บทที่ 3
ฟังก์ชันประถม
(Elementary Functions)

ในแคลคูลัสเราได้ศึกษาถึงฟังก์ชันประถมของตัวแปรจริง เช่น ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล ฟังก์ชันลอการิทึม ฟังก์ชันตรีโกณมิติ มาแล้ว ในบทนี้จะได้กล่าวถึงฟังก์ชันประถมเหล่านี้ในรูปของตัวแปรเชิงซ้อน $z = x - iy$ และจะเห็นว่าถ้าพิจารณา $z = x + i0$ ดังนั้น $f(z) = f(x+i0) = f(x)$ เป็นฟังก์ชันประถมของตัวแปรจริง x ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้วนั่นเอง การนิยามฟังก์ชันประถมนั้นจะเริ่มจากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลเพื่อใช้นิยามฟังก์ชันอื่น ๆ ต่อไป

3.1 ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล (Exponential Function)

นิยาม **ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล** ของตัวแปรเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย e^z

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

ดังนั้น e^z เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

ถ้า $z = x + i0$ นั่นคือ z เป็นจำนวนจริง จะได้

$$e^z = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$$

ถ้า $z = 0 + iy$ นั่นคือ z เป็นจำนวนจินตภาพแท้ จะได้

$$e^z = e^0(\cos y + i \sin y)$$

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y$$

ซึ่งเรียกว่า **สูตรออยเลอร์** (Euler's formula)

หมายเหตุ

I. $e^z \neq 0$ ทุกค่า z เพราะว่า ถ้า $e^z = 0$ นั่นคือ

$$e^x(\cos y + i \sin y) = 0$$

$$\cos y + i \sin y = 0$$

$$\therefore \quad \cos y = \sin y = 0$$

แต่ $\quad \cos^2 y + \sin^2 y = 1$

ดังนั้น $\quad e^z \neq 0$

2. เราอาจเขียน exp z แทน e^z

3. ถ้าเขียน z ในรูปเชิงขั้ว และจากสูตรออยเลอร์ จะได้

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

คุณสมบัติต่าง ๆ ของ e^z

1. $|e^z| = e^x$ และ $\arg e^z = y$
2. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}$ และโดยทั่วไป $(e^z)^n = e^{nz}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$
3. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
4. $e^{\bar{z}} = \overline{e^z}$
5. $e^{z+2\pi i} = e^z$

พิสูจน์

1. ให้ $z = x+iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\therefore \quad |e^z| = |e^x|\,|\cos y + i\sin y| = e^x\cdot 1 = e^x$$

และ $\quad \theta = \arg e^z = y$

2. ให้ $z_1 = x_1+iy_1$ และ $z_2 = x_2+iy_2$

$$e^{z_1} = e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1)$$
$$e^{z_2} = e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2)$$
$$\begin{aligned} e^{z_1}\cdot e^{z_2} &= e^{x_1}\cdot e^{x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)] \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 2

4. ให้ $z = x+iy$ ดังนั้น $\bar{z} = x-iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$
$$\begin{aligned} e^{\bar{z}} &= e^x(\cos(-y) + i\sin(-y)) \\ &= e^x(\cos y - i\sin y) \end{aligned}$$

$$= e^x\overline{(\cos y + i\sin y)}$$

$$= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)}$$

$$= \overline{e^z}$$

5. $$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i}$$

$$= e^z(\cos 2\pi + i\sin 2\pi)$$

$$= e^z(1 + i0)$$

$$= e^z$$

คุณสมบัติข้อ 5 แสดงว่า ฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล e^z มีคาบเท่ากับ $2\pi i$ นั่นเอง

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\exp(2-3\pi i) = -e^2$

วิธีทำ $$\exp(2-3\pi i) = e^{2-3\pi i} = e^2 \cdot e^{-3\pi i}$$

$$= e^2\big(\cos(-3\pi) + i\sin(-3\pi)\big)$$

$$= e^2(\cos 3\pi - i\sin 3\pi)$$

$$= e^2\big(-1 - i(0)\big)$$

$$= -e^2$$

ตัวอย่าง จงหาค่า z จากสมการ $e^z = -2$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$$

-2 เขียนในรูปเชิงขั้ว จะได้

$$-2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$$\therefore\ e^x(\cos y + i\sin y) = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$$

$e^x = 2$ และ $y = \pi + 2n\pi$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

นั่นคือ $x = \ell n\, 2$ และ $y = (2n+1)\pi$

ดังนั้น $z = \ell n\, 2 + (2n+1)\pi i, \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

ตัวอย่าง จงหาค่า z จากสมการ $e^z = -1+i$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$

$$e^x(\cos y + i\sin y) = -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad e^x = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$$

$$x = \ell n\sqrt{2} \quad \text{และ} \quad y = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$$

ดังนั้น $z = \ell n\sqrt{2} + \left(\frac{3}{4} + 2n\right)\pi i,$ เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

อนุพันธ์ของ e^z

จากนิยาม $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$

จากตัวอย่างในเรื่องอนุพันธ์ได้แสดงแล้วว่า ถ้าให้

$$f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$$

แล้ว $f'(z)$ หาค่าได้ทุกค่า z และมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = v_y - iu_y \\ &= e^x\cos y + ie^x\sin y \\ &= e^x(\cos y + i \sin y) = e^z \end{aligned}$$

ดังนั้น $\frac{d}{dz}e^z = e^z$ นั่นเอง

และถ้าพิจารณา $\frac{d}{dz}e^{az}$ เมื่อ a เป็นค่าคงตัว จะได้ดังนี้

ให้ $w = az$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}e^{az} &= \frac{d}{dz}e^w \\ &= \frac{de^w}{dw} \cdot \frac{dw}{dz} \\ &= e^w \cdot a \\ &= ae^{az} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้หรือไม่

1. e^{z^2}
2. $e^{\bar{z}}$

วิธีทำ ให้ $z = x + iy$

1.
$$\begin{aligned} z^2 &= (x^2 - y^2) + 2xyi \\ e^{z^2} &= e^{(x^2 - y^2)} \cdot e^{2xyi} \\ &= e^{x^2 - y^2}(\cos 2xy + i \sin 2xy) \end{aligned}$$

ให้ $u(x, y) = e^{x^2-y^2}\cos 2xy$

$$v(x, y) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$$

$$u_x = 2x e^{x^2-y^2}\cos 2xy - e^{x^2-y^2}(2y)\sin 2xy$$

$$u_y = -2ye^{x^2-y^2}\cos 2xy - e^{x^2-y^2}(2x)\sin 2xy$$

$$v_x = 2xe^{x^2-y^2}\sin 2xy + e^{x^2-y^2}(2y)\cos 2xy$$

$$v_y = -2ye^{x^2-y^2}\sin 2xy + e^{x^2-y^2}(2x)\cos 2xy$$

$\therefore\ u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

ดังนั้น สมการโคชี-รีมันน์จริง และ u_x, u_y, v_x, v_y มีความต่อเนื่องทุกค่า (x, y)

นั่นคือ e^{z^2} หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z

2. $e^{\bar{z}}$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$e^{\bar{z}} = e^x(\cos(-y) + i\sin(-y))$$

$$= e^x(\cos y - i\sin y)$$

ให้ $u(x, y) = e^x\cos y,\quad v(x, y) = -e^x\sin y$

$u_x = e^x\cos y,\quad u_y = -e^x\sin y$

$v_x = -e^x\sin y,\quad v_y = -e^x\cos y$

$u_x \neq v_y$ และ $u_y \neq -v_x$

นั่นคือ สมการโคชี-รีมันน์ไม่จริง

$\therefore$ $e^{\bar{z}}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า (x, y)

การส่งของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

สำหรับ $z = x + iy$ จากนิยามฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

$$w = e^z$$

จะได้ $w = e^x(\cos y + i\sin y)$

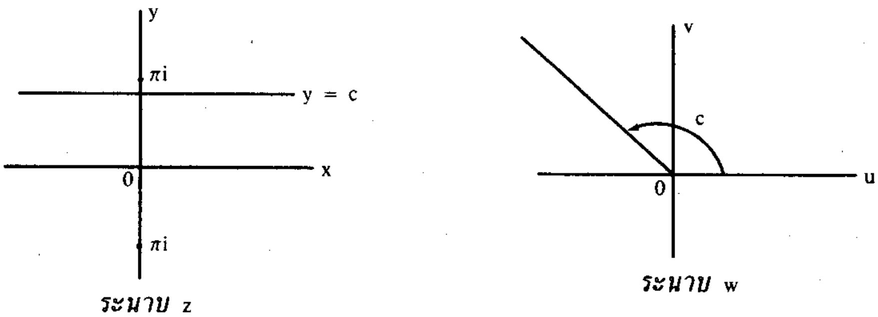
และ $|w| = e^x,\quad \arg w = y$

นั่นคือ ภาพของจุด $z = x + iy$ คือ w ซึ่งมี $|w| = e^x$ และ $\theta = \arg w = y$

พิจารณาการส่งของ e^z ดังต่อไปนี้

1. **เส้นระดับ** $y = c$ จะได้ $|w| = e^x$ และ $\arg w = c$ และค่า $e^x > 0$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงใด ๆ นั่นคือ เมื่อ $-\infty < x < \infty$ แล้ว $0 < |w| < \infty$ และ $\arg w$ มีค่าคงตัว c

ดังนั้น เมื่อ z มีค่าเปลี่ยนไปบนเส้นระดับ $y = c$ จะได้ w มีค่าเปลี่ยนไปบนเส้นรัศมี (ray) จากจุด $w = 0$ เอียงเป็นมุม c เรเดียน นั่นคือ ภาพของเส้นระดับใด ๆ คือเส้นรัศมีที่ออกจากจุดกำเนิด ดังรูป



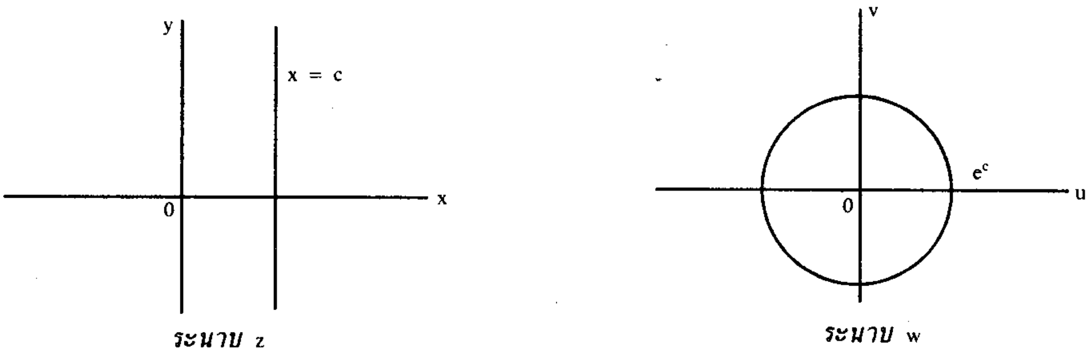
รูป 3.1

2. เส้นดิ่ง $x = c$ **จะได้**

$$|w| = e^c \quad \text{และ} \quad \arg w = y$$

ถ้าพิจารณา $-\pi < y < \pi$ จะได้ว่า $\arg w$ มีค่าอยู่ระหว่าง $-\pi$ ถึง π และ $|w| = e^c$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นคาบของเส้นดิ่ง $x = c$ นี้คือ วงกลม $|w| = e^c$

ถ้าพิจารณา $-2\pi < y < 2\pi$ ก็จะได้เช่นเดียวกัน คือมุมหมุนไปครบ 1 รอบจุดกำเนิด $w = 0$ ในขณะที่ $|w| = e^c$ เป็นค่าคงตัว ดังนั้นภาพของเส้นดิ่ง $x = c$ จะเป็นวงกลมซ้ำกันจำนวนอนันต์ครั้งในระนาบ w ดังรูป



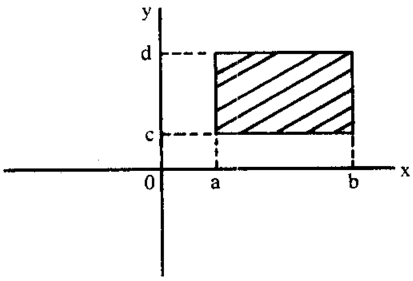
รูป 3.2

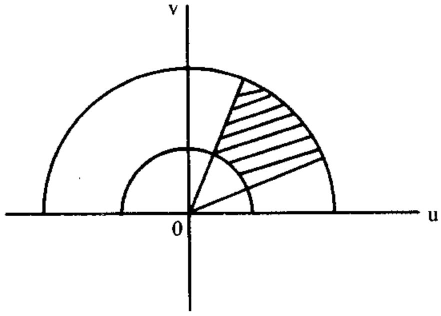
3. สี่เหลี่ยมผืนผ้า $a \leqslant x \leqslant b$ **และ** $c \leqslant y \leqslant d$ **จะได้**

$$e^a \leqslant |w| \leqslant e^b \quad \text{และ} \quad c \leqslant \arg w \leqslant d$$

จะเห็นว่า $|w| = e^a$ และ $|w| = e^b$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $w = 0$ ในระนาบ w (ไม่รวม $w = 0$) และ $c \leqslant \arg w \leqslant d$ ก็จะเป็นบริเวณระหว่างเส้นรัศมี c, d

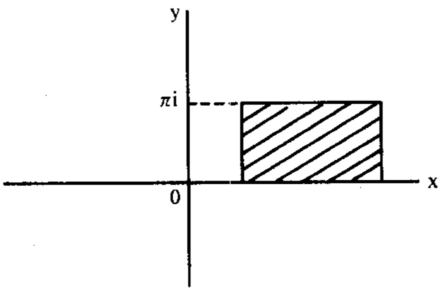
ดังนั้น สี่เหลี่ยมผืนผ้าในระนาบ z จะถูกส่งไปยังส่วนของวงกลมและเส้นรัศมี ดังรูป

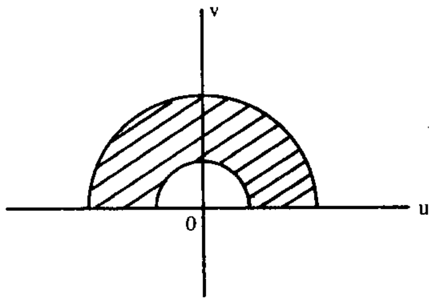




รูป 3.3

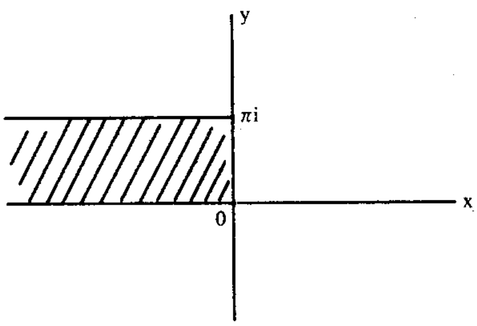
ถ้าให้ $c = 0$ และ $d = \pi$ จะได้ $0 \leqslant y \leqslant \pi$ ดังนั้น รูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะถูกส่งไปยังรูปครึ่งวงแหวน ดังรูป 3.4

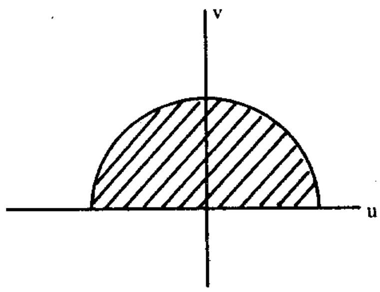




รูป 3.4

4. **แผ่นยาวครึ่งช่วงอนันต์** (semi-infinite strip) $-\infty < x \leqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \pi$ นั่นคือ $|w| < e^0 = 1$ และ $0 \leqslant \arg w \leqslant \pi$ ดังนั้นแผ่นยาวจะถูกส่งไปยังวงกลมรัศมี 1 ดังรูป

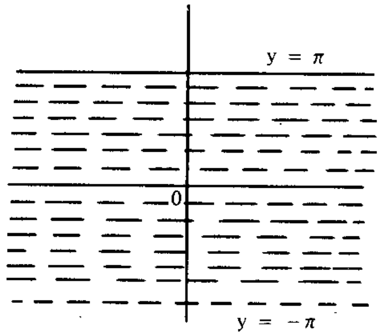




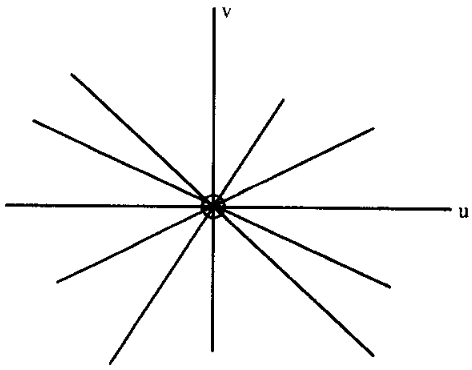
รูป 3.5

5. **เซต** $S = \{(x, y) / -\infty < x < \infty$ และ $-\pi < y \leqslant \pi\}$

พิจารณาเส้นระดับทั้งหมดใน S ภาพของเส้นระดับคือเส้นรัศมีที่แผ่ออกจาก $w = 0$ และมุมเอียงของแต่ละเส้นอยู่ในช่วง $-\pi$ ถึง π ดังรูป และเมื่อรวมเส้นรัศมีทั้งหมดจะได้ระนาบ w



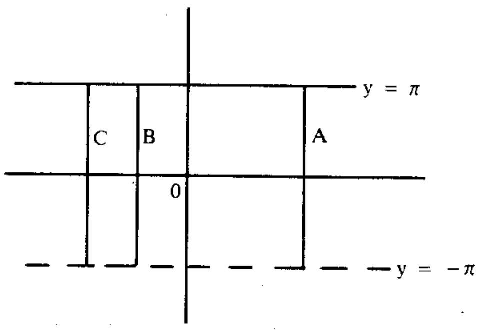
ระนาบ z



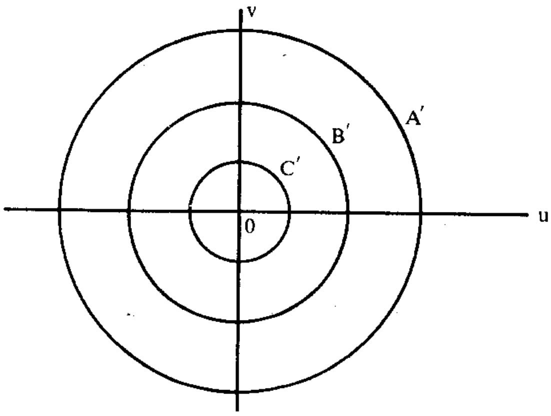
ระนาบ w

รูป 3.6

หรือจะได้ภาพของเส้นดิ่งทั้งหมดระหว่าง $-\pi$ ถึง π จะได้วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $w = 0$ และรัศมีจำนวนจริง เมื่อรวมวงกลมทั้งหมดจะได้ระนาบ w ดังรูป



ระนาบ z



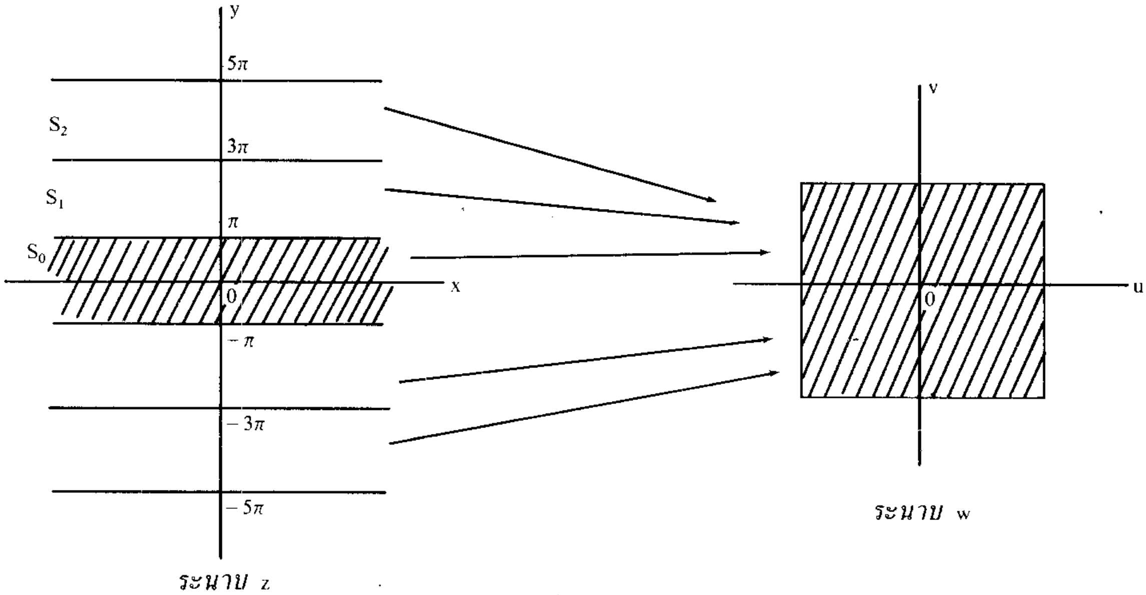
รูป 3.7

ระนาบ w

ดังนั้น จะเห็นว่าเซต S ถูกส่งไปบนระนาบ w ยกเว้นจุด $w = 0$ และเซต S เรียกว่า **เซตหลักมูล** (fundamental strip) ในทำนองเดียวกัน ถ้าพิจารณาเซต

$S_n = \{(x, y) / -\infty < x < \infty$ และ $(2n-1)\pi < y < (2n+1)\pi\}$

เซต S ในที่นี้คือ S_0 และภาพของแต่ละเซตคือระนาบ w ยกเว้น $w = 0$ นั่นคือระนาบ z ถูกส่งไปบนระนาบ w ยกเว้น $w = 0$ ซ้ำกันจำนวนอนันต์ครั้ง



รูป 3.8

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาค่า e^z เมื่อ z มีค่าดังนี้

   1.1 πi

   1.2 $1+\pi i$

   1.3 $\dfrac{2+\pi i}{4}$

   1.4 $\ell n\, 2+\dfrac{\pi}{3}i$

   1.5 $\dfrac{3}{4}\pi i$

2. จงหาค่า z เมื่อ

   2.1 $e^{4z} = i$

   2.2 $e^z = 1+\sqrt{3}i$

   2.3 $e^z = -1-i$

   2.4 $\exp(2z-1) = 1$

3. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $2z^2-3-ze^z+e^{-z}$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

4. จงพิสูจน์ว่า

   4.1 $\exp(i\bar{z}) = \overline{\exp(iz)}$ ก็ต่อเมื่อ $z = n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$

   4.2 $e^{-nz} = \dfrac{1}{(e^z)^n}, \quad n = 1, 2, \ldots$

5. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

   5.1 $e^{i\,\mathrm{Im}\,z}$

   5.2 ze^{-z}

   5.3 $\exp(e^z)$

   5.4 $\exp(iz^2)$

   5.5 $\exp(z^2+2z)$

6. จงเขียน $|\exp(2z+i)|$ และ $|\exp(iz^2)|$ ในเทอมของ x และ y และจงแสดงว่า

$$|\exp(2z+i)+\exp(iz^2)| \leqslant e^{2x}+e^{-2xy}$$

7. ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z \neq 0$ จงแสดงว่าถ้า $z = re^{i\theta}$ แล้ว $\bar{z} = re^{-i\theta}$

8. ให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในบริเวณ D

ให้
$$U(x, y) = e^{u(x,y)}\cos[v(x, y)]$$
$$V(x, y) = e^{u(x,y)}\sin[v(x, y)]$$

จงแสดงว่า $U(x, y)$ และ $V(x, y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกใน D

9. จงหาฟังก์ชัน $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ ของ $f(z) = u + iv$

9.1 $f(z) = e^{3iz}$

9.2 $f(z) = z^2e^{2z}$

3.2 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic Function)

นิยาม ถ้า $w = f(z)$ และ $e^{x} = z$ จะเรียก w ว่าเป็น **ลอการิทึมของ** z

เช่น $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$

ดังนั้น $2\pi i$ เป็นลอการิทึมของ 1

ถ้าเขียน $w = u+iv$ และ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะหาค่า w ได้ดังนี้

$$e^{w} = e^{u+iv} = z$$

$$e^{u}(\cos v + i\sin v) = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\therefore \quad e^{u} = r \quad \text{และ} \quad v = \theta$$

$$u = \ell n\, r \quad \text{และ} \quad v = \theta$$

ดังนั้น $w = \ell n\, r + i\theta$

แต่ $r = |z|$ และ $\theta = \arg z$ แทนค่าจะได้

$$w = \ell n|z| + i \arg z$$

และใช้สัญลักษณ์แทนลอการิทึมของ z ด้วย $\log z$ ดังนั้น เราอาจจะเขียนนิยามได้อีกรูปหนึ่งคือ

นิยาม **ลอการิทึมของตัวแปร** z เขียนแทนด้วย $\log z$ มีค่าดังนี้ คือ

$$\log z = \ell n|z| + i \arg z$$

เมื่อ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ที่ไม่เท่ากับศูนย์

ถ้า $z = x+i0$ จะได้ $\log z = \ell n|x| - i \arg x = \ell n\, x + 2n\pi i$

จากนิยามจะเห็นว่า สำหรับแต่ละค่า z จะมีค่า $\log z$ ได้หลายค่า เนื่องจาก $\arg z$ มีหลายค่า ถ้าพิจารณาค่า $\arg z$ เฉพาะในช่วง $(-\pi, \pi]$ จะได้ค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ $\operatorname{Arg} z$ และจะนิยามค่าสำคัญของ $\log z$ ได้ดังนี้

นิยาม ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน **ค่าสำคัญของ** log z (principal value of log z) เขียนแทนด้วย Log z มีค่าดังนี้

$$\operatorname{Log} z = \ell n\,|z| + i \operatorname{Arg} z$$

เมื่อ $\operatorname{Arg} z$ เป็นค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$

จะเห็นว่า ถ้า $z = x$ จะได้

$$\operatorname{Log} z = \ell n\,|x| + i \operatorname{Arg} 0$$

$$= \ell n\, x \qquad \text{ซึ่งเป็นฟังก์ชันค่าจริง}$$

และจากนิยามของ $\log z$ และ $\operatorname{Log} z$ จะได้

$\log z = \operatorname{Log} z + 2k\pi i$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\log -3$, $\log i$, $\log(-2+2i)$ และ $\log(e^z)$

วิธีทำ จากนิยาม

$$\begin{aligned}
\log z &= \ell n\,|z| + i \arg z \\
\log -3 &= \ell n\,|-3| + i \arg(-3) \\
&= \ell n\,3 + i(\pi + 2k\pi) \\
\log i &= \ell n\,|i| + i \arg i \\
&= \ell n\,1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \\
&= i\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) \\
\log(-2+2i) &= \ell n\,|-2+2i| + i \arg(-2+2i) \\
&= \ell n\,2\sqrt{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \\
&= \frac{3}{2}\ell n\,2 + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \\
\log(e^z) &= \ell n\,|e^z| + i \arg(e^z)
\end{aligned}$$

เพราะว่า $|e^z| = e^x$ และ $\arg e^z = y$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\log(e^z) &= \ell n\,e^x + i(y + 2k\pi) \\
&= x + i(y + 2k\pi) \\
&= z + i\,2k\pi
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\operatorname{Log}(-2+2i)$, $\operatorname{Log} i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log} z &= \ell n\,|z| + i \operatorname{Arg} z \\
\operatorname{Log}(-2+2i) &= \ell n\,|-2+2i| + i \operatorname{Arg}(-2+2i) \\
&= \frac{3}{2}\ell n\,2 + \frac{3\pi}{4} i \\
\operatorname{Log} i &= \ell n\,|i| + i \operatorname{Arg} i \\
&= \ell n\,1 + i\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} i
\end{aligned}$$

หมายเหตุ จากการที่ $\log z$ มีค่าได้หลายค่า ดังนั้นลอการิทึมของ z จึงเป็น **ฟังก์ชันหลายค่า** (multi-valued function) แต่สำหรับ $\operatorname{Log} z$ เพราะว่าจำกัด $\arg z$ ให้เป็น $\operatorname{Arg} z$ ทำให้ $\operatorname{Log} z$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว ซึ่งเรียกว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม** แต่ $\log z$ นั้น เรียกว่า **ลอการิทึมของ** z ไม่เติมคำว่า ฟังก์ชัน นำหน้า เพราะฟังก์ชันที่เราใช้ในที่นี้ส่วนใหญ่เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว ดังนั้น $\log z$ มีค่าจำนวนอนันต์ สำหรับแต่ละค่าของ $\log z$ จะมีค่าต่างจากอีกค่าหนึ่งเท่ากับ $2k\pi i$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือการเท่ากันในสมการของคุณสมบัติของ $\log z$ จะหมายถึง แต่ละค่าในด้านหนึ่งของสมการเท่ากับแต่ละค่าในอีกด้านหนึ่ง หรือลบด้วย $2k\pi i$ นั่นเอง

คุณสมบัติของ $\log z$

ให้ z, z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

1. $\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2$
2. $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$
3. $\log e^z = z$
4. $e^{\log z} = z$
5. $\log(z^p) = p\log z$ เมื่อ p เป็นจำนวนตรรกยะ

พิสูจน์

1.
$$\begin{aligned}\log(z_1z_2) &= \ell n\,|z_1z_2| + i\arg(z_1z_2)\\ &= \ell n(|z_1||z_2|) + i(\arg z_1 + \arg z_2)\\ &= \ell n\,|z_1| + \ell n\,|z_2| + i\arg z_1 + i\arg z_2\\ &= [\ell n\,(z_1) + i\arg z_1] + [\ell n\,|z_2| + i\arg z_2]\\ &= \log z_1 + \log z_2\end{aligned}$$

2. พิสูจน์ในทำนองเดียวกันกับข้อ 1

3. จากตัวอย่างที่พิสูจน์แล้ว

4. ให้ $z = re^{i\theta}$ ดังนั้น $r = |z|$ และ $\theta = \arg z$ จากนิยามจะได้

$$\begin{aligned}\log z &= \ell n\,|z| + i\arg z\\ &= \ell n\, r + i\theta\\ e^{\log z} &= e^{\ell n\, r + i\theta}\\ &= e^{\ell n\, r}\cdot e^{i\theta}\\ &= re^{i\theta} = z\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\log(i(-2+2i))$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\log(i(-2+2i)) &= \log(-2i-2)\\ &= \ell n|-2i-2|+i\arg(-2i-2)\\ &= \ell n\, 2\sqrt{2}+i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\\ &= \frac{3}{2}\ell n\, 2+i\left(\frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)\end{aligned}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า

$$\begin{aligned}\log i+\log(-2+2i) &= i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+\frac{3}{2}\ell n\, 2+i\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\\ &= \frac{3}{2}\ell n\, 2+i\left(\frac{5\pi}{4}+4k\pi\right)\end{aligned}$$

จากคุณสมบัติข้อ 1 จะได้

$$\log(i(-2+2i)) = \log i+\log(-2+2i)$$

นั่นแสดงให้เห็นว่า การเท่ากันของ $\log z$ หมายถึงการเท่ากันในส่วนจริง ส่วนจินตภาพจะบวกด้วย $2k\pi i$ นั่นเอง

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\mathrm{Log}[(-1+i)^2]$ และ $\mathrm{Log}(-1+i)$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\mathrm{Log}[(-1+i)^2] &= \mathrm{Log}(-2i)\\ &= \ell n|-2i|+i\,\mathrm{Arg}(-2i)\\ &= \ell n\, 2+i\frac{\pi}{2}\\ \mathrm{Log}(-1+i) &= \ell n|-1+i|+i\,\mathrm{Arg}(-1+i)\\ &= \ell n\sqrt{2}+i\frac{3\pi}{4} = \frac{1}{2}\ell n\, 2+i\frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

จะเห็นว่า

$$\begin{aligned}2\,\mathrm{Log}(-1+i) &= \ell n\, 2+i\frac{3\pi}{2}\\ \mathrm{Log}[(-1+i)^2] &\neq 2\,\mathrm{Log}(-1+i)\end{aligned}$$

แต่ถ้าจะกล่าวถึงการเท่ากันในทำนองเดียวกับ $\log z$ ก็จะได้ว่า

$$\mathrm{Log}(-1+i)^2 = 2\,\mathrm{Log}(-1+i)$$

คุณสมบัติต่าง ๆ ของ $\log z$ เป็นจริงในกรณี $\mathrm{Log}\, z$ ด้วย เพียงแต่ $\mathrm{Log}\, z$ พิจารณาเฉพาะ $-\pi < \mathrm{Arg}\, z \leqslant \pi$ เท่านั้น

จากนิยามของ $\operatorname{Log} z = \ell n|z| + i\operatorname{Arg} z$

นิยามได้บนบริเวณ $|z| > 0$ และ $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ และจะได้ว่า $\operatorname{Log} z$ มีความต่อเนื่องบน $|z| > 0$ และ $-\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$ ถ้าพิจารณาค่า $\arg z$ อยู่ในช่วงครบ 1 รอบเท่ากับ 2π เช่น $\theta = \arg z$

$$0 \leqslant \theta < 2\pi \quad \text{หรือ} \quad -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta < \frac{7\pi}{4} \quad \text{หรือ} \quad -\pi \leqslant \theta < \pi$$

หรือ $\alpha < \theta \leqslant \alpha + 2\pi$ เมื่อ α เป็นมุมใด ๆ

จะได้ $\operatorname{Log} z = \ell n|z| + i\theta$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว

ทฤษฎีบทที่ 3.1 ฟังก์ชันลอการิทึม $\operatorname{Log} z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ $r > 0$ และ $-\pi < \theta < \pi$

พิสูจน์ ให้
$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$
$$z = re^{i\theta}$$
$$f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$$

ถ้า $u_r, v_r, u_\theta, v_\theta$ มีความต่อเนื่องและคล้องตามสมการโคชี-รีมันน์ จะได้

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad \text{และ} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

และ $f'(z) = \dfrac{\bar{z}}{r}(u_r + iv_r) = \dfrac{1}{z}(v_\theta - iu_\theta)$

จาก
$$\operatorname{Log} z = \ell n|z| + i\operatorname{Arg} z$$
$$= \ell n\, r + i\theta \qquad \text{เมื่อ } r > 0,\ -\pi < \theta < \pi$$

ในที่นี้
$$u(r, \theta) = \ell n\, r, \qquad v(r, \theta) = \theta$$
$$u_r = \frac{1}{r}, \qquad v_r = 0$$
$$u_\theta = 0, \qquad v_\theta = 1$$
$$\therefore\ u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad \text{และ} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

และ $u_r, v_r, u_\theta, v_\theta$ มีความต่อเนื่อง

$\therefore$ $\operatorname{Log} z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน $|z| > 0$ และ $-\pi < \operatorname{Arg} z < \pi$

จากทฤษฎีบทนี้ทำให้เราพิจารณาอนุพันธ์ของ $\operatorname{Log} z$ ได้ ให้ $f(z) = \operatorname{Log} z$

$$\frac{d}{dz}\operatorname{Log} z = f'(z)$$
$$= \frac{\bar{z}}{r}(u_r + iv_r)$$

$$= \frac{\bar{z}}{r}\left(\frac{1}{r}+i\cdot 0\right) = \frac{\bar{z}}{r^2}$$

$$\frac{d}{dz}\text{Log}\, z = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$$

การส่งของฟังก์ชันลอการิทึม

จากคุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม ($\text{Log}\, z$) จะได้ $\text{Log}(e^z) = z$ ซึ่งจะเห็นว่าฟังก์ชันลอการิทึมเป็นฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จากการส่งของฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลจะเห็นว่า เซต $S = \{(x, y) / -\infty < x < \infty,\ -\pi < y \leqslant \pi\}$ จะถูกส่งไปยังระนาบ w ยกเว้น $w = 0$ ดังนั้นถ้าพิจารณาจากคุณสมบัติฟังก์ชันผกผันเราอาจจะสรุปได้ว่า ระนาบ z ยกเว้น $z = 0$ ถูกส่งไปยัง **แผ่นยาว** $-\infty < u < \infty,\ -\pi < v \leqslant \pi$ ในระนาบ w เรียกแผ่นยาวนี้ว่า เซตหลัก

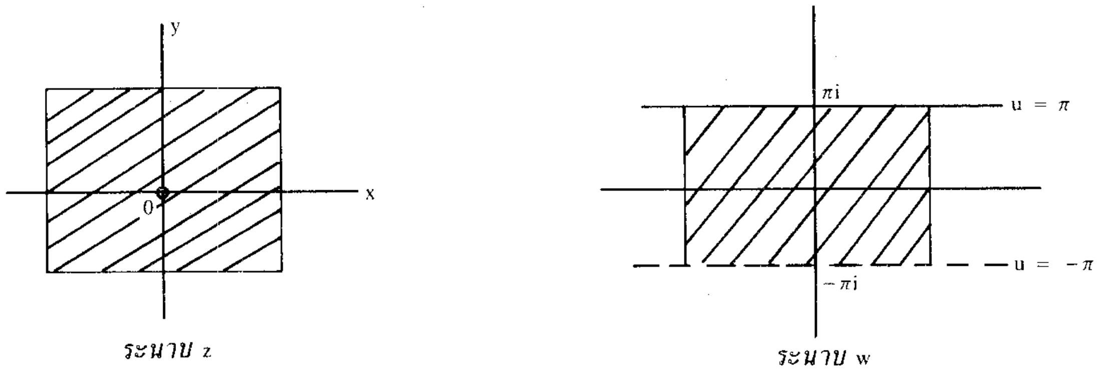
จากนิยาม $w = \text{Log}\, z = \ell n|z| + i\,\text{Arg}\, z, \quad -\pi < \text{Arg}\, z \leqslant \pi$

อาจจะหา u และ v ในระนาบ w ได้โดยตรง

จะได้ $u = \ell n|z|$ และ $v = \text{Arg}\, z$

และ $-\infty < u < \infty$ และ $-\pi < v \leqslant \pi$

ดังนั้น ระนาบ z ยกเว้นที่ $z = 0$ ถูกส่งภายใต้ $w = \text{Log}\, z$ ไปบนแผ่นยาว $-\infty < u < \infty$, $-\pi < v \leqslant \pi$ ดังรูป



รูป 3.9

การส่งของลอการิทึม $w = \log z$

จากนิยามของลอการิทึม

$$w = \log z = \ell n|z| + i \arg z$$

สำหรับ z ใด ๆ ที่ $z \neq 0$ w มีหลายค่า ซึ่งแต่ละค่าต่างกันด้วยผลคูณของจำนวนเต็มกับ $2\pi i$ และจะได้

$$u = \ell n|z|, \quad v = \arg z$$

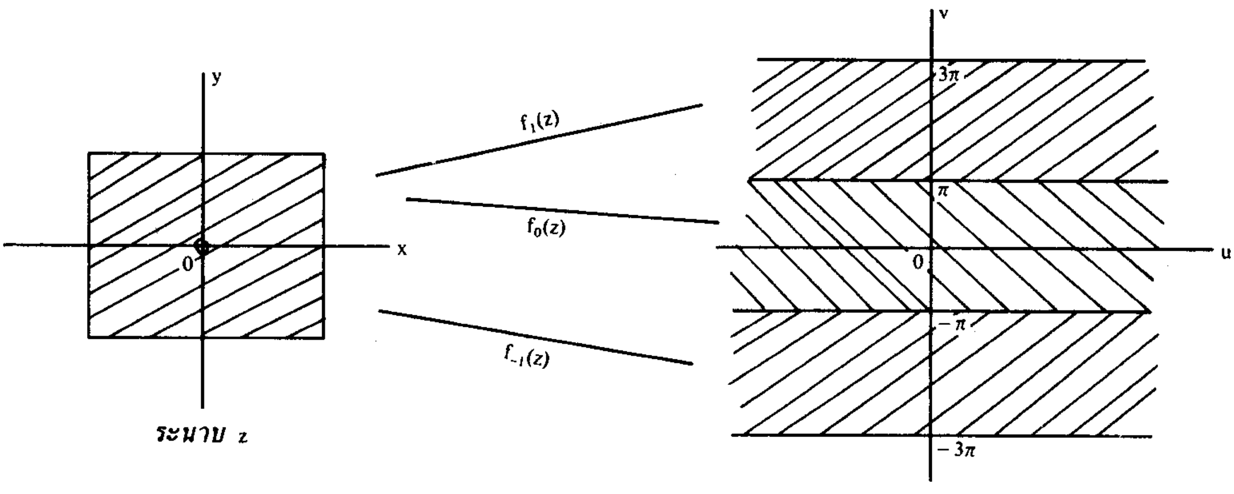
ดังนั้น ภาพของจุด z_0 ภายใต้ $w = \log z$ ในระนาบ z มีจำนวนอนันต์จุดบนเส้นดิ่ง $u = \ell n|z_0|$ ในระนาบ w

ถ้าเราจำกัดค่าของ $\arg z$ ให้อยู่ในช่วง $(-\pi, \pi)$ หรือช่วงอื่น ๆ ที่ครบ 2π พอดี เช่น ให้ $(2k-1)\pi < \arg z \leqslant (2k+1)\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ เราจะได้ฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวที่สมนัยกับค่า k

ให้ $\quad f_k(z) = \ell n|z| + i \arg z, \quad (2k-1)\pi < \arg z \leqslant (2k+1)\pi$

จะได้ $f_k(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว และเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z ใด ๆ ยกเว้น $z = 0$ เราเรียกฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ $f_k(z)$ เหล่านี้ว่า **สาขาของ** $\log z$ (branch of log z) เรียกจุด $z = 0$ นี้ว่า **จุดสาขา** (branch point) ของ $\log z$ และเรียกแกนจริงทางลบว่า **เส้นกั้นสาขา** (branch cut)

ภายใต้ $f_k(z)$ ภาพในระนาบ w คือ แผ่นยาวที่มีขอบต่อกัน ดังแสดงในรูป



รูป 3.10 *การส่งของ* $w = \log z$

ดังนั้นจะเห็นว่า ฟังก์ชันหลายค่า $\log z$ สามารถแยกออกเป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวจำนวนอนันต์ฟังก์ชัน การพิจารณาการส่งของ $\log z$ ก็ได้จากการส่งของแต่ละฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวซึ่งเป็นสาขาของ $\log z$ นั่นเอง

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาค่าของ $\log z$ เมื่อ z มีค่าดังนี้

   1.1 1 1.2 i

   1.3 $i^{\frac{1}{2}}$ 1.4 $1+\sqrt{3}i$

2. จงหาค่าของ $\mathrm{Log}\, z$ เมื่อ z มีค่าดังนี้

   2.1 $-ei$ 2.2 $1-i$

   2.3 -2

3. จงพิสูจน์ว่า $\log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log z_1 - \log z_2$

4. จงหาค่า z จากสมการ

   4.1 $\log z = \frac{\pi}{2}i$ 4.2 $e^z = -3$

5. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $\mathrm{Re}\, z_1 > 0$ และ $\mathrm{Re}\, z_2 > 0$ แล้ว

$$\mathrm{Log}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Log}\, z_1 + \mathrm{Log}\, z_2$$

6. จงหาค่าของ $\log(-1+i)^{\frac{1}{2}}$ โดยคุณสมบัติของ $\log(z^p) = p\log z$ และเปรียบเทียบคำตอบกับการหาค่าโดยหารากที่ 2 ของ $-1+i$ ก่อน

7. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $\mathrm{Log}\,(z-i)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ยกเว้นจุด (x, y) ซึ่ง $x \leqslant 0$ และ $y = 1$

8. สำหรับ $z = re^{i\theta}$ จงแสดงว่า

$$\mathrm{Re}[\log(z-1)] = \frac{1}{2}\mathrm{Log}(1-2r\cos\theta+r^2), \quad z \neq 1$$

   และจงแสดงว่า ฟังก์ชันนี้สอดคล้องตามสมการลาปลาซ เมื่อ $z \neq 1$

9. จงแสดงว่า $\log\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right)i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric Functions)

ในแคลคูลัส ฟังก์ชันค่าจริงไซน์ (sine) และโคไซน์ (cosine) ของตัวแปรจริง x ใช้สัญลักษณ์ $\sin x$ และ $\cos x$ ตามลำดับ และจากนิยามของ $\sin x$ และ $\cos x$ จะเห็นว่า

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

สำหรับตัวแปรเชิงซ้อน เราจะนิยามฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ในทำนองเดียวกัน

นิยาม ฟังก์ชันตรีโกณมิติไซน์ (sine) และโคไซน์ (cosine) ของตัวแปรเชิงซ้อน z เขียนแทนด้วย $\sin z$ และ $\cos z$ ตามลำดับ และมีค่าเท่ากับ

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

เนื่องจาก e^{iz} และ e^{-iz} เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ ดังนั้นผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของ e^{iz} และ e^{-iz} เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ด้วย นั่นคือ $\sin z$ และ $\cos z$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

ฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่น ๆ นิยามได้ในรูปของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ ดังนี้

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$$

$$\sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

จะเห็นว่า

$\tan z$ และ $\sec z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z ใด ๆ เมื่อ $\cos z \neq 0$

$\cot z$ และ $\csc z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z ใด ๆ เมื่อ $\sin z \neq 0$

คุณสมบัติของฟังก์ชันไซน์และโคไซน์

1. $\sin z = 0$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง และ $z = k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
2. $\cos z = 0$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง และ $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
4. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$
5. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$

6. $\sin(-z) = -\sin z$ และ $\cos(-z) = \cos z$

7. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$

8. $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

9. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

10. $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$ และ $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$

11. $\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$

12. $\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

13. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

14. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$

15. $\sin \bar{z} = \overline{\sin z}$ และ $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$

พิสูจน์ การพิสูจน์คุณสมบัติต่าง ๆ เหล่านี้ จะอาศัยนิยามโดยตรง ดังนั้นจะแสดงเพียงบางข้อเท่านั้น

1. จาก $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ และ $z = x + iy$

$$2i \sin z = e^{iz} - e^{-iz} = e^{ix-y} - e^{-ix+y}$$

$$\begin{aligned}
\sin z = 0 \quad &\leftrightarrow \quad e^{ix-y} - e^{-ix+y} = 0 \\
&\leftrightarrow \quad e^{2ix-2y} = 1 \\
&\leftrightarrow \quad e^{-2y}(\cos 2x + i \sin 2x) = 1 \\
&\leftrightarrow \quad e^{-2y}\cos 2x = \quad \text{และ} \quad e^{-2y}\sin 2x = 0 \\
&\leftrightarrow \quad y = 0 \quad \text{และ} \quad x = k\pi
\end{aligned}$$

(เพราะว่า $e^{-2y} \neq 0$ ดังนั้น $\sin 2x = 0$, $\therefore x = k\pi$ และอีกสมการจะได้ $e^{-2y} = 1$ นั่นคือ $y = 0$)

$$\leftrightarrow \quad z = k\pi$$

2. ให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

3. จาก $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

$$\begin{aligned}
\sin^2 z + \cos^2 z &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2iz} - 2e^{iz-iz} + e^{-2iz}}{-4} + \frac{e^{2iz} + 2e^{iz-iz} + e^{-2iz}}{4}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}\left(-e^{2iz}+2-e^{-2iz}+e^{2iz}+2+e^{-2iz}\right)$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

4. $$\sin(z_1+z_2) = \frac{e^{i(z_1+z_2)}-e^{-i(z_1+z_2)}}{2i}$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}-e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(2e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}-2e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left(e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}+e^{iz_1}\cdot e^{-iz_2}-e^{-iz_1}\cdot e^{iz_2}-e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}\right)+$$

$$\frac{1}{4i}\left(e^{iz_1}\cdot e^{iz_2}-e^{iz_1}\cdot e^{-iz_2}+e^{-iz_1}\cdot e^{iz_2}-e^{-iz_1}\cdot e^{-iz_2}\right)$$

$$= \frac{(e^{iz_1}-e^{iz_1})}{2i}\;\frac{(e^{iz_2}+e^{-iz_2})}{2}+\frac{(e^{iz_1}+e^{-iz_1})}{2}\;\frac{(e^{iz_2}-e^{-iz_2})}{2i}$$

$$= \sin z_1 \cos z_2+\cos z_1 \sin z_2$$

11. ให้ $z = x+iy$

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x+iy)}}{2i}$$

$$= \frac{e^{ix}\cdot e^{-y}-e^{-ix}\cdot e^{y}}{2i}$$

$$= \frac{e^{-y}}{2i}(\cos x+i\sin x)-\frac{e^{y}}{2i}(\cos x-i\sin x)$$

$$= \sin x\left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)+i\cos x\left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)$$

$$= \sin x\cosh y+ i\cos x\sinh y$$

ข้อสังเกต จากคุณสมบัติข้อ 11, 12 ถ้า $z = 0+iy$ จะได้

$$\sin(iy) = i\sinh y$$

และ $$\cos(iy) = \cosh y$$

13. $$|\sin z|^2 = \sin^2x\cosh^2y+\cos^2x\sinh^2y$$

$$= \sin^2x\,(1+\sinh^2y)+(1-\sin^2x)\sinh^2y$$

$$= \sin^2x+\sin^2x\sinh^2y+\sinh^2y-\sin^2x\sinh^2y$$

$$= \sin^2x+\sinh^2y$$

15. ให้ $z = x+iy$ จะได้ $\bar{z} = x-iy$

$$\sin \bar{z} = \sin x \cosh(-y) + i \cos x \sinh(-y)$$
$$= \sin x \cosh y - i \cos x \sinh y$$
$$= \overline{\sin z}$$

ในทำนองเดียวกัน จากข้อ 12 จะได้

$$\cos \bar{z} = \cos x \cosh(-y) - i \sin x \sinh(-y)$$
$$= \cos x \cosh y + i \sin x \sinh y$$
$$= \overline{\cos z}$$

ตัวอย่าง จงหาค่า z จากสมการ $\cos z = 3$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$

$$\cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y = 3$$

$\cos x \cosh y = 3$ และ $\sin x \sinh y = 0$

จากสมการนี้จะมี 2 กรณีที่จะพิจารณา คือ

1. $\sin x = 0$ และ $\cos x \cosh y = 3$
2. $\sinh y = 0$ และ $\cos x \cosh y = 3$

กรณีที่ 1 ถ้า $\sin x = 0$ และ $\cos x \cosh y = 3$

ดังนั้น $x = k\pi$ และ $\cos k\pi \cosh y = 3$

$$\therefore (-1)^k \cosh y = 3$$

เพราะว่า $\cosh y > 0$ ทุกค่า y ดังนั้น

$$k = 2\ell$$

$$\cosh y = \frac{e^y + e^{-y}}{2} = 3$$
$$e^y + e^{-y} - 6 = 0$$
$$(e^y)^2 - 6e^y + 1 = 0$$
$$e^y = \frac{6 \pm \sqrt{36-4}}{2}$$
$$= 3 \pm 2\sqrt{2}$$
$$y = \ell n(3+2\sqrt{2}) \quad \text{หรือ} \quad \ell n(3-2\sqrt{2})$$
$$z = x+iy$$

$$z = 2\ell\pi + i\,\ell n(3 \pm 2\sqrt{2}) \ ; \quad \ell = 0, 1, \ldots$$

กรณีที่ 2 ถ้า $\sinh y = 0$ และ $\cos x \cosh y = 3$ จะได้

$$\frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = 0 \quad \text{และ} \quad \cos x \cosh y = 3$$

$$e^{2y} = 1 \quad \text{นั่นคือ} \quad y = 0$$

$$\therefore \cos x \cdot 1 = 3$$

$$\cos x = 3$$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้ เพราะว่า $|\cos x| \leqslant 1$ ทุก x

อนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติ

จากฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล จะได้ $\frac{de^{cz}}{dz} = ce^{cz}$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\frac{d}{dz}\sin z = \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\frac{d}{dz}e^{iz} - \frac{d}{dz}e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{iz} - (-i)e^{-iz}\right)$$

$$= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z$$

ดังนั้น $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$

ในทำนองเดียวกันจะได้

$$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$$

$$\frac{d}{dz}\tan z = \sec^2 z$$

$$\frac{d}{dz}\sec z = \sec z \tan z$$

$$\frac{d}{dz}\csc z = -\csc z \cot z$$

$$\frac{d}{dz}\cot z = -\csc^2 z$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงพิสูจน์ว่า $\cos z = 0$ ก็ต่อเมื่อ z เป็นจำนวนจริง และ $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ
2. จงหาค่าของ z จากสมการ $\sin z = 2$ และ $\cos z = \sqrt{2}$ โดยวิธีต่อไปนี้

   2.1 เทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพ

   2.2 แทนค่า $\sin z$ ในรูป $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
3. จงพิสูจน์ว่า

   3.1 $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

   3.2 $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

   3.3 $\sin^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 - \cos z)$

   3.4 $\cos^2\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \cos z)$

   3.5 $1 + \tan^2 z = \sec^2 z$
4. ถ้า $\cos z = 2$ จงหาค่าของ $\cos 2z$ และ $\cos 3z$
5. จงหา $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ ของ $f(z) = u + iv$ เมื่อกำหนด $f(z)$ ดังนี้

   5.1 $f(z) = \sin 2z$

   5.2 $f(z) = \cos 3z$
6. จงแสดงว่า $|f(x+iy)| = |f(x) + f(iy)|$ เมื่อ $f(z) = \sin z$
   จงพิจารณาว่า มีฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นที่คล้องตามสมการนี้หรือไม่
7. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์หรือไม่ เพราะเหตุใด

   7.1 $\sin 2z$ 7.2 $\cos \bar{z}$
8. จงหาค่าของ $\sin i$, $\cos i$, $\tan(1+i)$
9. จงแสดงว่า

   $|\cos z|^2 = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x)$ และ

   $|\sin z|^2 = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x)$

3.4 ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิก (Hyperbolic Functions)

ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกของตัวแปรเชิงซ้อนนิยามได้ในทำนองเดียวกับฟังก์ชันไฮเพอร์-โบลิกของตัวแปรจริง

นิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ ฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกไซน์และไฮเพอร์โบลิกโคไซน์ของตัวแปร z เขียนแทนด้วย $\sinh z$ และ $\cosh z$ ตามลำดับ

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

สำหรับไฮเพอร์โบลิกเชิงซ้อนอื่น ๆ คือ ไฮเพอร์โบลิกแทนเจนต์ เขียนแทนด้วย $\tanh z$ โคแทนเจนต์คือ $\coth z$ เซแคนต์และโคเซแคนต์เขียนแทนด้วย $\operatorname{sech} z$ และ $\operatorname{csch} z$ ตามลำดับนิยามโดย

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z}$$

$$\operatorname{sech} z = \frac{1}{\cosh z}, \quad \operatorname{csch} z = \frac{1}{\sinh z}$$

เนื่องจาก e^z และ e^{-z} เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ ดังนั้น $\sinh z$, $\cosh z$ เป็นฟังก์ชันเอนไทร์ สำหรับ $\tanh z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เมื่อ $\cosh z \neq 0$

คุณสมบัติของ $\sinh z$ **และ** $\cosh z$

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
2. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$
3. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$
4. $\sinh(-z) = \sinh z$ และ $\cosh(-z) = \cosh z$
5. $\sinh z = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$
6. $\cosh z = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$
7. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$
8. $|\cosh|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$
9. $\sinh(z + i2k\pi) = \sinh z$ และ $\cosh(z + i2k\pi) = \cosh z$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

พิสูจน์ การพิสูจน์ได้จากนิยามโดยตรง จะแสดงบางข้อที่เหลือให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

3. $\cosh(z_1+z_2) = \dfrac{e^{z_1+z_2}+e^{-(z_1+z_2)}}{2}$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{z_1}\cdot e^{z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(2e^{z_1}\cdot e^{z_2}+2e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}+\left(e^{z_1}\cdot e^{-z_2}-e^{z_1}\cdot e^{-z_2}\right)+\left(e^{-z_1}\cdot e^{z_2}-e^{-z_1}\cdot e^{z_2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(e^{z_1}\cdot e^{z_2}+e^{z_1}\cdot e^{-z_2}-e^{-z_1}\cdot e^{z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left(e^{z_1}\cdot e^{z_2}-e^{z_1}\cdot e^{-z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{z_2}+e^{-z_1}\cdot e^{-z_2}\right)$$

$$= \frac{(e^{z_1}+e^{-z_1})}{2}\,\frac{(e^{z_2}+e^{-z_2})}{2}+\frac{(e^{z_1}-e^{-z_1})}{2}\,\frac{(e^{z_2}-e^{-z_2})}{2}$$

$$= \cosh z_1 \cosh z_2+\sinh z_1 \sinh z_2$$

6. **ให้** $z = x+iy$

$$\cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{e^{x+iy}+e^{-(x+iy)}}{2}$$

$$= \frac{e^x\cdot e^{iy}+e^{-x}\cdot e^{-iy}}{2}$$

$$= \frac{e^x(\cos y+i\sin y)+e^{-x}(\cos y-i\sin y)}{2}$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})}{2}\cos y+i\frac{(e^x-e^{-x})}{2}\sin y$$

$$= \cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$

ตัวอย่าง จงหาค่า z จาก $\cosh z = 2$

วิธีทำ จากคุณสมบัติข้อ 6

$$\cosh z = \cosh x\cos y+i\sinh x\sin y$$

$$\therefore\ \cosh x\cos y+i\sinh x\sin y = 2$$

$\therefore\ \cosh x\cos y = 2$ **และ** $\sinh x\sin y = 0$

มี 2 กรณีที่จะพิจารณา คือ

1. $\sin y = 0$ **และ** $\cosh x\cos y = 2$
2. $\sinh x = 0$ **และ** $\cosh x\cos y = 2$

กรณีที่ 1 ถ้า $\sin y = 0$ **และ** $\cosh x\cos y = 2$

$$\therefore \quad y = k\pi \quad \text{และ} \quad \cosh x \cos k\pi = 2$$

$$\therefore \quad (-1)^k \cosh x = 2$$

เพราะว่า $\cosh x > 0$ ทุกค่า x ดังนั้น $k = 2\ell$

$$\cosh x = 2$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 2$$

$$(e^x)^2 - 4e^x + 1 = 0$$

$$e^x = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$x = \ell n(2 \pm \sqrt{3})$$

$$z = x + iy$$

$$= \ell n(2 \pm \sqrt{3}) + i2\ell\pi \quad , \quad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

กรณี 2 ถ้า $\sinh x = 0$ และ $\cosh x \cos y = 2$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$$

$$\therefore \quad e^{2x} = 1$$

นั่นคือ $x = 0$

ถ้า $x = 0$ จะได้ $\cosh x = 1$ ดังนั้น $\cos y = 2$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ตัวอย่าง จงหาค่า z จาก $\sinh z = 0$ (zeros of sinh z)

วิธีทำ จากคุณสมบัติข้อ 7

$$|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y = 0$$

$$\therefore \quad \sinh x = 0 \quad \text{และ} \quad \sin y = 0$$

$$\therefore \quad x = 0 \quad \text{และ} \quad y = k\pi$$

นั่นคือ $z = x + iy$

$$= 0 + ik\pi$$

$$= ik\pi \quad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็มใด ๆ}$$

อนุพันธ์ของ $\sinh z$ และ $\cosh z$

จากอนุพันธ์ของ e^z เราสามารถหาอนุพันธ์ของ $\sinh z$ และ $\cosh z$ ได้โดยตรง เช่น ต้องการหาอนุพันธ์ของ $\sinh z$ จะได้

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\frac{d}{dz}\sinh z = \frac{d}{dz}\frac{(e^z - e^{-z})}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}) = \cosh z$$

สำหรับอนุพันธ์ของไฮเพอร์โบลิกเชิงซ้อนอื่น ๆ ก็สามารถหาได้ในทำนองเดียวกัน ดังนั้น สรุปเกี่ยวกับอนุพันธ์ได้ดังนี้

1. $\frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z$

2. $\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z$

3. $\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$

4. $\frac{d}{dz}\coth z = -\operatorname{csch}^2 z$

5. $\frac{d}{dz}\operatorname{sech} z = -\operatorname{sech} z \tanh z$

6. $\frac{d}{dz}\operatorname{csch} z = -\operatorname{csch} z \coth z$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\frac{d}{dz}\tanh z = \operatorname{sech}^2 z$

วิธีทำ

$$\frac{d}{dz}\tanh z = \frac{d}{dz}\left(\frac{\sinh z}{\cosh z}\right)$$

$$= \frac{\cosh z \frac{d}{dz}\sinh z - \sinh z \frac{d}{dz}\cosh z}{\cosh^2 z}$$

$$= \frac{(\cosh z)(\cosh z) - (\sinh z)(\sinh z)}{\cosh^2 z}$$

$$= \frac{\cosh^2 z - \sinh^2 z}{\cosh^2 z}$$

$$= \frac{1}{\cosh^2 z} = \operatorname{sech}^2 z$$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาค่าของฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูป $x+iy$

   1.1 $f(z) = 4\sinh\left(\frac{\pi i}{3}\right)$

   1.2 $f(z) = \cosh(2k+1)\frac{\pi i}{2}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   1.3 $f(z) = \coth\frac{3\pi i}{4}$

2. จงแสดงว่า $\lim\limits_{z\to\pi/2} z^2\cosh\frac{4z}{3} = \frac{\pi^2}{8}$

3. จงแสดงว่า

   3.1 $\sinh z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = k\pi i$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

   3.2 $\cosh z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $z = \left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม

4. จงพิสูจน์ว่า

   4.1 $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

   4.2 $\sinh(z_1+z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$

   4.3 $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$

5. จงหาศูนย์ของ $\cosh z$, $\tanh z$

6. จงหาอนุพันธ์ของ $\sinh z$, $\cosh z$, $\coth z$, $\operatorname{sech} z$, $\operatorname{csch} z$

7. จงพิสูจน์ว่า

   7.1 $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$

   7.2 $1-\tanh^2 z = \operatorname{sech}^2 z$

   7.3 $\sinh^2 z = \frac{1}{2}(\cosh z - 1)$

   7.4 $\cosh^2 z = \frac{1}{2}(\cosh z + 1)$

8. จงหา $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ ซึ่ง

   8.1 $\sinh 2z = u+iv$

8.2 $z \cosh z = u + iv$

9. **จงแสดงว่า** $\sinh(z + 2\pi i) + \sinh z$

และ $\cosh(z + 2\pi i) = \cosh z$

3.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (Inverse Trigonometric Functions)

ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน สามารถหาได้ในเทอมของลอการิทึม ดังนี้

ฟังก์ชันผกผันของ $z = \sin w$ เขียนแทนด้วย $\sin^{-1}z = w$ ในการหา $\sin^{-1}z$ นั้น คือหาค่า w ในเทอมของ z จากนิยามจะได้

$$
\begin{aligned}
z &= \sin w \\
&= \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \\
e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \\
(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 &= 0 \\
e^{iw} &= \frac{2iz \pm \sqrt{-4z^2+4}}{2} \\
e^{iw} &= iz \pm (1-z^2)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

หรือ
$$e^{iw} = iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}$$

เมื่อ $(1-z^2)^{\frac{1}{2}}$ คือรากที่สองของ $(1-z^2)$ ซึ่งมีค่าที่ต่างกัน 2 ค่า

$$
\begin{aligned}
iw &= \log\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\
w &= -i \log\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\sin^{-1}z &= -i \log\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]
\end{aligned}
$$

ข้อสังเกต จะเห็นว่า ค่า $\sin^{-1}z$ เป็นฟังก์ชันหลายค่า (multi-valued of function) ซึ่งมีค่าจำนวนอนันต์ (infinite value) ที่แต่ละค่า z แต่ถ้าเราจำกัดค่ารากที่สองของ $(1-z^2)$ ให้เป็นค่าใดค่าหนึ่ง และจำกัดลอการิทึมให้เป็นฟังก์ชันค่าเดียว ดังนั้นฟังก์ชัน $\sin^{-1}z$ จะเป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวและเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ด้วย เพราะว่า $\sin^{-1}z$ ที่ได้เป็นฟังก์ชันประกอบของฟังก์ชันวิเคราะห์

ในทำนองเดียวกัน ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันอื่น ๆ เช่น $\cos^{-1}z$ และ $\tan^{-1}z$ สามารถหาได้เช่นกัน

$$
\begin{aligned}
\cos^{-1}z &= -i \log\left[z + (z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right] \\
\tan^{-1}z &= \frac{1}{2} \log \frac{i+z}{i-z}
\end{aligned}
$$

สรุปฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผัน ดังนี้

1. $\sin^{-1}z = -i\log\left[iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]$

2. $\cos^{-1}z = -i\log\left[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

3. $\tan^{-1}z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$

4. $\cot^{-1}z = -\frac{i}{2}\log\frac{z+i}{z-i}$

5. $\sec^{-1}z = -i\log\left[\frac{1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\right]$

6. $\csc^{-1}z = -i\log\left[\frac{i+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z}\right]$

7. $\sinh^{-1}z = \log\left[z+(z^2+1)^{\frac{1}{2}}\right]$

8. $\cosh^{-1}z = \log\left[z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right]$

9. $\tanh^{-1}z = \frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$

10. $\coth^{-1}z = \frac{1}{2}\log\frac{z+1}{z-1}$

11. $\operatorname{sech}^{-1}z = \log\left[\frac{1+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}{z}\right]$

12. $\operatorname{csch}^{-1}z = \log\left[\frac{1+(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}{z}\right]$

จากสูตร $1-12$ จะเห็นว่า ค่าของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและฟังก์ชันไฮเพอร์โบลิกผกผันใดที่มีเทอม $(1-z^2)$, $(1+z^2)$, (z^2-1) นั้น เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เมื่อเราจำกัดค่ารากที่สองของเทอมเหล่านี้เป็นค่าใดค่าหนึ่ง ดังนั้นเราสามารถหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันเหล่านี้ได้ เช่น ต้องการหา $\frac{d}{dz}\sin^{-1}z$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\sin^{-1}z &= \frac{d}{dz}\left[-i\log\left\{iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}\right] \\
&= \frac{-i}{\left\{iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}}\cdot\frac{d}{dz}\left(iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{-i}{\left\{iz+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right\}}\left[i+\frac{(-z)}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}\right]
\end{aligned}$$

$$= \frac{(1-z^2)^{\frac{1}{2}} + iz}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}\left[iz + (1-z^2)^{\frac{1}{2}}\right]}$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dz}\sin^{-1}z = \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

ในทำนองเดียวกัน สำหรับอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผันและไฮเพอร์โบลิกผกผันอื่น ๆ จะได้ดังนี้

1. $\dfrac{d}{dz}\sin^{-1}z = \dfrac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

2. $\dfrac{d}{dz}\cos^{-1}z = \dfrac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

3. $\dfrac{d}{dz}\tan^{-1}z = \dfrac{1}{1+z^2}$

4. $\dfrac{d}{dz}\cot^{-1}z = \dfrac{-1}{1+z^2}$

5. $\dfrac{d}{dz}\sec^{-1}z = \dfrac{1}{z(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

6. $\dfrac{d}{dz}\csc^{-1}z = \dfrac{1}{z(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

7. $\dfrac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \dfrac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

8. $\dfrac{d}{dz}\cosh^{-1}z = \dfrac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}$

9. $\dfrac{d}{dz}\tanh^{-1}z = \dfrac{1}{1-z^2}$

10. $\dfrac{d}{dz}\coth^{-1}z = \dfrac{1}{1-z^2}$

11. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{sech}^{-1}z = \dfrac{-1}{z(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

12. $\dfrac{d}{dz}\operatorname{csch}^{-1}z = \dfrac{-1}{z(z^2+1)^{\frac{1}{2}}}$

ตัวอย่าง จงหาศูนย์ของ $\sin z$

วิธีทำ ในที่นี้ต้องการหารากของสมการ $\sin z = 0$

$$z = \sin^{-1}0$$

จากฟังก์ชันผกผัน $\sin^{-1}z$

$$\begin{aligned} z &= -i\log\left|i0+(1-0^2)^{\frac{1}{2}}\right| \\ &= -i\log(1)^{\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{i}{2}\log 1 \\ &= -\frac{i}{2}\left[\ell n|1|+i\arg 1\right] \\ &= -\frac{i}{2}\left[0+i(0+2k\pi)\right] \qquad \text{เมื่อ } k \text{ เป็นจำนวนเต็ม} \\ &= k\pi \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ $\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-1} &= -1\left\{\tanh^{-1}\{(iz+2)\}^{-2}\frac{d}{dz}\tan^{-1}(iz+2)\right\} \\ &= -\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-2}\left\{\frac{1}{1-(iz+2)^2}\right\}\frac{d}{dz}(iz+2) \\ &= \frac{-i\{\tanh^{-1}(iz+2)\}^{-2}}{1-(iz+2)^2} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหารากของสมการ $\cosh z = 2$

วิธีทำ ในที่นี้จะใช้ฟังก์ชันผกผัน จากสูตร

$$\begin{aligned} \cosh^{-1}w &= \log\left|w+(w^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| \\ \therefore\ z &= \cosh^{-1}2 \\ &= \log\left|2+(2^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| \\ &= \log\left[2+\sqrt{3}\right] \\ &= \ell n|2+\sqrt{3}|+i\arg(2+\sqrt{3}) \\ &= \ell n(2+\sqrt{3})+i(2k\pi), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

จะเห็นว่าได้คำตอบอย่างเดียวกับตัวอย่าง วิธีนี้จะสั้นกว่ามาก ถ้าทราบสูตรไฮเพอร์-โบลิกผกผัน

ตัวอย่าง ถ้า $w = \sin^{-1}(t-3)$ และ $z = \cos(\ell n\, t)$ จงหาค่าของ $\frac{dw}{dz}$

วิธีทำ

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{dt} \Big/ \frac{dz}{dt}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{1-(t-3)^2}}}{-\sin(\ell n\, t)\left|\frac{1}{t}\right|}$$

$$= -\frac{t}{\sin(\ell n\, t)\sqrt{1-(t-3)^2}}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\cos^{-1} i$

วิธีทำ จาก

$$\begin{aligned}
\cos^{-1} i &= -i \log\left|i + (i^2-1)^{\frac{1}{2}}\right| \\
&= -i \log\left[i + \sqrt{2} i\right] \\
&= -i\left[\ell n\,|(1+\sqrt{2})i| + i \arg(1+\sqrt{2})i\right] \\
&= -i\left|\ell n(1+\sqrt{2}) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right| \\
&= -i\,\ell n(1+\sqrt{2}) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi
\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงแสดงว่า

   1.1 $\cos^{-1}z = -i\log\left|z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}\right|$

   1.2 $\tan^{-1}z = \frac{i}{2}\log\frac{i+z}{i-z}$

   1.3 $\sinh^{-1}z = \log\left|z+(z^2+1)^{\frac{1}{2}}\right|$

2. จงหาค่าของ $\sin^{-1}2$, $\cosh^{-1}i$, $\sinh^{-1}(\ell n(-1))$, $\tanh^{-1}\infty\cdot\tan^{-1}(1+i)$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sec^{-1}i$

3. จงพิสูจน์ว่า

   3.1 $\frac{d}{dz}\cos^{-1}z = \frac{-1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}$

   3.2 $\frac{d}{dz}\tan^{-1}z = \frac{1}{1+z^2}$

   3.3 $\frac{d}{dz}\sinh^{-1}z = \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{1}{2}}}$

4. จงหารากของสมการ

   4.1 $\sinh z = i$

   4.2 $\cosh z = \frac{1}{2}$

3.6 ฟังก์ชันรูป z^c

พิจารณาจำนวนเชิงซ้อนยกกำลังจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ เขียนในรูปของ z^c เมื่อ c เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ z^c นั้นต่างจากการหาค่า z ยกกำลังจำนวนเต็มหรือจำนวนตรรกยะ ซึ่งได้กล่าวถึงการหาค่าแล้วในบทที่ 1 เช่น การหาค่าของ z^3, $z^{\frac{1}{4}}$, z^{-2} เป็นต้น ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการหาค่าฟังก์ชันในรูป i^i, $(1+i)^{2i}$ เป็นต้น ซึ่ง z^c ก็สามารถให้นิยามอยู่ในรูปฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียล

นิยาม ให้ c เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

$$z^c = e^{c \log z} = \exp(c \log z) \qquad \text{เมื่อ} \quad z \neq 0$$

เช่น จงหาค่า i^{-2i} จะได้

$$\begin{aligned} i^{-2i} &= \exp(-2i \log i) \\ &= \exp\left[-2i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i\right] \\ &= \exp[(4k+1)\pi], \qquad k + 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

จากนิยาม z^c ถ้าให้ $\theta = \arg z$ และจากนิยาม $\log z = \ell n|z| + i \arg z$

$$\begin{aligned} z^c &= \exp[c(\ell n|z| + i \arg z)] \\ &= \exp[c(\ell n|z| + i(\theta + 2k\pi))] \\ &= e^{c\ell n|z|} \cdot e^{ic\theta} \cdot e^{ic2k\pi} \end{aligned}$$

จะเห็นว่า ค่า z^c มีหลายค่า เพราะว่า $e^{ic2k\pi}$ มีหลายค่า

คุณสมบัติของ z^c

1. $z^{-c} = \dfrac{1}{z^c}$
2. $z^{c_1} \cdot z^{c_2} = z^{c_1 + c_2}$

คุณสมบัติอื่น ๆ เหมือนในกรณีค่าจริง

พิสูจน์ จากคุณสมบัติของ $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$ จะได้

1. $$\begin{aligned} z^{-c} &= e^{-c \log z} \\ &= \frac{1}{e^{c \log z}} \\ &= \frac{1}{z^c} \end{aligned}$$

$$2. \quad z^{c_1} \cdot z^{c_2} = e^{c_1 \log z} \cdot e^{c_2 \log z}$$
$$= e^{(c_1 + c_2)\log z}$$
$$= z^{c_1 + c_2}$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $(1+i)^i = \exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\exp\left[\left(\frac{i}{2}\right)\ell n\, 2\right]$

วิธีทำ จากนิยามจะเห็นว่า

$$
\begin{aligned}
(1+i)^i &= \exp\left(i \log(1+i)\right) \\
&= \exp i\left[\ell n|1+i| + i \arg(1+i)\right] \\
&= \exp i\left[\ell n\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)\right] \\
&= \exp\left[\left(\frac{i}{2}\right)\ell n\, 2\right]\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\operatorname{Re}\{(1-i)^{1+i}\}$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
(1-i)^{1+i} &= \exp\left[(1+i)\log(1-i)\right] \\
&= \exp\left[(1+i)\{\ell n|1-i| + i \arg(1-i)\}\right] \\
&= \exp\left[(1+i)\left\{\ell n\sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right\}\right] \\
&= \exp\left[\ell n\sqrt{2} + i\ell n\sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) - \left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \\
&= \exp\left[\left(\ell n\sqrt{2} - \frac{7\pi}{4} - 2k\pi\right) + i\left(\ell n\sqrt{2} + \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \\
&= e^{\frac{1}{2}\ell n\, 2 - \frac{7\pi}{4} - 2k\pi} \cdot e^{i\left(\frac{\ell n\, 2}{2} + \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ell n\, 2 - \frac{7\pi}{4} - 2k\pi}\left[\cos\left(\frac{\ell n\, 2}{2} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\ell n\, 2}{2} + \frac{7\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\operatorname{Re}\{(1-i)^{1+i}\} = e^{\frac{1}{2}\ell n\, 2 - \frac{7\pi}{4} - 2k\pi} \cos\left(\frac{7\pi}{4} + \frac{\ell n\, 2}{2}\right)$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $5^{\frac{1}{2}}$

วิธีทำ จากนิยาม

$$
\begin{aligned}
5^{\frac{1}{2}} &= e^{\left(\frac{1}{2}\right)\log 5} \\
&= e^{\frac{1}{2}(\ell n\, 5 + 2k\pi i)} \\
&= e^{\frac{1}{2}\ell n\, 5}\, e^{k\pi i} = \pm\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

จากเรื่อง $\log z$ เราทราบว่า $\log z$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว และเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ $|z| > 0$ และ $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ ดังนั้น ถ้านิยาม z^c เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว จะต้องกำหนด $|z| > 0$ และ $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$ นั่นคือ

นิยาม $z^c = \exp(c \log z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว เมื่อ $|z| > 0$ และ $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$ เมื่อ α เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ดังนั้น สามารถพิจารณาอนุพันธ์ของ z^c ได้

$$\frac{d}{dz}z^c = \frac{d}{dz}e^{c \log z}$$

จากนิยามฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว z^c ทำให้ $\exp(c \log z)$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวด้วย และ $\exp(c \log z)$ เป็นฟังก์ชันประกอบ

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}z^c &= e^{c \log z}\frac{d}{dz}(c \log z) \\
&= e^{c \log z}\frac{c}{z} \\
&= \frac{ce^{c \log z}}{e^{\log z}} \\
&= ce^{(c-1)\log z} \\
&= cz^{c-1}, \quad |z| > 0,\ \alpha < \arg z < \alpha + 2\pi
\end{aligned}
$$

เมื่อ $\alpha = -\pi$ จะได้ $-\pi < \arg z < \pi$ ดังนั้นจะนิยามค่าสำคัญของ $\log z$

นิยาม ค่าสำคัญของฟังก์ชันหลายค่า z^c (principal value of multivalued z^c) เขียนแทนด้วย $P(z^c)$ หมายถึง

$$P(z^c) = \exp(c \operatorname{Log} z) \quad \text{เมื่อ} \quad |z| > 0,\ -\pi < \operatorname{Arg} z \leqslant \pi$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $P((-i)^i)$, $P((1+i)^{2-i})$, $P(3^{-i})$

วิธีทำ 1.

$$\begin{aligned} P((-i)^i) &= \exp[i\,\mathrm{Log}(-i)] \\ &= \exp[i(\ell n|-i| + i\,\mathrm{Arg}(-i))] \\ &= \exp i\left(0 + \left(-\frac{\pi}{2}\right)i\right) \\ &= \exp\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} P((1+i)^{2-i}) &= \exp[(2-i)\,\mathrm{Log}(1+i)] \\ &= \exp\left[(2-i)\left(\ell n\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}\right)\right] \\ &= \exp\left[2\ell n\sqrt{2} + \frac{\pi}{4} + i\left(\frac{\pi}{2} - \ell n\sqrt{2}\right)\right] \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} P(3^{-i}) &= \exp[-i\,\mathrm{Log}\,3] \\ &= \exp[-i(\ell n|3| + i\,\mathrm{Arg}\,3)] \\ &= \exp(-i\ell n 3) \end{aligned}$$

พิจารณาฟังก์ชันเอกซ์โปเนนเชียลฐาน c เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน ซึ่ง $c \neq 0$ เขียนในรูปของ c^z

นิยาม $c^z = \exp(z \log c)$

เมื่อกำหนด $\log c$ ให้ จะได้ c^z เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวและเป็นฟังก์ชันเอนไทร์

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}c^z &= \frac{d}{dz}e^{z\log c} \\ &= e^{z\log c}\frac{d}{dz}(z\log c) \\ &= e^{z\log c}\log c \\ &= c^z\log c \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของ z^i, $(z-i)^{2z+1}$

วิธีทำ 1. โดยใช้สูตรโดยตรง จะได้

$$\frac{d}{dz}z^c = cz^{c-1}$$

$$\frac{d}{dz}z^i = iz^{i-1}$$

2. เนื่องจากทั้ง $z-i$ และ $2z+1$ เป็นฟังก์ชันประกอบ ดังนั้นจะหาอนุพันธ์โดยใช้นิยาม

$$(z-i)^{2z+1} = e^{(2z+1)\log(z-i)}$$

$$\frac{d}{dz}(z-i)^{2z+1} = \frac{d}{dz}e^{(2z+1)\log(z-i)}$$

$$= e^{(2z+1)\log(z-i)}\frac{d}{dz}\left[(2z+1)\log(z-i)\right]$$

$$= e^{(2z+1)\log(z-i)}\left[\log(z-i)\frac{d}{dz}(2z+1)+(2z+1)\frac{d}{dz}\log(z-i)\right]$$

$$= e^{(2z+1)\log(z-i)}\left[2\log(z-i)+(2z+1)\frac{1}{z-i}\frac{d}{dz}(z-i)\right]$$

$$= 2(z-i)^{2z+1}\log(z-i)+\frac{(2z+1)}{z-i}(z-i)^{2z+1}$$

$$= 2(z-i)^{2z+1}\log(z-i)+(2z+1)(z-i)^{2z}$$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงหาค่าของ $1^{\sqrt{2}}$, i^i, $(-1+i)^{2i}$, $(2-2i)^{1-i}$, $|(-i)^{-i}|$

2. จงแสดงว่า

   2.1 $(-1)^{\frac{1}{\pi}} = \exp[(2n+1)i]$

   2.2 ถ้า $z \neq 0$ และ k เป็นค่าจริง

   $|z^k| = \exp(k\ell n|z|) = |z|^k$

3. จงหาค่าสำคัญของฟังก์ชันหลายค่า z^c ต่อไปนี้

   3.1 $(1-i)^{4i}$

   3.2 2^i

   3.3 i^i

4. จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของ z^z เมื่อ $z = x+iy$

5. จงหาอนุพันธ์ของ z^{2i-1}, $(2z+i)^z$