื่อง

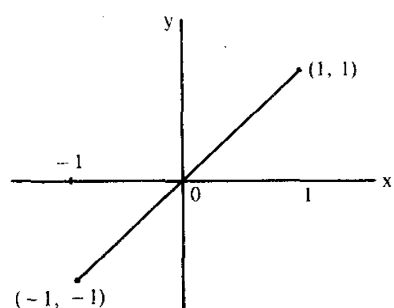
ตัวแปร t เรียกว่า **ตัวแปรเสริม** หรือ **พารามิเตอร์** (parameter)

ตัวอย่าง

1. $z(t) = t + it, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$

ในที่นี้ $\quad x(t) = t, \quad y(t) = t$

$x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง เขียนกราฟจะได้ดังรูป



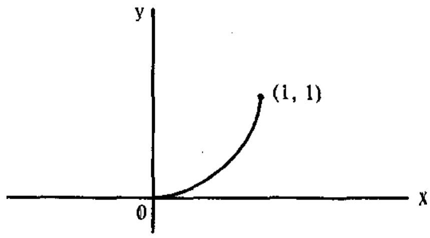
รูป 4.1

กราฟที่ได้คือ $y = x$ จากจุด $(-1, -1)$ ถึง $(1, 1)$ นั่นเอง

2. $z(t) = t + it^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

ในที่นี้ $\quad x(t) = t, \quad y(t) = t^2$

$x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่อง กราฟคือเส้นโค้ง $y = x^2$ จากจุด $(0, 0)$ ถึง $(1, 1)$ นั่นเอง



รูป 4.2

นิยาม เส้นโค้ง C เรียกว่า **เส้นโค้งเรียบ** (smooth curve) ก็ต่อเมื่อ C เป็นเส้นโค้งในรูป $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ และ $z'(t)$ หาค่าได้ และมีความต่อเนื่องในช่วง $[a, b]$ และ $z'(t) \neq 0$

ดังนั้น ถ้ากำหนด $C : z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$ และจะตรวจสอบว่า C เป็นเส้นโค้งเรียบ จะต้องพิจารณาดังต่อไปนี้

1. $x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องทุกค่า t
2. $x'(t)$ และ $y'(t)$ หาค่าได้และมีความต่อเนื่องทุกค่า t
3. $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ นั่นคือ $x'(t)$ และ $y'(t)$ ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

เมื่อ $t = a$ จุด $z(a) = (x(a), y(a))$ เรียกว่า **จุดเริ่มต้น** (initial point)

เมื่อ $t = b$ จุด $z(b) = (x(b), y(b))$ เรียกว่า **จุดสิ้นสุด** (terminal point)

เช่น ตัวอย่าง $z(t) = t + it^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ จะเห็นว่า $z(t)$ เป็นเส้นโค้งเรียบ และจุดเริ่มต้นคือ $(0, 0)$ จุดสิ้นสุดคือจุด $(1, 1)$

จากนิยามของเส้นโค้งเรียบ ทำให้สามารถสรุปลักษณะที่สำคัญของเส้นโค้งเรียบดังนี้

1. เป็นเส้นโค้งต่อเนื่อง เพราะว่า $x(t)$ และ $y(t)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

2. เพราะว่า $z'(t)$ หาค่าได้และมีความต่อเนื่อง ดังนั้น $x'(t)$ และ $y'(t)$ มีความต่อเนื่องและไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน ถ้า $x'(t) = 0$ จะได้ $z'(t) = iy'(t)$ ซึ่งเป็นเส้นดิ่ง แต่ถ้า $x'(t) \neq 0$ ความชันของ $z'(t)$ คือ $y'(t) / x'(t)$ ซึ่งคือความชันของเส้นสัมผัสเส้นโค้ง C ที่จุด t มุมเอียงของเส้นสัมผัสเส้นโค้งคือ $\arg z'(t)$ และจะได้เส้นโค้งมีความเรียบ

3. จาก $|z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

จะได้ความยาวของเส้นโค้งเรียบ จากสูตร

$$L = \int_a^b |z'(t)| dt$$

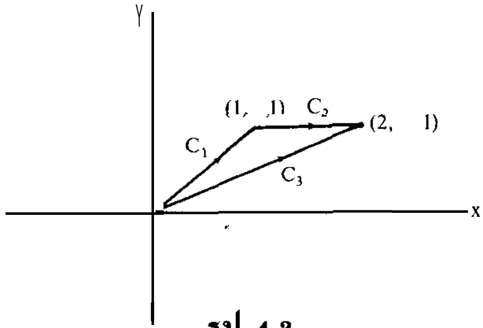
ตัวอย่าง เส้นโค้ง C_1, C_2, C_3 กำหนดโดย

C_1 : $x = t$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

C_2 : $x = t$, $y = 1$, $1 \leqslant t \leqslant 2$

C_3 : $x = 2t$, $y = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

จะเห็นว่า เมื่อ t แปรค่าจาก 0 ถึง 1 C_1 คือ ส่วนของเส้นตรง $y = x$ จากจุด (0, 0) ถึงจุด (1, 1) ดังรูป



รูป 4.3

เมื่อ t แปรค่าจาก 1 ถึง 2 C_2 คือส่วนของเส้นตรง $y = 1$ จากจุด (1, 1) ถึงจุด (2, 1)

เมื่อ t แปรค่าจาก 0 ถึง 2 C_3 คือส่วนของเส้นตรง $x = 2y$ จากจุด (0, 0) ถึงจุด (2, 1)

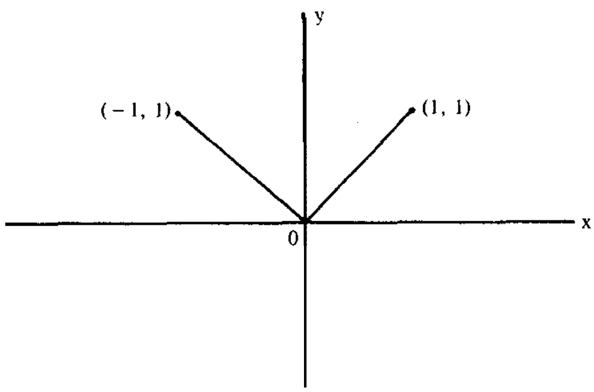
จะเห็นว่า C_1, C_2, C_3 เป็นเส้นโค้งเรียบและต่อกันเป็นรูปสามเหลี่ยม ทิศทางกำกับด้วยลูกศร

ตัวอย่าง เส้นโค้ง $C : x = t^2, \quad y = t^2, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$

เพราะว่า $x'(t) = 2t$ และ $y'(t) = 2t, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$

และ $x'(0) = 0 = y'(0)$

เป็นศูนย์พร้อมกันที่ $t = 0$ ดังนั้น C ไม่เป็นเส้นโค้งเรียบ



รูป 4.4

C เป็นเส้นตรงซึ่งมีสมการ $y = x$ นั่นเอง จริง ๆ แล้ว C เกิดจากเส้นโค้งเรียบ 2 เส้นต่อกันที่จุด $(0, 0)$ นั่นเอง

ตัวอย่าง เส้นโค้ง $C : z(t) = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

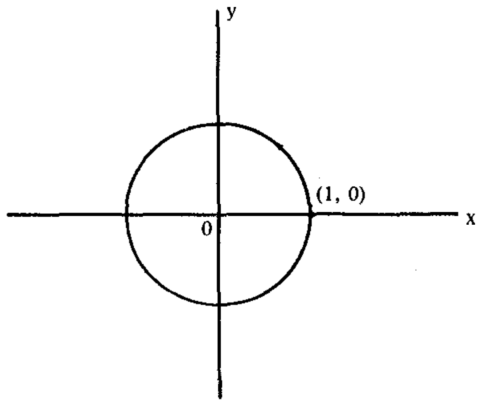
เพราะว่า $x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = \sin t$

และ $x'(t) = -\sin t \quad , \quad y'(t) = \cos t$

หาค่าได้ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันและมีความต่อเนื่องสำหรับทุกค่า t ในช่วง $[0, 2\pi]$

ดังนั้น C เป็นเส้นโค้งเรียบ

จุดเริ่มต้นของ C คือ $z(0) = (1, 0)$ และจุดสิ้นสุดคือ $z(2\pi) = (1, 0)$ เช่นเดียวกัน



รูป 4.5

นิยาม เส้นโค้ง C เรียกว่า **คอนทัวร์** (contour) หรือ **เส้นโค้งเรียบเป็นช่วง ๆ** (piecewise smooth curve) ก็ต่อเมื่อ C ประกอบด้วยเส้นโค้งเรียบ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ซึ่งต่อกันโดยที่จุดสิ้นสุดของ C_k ต่อกับจุดเริ่มต้นของ C_{k+1} เมื่อ $k = 1, \ldots, n-1$ และเขียน $C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n$

ดังนั้นจุดเริ่มต้นของ C คือจุดเริ่มต้นของ C_1 และจุดสิ้นสุดของ C คือจุดสิ้นสุดของ C_n

นอกจากนี้คอนทัวร์แบ่งออกเป็นลักษณะต่าง ๆ กัน ดังนี้

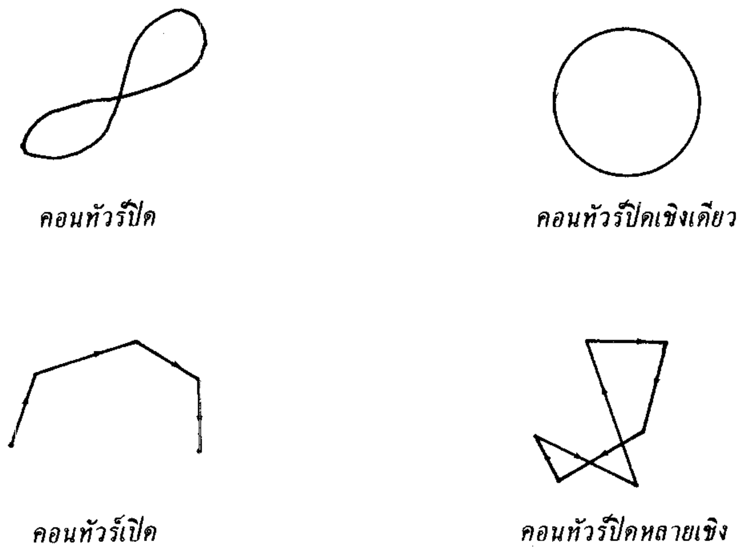
นิยาม ถ้าคอนทัวร์ C เกิดจาก $z(t)$ เมื่อ $a \leqslant t \leqslant b$ และ $z(a) = z(b)$ จะเรียก C ว่า **คอนทัวร์ปิด** (closed contour)

และถ้า C ไม่เป็นคอนทัวร์ปิด เรียก C ว่า **คอนทัวร์เปิด** (open contour)

นิยาม ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดซึ่ง C ไม่ตัดกันเอง จะกล่าวว่า C เป็น **คอนทัวร์ปิดเชิงเดียว** (simple closed contour)

ถ้า C ไม่เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว เรียก C ว่า **คอนทัวร์ปิดหลายเชิง** (multiple closed contour)

ต่อไปนี้เป็นรูปประกอบนิยามเพื่อให้เข้าใจได้มากขึ้น

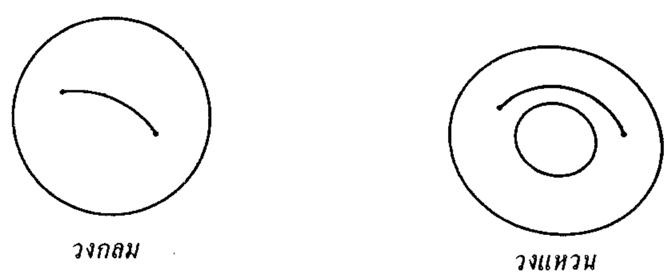


รูป 4.6

นอกจากนี้ก็อาจจะให้นิยามของคอนทัวร์เปิดเชิงเดียว คอนทัวร์เปิดหลายเชิงได้ในทำนองเดียวกัน

นิยาม เซต R ในระนาบ เรียกว่า **เซตไม่ขาดตอน** (connected set) ก็ต่อเมื่อเราสามารถเชื่อมจุด 2 จุดใด ๆ ในเซต R ด้วยเส้นโค้งที่อยู่ใน R

เช่น บริเวณดังรูปต่อไปนี้เป็นเซตไม่ขาดตอน



รูป 4.7

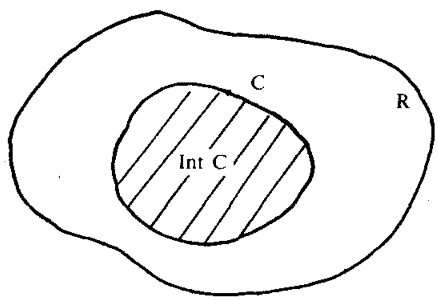
นิยาม R เรียกว่า **บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว** (simply connected region) ก็ต่อเมื่อถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวที่อยู่ใน R จะได้ว่า Int(C) จะมีแต่จุดที่อยู่ใน R เท่านั้น

ถ้า R ไม่เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว เราเรียก R ว่าเป็น **บริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง** (multiply connected region)

จะเห็นว่าวงกลมเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว แต่รูปวงแหวนเป็นบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง และบริเวณภายในของคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวใด ๆ เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวและเป็นเซตไม่ขาดตอน

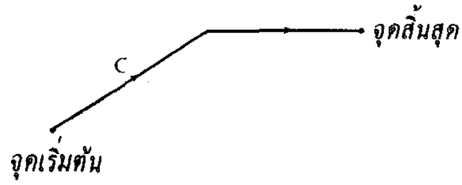
การกำหนดทิศทางของคอนทัวร์

ถ้า R เป็นบริเวณปิด และ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวใน R จะกล่าวว่า C มี **ทิศทางเป็นบวก** (positive sense) เมื่อ Int C อยู่ทางซ้ายของ C ในขณะที่ C ถูกลากไปตามลำดับการเพิ่มขึ้นของค่าพารามิเตอร์ในช่วงนั้น ๆ และจะแสดงทิศทางโดยใส่ลูกศรกำกับ



รูป 4.8

นั่นคือ ทิศทางของคอนทัวร์ C ที่เป็นบวกจะเป็นทิศทวนเข็มนาฬิกา ถ้าเป็นคอนทัวร์เปิดเชิงเดียวก็จะกำหนดทิศทางเป็นบวก เมื่อ C ถูกลากจากจุดเริ่มต้นไปยังจุดสิ้นสุด ดังรูป

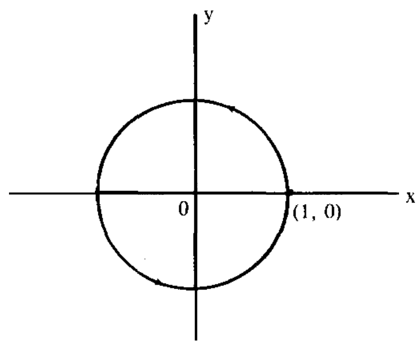


รูป 4.9

ในกรณีที่ C มี **ทิศทางเป็นลบ** จะหมายถึง C มีทิศทางตรงข้ามกับทิศทางเป็นบวก แต่สัญลักษณ์ $-C$ จะมีความหมายว่าเป็นคอนทัวร์ C เดิม แต่มี **ทิศทางตรงกันข้าม** กับทิศทางของ C

ตัวอย่าง

1. จากตัวอย่าง $C : z(t) = \cos t + i \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ **จะได้กราฟดังนี้**



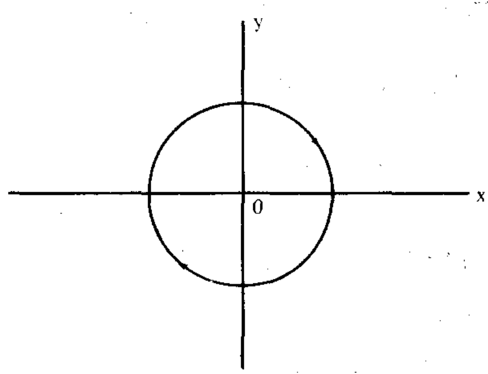
รูป 4.10

จุดเริ่มต้นที่ (1, 0) และจุดสิ้นสุดที่ (1, 0) เช่นเดียวกัน ทิศทางของ C ทวนเข็มนาฬิกา ดังนั้น C **มีทิศทางเป็นบวก**

2. $C : z(t) = \cos t - i \sin t \ , \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$x(t) = \cos t \quad , \quad y(t) = -\sin t$$

จุดเริ่มต้นของ C คือ (1, 0) จุดสิ้นสุดคือ (1, 0) เช่นเดียวกัน แต่เมื่อ t มีค่าเพิ่มขึ้นจาก 0 ไปยัง 2π เส้นโค้ง C จะมีค่าเพิ่มขึ้นเมื่อลากตามเข็มนาฬิกา ดังนั้น C **จะมี ทิศทางเป็นลบ**



รูป 4.11

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงเขียนกราฟของเส้นโค้งต่อไปนี้ และแสดงว่ากราฟเป็นเส้นโค้งเรียบหรือไม่ ถ้าเป็นเส้นโค้งเรียบ จงหาจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุด

   1.1 $z(t) = t+i(t-1), \ 0 \leqslant t \leqslant 1$

   1.2 $z(t) = \cos 2t + i \sin 2t, \ 0 \leqslant t \leqslant \pi$

   1.3 $z(t) = t^3 + it^2, \ -1 \leqslant t \leqslant 1$

   1.4 $z(t) = 2\cos t + 2i \sin t, \ 0 \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{2}$

2. จงเขียนกราฟของคอนทัวร์ต่อไปนี้ และบอกด้วยว่ามีทิศทางเป็นบวกหรือเป็นลบ

   2.1 เส้นตรงจากจุด $(1, -1)$ ไปยัง $(1, 1)$ และจาก $(1, 1)$ ไปยัง $(2, 1)$

   2.2 $x(t) = -\sin t, \quad y = \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

   2.3 $x(t) = t^2, \quad y(t) = t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2$

   2.4 $x(t) = -t, \quad y(t) = t^2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 0$

3. จงเขียนสมการในรูปตัวแปร t ของเส้นโค้งต่อไปนี้

   3.1 ส่วนของเส้นตรงจากจุด $(1, -1)$ ไปยัง $(2, 1)$

   3.2 ครึ่งบนของวงกลมจากจุด $(2, 0)$ ไปยัง $(-2, 0)$

4. จงแสดงว่า ถ้า $F(t) = U(t)+iV(t)$ แล้วจะได้

$$\int_a^b F(t)dt = \int_{-b}^{-a} F(-t)dt$$

5. จงแสดงว่า วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $z_0 = (a, b)$ และมีรัศมี r_0 มีสมการในรูปตัวแปร t คือ

$$x(t) = a+r_0\cos t, \ y(t) = b+r_0\sin t, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

หรือ $\quad z = z_0 + r_0e^{it}, \ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

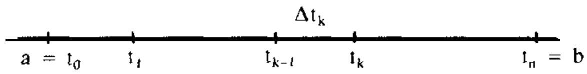
4.3 อินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันเชิงซ้อน

อินทิกรัลตามเส้นโค้ง C ในระนาบเชิงซ้อนของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน มีนิยามดังนี้

ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ จุดบน C นิยามโดย $z(t) = (x(t), y(t))$ $t \in [a, b]$

ให้ $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน z ซึ่งนิยามที่แต่ละจุดบน C แบ่งช่วง [a, b] ออกเป็น n ส่วน คือ

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$



ให้ความยาวช่วงย่อยที่ k คือ $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ และ $t_{k-1} \leqslant t_k^* \leqslant t_k$

ดังนั้นจุดบน C ที่สมนัยกับจุดแบ่ง t_k ใด ๆ ในช่วง [a, b] คือ

$$z_k = z(t_k)$$

ให้ $$z_k^* = z(t_k^*)$$

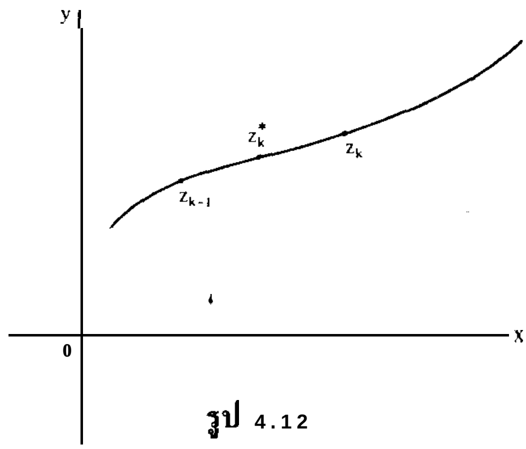
และ $$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$$

ให้ $$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$$

เมื่อ $n \to \infty$ จะได้ $\Delta z_k \to 0$

ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$ หาค่าได้ ค่าที่ได้คืออินทิกรัลตามเส้นของ f(z) ตาม C เขียนแทนด้วย $\int_C f(z)dz$ ดังนั้น

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$$



รูป 4.12

ในการหาค่าอินทิกรัลตามเส้นโค้ง C ของ $f(z)$ นั้น จะอาศัยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.1 ถ้า C เป็นเส้นโค้งเรียบ $z(t) = x(t)+iy(t),\ a \leqslant t \leqslant b$ $f(z)$ มีความต่อเนื่องบน C และ $z'(t)$ หาค่าได้ จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

พิสูจน์ $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ **และ** $z(t_k^*) = z_k^*$

โดยทฤษฎีบทค่า เฉลี่ย (Mean-valued Theorem)

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(t_k^*)(t_k - t_{k-1})$$

เมื่อ $t_{k-1} < t_k^* < t_k$

ดังนั้น $\Delta z_k = z_k^{*\prime}\Delta t_k$

จาก
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)\Delta z_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n} f(z_k^*)z_k^{*\prime}\Delta t_k$$

ซึ่งเป็นค่า **ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum) ของฟังก์ชัน $f(z(t))z'(t)$ เมื่อ $t\in[a, b]$

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty} S_n = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

ตัวอย่าง ให้ C เป็นเส้นโค้งกำหนดโดย $z(t) = t+it^2$ เมื่อ $t \in [0, 1]$ จงหาค่าของ $\int_C z^2dz$

วิธีทำ
$$\int_C z^2dz = \int_0^1 (t+it^2)^2(1+2it)dt$$
$$= \int_0^1 (t^2+2it^3-t^4)(1+2it)dt$$
$$= \int_0^1 (t^2+4it^3-5t^4-2it^5)dt$$
$$= \left[\frac{t^3}{3}+it^4-t^5-\frac{2it^6}{6}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}-1+i-\frac{i}{3} = \frac{2}{3}(-1+i)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C |z|^2 dz$ **ตามเส้นโค้ง**

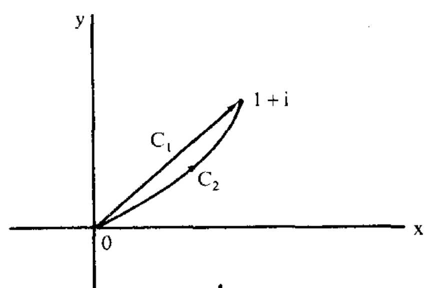
1. $C = C_1 : z_1(t) = I + it \ , \ 0 \leqslant t \leqslant 1$
2. $C = C_2 : z_2(t) = t^2 + it \ , \ 0 \leqslant t \leqslant 1$

วิธีทำ จาก
$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

1 . C_1 :
$$z,(t) = t+it$$
$$z_1'(t) = I+i$$
$$\int_{C_1} |z|^2 dz = \int_0^1 |t+it|^2 (I + i)dt$$
$$= (1 + i)\int_0^1 2t^2 dt$$
$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i$$

2. C_2 :
$$z,(t) = t^2 + it$$
$$z_2'(t) = \mathbf{21} + i$$
$$\int_{C_2} |z|^2 dz = \int_0^1 |t^2+it|^2 (2t+i)dt$$
$$= \int_0^1 2t(t^4+t^2)dt + i\int_0^1 (t^4+t^2)dt$$
$$= \frac{5}{6} + \frac{8}{15}i$$

จะเห็นว่า ถึงแม้การหาค่าตามเส้นโค้งจากจุด (0, 0) ถึงจุดสิ้นสุดเดียวกันคือ (1, 1) แต่ก็จะได้ค่าไม่เท่ากัน



รูป 4.13

นั่นคือ
$$\int_{C_1} |z|^2 dz \neq \int_{C_2} |z|^2 dz$$

ทฤษฎีบทที่ 4.2 ถ้า $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ มีความต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

พิสูจน์ จากทฤษฎีบทที่ 4.1 จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))][x'(t) + iy'(t)]dt$$

$$= \int_a^b (ux' - vy')dt + i\int_a^b (vx' + uy')dt$$

$$= \int_C (udx - vdy) + i\int_C (vdx + udy)$$

ทฤษฎีบทที่ 4.3 ให้ $f(z)$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ตาม C จะได้

1. $\int_C kf(z)dz = k\int_C f(z)dz$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อนใด ๆ

2. $\int_C (f(z) + g(z))dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$

3. ถ้า C แบ่งเป็น $C_1 + C_2$ จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

4. $$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

5. ถ้า $M = \max\{|f(z)| / z\in C\}$ และ L เป็นความยาวของเส้นโค้ง C จะได้

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant ML$$

พิสูจน์ ข้อ 1 – 4 พิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม

ข้อ 5

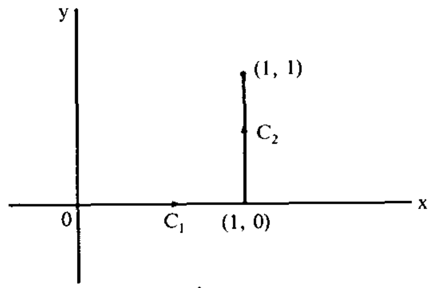
$$\left|\int_C f(z)dz\right| = \left|\int_a^b f(z)z'(t)dt\right|$$

$$\leqslant \int_a^b |f(z)z'(t)dt|$$

$$\leqslant \quad M\int_a^b |z'(t)|dt$$

$$\leqslant \quad M\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt \quad = \quad ML$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C (x-y)dz$ เมื่อ $C = C_1 + C_2$ ดังรูป



รูป 4.14

วิธีทำ จะเห็นว่าคอนทัวร์ C_1 และ C_2 มีสมการเป็น

C_1 : $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y = 0$

C_2 : $x = 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

. ตาม C_1 มีค่า $dy = 0$ และตาม C_2 มีค่า $dx = 0$

$$\int_{C_1+C_2} f(x, y)dz = \int_{C_1+C_2} (x-y)dz$$

$$= \int_{C_1+C_2} (x-y)dx + i\int_{C_1+C_2} (x-y)dy$$

$$\int_{C_1+C_2} (x-y)dx = \int_{C_1} (x-y)dx + \int_{C_2} (x-y)dx$$

$$= \int_0^1 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_{C_1+C_2} (x-y)dy = \int_{C_1} (x-y)dy + \int_{C_2} (x-y)dy$$

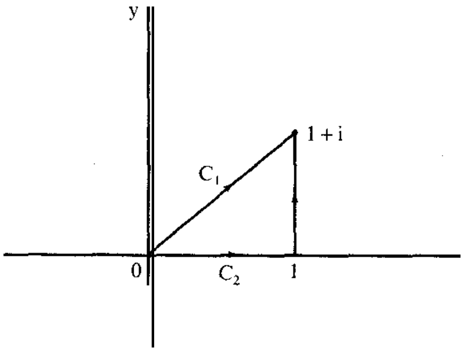
$$= \int_0^1 (1-y)dy = \left|y - \frac{y^2}{2}\right|_0^1$$

$$= \quad 1 - \frac{1}{2} \quad = \quad \frac{1}{2}$$

$$\therefore \int_{C_1 + C_2} (x - y)dz \quad = \quad \frac{1}{2}(1 + i)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C (z^2 + 1)dz$ เมื่อ C เป็นเส้นตรงดังนี้

1. เส้นตรงจาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1 + i$
2. เส้นตรงจาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1$ และจาก $z = 1$ ไปยัง $z = 1 + i$ ดังรูป



รูป 4.16

วิธีทำ ให้ C_1 เป็นเส้นตรงจาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1 + i$

C_2 เป็นเส้นตรงจาก $z = 0$ ไปยัง $z = 1$ และจาก $z = 1$ ไปยัง $z = 1 + i$

$$z^2 + 1 \quad = \quad (x + iy)^2 + 1 = \quad x^2 \quad y^2 + 1 + 2xyi$$

1. จะเห็นว่า เส้นตรง C_1 คือเส้นตรงสมการ $x = y$ นั่นเอง

ให้ $x = t, \; y = t, \; 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$z(t) = t + it \; , \; 0 \leqslant I \leqslant 1$$

$$z'(t) = 1 + i$$

$$z^2 + 1 = 1 + 2t^2 i$$

$$\int_{C_1} (z^2 + 1)dz = \int_0^1 (1 + 2t^2 i)(1 + i)dt$$

$$= \int_0^1 (1 + i + 2t^2 i - 2t^2)dt$$

$$= \left| (1 + i)t + \frac{2t^3}{3} i - \frac{2t^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} i$$

2. C_2ประกอบด้วยเส้นตรงจาก (0, 0) ไปยัง (1, 0) และจาก (1, 0) ไปยัง (1, 1)

เส้นตรงจาก (0, 0) *ไปยัง* (1, 0) มีค่า $y = 0$ และ $x(t) = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$z(t) = t\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$z'(t) = 1$$

$$z^2+1 = t^2+1$$

เส้นตรงจาก (1, 0) *ไปยัง* (1, 1) มีค่า $x = 1$ และ $y(t) = t,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$

$$z(t) = 1+ti\ ,\ 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$z'(t) = i$$

$$z^2+1 = (1+ti)^2+1 = 2-t^2+2ti$$

$$\int_{C_2}(z^2+1)dz = \int_0^1 (t^2+1)(1)dt + \int_0^1 (2-t^2+2ti)(i)dt$$

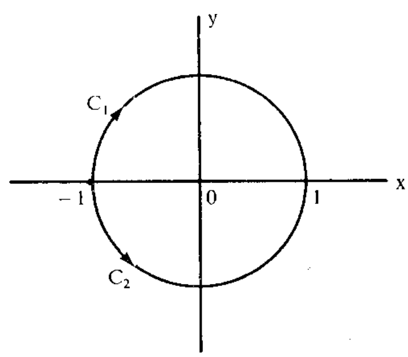
$$\left.\frac{t^3}{3}+t+2it-\frac{t^3}{3}i-\frac{2t^2}{2}\right|_0^1$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{5}{3}i$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า ค่าของอินทิกรัลของ z^2+1 ตาม C_1 และ C_2 มีค่าเท่ากัน แสดงว่าค่าของอินทิกรัลไม่ขึ้นอยู่กับคอนทัวร์ของการอินทิเกรต

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C \bar{z}\,dz$ เมื่อ C คือ

1. ครึ่งวงกลมบน $|z| = 1$ จาก $z = -1$ ถึง $z = 1$
2. ครึ่งวงกลมล่าง $|z| = 1$ จาก $z = -1$ ถึง $z = 1$



รูป 4.16

วิธีทำ ให้ C_1 เป็นกราฟในข้อ 1 และ C_2 เป็นกราฟในข้อ 2

1. *บน* C_2 **ให้** $x(t) = \cos t,\ y(t) = \sin t,\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$

   หรือ $z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant \pi$

$$\int_{C_1} \bar{z}\,dz = -\int_{-C_1} \bar{z}\,dz = -\int_0^{\pi} e^{-it}(ie^{it})dt = -\pi i$$

2. *บน* C_2 $z(t) = \cos t + i\sin t = e^{it},\ \pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

$$\int_{C_2} \bar{z}\,dz = \int_{\pi}^{2} e^{-it}(ie^{it})dt = \pi i$$

จะเห็นว่า $$\int_{C_1} \bar{z}\,dz \neq \int_{C_2} \bar{z}\,dz$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C \bar{z}\,dz$ จาก $z = 0$ ถึง $z = 4+2i$ ตามเส้นโค้ง C กำหนดโดย

1. $z(t) = t^2 + it$
2. เส้นตรงจาก $z = 0$ ถึง $z = 2i$ และเส้นตรงจาก $z = 2i$ ถึง $z = 4+2i$

วิธีทำ

1. ***วิธีที่ 1*** จาก $z(t) = t^2 + it$ และ $f(2) = \bar{z}$

   จะได้ $x(t) = t^2$ และ $y(t) = t$

   $z = 0$ ถึง $z = 4+2i$ จะได้ $0 \leqslant t \leqslant 2$

$$\begin{aligned}
\int_C \bar{z}\,dz &= \int_0^2 \bar{z}\,z'(t)dt \\
&= \int_0^2 (\overline{t^2 + it})\,(2t + i)dt \\
&= \int_0^2 (t^2 - it)\,(2t + i)dt \\
&= \int_0^2 (2t^3 - it^2 + t)dt \\
&= \left| \frac{2t^4}{4} - \frac{it^3}{3} + \frac{t^2}{2} \right|_0^2 \\
&= 10 - \frac{8i}{3}
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 $\quad \bar{z} = x - iy$ และ $dz = dx + idy$

$$\int_C \bar{z}\,dz = \int_C (x - iy)(dx + idy)$$

$$= \int_C (xdx + ydy) + i\int_C (xdy - ydx)$$

จาก $x = t^2, \quad y = t$ เมื่อ $0 \leqslant t \leqslant 2$

$$\int_C idz = \int_0^2 (t^2)(2tdt) + tdt + i\int_0^2 t^2dt - t(2tdt)$$

$$= \int_0^2 (2t^3 + t)dt + i\int_0^2 (-t^2)dt$$

$$= \left| \frac{2t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right|_0^2 + i\left(-\frac{t^3}{3}\right)_0^2$$

$$= 10 - \frac{8i}{3}$$

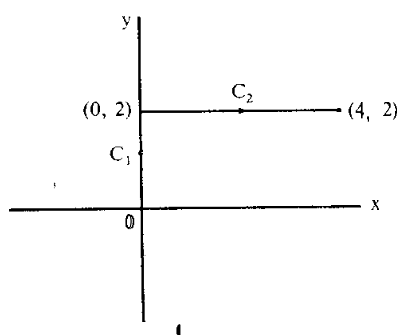
2 . จาก $\int_C (x - iy)(dx + idy) = \int_C (xdx + ydy) + i\int_C (xdy - ydx)$

z จาก 0 ถึง $2i$ นั่นคือ จากจุด (0, 0) ถึง (0, 2) ให้เป็น C_1 ซึ่งจะได้ $x = 0, \ dx = 0$ และ $0 \leqslant y \leqslant 2$

$$\int_{C_1} idz = \int_{y=0}^{y=2} \left[(0)(0) + ydy\right] + i\int_{y=0}^{y=2} \left[(0)(dy) - y(0)\right]$$

$$= \int_0^2 ydy$$

$$= 2$$



รูป 4.17

z จาก $2i$ ถึง $4+2i$ นั่นคือ จากจุด $(0, 2)$ ถึง $(4, 2)$ ให้เป็น C_2 ซึ่งจะได้ $Y = 2$, $dy = 0$ และ $0 \leqslant x \leqslant 4$

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \bar{z}\,dz &= \int_0^4 x\,dx + 2\cdot 0 + i\int_0^4 x\cdot 0 - 2dx \\
&= \int_0^4 x\,dx + i\int_0^4 (-2)dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 - 2i[x]_0^4 \\
&= 8 - 8i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_C \bar{z}\,dz &= \int_{C_1} \bar{z}\,dz + \int_{C_2} \bar{z}\,dz \\
&= 2 + 8 - 8i \\
&= 10 - 8i
\end{aligned}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า ถ้า $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของ x และ y ซึ่งมีความต่อเนื่องทุกจุดบน C เราสามารถหาค่าอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรทั้งสองได้เช่นเดียวกัน

ทฤษฎีบทที่ 4.4 ถ้า C เป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งแทนด้วยสมการ $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [a, b]$ $f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C จะได้

$$\int_C f(x, y)dx = \int_a^b f(x(t), y(t))x'(t)dt$$

และ

$$\int_C f(x, y)dy = \int_a^b f(x(t), y(t))y'(t)dt$$

การพิสูจน์เช่นเดียวกับทฤษฎีบทที่ 4.1

ตัวอย่าง จงหาค่าอินทิกรัลตามเส้นของ $f(x, y) = xy$ เทียบกับตัวแปรทั้งสอง เมื่อ $C : x = 2t$, $y = t^2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$

วิธีทำ เพราะว่า $x = 2t$, $y = t^2$

$$\therefore \quad dx = 2dt \quad \text{และ} \quad dy = 2tdt$$

$$\int_C xy\,dx = \int_0^1 (2t)(t^2)2dt$$

$$= 4\int_0^1 t^3dt = 1$$

$$\int_C xydy = \int_0^1 (2t)(t^2)(2tdt)$$

$$= 4\int_0^1 t^4dt$$

$$= \frac{4}{5}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{(0,\ 3)}^{(2,4)} (2y+x^2)dx+(3x-y)dy$ ตามเส้นโค้งต่อไปนี้

1. พาราโบลา $x = 2t$ และ $y = t^2+3$
2. ตามเส้นตรงจากจุด $(0, 3)$ ถึง $(2, 3)$ และจาก $(2, 3)$ ถึง $(2, 4)$
3. ตามเส้นตรงจาก $(0, 3)$ ถึง $(2, 4)$

วิธีทำ

1. พาราโบลา $x = 2t$ และ $y = t^2+3$

จาก $(0, 3)$ ถึง $(2, 4)$ จะได้ $0 \leqslant t \leqslant 1$

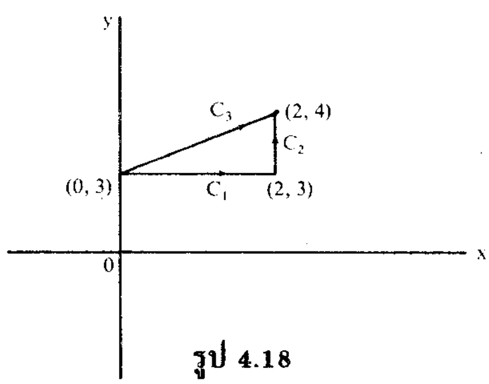
และ $dx = 2dt,\ dy = 2tdt$

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)} (2y+x^2)dx+(3x-y)dy = \int_0^1 \left[2(t^2+3)+(2t)^2\right]2dt+\left[3(2t)-(t^2+3)\right]2tdt$$

$$= \int_0^1 (24t^2+12-2t^3-6t)dt$$

$$= \frac{33}{2}$$

2.



รูป 4.18

ข้อ 2 ต้องการหาค่า $\int_{C_1+C_2}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$

ตาม C_1 $y = 3$ และ $0 \leqslant x \leqslant 2$ ดังนั้น $dy = 0$

ตาม C_2 $x = 2$ และ $3 \leqslant y \leqslant 4$ ดังนั้น $dx = 0$

$$\begin{aligned}\int_{C_1}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy &= \int_0^2(6+x^2)dx+(3x-3)0\\ &= \int_0^2(6+x^2)dx\\ &= \left|6x+\frac{x^3}{3}\right|_0^2\\ &= \frac{44}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{C_2}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy &= \int_3^4(2y+4)0+(6-y)dy\\ &= \int_3^4(6-y)dy\\ &= \left|6y-\frac{y^2}{2}\right|_3^4\\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dy+(3x-y)dy = \frac{44}{3}+\frac{5}{2} = \frac{103}{6}$$

3. ต้องการหา $\int_{C_3}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy$

สมการเส้นตรงจาก (0, 3) ถึง (2, 4) คือ $2y-x = 6$ หรือ $x = 2y-6$

$$\begin{aligned}\int_{(0,3)}^{(2,4)}(2y+x^2)dx+(3x-y)dy &= \int_3^4\left[2y+(2y-6)^2\right]2dy+\left[3(2y-6)-y\right]dy\\ &= \int_3^4(8y^2-39y+54)dy\\ &= \left|\frac{8y^3}{3}-\frac{39y^2}{2}+54y\right|_3^4\\ &= \frac{97}{6}\end{aligned}$$

การอินทิเกรตฟังก์ชันในรูปเชิงขั้วก็หาได้ในลักษณะเดียวกัน ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C |z|dz$ ตามวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมี r

วิธีทำ ให้ $C : z(t) = re^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$

ดังนั้น
$$\begin{aligned}\int_C |z|dz &= \int_0^{2\pi} |re^{it}|ire^{it}dt \\ &= ir^2\int_0^{2\pi} e^{it}dt \\ &= ir^2\int_0^{2\pi}(\cos t + i\sin t)dt = 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_C z^n dz$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม และ $C : |z| = r$

วิธีทำ
$$\begin{aligned}\int_{|z|=r} z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n ire^{it}dt \\ &= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}dt \\ &= ir^{n+1}\int_0^{2\pi} [\cos(n+1)t + i\sin(n+1)t]dt\end{aligned}$$

ดังนั้น
$$\int_{|z|=r} z^n dz = \begin{cases} 0 & \text{ถ้า } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{ถ้า } n = -1\end{cases}$$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = y - x - 3x^2 i$ และ C คือ

   1.1 เส้นตรงจาก $z = 0$ ถึง $z = 1+i$

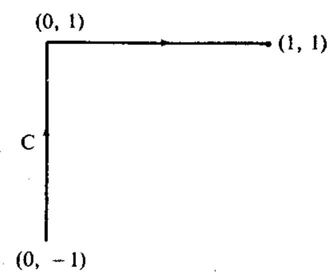
   1.2 เส้นตรงจาก $z = 0$ ถึง $z = i$ และจาก $z = i$ ถึง $z = 1+i$

2. จงหาค่าของ $\int_C z^2 dz$ เมื่อ C คือ

   2.1 เส้นตรงจาก $z = 0$ ถึง $z = 2+i$

   2.2 เส้นตรงจาก $z = 0$ ถึง $z = 2$ และจาก $z = 2$ ถึง $z = 2+i$

3. จงหาค่าของ $\int_C (\bar{z})^2 dz$ เมื่อ C เป็นเส้นตรง ดังรูป



รูป 4.19

4. จงหาค่าของอินทิกรัลของ e^z ตาม $y = 2x$ จาก $(-1, -2)$ ไปยัง $(1, 2)$

5. จงหาค่าของ $\int_C |z|^2 dz$ ตามรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีจุดยอด (0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)

6. จงหาค่าของ $\int_i^{2-i} (3xy + iy^2)dz$ ตามเส้นโค้งต่อไปนี้

   6.1 เส้นตรงจาก $z = i$ ไปยัง $z = 2-i$

   6.2 เส้นโค้ง $x = 2t-2,\ y = 1+t-t^2$

7. จงหาค่าของ $\int_C (z^2+3z)dz$ ตามวงกลม $|z| = 2$ จาก (2, 0) ไปยัง (0, 2) ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

8. กำหนดให้ $f(z) = \frac{z+2}{z}$ และ C ดังต่อไปนี้ จงหา $\int_C f(z)dz$

8.1 ครึ่งวงกลม $z = 2e^{it}$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$

8.2 ครึ่งวงกลม $z = 2e^{it}$ $(\pi \leqslant t \leqslant 2\pi)$

8.3 วงกลม $z = 2e^{it}$ $(-\pi \leqslant t \leqslant \pi)$

9. จงหาค่าของ

9.1 $\int_{(0,1)}^{(2,5)} (3x+y)dx+(2y-x)dx$ ตาม $C : y = x^2+1$

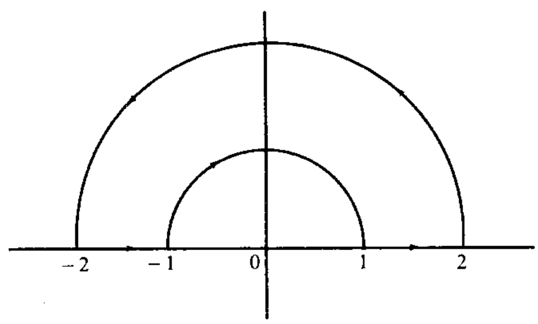
9.2 $\int_C (x+2y)dx+(y-2x)dy$ เมื่อ $C : x = 4\cos\theta, \quad y = 3\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ และ C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

10. จงแสดงว่า ถ้า C_0 เป็นวงกลม $z-z_0 = r_0e^{i\theta}$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และ f มีความต่อเนื่องบน C_0 จะได้

$$\int_{C_0} f(z)dz = ir_0\int_0^{2\pi} f(z_0+r_0e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta$$

และจงแสดงว่า $\int_{C_0} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$

11. จงหาค่าของ $\int_C \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)dz$ ตามคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ดังรูป 4.20



รูป 4.20

4.4 ทฤษฎีบทการอินทิเกรต

ในหัวข้อนี้จะได้กล่าวถึงทฤษฎีบทต่าง ๆ เกี่ยวกับการอินทิเกรต ถ้าฟังก์ชันที่ใช้หาค่าอินทิกรัลเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะมีทฤษฎีบทต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องมากมาย ผู้ที่ทำการศึกษาในเรื่องนี้คือ *โคชี* (Cauchy)

ทฤษฎีบทที่ 4.5 ให้ R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวใน R ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R จะได้ $\int_C f(z)dz = 0$

พิสูจน์ ให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R

ดังนั้น u, v และอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งมีความต่อเนื่องและสมการโคชี-รีมันน์จริง

$$\therefore \quad u_x = v_y \quad \text{และ} \quad v_x = -u_y$$

$$\int_C f(z)dz = \int_C (udx - vdy) + i\int_C (udy + vdx)$$

จากทฤษฎีของกรีน ถ้า $P(x, y), Q(x, y)$ มีอนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่งต่อเนื่อง

$$\int_C Pdx + Qdy = \iint_R (Q_x - P_y)dxdy$$

โดยทฤษฎีบทของกรีน จะได้

$$\int_C f(z)dz = \iint_R (-v_x - u_y)dxdy + \iint_R (u_x - v_y)dxdy$$

$$= 0$$

$$\therefore \int_C f(z)dz = 0$$

สำหรับทฤษฎีบทที่ 4.5 จะเห็นว่า C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว แต่ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดใด ๆ ก็ยังคงสรุปได้ว่า $\int_C f(z)dz = 0$ ผู้ที่ทำการศึกษาคือ *โคชี* (Cauchy) ดังนั้นจะได้ทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชีดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.6 ทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี (Cauchy Integral Theorem)

ให้ R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว C เป็นคอนทัวร์ปิดใด ๆ ใน R ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R จะได้ $\int_C f(z)dz = 0$

พิสูจน์ ในที่นี้จะละการพิสูจน์ไว้ แต่สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้จากหนังสืออ้างอิง Complex Variables and Applications

หมายเหตุ

1. ทฤษฎีบทที่ 4.6 หนังสือบางเล่มจะเรียกว่า **ทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี - เกอร์ซาท** (Cauchy-Goursat Integral Theorem)

2. เมื่อต้องการหาค่าอินทิกรัลตามคอนทัวร์ปิด C ของ f(z) เราจะใช้สัญลักษณ์ $\oint_C f(z)dz$ เช่น $\oint_{|z|=1} f(z)dz$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C z^2dz$, $\oint_C e^zdz$, $\oint_C \sin zdz$

วิธีทำ เพราะว่าฟังก์ชัน z^2, e^z และ $\sin z$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

ดังนั้น โดยทฤษฎีบทที่ 4.5

$$\oint_C z^2dz = \oint_C e^zdz = \oint_C \sin zdz = 0$$

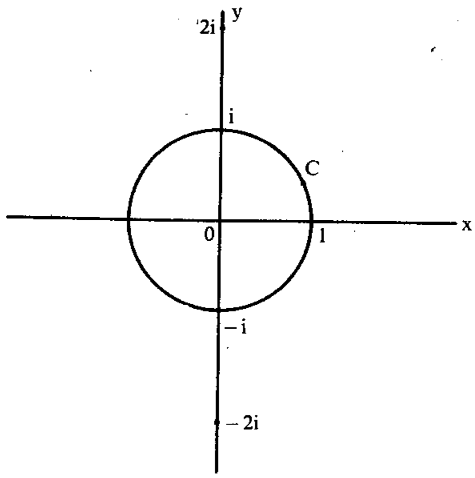
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z}{z^2+4}dz$ เมื่อ C: $|z| = 1$

วิธีทำ ให้ $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$

จะเห็นว่า ในที่นี้ f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = \pm 2i$

และ $\pm 2i$ อยู่นอกวงกลม C

ดังนั้น $\frac{z}{z^2+4}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ใน C



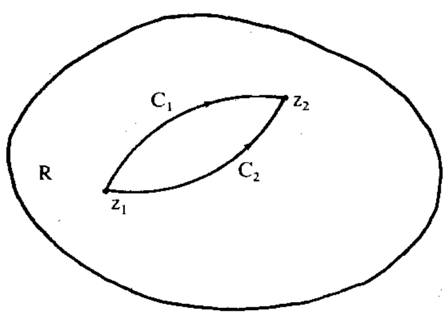
รูป 4.21

โดยทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี จะได้ $\oint_C \frac{z}{z^2+4}dz = 0$

ทฤษฎีบทที่ 4.7 (independence of contour of integration)

ถ้า R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว จุด z_1 และ z_2 อยู่ใน R f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R จะได้ $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ ตามคอนทัวร์ C จาก z_1 ไปยัง z_2 จะมีค่าเท่ากัน

พิสูจน์ ให้ C_1 และ C_2 เป็นคอนทัวร์ใน R ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่ z_1 และจุดสิ้นสุดที่ z_2 ดังรูป



รูป 4.22

จะได้ $C_1+(-C_2)$ เป็นคอนทัวร์ปิดซึ่งอยู่ใน R และ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R จากทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี

$$\int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = 0$$

แต่
$$\int_{C_1+(-C_2)} f(z)dz = \int_{C_1} f(z) + \int_{-C_2} f(z)dz$$
$$= \int_{C_1} f(z) - \int_{C_2} f(z)dz$$
$$\therefore \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$
$$\therefore \int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

จากตัวอย่างในหัวข้อ 4.3 คือ การหาค่า $\int_C (z^2+1)dz$ จะเห็นว่าเนื่องจาก $f(z) = z^2+1$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ดังนั้นค่าอินทิกรัลจะเท่ากันทุกค่า ไม่ว่าจะอินทิเกรตตามเส้นทางใดก็ตาม

ถ้าพิจารณาอินทิกรัลจาก z_0 ไปยัง z ใด ๆ และให้ค่าของอินทิกรัลคือ $F(z)$ ดังนั้น
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$

เราเรียก $F(z)$ ว่า **ปฏิกิริยานุพันธ์ของ** f และจะได้ $F'(z) = f(z)$ สำหรับ z ใน R ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 4.8 ถ้า R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว $z_0 \in R$ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R ให้ $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds$ จะได้ $F'(z) = f(z)$ สำหรับ $z \in R$

พิสูจน์ ในที่นี้ต้องการแสดงว่า อนุพันธ์ของ $F(z)$ คือ $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \dfrac{F(z+\Delta z)-F(z)}{\Delta z}$ หาค่าได้และมีค่าเท่ากับ $f(z)$

พิจารณา $z+\Delta z$ เป็นจุดอยู่ในย่านของจุด z ซึ่งอยู่ใน R
$$F(z+\Delta z)-F(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds - \int_{z_0}^{z} f(s)ds$$
$$= \int_{z}^{z_0} f(s)ds + \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(s)ds$$
$$= \int_{z}^{z+\Delta z} f(s)ds$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z) + f(z)]\,ds$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds + \int_z^{z+\Delta z} f(z)ds$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds + f(z)\int_z^{z+\Delta z} ds$$

$$= \int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds + f(z)\,[z+\Delta z - z]$$

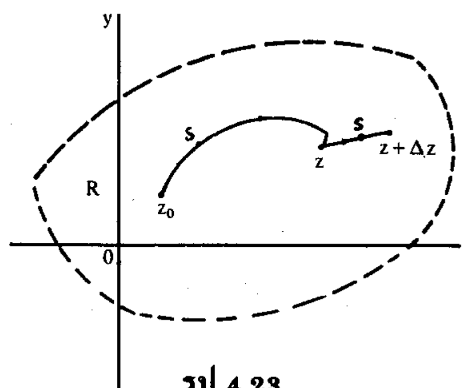
$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]\,ds + \frac{f(z)\,(\Delta z)}{\Delta z}$$

$$\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z}\int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]$$

ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวกใด ๆ

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องทุกค่า z เพราะฉะนั้นจะมี $\delta > 0$ ซึ่งเมื่อ $|s-z| < \delta$ จะได้ $|f(s) - f(z)| < \varepsilon$

เมื่อ $z+\Delta z$ ใกล้ z มากพอ นั่นคือ $|\Delta z| < \delta$



รูป 4.23

$$\left|\frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{\Delta z}\right| \left|\int_z^{z+\Delta z} [f(s) - f(z)]dz\right|$$

$$< \frac{1}{|\Delta z|}\,\varepsilon\,|\Delta z| = \varepsilon$$

ดังนั้น $$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z)$$

นั่นคือ $$F'(z) = f(z)$$

ถ้าพิจารณา **อินทิกรัลไม่จำกัดเขตของฟังก์ชันวิเคราะห์** โดยให้

$$F(z) = \int f(z)dz$$

เราจะได้ในทำนองเดียวกันว่า $F'(z) = f(z)$ และเรียก F ว่า **ปฏิยานุพันธ์ของ** f

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int e^{-z}dz$

วิธีทำ เพราะว่า $-e^{-z} + c$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ e^{-z}

ดังนั้น $$\int e^{-z}dz = -e^{-z} + c$$

ตัวอย่าง จงพิสูจน์ว่า $\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz$

พิสูจน์ จากอนุพันธ์ $d\{F(z)G(z)\} = F(z)G'(z)dz + F'(z)G(z)dz$

อินทิเกรตทั้งสองข้างจะได้

$$F(z)G(z) = \int d\{F(z)G(z)\} = \int F(z)G'(z)dz + \int F'(z)G(z)dz$$

$$\int F(z)G'(z)dz = F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz$$

ซึ่งเป็นการอินทิเกรตทีละส่วน (integration by parts) นั่นเอง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int z\cos 2z\,dz$

วิธีทำ ให้ $F(z) = z$, $G'(z) = \cos 2z$

$F'(z) = 1$, $G(z) = \dfrac{\sin 2z}{2}$

โดยการอินทิเกรตทีละส่วนจากตัวอย่าง

$$\begin{aligned}
\int z\cos 2z dz &= \int F(z)G'(z)dz \\
&= F(z)G(z) - \int F'(z)G(z)dz \\
&= \frac{z\sin 2z}{2} - \int \frac{\sin 2z}{2}dz \\
&= \frac{z}{2}\sin 2z + \frac{\cos 2z}{4} + c
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.9 ทฤษฎีบทหลักมูลของการอินทิเกรต (Fundamental theorem of integration)

ให้ R เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว $z_1, z_2 \in R$ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน R ถ้า $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z)$ จะได้

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z_2) - F(z_1)$$

พิสูจน์ ถ้า $G(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งไม่ใช่ $F(z)$ และ $G'(z) = f(z)$ ให้ $H(z) = F(z) - G(z)$ เราสามารถแสดงได้ว่า $H'(z) = 0$

ดังนั้น ถ้า $H(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ จะได้

$$u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 0$$

$$\therefore \quad u_x(x, y) = v_x(x, y) = 0 \quad \text{บน } R$$

เพราะว่าสมการโคชี-รีมันน์คือ $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$ ดังนั้นจะได้

$$v_y(x, y) - iu_y(x, y) = 0$$

นั่นคือ $u_y(x, y) = v_y(x, y) = 0$

ดังนั้น $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ เป็นค่าคงตัวค่าจริง

$\therefore$ $H(z)$ เป็นค่าคงที่

และ $F(z) - G(z)$ = ค่าคงตัวเชิงซ้อน

หรือ $F(z) = G(z) + k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน

จากทฤษฎีบทที่ 4.8 จะได้

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(s)ds + k$$

สำหรับ z ใด ๆ ใน R

พิจารณา

$$\begin{aligned}\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz &= \int_{z_1}^{z_0} f(z)dz + \int_{z_0}^{z_2} f(z)dz \\ &= \int_{z_0}^{z_2} f(z)dz - \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz \\ &= F(z_2) - F(z_1)\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{2+i} z^2dz$, $\int_{i\pi/2}^{i\pi} e^{3z}dz$

วิธีทำ เพราะว่า z^2 และ e^{3z} เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ ดังนั้นเราหาค่าได้โดยใช้ทฤษฎีบทที่ 4.9

พิจารณา $\int_0^{2+i} z^2dz$ ในที่นี้ $f(z) = z^2$

และ $F(z) = \frac{z^3}{3}$

$$\int_0^{2+i} z^2dz = \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^{2+i} = \frac{(2+i)^3}{3}$$

และ $\int_{in/2}^{in} e^{3z}dz$ ในที่นี้ $f(z) = e^{3z}$

$$F(z) = \frac{e^{3z}}{3}$$

$$\int_{in/2}^{in} e^{3z}dz = \left|\frac{e^{3z}}{3}\right|_{i\pi/2}^{i\pi}$$

$$= \frac{1}{3}\left[e^{3\pi i} - e^{3\pi i/2}\right]$$

$$= \frac{1}{3}(-1+i)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-1}^{1}(2z^2-z)dz$

วิธีทำ เพราะว่า $2z^2-z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณที่มีจุด $z = -1$ และ $z = 1$

ปฏิยานุพันธ์ของ $2z^2-z$ คือ $\frac{2z^3}{3} - \frac{z^2}{2}$

ดังนั้น
$$\int_{-1}^{1}(2z^2-z)dz = \left[\frac{2z^3}{3} - \frac{z^2}{2}\right]_{-1}^{1}$$

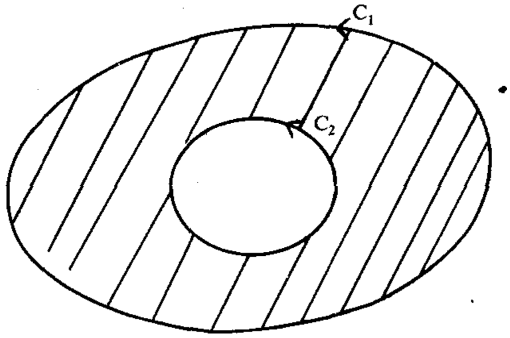
$$= \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.10 ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน (Annulus Theorem)

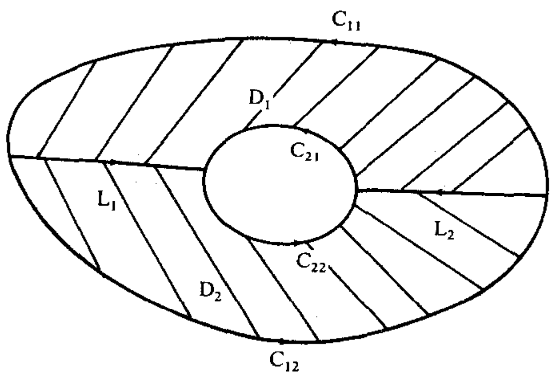
ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนปิด ซึ่งมีคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C_1 และ C_2 เป็นขอบ ถ้า C_1 และ C_2 มีทิศทางเดียวกันดังรูป จะได้

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$



รูป 4.24

พิสูจน์ ในที่นี้จะใช้ทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชีพิสูจน์ ดังนั้นจะลากคอนทัวร์ L_1 และ L_2 เชื่อมระหว่าง C_1 และ C_2 โดยให้ L_1 มีทิศจาก C_1 ไปยัง C_2 และ L_2 มีทิศจาก C_2 ไปยัง C_1 ดังรูป ดังนั้น L_1 และ L_2 จะแบ่งบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิงเป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D_1 และ D_2 และ C_1 แบ่งเป็น C_{11} และ C_{12} C_2 แบ่งเป็น C_{21} และ C_{22}



รูป 4.25

พิจารณาคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว $C_{11}+L_1-C_{21}-L_2$ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D_1 โดยทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี จะได้

$$\int_{C_{11}+L_1-C_{21}-L_2} f(z)dz = 0 \qquad ....(4.4.1)$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D_2 จะได้คอนทัวร์ปิดเชิงเดียว $L_2-C_{22}-L_1+C_{12}$ และจะได้

$$\int_{L_2 - C_{22} - L_1 + C_{12}} f(z)dz = 0 \qquad \text{..........(4.4.2)}$$

$$(4.4.1) + (4.4.2) \qquad \int_{C_{11} + L_1 - C_{21} - L_2} f(z)dz + \int_{L_2 - C_{22} - L_1 + C_{12}} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_{11} - C_{21}} f(z)dz + \int_{L_1} f(z)dz - \int_{L_2} f(z)dz + \int_{C_{12} \quad C_{22}} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz - \int_{L_1} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_{11} - C_{21}} f(z)dz + \int_{C_{12} - C_{22}} f(z)dz = 0$$

$$\int_{C_{11} + C_{12}} f(z)dz - \int_{C_{21} + C_{22}} f(z)dz = 0$$

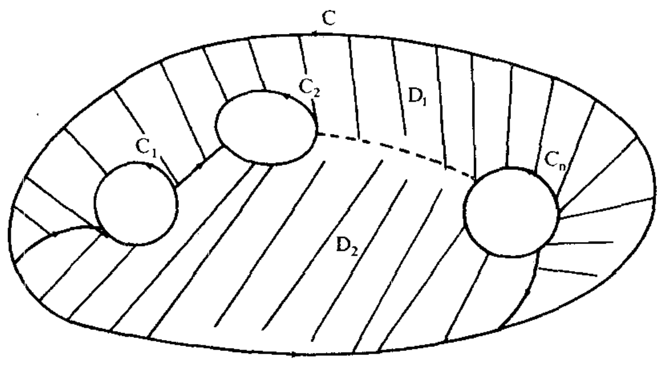
$$\oint_{C_1} f(z)dz - \oint_{C_2} f(z)dz = 0$$

นั่นคือ $$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

ทฤษฎีบทที่ 4.11 ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนหลายเชิง

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนปิดหลายเชิง ซึ่งมีคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ เป็นขอบ โดยที่ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ อยู่ภายใน C และมีทิศทางเดียวกันดังรูป จะได้ว่า

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \quad + \oint_{C_n} f(z)dz$$



รูป 4.26

พิสูจน์ สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ พิสูจน์ในทำนองเดียวกับทฤษฎีบทบนแผ่นวงแหวน โดยลากคอนทัวร์เชื่อมระหว่างวงแหวนเพื่อให้เกิดบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว แล้วใช้ทฤษฎีบทอินทิกรัล-โคชี

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวที่

1. $z = a$ อยู่ภายนอก C
2. $z = a$ อยู่ภายใน C

วิธีทำ

1. เมื่อ $z = a$ อยู่ภายนอก C

ดังนั้น $f(z) = \frac{1}{z-a}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ใน C

โดยทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชีจะได้

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = 0$$

2. เมื่อ $z = a$ อยู่ภายใน C

ให้ C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $z = a$ และมีรัศมี r

ดังนั้น วงกลม C_1 อยู่ภายใน C

โดยทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน จะได้

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z-a}$$

พิจารณาวงกลม C_1 : $|z-a| = r$

จะได้ $z-a = re^{i\theta}$ เมื่อ $0 \leqslant \theta < 2\pi$

$$z = a+re^{i\theta}$$

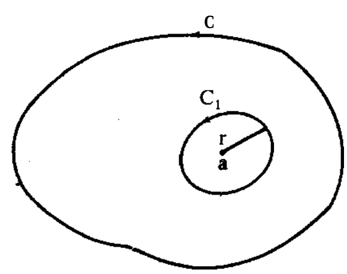
$$dz = ire^{i\theta}d\theta$$

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{re^{i\theta}} d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= 2\pi i$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$



รูป 4.27

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ซึ่งมี $z = a$ อยู่ภายใน C

วิธีทำ ในทำนองเดียวกับตัวอย่างที่แล้ว ให้ C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $z = a$ และรัศมี r และ C_1 อยู่ภายใน C

$$C_1 : |z-a| = r$$

$$\therefore \quad z = a + re^{i\theta} \quad , \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi$$

และ $$dz = ire^{i\theta}d\theta$$

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{C_1} \frac{dz}{(z-a)^n}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{i\theta}}{r^n e^{in\theta}} d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \int_0^{2n} e^{i(1-n)\theta} d\theta$$

$$= \frac{i}{r^{n-1}} \left. \frac{e^{i(1-n)\theta}}{i(1-n)} \right|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{1}{(1-n)r^{n-1}} \left[e^{2(1-n)\pi i} - 1 \right]$$

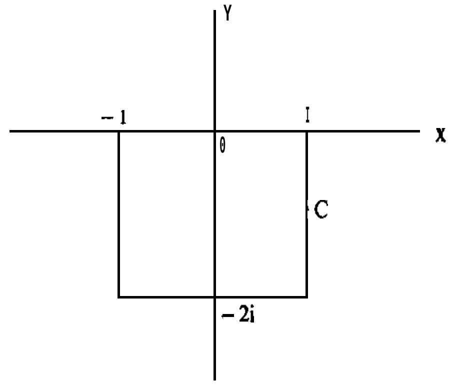
$$= 0 \quad \text{เมื่อ } n \neq 1$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{(z-i)^3}$ เมื่อ $C : |z-i| = 1$

วิธีทำ จากตัวอย่างที่ 2 จะเห็นว่า ในที่นี้ $a = -i$ และ $n = 3$ ดังนั้นจะได้

$$\oint_C \frac{dz}{(z-i)^3} = 0$$

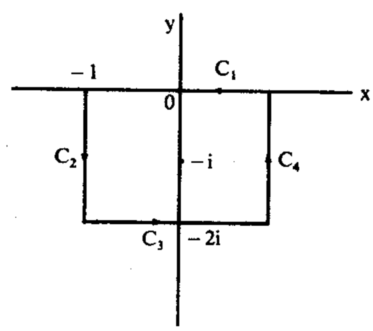
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{z+i}$ เมื่อ C เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูป



รูป 4.28

วิธีทำ ในการหาค่า $\oint_C \frac{dz}{z+i}$ ในที่นี้ $f(z) = \frac{1}{z+i}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ยกเว้นที่ $z = -i$ และ $z = -i$ อยู่ภายใน C ดังนั้นจะใช้ทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชีไม่ได้ แต่สามารถหาค่าได้ 2 วิธีคือ วิธีอินทิเกรตตาม C และทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน

วิธีที่ 1 การอินทิเกรตตาม C



รูป 4.29

ให้ $C = C_1+C_2+C_3+C_4$ ดังรูป

$$\oint_C \frac{dz}{z+i} = \int_{C_1} \frac{dz}{z+i} + \int_{C_2} \frac{dz}{z+i} + \int_{C_3} \frac{dz}{z+i} + \int_{C_4} \frac{dz}{z+i}$$

บน C_1 ให้ $x = t$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$ และ $y = 0$

$$z = x+iy = t$$

$$\int_{C_1} \frac{dz}{z+i} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t+i} = [\operatorname{Log}(t+i)]_{-1}^{1} = \operatorname{Log}(1+i) - \operatorname{Log}(-1+i)$$

บน C_2 ให้ $z = x+iy$ ในที่นี้ $x = -1,\ -2 \leqslant y \leqslant 0$ ให้ $y = t$

$\therefore\ z = -1+it,\quad -2 \leqslant t \leqslant 0$ และ $dz = idt$

$$\int_{C_2} \frac{dz}{z+i} = \int_{-2}^{0} \frac{idt}{-1+(t+1)i}$$

$$= \left[\mathrm{Log}[-1+(t+1)i]\right]_{-2}^{0}$$

$$= \mathrm{Log}(-1+i)-\mathrm{Log}(-1-i)$$

บน C_3 ในที่นี้ $y = -2,\ -1 \leqslant x \leqslant 1$ ให้ $x = t$

$z = t+(-2)i = t-2i$ และ $dz = dt$

$$\int_{C_3} \frac{dz}{z+i} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-i}$$

$$= \mathrm{Log}(t-i)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \mathrm{Log}(1-i)-\mathrm{Log}(-1-i)$$

บน C_4 ในที่นี้ $x = 1,\ -2 \leqslant y \leqslant 0$ ให้ $y = t$

$z = 1+it,\quad -2 \leqslant t \leqslant 0$ และ $dz = idt$

$$\int_{C_4} \frac{dz}{z+i} = \int_{-2}^{0} \frac{idt}{1+(t+1)i}$$

$$= \mathrm{Log}[1+(t+1)i]_{-2}^{0}$$

$$= \mathrm{Log}(1+i)-\mathrm{Log}(1-i)$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z+i} = \mathrm{Log}(1+i)-\mathrm{Log}(-1+i)+\mathrm{Log}(-1+i)-\mathrm{Log}(-1-i)$$
$$+\mathrm{Log}(1-i)-\mathrm{Log}(-1-i)+\mathrm{Log}(1+i)-\mathrm{Log}(1-i)$$

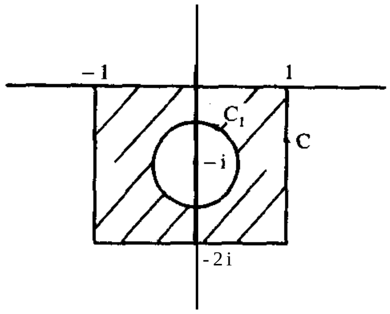
$$= 2\,\mathrm{Log}(1+i)-2\,\mathrm{Log}(-1-i)$$

$$= 2\left[\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}i\right]-2\left[\ln\sqrt{2}+-\frac{3\pi}{4}i\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}i+\frac{3\pi}{2}i = 2\pi i$$

วิธีที่ 2 ใช้ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน จะเห็นว่าวิธีที่ 1 ค่อนข้างยาวและยุ่งยากมากกว่า แต่ถ้าใช้วิธีที่ 2 จะสั้นกว่ามาก

สร้างคอนทัวร์ $C_1 : |z+i| = \frac{1}{2}$ นั่นคือ สร้างวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $-i$ รัศมี $\frac{1}{2}$ ดังรูป ให้ C_1 และ C มีทิศทางเดียวกัน



รูป 4.30

ดังนั้น $f(z) = \frac{1}{z+i}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนระหว่าง C และ C_1 โดยทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน จะได้

$$\oint_C \frac{dz}{z+i} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z+i}$$

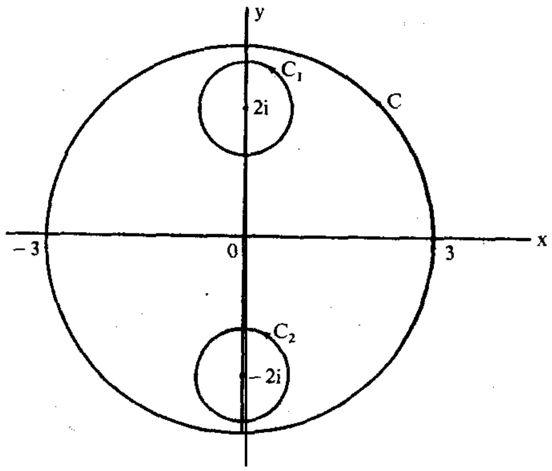
จากตัวอย่าง 1 จะได้

$$\oint_{C_1} \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$$

$$\therefore \oint_C \frac{dz}{z+i} = 2\pi i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz$ เมื่อ $C: |z| = 3$ มีทิศทางบวก

วิธีทำ



รูป 4.31

ในที่นี้จะใช้ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน จะเห็นว่า $f(z) = \frac{z}{z^2+4}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 2i$ และ $z = -2i$ และจุดทั้งสองนี้อยู่ภายใน C ดังนั้นจึงสร้างคอนทัวร์ C_1 และ C_2 ให้มีทิศทางเดียวกับ C โดยให้

$$C_1 : |z-2i| = \frac{1}{2} \quad \text{และ} \quad C_2 : |z+2i| = \frac{1}{2}$$

เพราะฉะนั้น $\frac{z}{z^2+4}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวนหลายเชิง

โดยทฤษฎีบทจะได้

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2+4} = \oint_{C_1} \frac{zdz}{z^2+4} + \oint_{C_2} \frac{zdz}{z^2+4}$$

พิจารณา $\frac{z}{z^2+4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-2i} + \frac{1}{z+2i}\right)$

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2+4} = \frac{1}{2}\left[\oint_{C_1} \frac{dz}{z-2i} + \oint_{C_1} \frac{dz}{z+2i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z-2i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z+2i}\right]$$

จะเห็นว่า $\oint_{C_1} \frac{dz}{z+2i} = 0$

และ $\oint_{C_2} \frac{dz}{z-2i} = 0$ โดยทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี

ดังนั้น $\oint_C \frac{zdz}{z^2+4} = \frac{1}{2}\left[\oint_C \frac{dz}{z-2i} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z+2i}\right]$

จากตัวอย่างที่ 1 จะได้

$$\oint_C \frac{zdz}{z^2+4} = \frac{1}{2}[2\pi i + 2\pi i] = 2\pi i$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาค่าของ $\oint_{|z|=2} z^2 dz$, $\oint_{|z|=1} e^{z^2} dz$, $\oint_{|z|=1} \cos z dz$

2. จงหาค่าของ $\int_C \frac{z}{(z-2)(z^2+9)}$ เมื่อ C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี 1

3. จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{z-3}$ เมื่อ C คือ

   3.1 วงกลม $|z| = 1$

   3.2 วงกลม $|z+i| = 4$

4. จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

   4.1 $\int e^{-2z} dz$

   4.2 $\int z \sin z^2 dz$

   4.3 $\int \frac{z^2+1}{z^3+3z+2} dz$

5. จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

   5.1 $\int_{\pi i}^{2\pi i} e^{3z} dz$

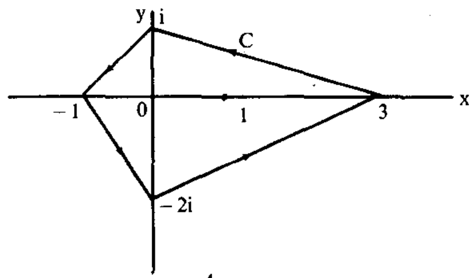
   5.2 $\int_0^{\pi+2i} \cos \frac{z}{2} dz$

   5.3 $\int_0^{\pi+i} z \cos 2z dz$

6. จงแสดงว่า $\int_0^{\pi/2} \sin^2 z dz = \int_0^{\pi/2} \cos^2 z dz = \frac{\pi}{4}$

7. จงหาค่าของอินทิกรัลของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน

   7.1 $\frac{1}{z-1}$ เมื่อ C เป็นรูปสี่เหลี่ยม ดังรูป



รูป 4.32

7.2 $\dfrac{1}{z^2+4}$ ตาม C เมื่อ $C : |z-i| = 2$

7.3 $\dfrac{2i}{z^2+1}$ ตาม C เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 3$

7.4 $\dfrac{z}{z^2+9}$ ตาม C เมื่อ C เป็นวงกลม $|z| = 5$

8. จงแสดงว่า $\int_C e^{-2z}dz$ ไม่ขึ้นอยู่กับคอนทัวร์ C ซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $1-\pi i$ และ $2+3\pi i$ และจงหาค่าอินทิกรัลด้วย

9. กำหนดให้ $G(z) = \int_{\pi-\pi i}^{z} \cos 3\zeta d\zeta$

9.1 จงพิสูจน์ว่า G(z) ไม่ขึ้นอยู่กับคอนทัวร์ C ซึ่งเชื่อมระหว่าง $\pi-\pi i$ และ z ใด ๆ

9.2 จงหาค่า $G(\pi i)$

9.3 จงพิสูจน์ว่า $G'(z) = \cos 3z$

10. โดยการหาค่า $\oint_C e^z dz$ รอบวงกลม $|z| = 1$ จงแสดงว่า

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(\theta+\sin\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(\theta+\sin\theta)d\theta = 0$$

4.5 สูตรอินทิกรัลโคชี (The Cauchy Integral Formula)

การหาค่าอินทิกรัลโดยใช้สูตรจะช่วยให้ง่ายขึ้น การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้โดยอาศัยทฤษฎีบทและนิยามโดยตรง

ทฤษฎีบทที่ 4.12 สูตรอินทิกรัลโคชี (Cauchy integral formula)

ให้ D เป็นบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D ถ้า C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวและมีทิศทางบวก z_0 เป็นจุดภายในของ C จะได้

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)}\,dz$$

หมายเหตุ การนำเอาสูตรอินทิกรัลโคชีไปใช้ จะใช้หาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันซึ่ง $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z บน C ถ้าให้ $g(z) = \frac{f(z)}{z-z_0}$ โดยสูตรอินทิกรัลโคชีจะได้

$$\oint_C g(z)dz = \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i\, f(z_0)$$

พิสูจน์ ให้ ε เป็นจำนวนบวก

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องที่ z_0 ดังนั้น มี $r_0 > 0$ ซึ่งสำหรับทุกค่า z

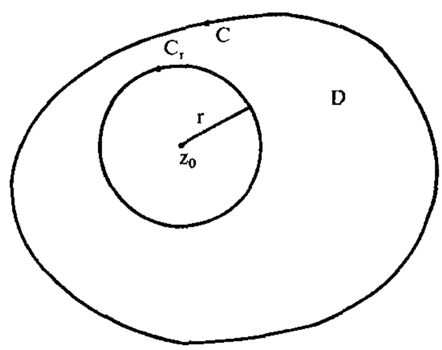
ถ้า $|z-z_0| < r_0$ จะได้ $|f(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$

เลือก $r > 0$ ซึ่ง $r < r_0$

ให้ C_r เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี r

เพราะฉะนั้นทุกค่า z บน C_r จะได้ $|z-z_0| = r < r_0$

ดังนั้น $|f(z)-f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ทุก $z \in C_r$



รูป 4.33

$\frac{f(z)}{z-z_0}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนแผ่นวงแหวน และจะได้

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_{C_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

สำหรับ z บน C_r ให้ $z = z_0 + re^{i\theta},\ 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{i\theta})rie^{i\theta}d\theta}{re^{i\theta}}$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z_0+re^{i\theta})d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z)d\theta$$

พิจารณา , $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0) = i\int_0^{2\pi} f(z)dz - 2\pi i f(z_0)$

$$= i\int_0^{2\pi} f(z)d\theta - i\int_0^{2\pi} f(z_0)d\theta$$

$$= i\int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\theta$$

$$\left|\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - 2\pi i f(z_0)\right| = |i|\left|\int_0^{2\pi} (f(z) - f(z_0))d\theta\right|$$

$$\leqslant \int_0^{2\pi} |f(z)-f(z_0)|d\theta$$

$$< \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2\pi}\,d\theta = \varepsilon$$

เพราะฉะนั้น $\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,d\theta - 2\pi i f(z_0) = 0$

นั่นคือ $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$

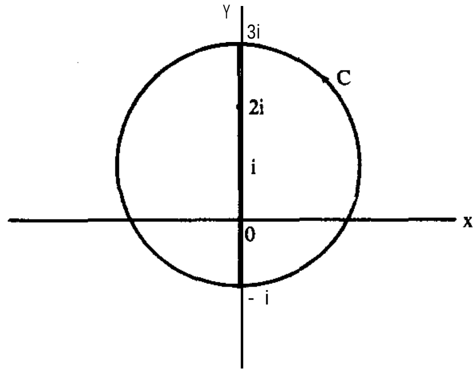
ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของ $\int_C \frac{z\,dz}{z^2+4}$ เมื่อ

1. C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ i รัศมี 2 หน่วย
2. C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี 3 หน่วย

วิธีทำ

1. ให้ $g(z) = \frac{z}{z^2+4}$

เมื่อ C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ i รัศมี 2 หน่วย ดังรูป



รูป 4.34

พิจารณา $\frac{z}{z^2+4} = \frac{z}{(z-2i)(z+2i)}$

จะเห็นว่า ที่ $z = 2i$ เป็นจุดที่ทำให้ $g(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ 2i อยู่ใน C

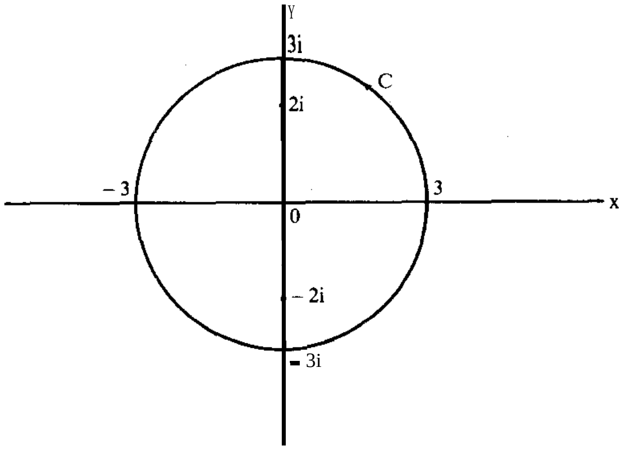
$$g(z) = \frac{\frac{z}{z+2i}}{z-2i} = \frac{f(z)}{z-2i}$$

จะได้ $f(z) = \frac{z}{z+2i}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ใน C

โดยสูตรอินทิกรัลโคชี จะได้

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{f(z)}{z+2i}\,dz &= \oint_C \frac{z}{z^2+4}\,dz \\ &= 2\pi i f(2i) \\ &= 2\pi i \frac{2i}{2i+2i} \\ &= \pi i\end{aligned}$$

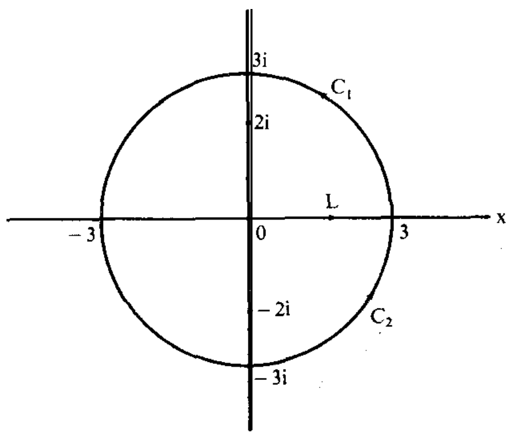
2. C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี 3 หน่วย ดังรูป



รูป 4.35

มี $z = \pm 2i$ อยู่ภายใน C

ในที่นี้จะใช้สูตรอินทิกรัลโคชี ให้ L เป็นคอนทัวร์จาก -3 ถึง 3 ดังนั้น L จะแบ่ง C ออกเป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว 2 รูป ให้ C แบ่งเป็น C_1 และ C_2 ดังรูป



รูป 4.36

$$\oint_C \frac{z}{z^2+4}dz = \int_{C_1} \frac{z}{z^2+4}dz + \int_{C_2} \frac{z}{z^2+4}dz$$

$$= \int_{C_1} \frac{z}{z^2+4}dz + \int_{L} \frac{z}{z^2+4}dz + \int_{-L} \frac{z}{z^2+4}dz + \int_{C_2} \frac{z}{z^2+4}dz$$

$$= \oint_{C_1+L} \frac{z}{z^2+4}dz + \oint_{-L+C_2} \frac{z}{z^2+4}dz$$

โดยสูตรอินทิกรัลโคชี

พิจารณา $\oint_{C_1+L} \frac{z}{z^2+4} dz = \oint_{C_1+L} \frac{\frac{z}{z+2i}}{z-2i} dz$

$= \pi i$

$= 2\pi i \ f(-2i)$

$= 2\pi i\left(\frac{-2i}{-2i-2i}\right)$

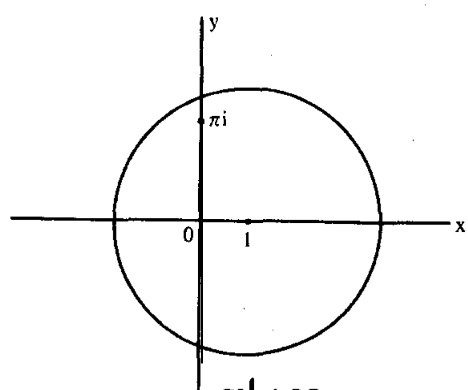
$= \pi i$

$$\oint_C \frac{z}{z^2+4} dz = \pi i + \pi i = 2\pi i$$

หมายเหตุ ตัวอย่างที่ 1 ข้อ 2 จะได้คำตอบเดียวกับตัวอย่าง โดยใช้ทฤษฎีบทแผ่นวงแหวน

ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz$ เมื่อ C เป็นวงกลม $|z-1| = 4$

วิธีทำ



รูป 4.37

โดยสูตรอินทิกรัลโคชี

ในที่นี้ $\frac{f(z)}{z-z_0} = \frac{e^{3z}}{z-\pi i}$

$$\oint_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = 2\pi i \ f(\pi i)$$

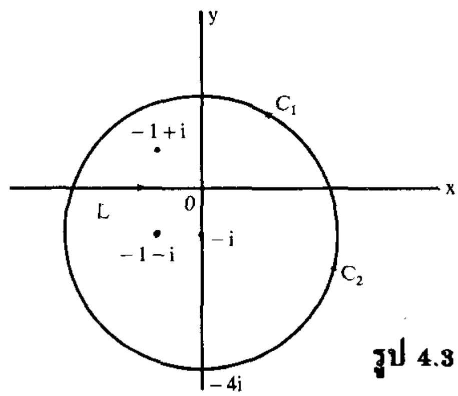
$= 2\pi i \ e^{3\pi i}$

$= 2\pi i(\cos 3\pi + i \sin 3\pi)$

$= -2\pi i$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz$ เมื่อ C : $|z+i| = 3$

วิธีทำ รากของสมการ $z^2+2z+2 = 0$ คือ $z = -1\pm i$ นั่นคือ $z = -1+i$ และ $z = -1-i$ ซึ่งทั้ง 2 จุดอยู่ในวงกลม $|z+i| = 3$



รูป 4.38

แบ่งคอนทัวร์ C ออกเป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว 2 รูป คือ C_1+L และ $-L+C_2$ ดังรูป

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz = \oint_{C_1+L} \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz + \oint_{-L+C_2} \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz$$

ให้

$$f_1(z) = \frac{z^2+1}{z-(-1-i)}$$

$$f_2(z) = \frac{z^2+1}{z-(-1+i)}$$

$$\oint_{C_1+L} \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz = \oint_{C_1+L} \frac{f_1(z)}{z-(-1+i)}\,dz$$

$$= 2\pi i\, f_1(-1\, i\text{-}i)$$

$$= 2\pi i\, \frac{(-1+i)^2+1}{-1+i+1+i}$$

$$= -2\pi i+\pi$$

$$\oint_{-L+C_2} \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\,dz = \oint_{-L+C_2} \frac{f_2(z)}{z-(-1-i)}\,dz$$

$$= 2\pi i\ f_2(-1-i)$$

$$= 2\pi i\ \frac{(-1-i)^2+1}{-1-i-(-1-i)}$$

$$= \quad -2\pi i - \pi$$

$$\oint_C \frac{z^2+1}{z^2+2z+2}\, dz \quad = \quad -2\pi i + \pi - 2\pi i - \pi \quad = \quad -4\pi i$$

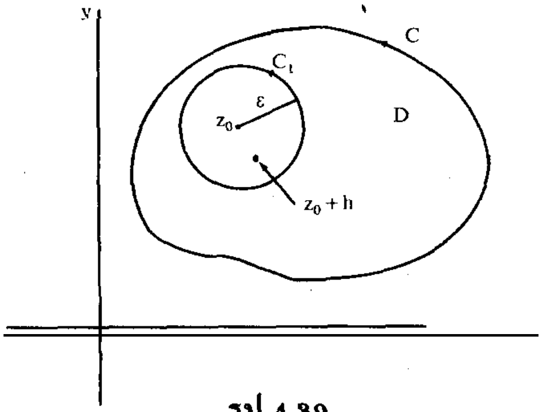
ตัวอย่างที่ 4 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C และภายใน C ซึ่งอยู่ภายในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D z_0 อยู่ภายใน C จงแสดงว่า

$$f'(z_0) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\, dz$$

วิธีทำ ให้ z_0 และ z_0+h อยู่ภายใน D จากสูตรอินทิกรัลโคชีจะได้

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{1}{h}\left\{\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right\} f(z)dz$$

$$= \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)\,(z-z_0)}$$



รูป 4.39

$$= \quad \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2} + \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)\,(z-z_0)^2}$$

ในที่นี้ต้องการแสดงว่า เมื่อ h เข้าใกล้ศูนย์ เทอมที่ 2 ทางขวามือเข้าใกล้ 0

ให้ $\varepsilon > 0$

ให้ C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี ε อยู่ภายใน D ดังรูป

$$\therefore \quad \frac{h}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)\,(z-z_0)^2} \quad = \quad \frac{h}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)\,(z-z_0)^2}$$

เลือก h ซึ่ง $|h| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$|z-z_0-h| \geqslant |z-z_0|-|h| > \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2}$$

และเพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D เพราะฉะนั้น $\exists M \ni |f(z)| < M$ และความยาวของ C_1 คือ $2\pi\varepsilon$ ดังนั้นจะได้

$$\left| \frac{h}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2} \right| \leqslant \frac{|h|}{2\pi} \frac{M(2\pi\varepsilon)}{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)(\varepsilon^2)}$$

$$= \frac{2|h|M}{\varepsilon^2}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{h}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{(z-z_0-h)(z-z_0)^2} = 0$$

$$\therefore \lim_{h-0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f'(z_0) = \frac{1}{2ni} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} dz$$

ทฤษฎีบทที่ 4.13 สูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป

ถ้า f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D และ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวซึ่งมีทิศทางบวก z_0 เป็นจุดภายในของ C จะได้

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, .$$

พิสูจน์ ในที่นี้จะใช้วิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เมื่อ n = 0 จะได้สูตรอินทิกรัลโคชี

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

เมื่อ n = 1 จะได้ดังตัวอย่างที่ 3

ถ้าสูตรนี้เป็นจริงเมื่อ n – 1 นั่นคือ

$$f^{(n-1)}(z_0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz \qquad \text{.......(4.4.3)}$$

จะแสดงในกรณีที่ n จริง จาก (4.4.3) จะได้

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h} = \frac{(n-1)!}{h2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{1}{(z-z_0-h)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n} \right\} f(z)dz$$

$$= \frac{(n-1)!}{h2\pi i}\oint_C f(z)\left\{\frac{(z-z_0)^n-(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)^n}\right\}dz$$

จาก $\quad a^n-b^n = (a-b)\ (a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+b^{n-1})$

$$\therefore\ (z-z_0)^n-(z-z_0-h)^n = [z-z_0-z+z_0+h]\ [(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\ldots+(z-z_0-h)^{n-1}]$$

$$= h[(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\ldots+(z-z_0-h)^{n-1}]$$

$$\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h}$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)\,[(z-z_0)^{n-1}+(z-z_0)^{n-2}(z-z_0-h)+\ldots+(z-z_0-h)^{n-1}]}{(z-z_0-h)^n(z-z_0)}dz$$

$$= \frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_C f(z)\,\frac{(z-z_0)^n+(z-z_0)^{n-1}(z-z_0-h)+\ldots+(z-z_0-h)^{n-1}(z-z_0)-n(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n\ (z-z_0)^{n+1}}dz$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน D

$$\therefore\quad \exists M \ni |f(z)| < M$$

และเราสามารถสร้างวงกลม C_1 จุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี $\varepsilon > 0$ ภายใน D ซึ่งความยาวของ C_1 คือ $2\pi\varepsilon$ และจะได้ $|z-z_0| = \varepsilon$

$$\frac{(n-1)!}{2\pi i}\left|\oint_{C_1} f(z)\,\frac{(z-z_0)^n+(z-z_0)^{n-1}(z-z_0-h)+\ldots+(z-z_0-h)^{n-1}(z-z_0)-n(z-z_0-h)^n}{(z-z_0-h)^n\ (z-z_0)^{n+1}}dz\right|$$

$$< \frac{(n-1)!}{2\pi}M2\pi\varepsilon\,\frac{(\varepsilon^n+\varepsilon^{n-1}(\varepsilon-h)+\ldots+\varepsilon(\varepsilon-h)^{n-1}-n(\varepsilon-h)^n)}{(\varepsilon-h)^n\varepsilon^{n+1}}$$ มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ $h\to 0$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{f^{(n-1)}(z_0+h)-f^{(n-1)}(z_0)}{h} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}$$

หรือ $\quad f^{n}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}dz$ เมื่อ c เป็นวงกลม $|z| = 3$

วิธีทำ จากสูตรทั่วไป $\quad f^{(n)}(z_0) = \dfrac{n!}{2\pi i}\oint_C \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$

ในที่นี้ $\quad f(z) = e^{2z}$ และ $z_0 = -1,\ n = 3$

$f'(z) = 2e^{2z}, \quad f'(z) = 8e^{2z}$

$f'''(z_0) = f'''(-1) = 8e^{-2}$

$$\therefore \quad \oint_C \frac{e^{2z}}{(z+1)^4}\,dz \;=\; 8e^{-2}\left(\frac{2\pi i}{3!}\right)$$

$$= \frac{8}{3}e^{-2}\pi i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^7}\,dz$ เมื่อ c เป็นวงกลม $|z| = 4$

วิธีทำ โดยสูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป ในที่นี้ $f(z) = \sin z, \quad z_0 = \pi, \; n = 7$

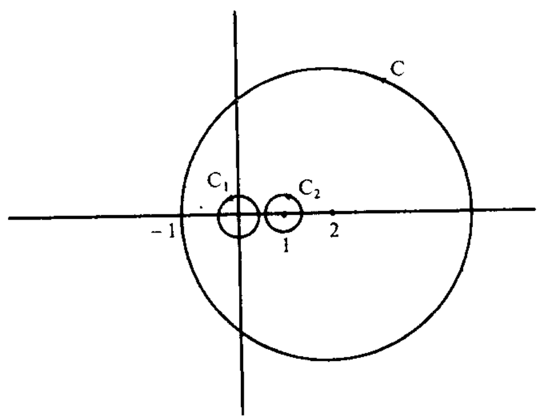
$$\oint_C \frac{\sin z}{(z-\pi)^7}\,dz = \frac{2\pi i}{6!}\sin^{(VI)}(\pi)$$

$$= \frac{2\pi i}{6!}(-\cos\pi)$$

$$= \frac{2\pi i}{6!}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\oint_C \frac{dz}{z^2(z-1)^3}$ เมื่อ c เป็นวงกลม $|z-2| = 3$

วิธีทำ เมื่อ $C : |z-2| = 2$ และ $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^3}$ ทั้งจุด $z = 0$ และ $z = 1$ อยู่ในวงกลม c ดังรูป



รูป 4.40

จะเห็นว่า ถ้าจะใช้สูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป จะต้องลากคอนทัวร์เพื่อให้ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ดังนั้นจะสร้างคอนทัวร์ C_1 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 และ C_2 เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 1 โดยที่วงกลม C_1 และ C_2 ไม่ตัดกัน และวงกลมทั้งสองอยู่ภายใน Int (C) และมีทิศทางบวก ดังรูป

โดยทฤษฎีบทแผ่นวงแหวนหลายเชิง

$$\oint_C \frac{dz}{z^2(z-1)^3} = \oint_{C_1} \frac{dz}{z^2(z-1)^3} + \oint_{C_2} \frac{dz}{z^2(z-1)^3}$$

$$= \oint_{C_1} \frac{\frac{1}{(z-1)^3}}{z^2} dz + \oint_{C_2} \frac{\frac{1}{z^2}}{(z-1)^3} dz$$

$$= \frac{2\pi i}{1!}(-3) + \frac{2\pi i}{2!}(-2)(-3) = 0$$

จากสูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป จะสรุปได้บทแทรกดังนี้

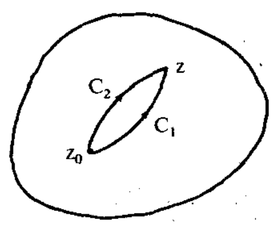
บทแทรก ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ R แล้วอนุพันธ์ของ f ทุกอันดับ จะหาค่าได้และเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน R

ทฤษฎีบทที่ 4.14 ทฤษฎีบทโมรีรา (Morera's Theorem)

ถ้า f มีความต่อเนื่องในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D และ $\oint_C f(z)dz = 0$ สำหรับคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ใน D จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

พิสูจน์ ให้ z_0 เป็นจุดใน D

สำหรับจุด z ใด ๆ ใน D พิจารณาคอนทัวร์ C_1 และ C_2 จาก z_0 ไปยัง z



รูป 4.41

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

ให้ $$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$$

ดังนั้น F สามารถนิยามได้บน D

สำหรับ $h \neq 0$ พิจารณา

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z+h} f(t)dt - \int_{z_0}^{z} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_{z_0}^{z} f(t)dt + \int_{z}^{z+h} f(t)dt - \int_{z_0}^{z} f(t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(t)dt$$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} f(t)dt - f(z)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left(\int_{z}^{z+h} f(t)dt - \int_{z}^{z+h} f(z)dt\right)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{z}^{z+h} (f(t) - f(z))dt\right|$$

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องที่ z สำหรับ $\varepsilon > 0$

จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุกค่า t $(0 < |t-z| < \delta \rightarrow |f(t)-f(z)| < \varepsilon)$

ถ้า $0 < |h| < \delta$ จะได้ $z+h \in N(z, \delta)$

ดังนั้น เส้นตรงจาก z ไปยัง $z+h$ อยู่ใน $N(z, \delta)$

และสำหรับแต่ละ t บนเส้นตรงซึ่ง $|t-z| < \delta$ จะได้

$$|f(t) - f(z)| < \varepsilon$$

ดังนั้น $\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\right| \left|\int_{z}^{z+h}(f(t)-f(z))dt\right| < \frac{1}{|h|} M\cdot L$

เมื่อ $M = \max|f(t)-f(z)|$ และ L เป็นความยาวของวิถี $|h|$

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| < \frac{1}{|h|}\cdot\varepsilon\cdot|h| = \varepsilon$$

นั่นคือ $\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$

$F(z)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z ใน D และ $F'(z) = f(z)$

$\therefore$ $F(z)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกอันดับที่ทุกค่า z ใน D

นั่นคือ $f(z)$ หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z ใน D

f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D

หมายเหตุ ทฤษฎีบทโมรีราเป็นบทกลับของทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชี ซึ่งต้องเพิ่มเงื่อนไขที่ $f(z)$ มีความต่อเนื่องใน D จึงจะทำให้บทกลับของอินทิกรัลโคชีจริง ดังได้เห็นจากตัวอย่างแล้วว่า

ค่าของ $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียวใด ๆ มีค่าเป็น 0 เสมอ แต่ $f(z) = \frac{1}{(z-a)^n}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = a$ นี่คือตัวอย่างที่แสดงให้เห็นว่า บทกลับของทฤษฎีบทอินทิกรัลโคชีไม่จริง ถ้าไม่เพิ่มเงื่อนไขอื่นดังทฤษฎีบทดังกล่าว

ทฤษฎีบทที่ 4.15 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในวงกลม C รัศมี r จุดศูนย์กลาง $z = z_0$ จะได้ **อสมการโคชี** (Cauchy's inequality)

$$|f^n(z_0)| \leqslant \frac{M \cdot n!}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

เมื่อ M เป็นค่าคงตัว ซึ่ง $|f(z)| < M$

พิสูจน์ จากสูตรอินทิกรัลโคชีทั่วไป

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

เพราะว่า $|z-z_0| = r$ และความยาวของ $C = 2\pi r$

$$|f^n(z_0)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leqslant \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{r^{n+1}} \cdot 2\pi r$$

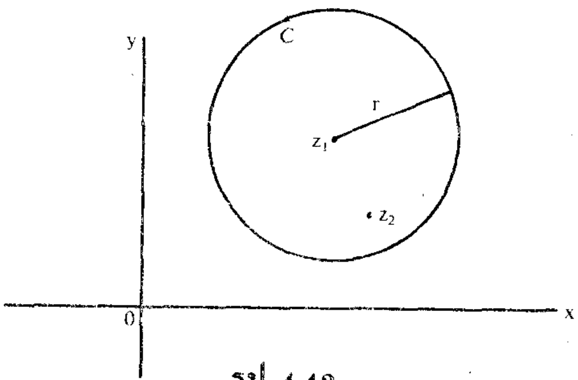
$$|f^n(z_0)| \leqslant \frac{M \cdot n!}{r^n}$$

ทฤษฎีบทที่ 4.16 ทฤษฎีบทของลีอูวิลล์ (Liouville's Theorem)

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ในระนาบเชิงซ้อนเอนไทร์ (entire complex plane) และ $f(z)$ มีขอบเขต จะได้ว่า $f(z)$ จะเป็นค่าคงตัว

พิสูจน์ ให้ z_1, z_2 เป็นจุดใด ๆ ระนาบ z

C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z_1 รัศมี r และล้อมรอบจุด z_2 ดังรูป



รูป 4.42

จากสูตรอินทิกรัลโคชี

$$f(z_2)-f(z_1) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_2}dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-z_1}dz$$

$$= \frac{z_2-z_1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-z_2)(z-z_1)}$$

เพราะว่า $|z-z_1| = r$

$$|z-z_2| = |z-z_1+z_1-z_2| \geqslant |z-z_1|-|z_1-z_2|$$

$$\geqslant r-|z_1-z_2| \geqslant \frac{r}{2}$$

เมื่อเลือก r ซึ่ง $|z_1-z_2| < \frac{r}{2}$

เพราะว่า $f(z)$ มีขอบเขต ดังนั้น $\exists M > |f(z)| < M$ และความยาวเส้นรอบวง $= 2\pi r$ ดังนั้น

$$|f(z_2)-f(z_1)| = \frac{|z_2-z_1|}{2\pi}\left|\oint_C \frac{f(z)dz}{(z-z_2)(z-z_1)}\right|$$

$$\leqslant \frac{|z_2-z_1|}{2\pi}\;\frac{M(2\pi r)}{(r/2)r} = \frac{2|z_2-z_1|M}{r}$$

เมื่อ $r \to \infty$ จะได้ $|f(z_2)-f(z_1)| = 0$

นั่นคือ $f(z_2) = f(z_1)$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาค่าของ $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{e^z}{z-2}\,dz$ เมื่อกำหนด C ดังนี้

   1.1 วงกลม $|z| = 3$

   1.2 วงกลม $|z| = 1$

2. จงหาค่าของอินทิกรัลของแต่ละฟังก์ชันที่กำหนดให้ตามคอนทัวร์ทิศทางเป็นบวกในแต่ละข้อ

   2.1 $\frac{\cos \pi z}{z^2-1}$, $|z| = 2$

   2.2 $\frac{z^2}{z^2+4}$, C : รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสจุดยอด $\pm 2, \pm 2+4i$

   2.3 $\frac{e^{zt}}{z^2+1}$, c : $|z| = 3$

   2.4 $\frac{\sin^6 z}{\left(z-\frac{\pi}{6}\right)^3}$, C : $|z| = 1$

   2.5 $\frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}$, c : $|z| = 3$

   2.6 $\frac{e^{iz}}{z^3}$, C : $|z| = 2$

3. ให้ C เป็นวงกลม $|z| = 3$ ในทิศทางเป็นบวก จงแสดงว่า

   ถ้า $g(z) = \int_C \frac{2S^2-S-2}{S-z}\,dS \qquad (|z| \neq 3)$

   จะได้ $g(2) = 8\pi i$

4. จงหาค่าของ $\oint_C \frac{z}{(z-2)(z^2+9)}\,dz$ เมื่อ

   4.1 C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $-3i$ รัศมี 1 หน่วย

   4.2 C เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี 4 หน่วย

5. จงพิสูจน์ว่า $f'''(a) = \frac{3!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^4}\,dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว ซึ่งรวมจุด $z = a$ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดใน Int (C) และบน C

6. ให้ C เป็นวงกลมหนึ่งหน่วย (unit circle) $z = e^{i\theta}, \ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$ จงแสดงว่า สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ

$$\oint_C \frac{e^{az}}{z}\, dz = 2ni$$

แล้วเขียนอินทิกรัลในเทอมของ θ เพื่อแสดงว่า

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta = \pi$$

7. ถ้า C เป็นขอบของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสซึ่งมีจุดยอด $2 \pm 2i$ และ $-2 \pm 2i$ และ C มีทิศทางเป็นบวก จงหาค่าของอินทิกรัลตาม C ต่อไปนี้

7.1 $\displaystyle\int_C \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\, dz$

1.2 $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{z(z^2+8)} dz$

7.3 $\displaystyle\int_C \frac{\cosh z}{z^4} dz$

8 . จงหาค่าของ $\displaystyle\int_C \frac{z}{(16-z^2)(z+i)}\, dz$ เมื่อ c เป็นวงกลม

8.1 $|z| = 2$

8.2 $|z-4| = 2$

8.3 $|z| = 5$