บทที่ 2
ฟังก์ชันวิเคราะห์
(Analytic Functions)

ในบทนี้จะศึกษาถึงฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน การหาลิมิต ความต่อเนื่อง และทฤษฎีเกี่ยวกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน นอกจากนี้ยังจะศึกษาถึงฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งเป็นเรื่องที่สำคัญมากในการศึกษาถึงการวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อน

2.1 ฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน (Functions of a Complex Variable)

ในการนิยามฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนก็เช่นเดียวกับการนิยามฟังก์ชันของตัวแปรจริงในวิชาแคลคูลัสที่ได้ศึกษามาแล้วนั่นเอง ดังนั้นความสัมพันธ์จาก C ไปยัง C จะเรียกว่าเป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน เมื่อ z เป็นตัวแปรอิสระ และ w เป็นตัวแปรตามจะเขียนฟังก์ชันอยู่ในรูป $w = f(z)$

นิยาม ให้ $S \subseteq C$ ฟังก์ชัน f นิยามได้บนเซต S คือกฎซึ่งสำหรับแต่ละ z ใน S จะได้จำนวนเชิงซ้อน w เรียก w ว่า **ค่าของ** f ที่ z (value of f at z) และใช้แทนด้วย $f(z)$ นั่นคือ

$$w = f(z)$$

เซต S เรียกว่า เป็น **โดเมนของฟังก์ชัน** f

หมายเหตุ

1. โดยทั่วไปถ้าโดเมนของฟังก์ชันไม่ได้กำหนดให้ จะถือว่าโดเมนของฟังก์ชัน f คือสับเซตที่ใหญ่ที่สุดของจำนวนเชิงซ้อนที่ทำให้การหาค่าของฟังก์ชันนั้นเป็นไปได้ เช่น $f(z) = \frac{1}{z}$ เป็นที่เข้าใจว่าโดเมนของ $\frac{1}{z}$ คือเซตของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ที่ไม่เป็นศูนย์

2. ในการกล่าวถึงนิยามของฟังก์ชัน เพื่อความสะดวกเราจะเรียกค่าของฟังก์ชันว่าฟังก์ชัน เช่น เราจะกล่าวว่า พิจารณาฟังก์ชัน $f(z) = z+1$ แทนที่จะกล่าวว่า พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งค่าของฟังก์ชันคือ $f(z) = z+1$

ในการศึกษาฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ถ้าแต่ละค่าของตัวแปรเชิงซ้อนสมนัยกับค่าของฟังก์ชันได้มากกว่าหนึ่งค่า เช่น $w_1 = f(z)$ และ $w_2 = f(z)$ และ $w_1 \neq w_2$ จะเรียกฟังก์ชันชนิดนี้ว่า **ฟังก์ชันหลายค่า** (multi-value function) ถ้าสำหรับแต่ละ z มี w ได้ตัวเดียว ซึ่ง $z = f(w)$ จะเรียกฟังก์ชัน f ว่า **ฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว** (single-valued function) ในการศึกษาเรื่องฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อกล่าวถึง **ฟังก์ชัน** เราหมายถึงฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยวเท่านั้น

ถ้าพิจารณา $w = u+iv$ เป็นค่าของฟังก์ชัน f ที่ $z = x+iy$

$$w = f(z)$$

$$u+iv = f(x+iy)$$

จะเห็นว่าแต่ละจำนวนจริง u, v จะขึ้นกับค่าจริง x, y เช่น $f(z) = z^2$

$$f(z) = (x+iy)^2$$

$$u+iv = x^2-y^2+2xyi$$

ดังนั้น $$u = x^2-y^2, \quad v = 2xy$$

นั่นคือฟังก์ชัน f สามารถเขียนอยู่ในเทอมของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง x และ y คือ

$$f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$$

นิยาม ให้ $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ถ้า $v(x, y) = 0$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นจำนวนจริงเสมอ เรียก $f(z)$ ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเชิงซ้อน** (real-valued function of a complex variable)

เช่น $\quad f(z) = |z|^2$

จะเห็นว่า $\quad |z|^2 = x^2+y^2$ เป็นค่าจริงเสมอ

ดังนั้น $f(z)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรเชิงซ้อน

นิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ หรือศูนย์ และ $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน (complex constants) ฟังก์ชัน $P(z)$

$$P(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n, \qquad a_n \neq 0$$

เรียกว่า **ฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น** n (polynomial of degree n) โดเมนของ $P(z)$ เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน

ถ้า $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ เมื่อ $P(z)$ และ $Q(z)$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม เรียกฟังก์ชัน $f(z)$ ว่า **ฟังก์ชันตรรกยะ** (rational function) และนิยามได้ทุกค่า z ยกเว้น z ที่ทำให้ $Q(z) = 0$

ตัวอย่าง จงเขียน $f(z) = z^3 - z$ ให้อยู่ในรูปของ $u(x, y) + iv(x, y)$

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ z^3 &= (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - iy^3 \\ z^3 - z &= (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3) - x - iy \\ f(z) &= (x^3 - 3xy^2 - x) + i(3x^2y - y^3 - y) \\ \therefore\ u(x, y) &= x^3 - 3xy^2 - x \\ v(x, y) &= 3x^2y - y^3 - y \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z+\bar{z}}$

วิธีทำ 1. $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

$f(z)$ หาค่าได้เมื่อ $z^2 + 1 \neq 0$

นั่นคือ $z \neq \pm i$

ดังนั้น โดเมนของ $f(z) = \{z / z \neq \pm i\}$

2. $f(z) = \dfrac{1}{z+\bar{z}}$

$f(z)$ หาค่าได้เมื่อ $z + z \neq 0$

แต่ $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

นั่นคือ $2\operatorname{Re} z \neq 0$

$\therefore\ \operatorname{Re} z \neq 0$

ดังนั้น โดเมนของ $f(z) = \{z / \operatorname{Re} z \neq 0\}$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชัน $f(z) = z^2 + 1$ ที่ $z = -2 + i$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 + 1 \\ f(-2+i) &= (-2+i)^2 + 1 \\ &= (4 - 4i + i^2) + 1 \\ &= 4 - 4i \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของฟังก์ชัน $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$ ที่ $z = 3+\frac{\pi}{2}i$

วิธีทำ

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^x \cos y + ie^x \sin y \\
f\left(3+\frac{\pi}{2}i\right) &= i^3 \cos \frac{\pi}{2} + ie^3 \sin \frac{\pi}{2} \\
&= ie^3
\end{aligned}
$$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาค่าของฟังก์ชันที่จุดที่กำหนดให้

   1.1 $f(z) = z(2-z), \quad z = 1+i, \quad z = 2-2i$

   1.2 $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}, \quad z = i, \quad z = 1-i$

   1.3 $f(z) = |z|^2-(\operatorname{Re} z)^2, \quad z = 2+i, \ -1-i$

2. กำหนดให้ $f(z) = \dfrac{2z+1}{3z-2}$ จงหาค่า z ซึ่งทำให้

   2.1 $f(z) = i$

   2.2 $f(z) = 2-3i$

3. จงเขียน $f(z)$ ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูป $u(x, y)+iv(x, y)$

   3.1 $f(z) = 2z^2-3iz$

   3.2 $f(z) = z+\dfrac{1}{z}$

   3.3 $f(z) = z^3+z+1$

4. จงพิจารณาว่าโดเมนของฟังก์ชันต่อไปนี้คือเซตใด

   4.1 $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

   4.2 $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$

   4.3 $f(z) = \operatorname{Arg}\left(\dfrac{1}{z}\right)$

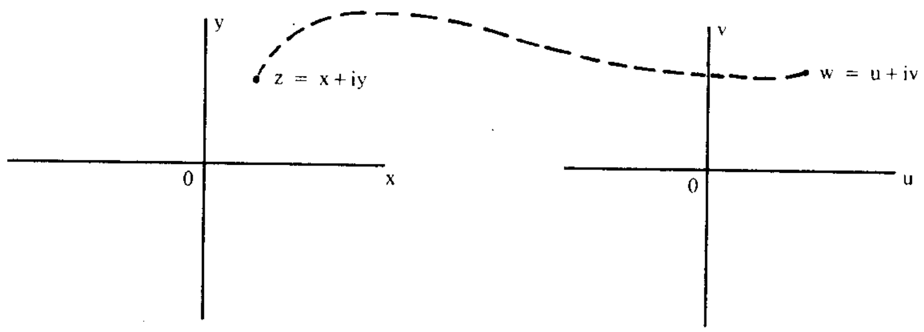
5. จงเขียน $f(z) = x^2-y^2-2y+i(2x-2xy)$ ในรูปของ z หรือ $\bar{z}$

2.2 การส่ง (Mappings)

พิจารณาสมการ $w = f(z)$ ถ้าให้ $w = u+iv$ และ $z = x+iy$ จะได้

$$u+iv = f(x+iy) \qquad \text{........(2.2.1)}$$

จะเห็นว่าตัวแปรเชิงซ้อน z ขึ้นอยู่กับตัวแปรอิสระ x และ y ในขณะที่ค่าของฟังก์ชัน w ขึ้นอยู่กับตัวแปรตาม u และ v ถ้าจะเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์ของสมการ (2.2.1) จะเห็นว่ามีตัวแปรอยู่ถึง 4 ตัวคือ x, y, u, v ถ้าเขียนแทนด้วยรูปก็จะต้องสร้างกราฟใน 4 มิติ ซึ่งเราไม่สามารถจะเขียนให้เห็นได้ ดังนั้นจึงใช้วิธีกำหนดจุด (x, y) ใน**ระนาบ** z (z plane) และเขียนอีกระนาบหนึ่งเพื่อลงจุด w ที่สมนัยกับจุด z เรียกว่า **ระนาบ** w (w plane) ดังนั้นการแสดงฟังก์ชันเชิงซ้อนโดยกราฟนี้เป็น **การส่ง** จุด z ในระนาบ z ไปยังจุด w ในระนาบ w หรือเป็นการส่งสมาชิกในเซตของจุด z ในระนาบ z ไปยังสมาชิกของจุด w ในระนาบ w และเรียกฟังก์ชัน f ว่า **การส่ง** (mapping) หรือ **การแปลง** (transformation)



ระนาบ z

รูป 2.1

ระนาบ w

รูป 2.2

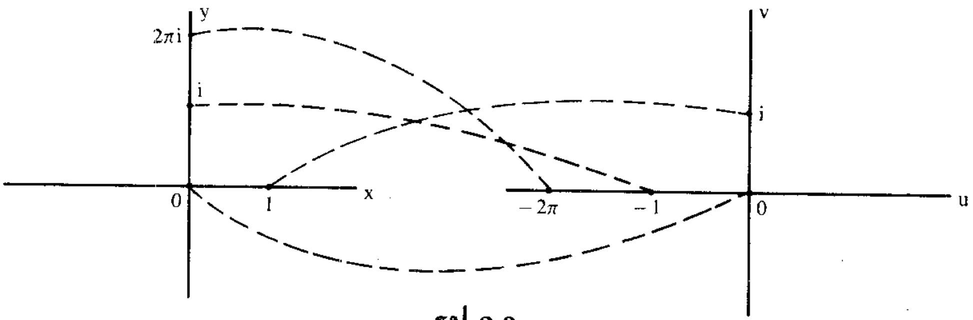
ตัวอย่าง จงลงจุดแสดงการส่งของ $w = iz$ ที่ $z = 0, i, 2\pi i, 1$

วิธีทำ จะเห็นว่า ที่ $z = 0$ ถูกส่งไปยัง $w = 0$

ที่ $z = i$ ถูกส่งไปยัง $w = -1$

ที่ $z = 2\pi i$ ถูกส่งไปยัง $w = -2\pi$

ที่ $z = 1$ ถูกส่งไปยัง $w = i$



รูป 2.3

จะเห็นว่า แต่ละจุดหมุนไปจากเดิม $\frac{\pi}{2}$ ในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

นิยาม ถ้า $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน และ S เป็นโดเมนของ f **ภาพ** (image) **ของ** z คือค่าของฟังก์ชันที่ z หรือ $w = f(z)$ ถ้า $T \subseteq S$ **ภาพของ** T (image of T) คือเซตของภาพของแต่ละ z ในเซต T

นิยาม **พิสัย** (range) ของ f คือเซตของภาพของทุกจุดในโดเมนของ f

นิยาม ถ้า $w = f(z)$ **ภาพผกผัน** (inverse image) ของจุด w คือเซตของจุด z ในโดเมนของ f ซึ่งมีภาพเป็น w

โดยทั่วไปเราจะพิจารณาการส่งของเซตของจุดในระนาบ z ไปยังระนาบ w มากกว่าจะดูการส่งของจุดต่อจุดซึ่งไม่น่าสนใจนัก พิจารณาการส่งจากเซตของจุดไปยังระนาบ w ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้ $w = f(z) = \sqrt{x^2+y^2} - iy$ จงพิจารณาการส่งของ f

วิธีทำ $f(z) = \sqrt{x^2+y^2} - iy$

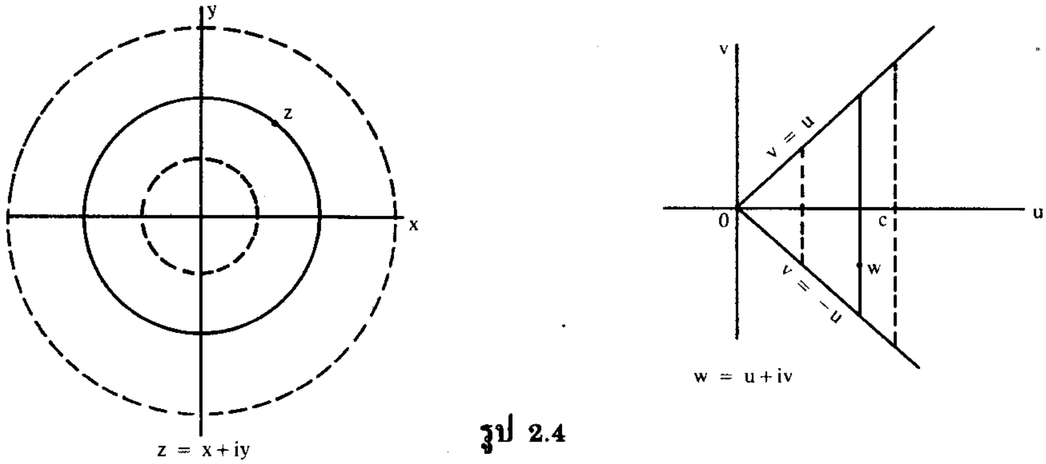
ในที่นี้ $u(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $v(x, y) = -y$

ถ้าพิจารณาเส้นตรง $u = c$ เมื่อ $c \geqslant 0$

$$\therefore \ x^2+y^2 = c^2$$

ดังนั้นทุกจุดบนวงกลม $x^2+y^2 = c^2$ ถูกส่งไปยังเส้นตรง $u = c$

เพราะว่า $v = -y$ และถ้า $-c \leqslant y \leqslant c$ ดังนั้นภาพของวงกลมคือเส้นตรง $u = c$ และ $-c \leqslant v \leqslant c$ ดังรูป



รูป 2.4

พิสัยของฟังก์ชัน f คือ $u \geqslant 0$ และ $-u \leqslant v \leqslant u$

ตัวอย่าง จงอธิบายการส่งของ $w = f(z) = \bar{z}$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$ ถ้า $w = u+iv$

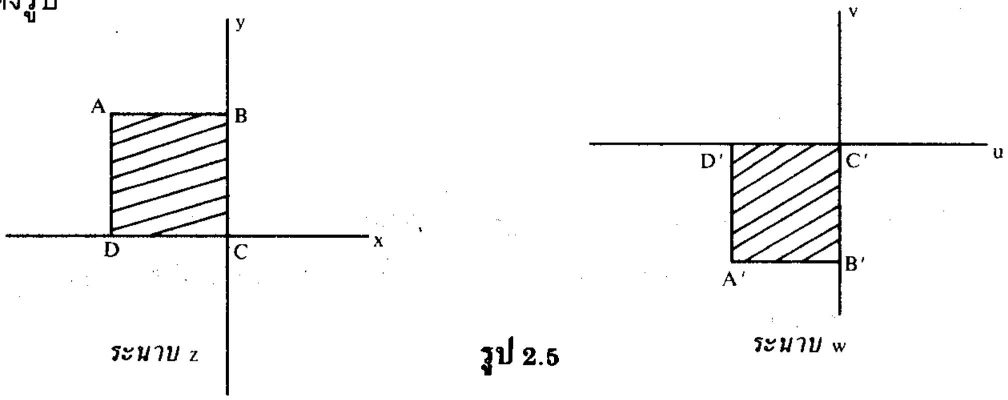
$$\begin{aligned} w &= \bar{z} \\ u+iv &= x-iy \\ \therefore\ u &= x \\ v &= -y \end{aligned}$$

นั่นคือฟังก์ชันนี้เพียงแต่เปลี่ยนเครื่องหมายของส่วนจินตภาพให้เป็นตรงข้าม ส่วนจริงคงเดิม เช่น

จุด $z_1 = 1-i$ จะได้จุด $w_1 = 1+i$

$z_2 = -2+3i$ จะได้จุด $w_1 = -2-3i$

ถ้าพิจารณาเซตของจุดในรูปสี่เหลี่ยม ABCD จะได้จุดในรูปสี่เหลี่ยม A′B′C′D′ ในระนาบ w ดังรูป



รูป 2.5

2.3 ลิมิต (Limits)

ในการศึกษาถึงลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อน จะนิยามได้ในทำนองเดียวกับลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้ว

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อนซึ่งนิยามได้บนเซต S z_0 เป็นจุดลิมิตของ S_1 ซึ่ง $S_1 \subseteq S$ w เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งทุกค่า $\varepsilon > 0$ ใด ๆ จะสามารถหา $\delta > 0$ ซึ่งทุกค่า $z \in S_1$ ถ้า $0 < |z - z_0| < \delta$ จะได้ $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ เรากล่าวว่า **ลิมิตของ** f เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 ทุก z ใน S_1 ของ f(z) คือ w_0 และใช้สัญลักษณ์

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_1}} f(z) = w_0$$

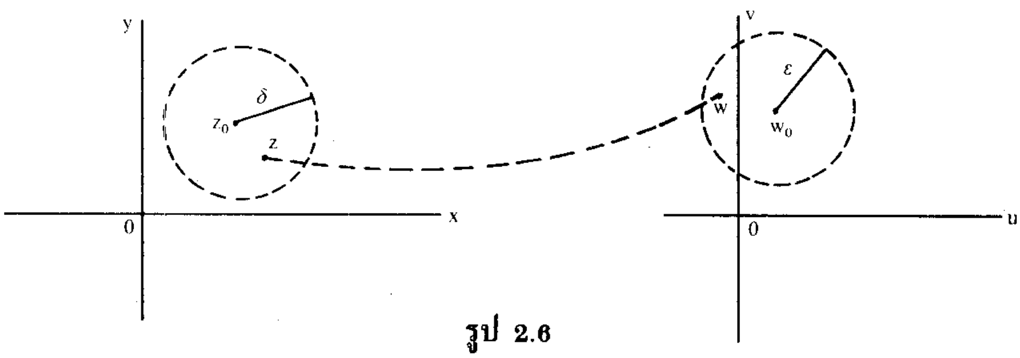
นั่นคือ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall z \in S_1 (z \in N^*(z_0, \delta) \rightarrow f(z) \in N(w_0, \varepsilon))$

นิยาม ถ้า $S_1 = S$ จะใช้สัญลักษณ์ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

ดังนั้น ลิมิตของ f บนเซต S ใด ๆ หมายถึง

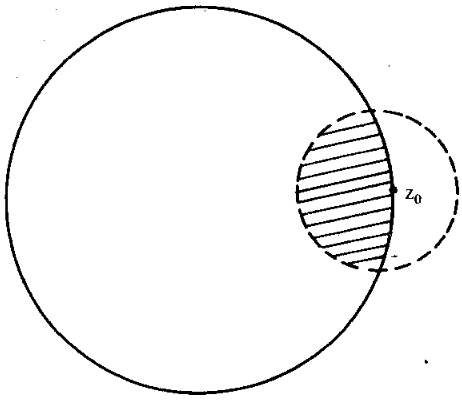
$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ni \forall z \in S(0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon)$$

ซึ่งจะเห็นว่าคล้ายกับนิยามลิมิตของฟังก์ชันค่าจริงในแคลคูลัสนั่นเอง ถ้าเขียนแทนด้วยภาพ จะเห็นว่า ภาพของจุดใด ๆ ในย่านใกล้เคียงจุด z_0 คือ $N^*(z_0, \delta)$ ภายใต้ฟังก์ชัน f จะอยู่ในย่านจุด w คือ $N(w_0, \varepsilon)$ ดังรูป



รูป 2.6

จากนิยาม f นิยามได้ทุกจุดในบางย่าน z_0 ซึ่งอาจจะยกเว้นที่ z_0 ดังนั้นถ้าจุด z_0 เป็นจุดข้างในของบริเวณที่ f นิยามได้แล้วจะสามารถหาย่านจุด z_0 ได้เสมอ เราจะขยายนิยามลิมิตในกรณีที่ z_0 เป็นจุดขอบของบริเวณที่ f นิยามได้ โดยจะพิจารณาเฉพาะจุดที่อยู่ทั้งใน $N^*(z_0, \delta)$ และในบริเวณที่ f นิยามได้เท่านั้น ดังรูป



รูป 2.7

บริเวณแรเงาคือบริเวณที่เราเลือก z ให้อยู่ใน $N^*(z_0, \delta)$

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = \frac{iz}{2}$ นิยามได้บนเซตเปิด $\{z \,/\, |z| < 1\}$ จงแสดงว่า

$$\lim_{z \to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

วิธีทำ จะเห็นว่าจุด $z = 1$ เป็นจุดขอบของ $\{z \,/\, |z| < 1\}$

$\therefore$ ถ้าพิจารณาจุด z ในแผ่นกลมเปิด $|z| < 1$

ให้ $\varepsilon > 0$

เลือก $\delta = 2\varepsilon$

สำหรับ $z \in \{z \,/\, |z| < 1\}$ ซึ่ง

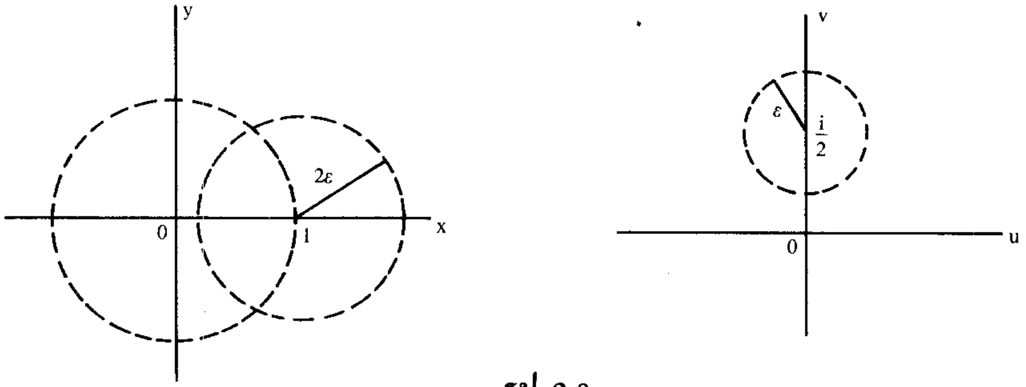
$$0 < |z-1| < \delta = 2\varepsilon$$

พิจารณา
$$\left|f(z) - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right|$$
$$= \frac{|z-1|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

ดังนั้นสำหรับ z ในแผ่นกลมเปิด

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \ni \forall z\left(0 < |z-1| < \delta \to \left|f(z) - \frac{i}{2}\right| < \varepsilon\right)$$

ค่า δ ที่เลือกเท่ากับ 2ε หรือน้อยกว่า 2ε ดังนั้นจุด 1 เป็นจุดขอบบริเวณที่เราเลือก δ จะอยู่ในบริเวณที่แรเงาเพื่อให้ $z \in N^*(1, 2\varepsilon)$ และอยู่ในแผ่นกลมเปิด $|z| < 1$



รูป 2.8

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$

วิธีทำ ให้ ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์

ให้ $\delta = \varepsilon$

สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z| < \delta$

พิจารณา

$$\left|\frac{\bar{z}^2}{z}\right| = \frac{|\bar{z}^2|}{|z|} = \frac{|\bar{z}|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z| < \delta = \varepsilon$$

ดังนั้นจากนิยาม $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$

ข้อสังเกต จากนิยามจะเห็นว่า ถ้า z_0 เป็นจุดลิมิตของ $S_1 \subseteq S$ และ $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S}} f(z)$ หาค่าได้และเท่ากับ w_0 จะได้ว่า $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in S_1}} f(z)$ หาค่าได้และเท่ากับ w_0 ด้วย

ตัวอย่าง ให้ $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0, 0)$

จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 0} f(x, y) = 0$

พิสูจน์ ให้ ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์

$\delta = \frac{\varepsilon}{2}$

สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z-0| < \delta$ หรือ $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

พิจารณา $|x^3-2y^3| \leqslant |x|^3+2|y|^3 = |x|x^2+2|y|y^2$

$$\leqslant \sqrt{x^2+y^2}(x^2+2y^2)$$

$$\leqslant 2(x^2+y^2)^{3/2}$$

ดังนั้น $\left|\frac{x^3-2y^3}{x^2+y^2}\right| \leqslant 2\sqrt{x^2+y^2} < 2\delta = \varepsilon$

นั่นคือ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim\limits_{z\to 2i} (2x+iy^2) = 4i$

วิธีทำ ให้ ε เป็นจำนวนจริงใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์

เลือก $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{10}, 1\right\}$

สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z-2i| < \delta$ หรือ $|x+i(y-2)| < \delta$

พิจารณา $|2x+iy^2-4i| \leqslant |2x|+|i(y^2-4)|$

$$\leqslant 2|x|+|y^2-4| = 2|x|+|y-2||y+2|$$

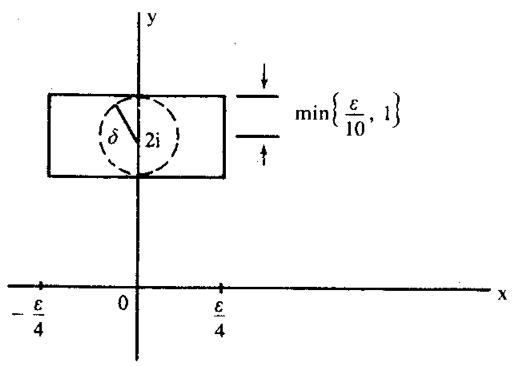
$|y+2| = |(y-2)+4| \leqslant |y-2|+4$

ถ้า $|y-2| < 1$ จะได้

$|y+2| < 5$

เพราะว่า $|y-2| < |x+i(y-2)| < \delta$

ดังนั้น $|y-2||y+2| < \left(\frac{\varepsilon}{10}\right)5 = \frac{\varepsilon}{2}$



รูป 2.9

$$|x| < |x+i(y-2)| < \delta = \frac{\varepsilon}{10}$$

$$|x| < \frac{\varepsilon}{4}$$

เพราะฉะนั้น $|2x+iy^2-4i| \leqslant 2|x|+|y-2||y+2| < \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to 2i}(2x+iy^2) = 4i$

ทฤษฎีบทที่ 2.1 (Uniqueness of limit)

ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ จะได้ $w_0 = w_1$

พิสูจน์ สมมติว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_1$ และ $w_0 \neq w_1$

สำหรับ ε ใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์

$$\exists \delta_1 > 0 \ni \forall z(0 < |z-z_0| < \delta_1 \to |f(z)-w_0| < \varepsilon)$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ni \forall z(0 < |z-z_0| < \delta_2 \to |f(z)-w_1| < \varepsilon)$$

เลือก $\varepsilon = \frac{|w_0-w_1|}{2}$

และ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง $0 < |z-z_0| < \delta$ จะได้

$$\begin{aligned} |w_0-w_1| &= |[f(z)-w_1]-[f(z)-w_0]| \\ &\leqslant |f(z)-w_1|+|f(z)-w_0| < 2\varepsilon = |w_0-w_1| \; . \end{aligned}$$

แต่ $|w_0-w_1| < |w_0-w_1|$ เป็นไปไม่ได้

ดังนั้น $w_0 = w_1$

ทฤษฎีบทที่ 2.2 ให้ $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ เมื่อ $z_0 = x_0+iy_0$ และ $w_0 = u_0+iv_0$ จะได้ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$ และ $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$

พิสูจน์

1. สมมติว่า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

ให้ $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ni \forall z(0 < |z-z_0| < \delta \to |f(z)-w_0| < \varepsilon)$$

$$\because \quad |f(z)-w_0| = |u(x, y)+iv(x, y)-(u_0+iv_0)|$$

$$= \left|\left(u(x, y) - u_0\right) + i\left(v(x, y) - v_0\right)\right| < \varepsilon$$

เพราะว่า $|u(x, y) - u_0| \leqslant \left|\left(u(x, y) - u_0\right) + i\left(v(x, y) - v_0\right)\right| < \varepsilon$

และ $|v(x, y) - v_0| \leqslant \left|\left(u(x, y) - u_0\right) + i\left(v(x, y) - v_0\right)\right| < \varepsilon$

ดังนั้น $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$ และ $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$

2. สมมติว่า $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u_0$ และ $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v_0$

ให้ $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta_1 > 0 \ni \forall (x, y) \left(0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta_1 \rightarrow |u(x, y) - u_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

$$\exists \delta_2 > 0 \ni \forall (x, y) \left(0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta_2 \rightarrow |v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$

สำหรับ z ใด ๆ ซึ่ง

$$0 < |z - z_0| < \delta$$

$$0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$$

$0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta_1$ และ $0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta_2$

$|u(x, y) - u_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ และ $|v(x, y) - v_0| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

เพราะว่า
$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |u(x, y) + iv(x, y) - (u_0 + iv_0)| \\ &= \left|u(x, y) - u_0 + i\left(v(x, y) - v_0\right)\right| \\ &\leqslant |u(x, y) - u_0| + |v(x, y) - v_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$

ตัวอย่าง ให้ $f(x + iy) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in L}} f(z) = 0$ สำหรับทุกเส้นตรง L ที่ผ่านศูนย์ แต่ $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ ในที่นี้ $u(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, $v(x, y) = 0$

ดังนั้น ในการหา $\lim\limits_{\substack{z \to 0 \\ z \in L}} f(z)$ จะพิจารณาเฉพาะ $\lim\limits_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in L}} u(x, y)$

ให้ $L = \{(x, y) / y = mx\}$

$(x, y) \in L \qquad u(x, y) = u(x, mx)$

$$= \frac{mx^3}{x^4 + m^2x^2}$$

$$= \frac{mx}{x^2 + m^2}$$

เมื่อ $m = 0$ จะได้ $\quad u(x, y) = 0$ ทุกค่า x

$$\therefore \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in L}} u(x, y) = 0$$

เมื่อ $m \neq 0 \quad \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in L}} u(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{mx}{x^2 + m^2} = 0$

และเมื่อ L เป็นเส้นตรง $\quad x = 0$

$$u(0, y) = \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^2} = 0$$

ดังนั้น $\quad \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in L}} u(x, y) = 0$

นั่นคือ $\quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in L}} f(z) = 0$

ให้ $S = \{(x, y) / y = x^2\}$

$$\lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in S}} u(x, y) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}$$

ดังนั้น $\quad \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in L}} u(x, y) \neq \lim_{\substack{(x, y) \to (0, 0) \\ (x, y) \in S}} u(x, y)$

$\therefore \lim_{z \to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น ในการแสดงว่าลิมิตของฟังก์ชันหาค่าไม่ได้นั้น เราจะพิจารณาลิมิตของฟังก์ชันตาม 2 เส้นทาง ถ้าค่าของลิมิตบน 2 เส้นทางนั้นมีค่าแตกต่างกัน ก็จะสรุปได้ทันทีว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง กำหนดให้ $f(z) = \frac{xy}{x^2 + y^2} - \frac{y^2}{x^2} i$ จงหาลิมิตของ $f(z)$ เมื่อ $z \to 0$

วิธีทำ ให้ $S_1 = \{z / z = x + iy$ และ $y = x\}$

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in S_1}} f(z) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{2x^2} - \frac{x^2}{x^2} i \right)$$

$$= \frac{1}{2} - i$$

ให้ $S_2 = \{z / z = x+iy$ และ $y = 2x\}$

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in S_2}} f(z) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{x(2x)}{x^2+4x^2} - \frac{4x^2}{x^2} i \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^2}{5x^2} - \frac{4x^2}{x^2} i \right)$$

$$= \frac{2}{5} - 4i$$

จะเห็นว่า $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in S_1}} f(z) \neq \lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in S_2}} f(z)$

ดังนั้น $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

สำหรับลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อน เราสามารถกล่าวถึงลิมิตของ $f(z)$ เมื่อ z เข้าใกล้จุดอนันต์ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ ได้ ในทำนองเดียวกันกับฟังก์ชันค่าจริงจะสามารถเขียนนิยามของ $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$ หรือ $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$ ดังต่อไปนี้

นิยาม สำหรับจำนวนจริง $\varepsilon > 0$ จะมี M ซึ่งทุกค่า $z \in S$ ถ้า $|z| > M$ จะได้ $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ จะกล่าวว่า ลิมิตของ f เมื่อ z เข้าใกล้ ∞ มีค่าเท่ากับ w_0 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$

นิยาม สำหรับจำนวนจริง M ใด ๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทุกค่า $z \in S$ ถ้า $0 < |z - z_0| < \delta$ แล้ว $|f(z)| > M$ จะกล่าวว่าลิมิตของ f เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 มีค่าอนันต์ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$

นิยาม สำหรับจำนวนจริง M ใด ๆ จะมี M' ซึ่งทุกค่า $z \in S$ ถ้า $|z| > M'$ แล้ว $|f(z)| > M$ จะกล่าวว่าลิมิตของ f เมื่อ z เข้าใกล้ ∞ มีค่าอนันต์ เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$

ทฤษฎีบทที่ 2.3 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim\limits_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

พิสูจน์ *กรณี 1* ถ้า $w_0 \in C$

สมมติว่า $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = w_0$

ให้ $\varepsilon > 0$

$\exists M \ni \forall z(|z| > M \rightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon)$

เลือก $\delta = \frac{1}{M}$

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ ซึ่ง $0 < |z-0| < \delta$

$$0 < |z| < \delta$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| > \frac{1}{\delta} = M$$

ดังนั้น $\left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$

นั่นคือ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \forall z\left(0 < |z-0| < \delta \rightarrow \left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon\right)$

$$\therefore \lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$$

สมมติว่า $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

ให้ $\varepsilon > 0$

$$\exists \delta > 0 \ni \forall z \left(0 < |z-0| < \delta \rightarrow \left|f\left(\frac{1}{z}\right) - w_0\right| < \varepsilon\right)$$

เลือก $M = \frac{1}{\delta}$

ให้ $z \in C$ ซึ่ง $|z| > M$

$$0 < \left|\frac{1}{z} - 0\right| = \left|\frac{1}{z}\right| < \delta$$

$$\therefore \left|f\left(\frac{1}{1/z}\right) - w_0\right| < \varepsilon$$

นั่นคือ $|f(z)-w_0| < \varepsilon$

ดังนั้น $\forall \varepsilon > 0 \exists M = \frac{1}{\delta} \ni \forall z\left(|z| > M \rightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon\right)$

$$\therefore \lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$

กรณี 2 ถ้า $w_0 = \infty$

สมมติว่า $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$

ให้ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\exists M' \ni \forall z\left(|z| > M' \rightarrow |f(z)| > M\right)$$

เลือก $\delta = \frac{1}{M'}$

ให้ $z \in C$ ซึ่ง $0 < |z-0| < \delta$

$0 < |z| < \delta$

$$\therefore \left|\frac{1}{z}\right| > \frac{1}{\delta} = M'$$

$$\therefore \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| > M$$

นั่นคือ $\forall M \exists \delta > 0 \ni \forall z \left(0 < |z-0| < \delta \to \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| > M\right)$

$$\lim_{z\to\infty} f\left(\frac{1}{z}\right) = \infty$$

สมมติว่า $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$

ให้ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ

$$\exists \delta > 0 \ni \forall z \left(0 < |z-0| < \delta \to \left|f\left(\frac{1}{z}\right)\right| > M\right)$$

เลือก $M' = \frac{1}{\delta}$

ให้ $|z| > M'$

$$0 < \left|\frac{1}{z} - 0\right| = \left|\frac{1}{z}\right| < \delta$$

$$\therefore \left|f\left(\frac{1}{\frac{1}{z}}\right)\right| > M$$

$$|f(z)| > M$$

นั่นคือ $\forall M \exists M' \ni \forall z \left(|z| > M' \to |f(z)| > M\right)$

$$\therefore \lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim_{z\to\infty} 3z^2 = \infty$

วิธีทำ ให้ M เป็นจำนวนจริง

เลือก $M' = \frac{\sqrt{M}}{3}$

ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $|z| > M'$

พิจารณา $|f(z)| = |3z^2| = 3|z^2| = 3|z|^2 > (M')^2 = M$

$\therefore \quad \forall M \,\exists M' \ni \forall z \left(|z| > M' \rightarrow |f(z)| > M\right)$

$$\therefore \quad \lim_{z \to \infty} 3z^2 = \infty$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 2} \dfrac{1}{(z-2)^2} = \infty$

วิธีทำ ให้ M เป็นจำนวนจริงใด ๆ

เลือก $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$

สำหรับทุกค่า z ซึ่ง $0 < |z-2| < \delta$

$$|f(z)| = \left| \frac{1}{(z-2)^2} \right| > \frac{1}{\delta^2} = M$$

นั่นคือ $\forall M \,\exists \delta > 0 \ni \forall z \left(0 < |z-z_0| < \delta \rightarrow |f(z)| > M\right)$

$$\therefore \quad \lim_{z \to 2} \frac{1}{(z-2)^2} = \infty$$

ทฤษฎีบทที่ 2.4 ให้ $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = w_1$ จะได้

1. $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z) \pm g(z)\right] = w_0 \pm w_1$
2. $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z)\, g(z)\right] = w_0 w_1$
3. $\lim\limits_{z \to z_0} \left[f(z)/g(z)\right] = \dfrac{w_0}{w_1}$ ถ้า $w_1 \neq 0$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทสามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยาม ดังนั้นจะพิสูจน์เฉพาะข้อ 2 ข้ออื่นให้ทำเป็นแบบฝึกหัด

ให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

และ $g(z) = a(x, y) + ib(x, y)$

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad w_0 = u_0 + iv_0, \quad w_1 = a_1 + ib_1$$

โดยทฤษฎีบทที่ 2.2 จะได้ $\lim\limits_{z \to z_0} u$, $\lim\limits_{z \to z_0} v$, $\lim\limits_{z \to z_0} a$ และ $\lim\limits_{z \to z_0} b$ หาค่าได้ และมีค่าเท่ากับ u_0, v_0, a_1, b_1 ตามลำดับ

พิจารณา
$$f(z)g(z) = \left[u(x, y)\, a(x, y) - v(x, y)\, b(x, y)\right] + i\left[v(x, y)\, a(x, y) + u(x, y)\, b(x, y)\right]$$

เพราะว่า
$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} \left[u(x, y)\, a(x, y) - v(x, y)\, b(x, y)\right] = u_0 a_1 - v_0 b_1$$

และ $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [v(x,y)\,a(x,y)+u(x,y)\,b(x,y)] = v_0a_1+u_0b_1$$

ดังนั้น $$\lim_{z\to z_0} f(z)\,g(z) = [u_0a_1 - v_0b_1] + i[v_0a_1+u_0b_1] = w_0w_1$$

จากนิยามลิมิตและทฤษฎีบทที่ผ่านมา ทำให้สามารถสรุปคุณสมบัติที่สำคัญ ๆ ของลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อนได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.5

1. $\lim_{z\to z_0} z = z_0$
2. $\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
3. $\lim_{z\to z_0} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน
4. $\lim_{z\to z_0} P(z) = P(z_0)$ เมื่อ $P(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots a_nz^n$, $(a_n \neq 0)$
5. ถ้า $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ จะได้ $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$ และ $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w}_0$

พิสูจน์ ข้อ 1 – 4 พิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยามลิมิต จะพิสูจน์เฉพาะข้อ 5

ให้ $\varepsilon > 0$

$$\exists\delta > 0 \ni \forall z\,(0 < |z-z_0| < \delta \rightarrow |f(z)-w_0| < \varepsilon)$$

เพราะว่า $$||f(z)|-|w_0|| \leqslant |f(z)-w_0| < \varepsilon$$

ดังนั้น $$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$$

เพราะว่า $$|\overline{f(z)} - \overline{w}_0| = |\overline{f(z)-w_0}| = |f(z)-w_0| < \varepsilon$$

ดังนั้น $$\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w}_0$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4}$

วิธีทำ โดยทฤษฎีลิมิต

$$\lim_{z\to -2i} \frac{(2z+3)(z-1)}{z^2-2z+4} = \frac{\lim_{z\to -2i}(2z+3)\lim_{z\to -2i}(z-1)}{\lim_{z\to -2i} z^2-2z+4}$$

$$= \frac{(3-4i)(-2i-1)}{4i}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{11}{4} i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim\limits_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i}$

วิธีทำ เพราะว่า $3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5 = [3z^3 - (2-3i)z^2 + (5-2i)z + 5i]\ (z-i)$

และ $z \neq i$ ดังนั้น

$$\frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 3z^3 - (2-3i)z^2 + (5-2i)z + 5i$$

โดยทฤษฎีลิมิตจะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} &= 3\lim_{z \to i} z^3 - (2-3i)\lim_{z \to i} z^2 + (5-2i)\lim_{z \to i} z + \lim_{z \to i} 5i \\
&= 3(i)^3 - (2-3i)\ (i)^2 + (5-2i)i + 5i \\
&= -3i + 2 - 3i + 5i + 2 + 5i \\
&= 4 + 4i
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

วิธีทำ ถ้าลิมิตหาค่าได้ เมื่อ z เข้าใกล้ 0 ทางใดก็ตาม ค่าลิมิตจะหาได้เท่ากัน ในการแสดงว่าลิมิตหาค่าไม่ได้ จะพิจารณา z เข้าใกล้ 0 ใน 2 ทาง

1. ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามแกน x นั่นคือ $y = 0$

   ให้ $z = x + iy$

   $\bar{z} = x - iy$

   เมื่อ $y = 0$, $z = x$ และ $\bar{z} = x$

   $$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = 1$$

2. ให้ z เข้าใกล้ 0 ตามแกน y คือ $x = 0$

   ดังนั้น $z = x + iy = iy$

   และ $\bar{z} = x - iy = -iy$

   $$\lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z} = \lim_{y \to 0} \frac{-iy}{iy} = -1$$

ดังนั้น $\lim\limits_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ หาค่าไม่ได้

2.4 ความต่อเนื่อง (Continuity)

นิยาม ฟังก์ชันเชิงซ้อน f นิยามบนเซต S z_0 เป็นจุดข้างใน S จะกล่าวว่า f มี **ความต่อเนื่อง** ที่ z_0 ถ้า $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องที่ z_0 ถ้าเงื่อนไข 3 ข้อ เป็นจริง

1. $f(z_0)$ หาค่าได้
2. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ หาค่าได้
3. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

จากนิยามลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อน $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$ หมายถึง

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \ni \forall z \in S\ \big(|z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon\big)$

นิยาม ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน f มีความต่อเนื่องบน R ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ทุกจุดในบริเวณ R

ทฤษฎีบทที่ 2.6 ให้ $f(x+iy) = u(x, y) + iv(x, y)$

f มีความต่อเนื่องที่ z_0 ก็ต่อเมื่อ $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่ $z_0 = x_0 + iy_0$

พิสูจน์ การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 2.2 นั่นคือ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} u(x, y) = u(x_0, y_0)$$

และ $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} v(x, y) = v(x_0, y_0)$

ดังนั้น $u(x, y)$ และ $v(x, y)$ มีความต่อเนื่องที่ (x_0, y_0)

ทฤษฎีบทที่ 2.7 ให้ $f(z)$ และ $g(z)$ มีความต่อเนื่องที่ z_0 ดังนั้น ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่ z_0 ด้วย

1. ผลรวม $f(z) + g(z)$
2. ผลต่าง $f(z) - g(z)$
3. ผลคูณ $f(z)g(z)$
4. ผลหาร $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ เมื่อ $g(z_0) \neq 0$

พิสูจน์ ทฤษฎีบทนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากทฤษฎีบทที่ 2.2 (แบบฝึกหัด)

นิยาม ถ้า $f : S_1 \to C$ และ $g : S_2 \to C$ โดยที่พิสัยของ f เป็นสับเซตของ S_2 ฟังก์ชันประกอบ f และ g ใช้แทนด้วยสัญลักษณ์ $g \circ f$ คือ ฟังก์ชันที่มีโดเมน S_1 และค่าของฟังก์ชันนิยามโดย

$$(g \circ f)(z) \;=\; g(f(z)) \quad \text{สำหรับแต่ละ } z \text{ ใน } S_1$$

ทฤษฎีบทที่ 2.8 ให้ $F : S_1 \to C$ และ $g : S_2 \to C$ โดยที่พิสัยของ f เป็นสับเซตของ S_2 $z_0 \in S_1$ ถ้า f มีความต่อเนื่องที่ z_0 และ g มีความต่อเนื่องที่ $f(z_0)$ จะได้ว่า ฟังก์ชันประกอบของ f และ g คือ $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่ z_0 ด้วย

พิสูจน์ ให้ ε เป็นจำนวนจริงบวก

เพราะว่า g มีความต่อเนื่องที่ $f(z_0)$ ให้ $v = f(z_0)$

$$\therefore \quad \exists \delta_1 > 0 \ni \forall u \in S_2\big(|u - v| < \delta_1 \to |g(u) - g(v)| < \varepsilon\big)$$

เพราะว่า f มีความต่อเนื่องที่ z_0

$$\exists \delta_2 > \;\; 0 \;\;\; 3 \;\;\; \forall z \in S_1 \big(|z - z_0| < \; \delta_2 \to |f(z) - f(z_0)| < \delta_1\big)$$

ให้ δ = ii,

สำหรับ $z \;\in s$, ถ้า $|z - z_0| < \delta$ จะได้ $|f(z) - f(z_0)| < \delta_1$

$$|f(z) - v| \quad < \quad \delta_1$$

ถ้า $u = f(z)$ $\quad \therefore \; u \in S_2$ และ $|u - v| < \delta_1$

$$.. \;\; |g(f(z)) \; - g(v)| \; < \; \varepsilon$$

นั่นคือ $|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \varepsilon$ ถ้า $|z - z_0| < 6$ ทุกค่า $z \in S_1$

หรือ $|g \circ f(z) - g \circ f(z_0)| < \varepsilon$ ถ้า $|z - z_0| < 6$ และ $z \in S_1$

ดังนั้น $g \circ f$ มีความต่อเนื่องที่ z_0

ตัวอย่าง

1. $f(z) = x^2 - i(x - 2xy^3)$ มีความต่อเนื่องทุกจุดในระนาบเชิงซ้อน เพราะว่า $u(x\,y) = x^2$ และ $v(x, y) = x - 2xy^3$ เป็นฟังก์ชันพหุนามของตัวแปรจริง x, y ซึ่งมีความต่อเนื่องทุกค่า x, y

2. สำหรับ $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n มีความต่อเนื่องทุก ๆ จุดในระนาบเชิงซ้อน เนื่องจาก

$$\lim_{z \to z_0} P(z) \;=\; P(z_0)$$

3. $f(z) = e^{xy} + i\sin(x-y^2)$ มีความต่อเนื่องทุกค่า z เพราะว่า e^{xy} และ $\sin(x-y^2)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีความต่อเนื่องทุกค่า x, y

4. ให้ $f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq i \\ 0, & z = i \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f มีความต่อเนื่องที่ $z = i$ หรือไม่

วิธีทำ จะเห็นว่า $\lim_{z \to i} f(z) = (i)^2 = -1$

แต่ $f(i) = 0$

ดังนั้น $\lim_{z \to i} f(z) \neq f(i)$

f ไม่มีความต่อเนื่องที่ $z = i$

5. จงพิจารณาความต่อเนื่องของ $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$

วิธีทำ

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}$$

จะเห็นว่า ถ้า $(z-i)(z+i) = 0$ จะได้ $z = \pm i$

ดังนั้น $f(z)$ หาค่าได้ทุกจุด ยกเว้น $z = \pm i$

นั่นคือ f มีความต่อเนื่องทุกจุด ยกเว้น $z = \pm i$

6. จงพิจารณาความต่อเนื่องของ $f(z) = e^x\cos y + ie^x\sin y$

จะเห็นว่า $u(x, y) = e^x\cos y$ และ $v(x, y) = e^x\sin y$

$u(x, y)$ มีความต่อเนื่องทุกค่า (x, y) เนื่องจากเป็นผลคูณของ e^x และ $\cos y$ ซึ่งมีความต่อเนื่อง ในทำนองเดียวกันสำหรับ $v(x, y)$ ก็มีความต่อเนื่องทุก (x, y)

ดังนั้น $f(z)$ มีความต่อเนื่องทุกค่า z

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงใช้นิยามลิมิต แสดงว่า

   1.1 $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \bar{z}_0$

   1.2 $\lim\limits_{z\to z_0} z^2 = z_0^2$

   1.3 $\lim\limits_{z\to i} z^2 + 2z = 2i - 1$

2. จงหาค่าลิมิตของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยทฤษฎีลิมิต

   2.1 $\lim\limits_{z\to i} \frac{iz^3 - 1}{z + i}$

   2.2 $\lim\limits_{z\to i/2} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

   2.3 $\lim\limits_{z\to 3-4i} \frac{\mathrm{Im}(z^2) - 1}{z\bar{z}}$

3. จงแสดงว่า $\lim\limits_{z\to 0} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ หาค่าไม่ได้

4. กำหนดให้ $f(x+iy) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{\substack{z\to 0 \\ z\in L}} f(z) = 0$ สำหรับทุกเส้นตรง L ที่ผ่านศูนย์ แต่ $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ หาค่าไม่ได้

5. กำหนดให้ $f(z) = \frac{x + y - 1}{z - i}$ จงหาค่าของ

   5.1 $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ ตามเส้นตรง $y = x + 1$

   5.2 $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ ตามเส้นตรง $y = 1$

   5.3 $\lim\limits_{z\to i} f(z)$ หาค่าได้หรือไม่

6. จงอธิบายความหมายของ

   6.1 $\lim\limits_{z\to i} \frac{1}{(z-i)^2} = \infty$ และ

   6.2 $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{2z^4 + 1}{z^4 + 1} = 2$

7. จงแสดงว่า

7.1 $\lim_{z \to i} \frac{1}{(z-i)^2} = \infty$

7.2 $\lim_{z \to \infty} \frac{1}{z^2} = 0$

8. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่มีความต่อเนื่องที่จุดใด ให้เหตุผลประกอบ

8.1 $f(z) = \frac{2z-3}{z^2+2z+2}$

8.2 $f(z) = \bar{z}$

8.3 $f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+4}{z-2i} & , \quad z \neq 2i \\ 3+4i & , \quad z = 2i \end{cases}$

9. ถ้า $f(z)$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ $z = z_0$ จงพิสูจน์ว่า $3f(z)-4ig(z)$ มีความต่อเนื่องที่ $z = z_0$ ด้วย

10. จงพิสูจน์ว่า $f(z) = |z|^2$ มีความต่อเนื่องทุกค่า z

11. จงพิจารณาว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ฟังก์ชันใดมีความต่อเนื่องที่ $z = 0$ ถ้ากำหนดให้ $f(0, 0) = 0$

11.1 $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$

11.2 $f(x, y) = \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$

11.3 $f(x, y) = \frac{(x+y^2)^2}{(x^2+y^2)}$

2.5 อนุพันธ์ (Derivatives)

ในการศึกษาถึงอนุพันธ์ของฟังก์ชันเชิงซ้อนนั้น นิยามและทฤษฎีต่าง ๆ จะคล้ายกับฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง แต่จะมีคุณสมบัติเฉพาะของฟังก์ชันที่สำคัญตามมา คือการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในสาขาวิชาอื่นได้

นิยาม ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีโดเมน S z_0 เป็นจุดข้างใน S **อนุพันธ์ของ** f **ที่** z_0 (derivative of f at z_0) เขียนแทนด้วย $f'(z_0)$ คือ

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \qquad \text{..........} (2.5.1)$$

เมื่อลิมิตหาค่าได้และไม่เท่ากับค่าอนันต์ (∞)

ถ้าอนุพันธ์ของ f ที่ z_0 หาค่าได้ จะกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้ที่** z_0 (differentiable at z_0)

ถ้าให้ $\Delta z = z - z_0$ แล้ว จะได้ $f'(z_0)$ ในอีกรูปหนึ่ง คือ

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \qquad \text{..........} (2.5.2)$$

เพราะว่า f นิยามบนบางย่านจุด z_0 ดังนั้น ถ้า $|\Delta z|$ มีค่าเล็กพอ $f(z_0 + \Delta z)$ หาค่าได้เสมอ

จากสมการ (2.5.2) ถ้าเขียน z_0 แทนด้วย z และให้

$$\Delta w = f(z + \Delta z) - f(z)$$

Δw แทนค่าที่เปลี่ยนไปของ $w = f(z)$ เมื่อค่า z เปลี่ยนไป Δz และเขียน $\frac{dw}{dz}$ แทน $f'(z)$ ดังนั้นสมการ (2.5.2) จะเขียนได้ดังนี้

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} \qquad \text{..........} (2.5.3)$$

ดังนั้นเราสามารถเขียนอนุพันธ์ของ f ที่ z ใด ๆ ได้ในรูป $f'(z)$ หรือ $\frac{dw}{dz}$ หรือ $\frac{df}{dz}$

หมายเหตุ สมการ (2.5.1) สำหรับ z ใด ๆ ใน C $f'(z)$ เขียนได้ในรูปของ

$$f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(z) = c$ 2. $f(z) = z^2$ 3. $f(z) = \bar{z}$

วิธีทำ จากนิยาม $f'(z)$ เมื่อ $z \in C$

1. $$f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$
$$= \lim_{z_1 \to z} \frac{c - c}{z_1 - z}$$
$$= 0$$

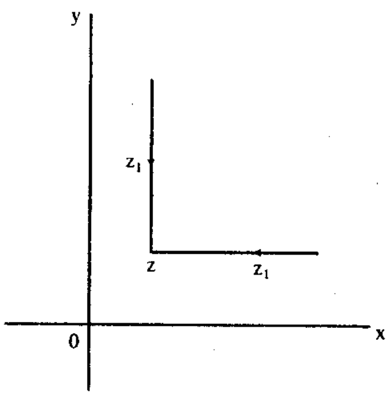
ดังนั้น อนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าคงตัวเป็นศูนย์

2. $$f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z}$$
$$= \lim_{z_1 \to z} \frac{z_1^2 - z^2}{z_1 - z}$$
$$= \lim_{z_1 \to z} \frac{(z_1 - z)(z_1 + z)}{(z_1 - z)}$$
$$= \lim_{z_1 \to z} (z_1 + z) = 2z$$

3. พิจารณา $$\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{z_1 - z}$$
$$\therefore \quad f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{z_1 - z}$$

ให้ $z = x + iy$ และ $z_1 = x_1 + iy_1$

เมื่อ z_1 เข้าใกล้ z ตามแกน x นั่นคือ $y_1 - y = 0$ ดังรูป



รูป 2.10

$$\bar{z} = x - iy \quad \text{และ} \quad \bar{z}_1 = x_1 - iy_1$$

$$z_1 - z = x_1 - x \quad \text{และ} \quad \bar{z}_1 - \bar{z} = x_1 - x$$

ดังนั้น $f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{z_1 - z}$

$$= \lim_{x_1 \to x} \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$$

เมื่อ z_1 เข้าใกล้ z ตามแกน y นั่นคือ $x_1 - x = 0$

$$z_1 - z = (x_1 - x) + i(y_1 - y) = i(y_1 - y)$$

$$\bar{z}_1 - \bar{z} = (x_1 - x) - i(y_1 - y) = -i(y_1 - y)$$

$$f'(z) = \lim_{z_1 \to z} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}}{z_1 - z}$$

$$= \lim_{y_1 \to y} -\frac{i(y_1 - y)}{i(y_1 - y)} = -1$$

จะเห็นว่า ค่าลิมิตทั้งสองค่าเมื่อ $z_1 \to z$ ใน 2 ทาง มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้น อนุพันธ์ของ $\bar{z}$ หาค่าไม่ได้ที่ z ใด ๆ

ตัวอย่าง จงพิจารณาอนุพันธ์ของ $f(z) = |z|^2$ ว่า หาค่าได้ที่จุดใด

วิธีทำ

$$\frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \frac{|z_1|^2 - |z|^2}{z_1 - z}$$

$$= \frac{z_1 \bar{z}_1 - z\bar{z}}{z_1 - z}$$

$$= \frac{z(\bar{z}_1 - \bar{z}) + (z_1 \bar{z}_1 - z\bar{z}_1)}{z_1 - z}$$

$$= z\frac{(\bar{z}_1 - \bar{z})}{z_1 - z} + \bar{z}_1 \frac{(z_1 - z)}{z_1 - z}$$

$$\lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \lim_{z_1 \to z} z\frac{(\bar{z}_1 - \bar{z})}{z_1 - z} + \lim_{z_1 \to z} \bar{z}_1$$

เมื่อ $z = 0$ $\quad \lim_{z_1 \to z} \frac{f(z_1) - f(z)}{z_1 - z} = \lim_{z_1 \to 0} \bar{z}_1 = 0$

ดังนั้น อนุพันธ์ของ f ที่ $z = 0$ มีค่าเท่ากับ 0

เมื่อ $z \neq 0$ จะเห็นว่า $\lim_{z_1 \to z} z\frac{(\bar{z}_1 - \bar{z})}{z_1 - z}$ หาค่าไม่ได้ที่ z ใด ๆ ดังตัวอย่างที่ให้ไว้ ดังนั้น อนุพันธ์ของ f หาค่าไม่ได้ที่ $z \neq 0$

นั่นคือ อนุพันธ์ของ $f(z) = |z|^2$ หาได้ที่ $z = 0$ เท่านั้น

ข้อสังเกต จากตัวอย่างนี้แสดงให้เห็นว่า ฟังก์ชันอาจหาอนุพันธ์ได้ที่บางจุด แต่อาจจะหาอนุพันธ์ไม่ได้ในย่านของจุดนั้น และจะเห็นว่า

$$f(z) = |z|^2 = x^2+y^2$$

มีความต่อเนื่องที่ทุกค่า z ในระนาบเชิงซ้อน นั่นคือ ถ้า f มีความต่อเนื่องที่จุด z_0 แต่อาจจะหาอนุพันธ์ที่ z_0 ไม่ได้ แต่บทกลับของประโยคนี้จริง ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.9 ถ้า f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 แล้ว f จะมีความต่อเนื่องที่ z_0 ด้วย

พิสูจน์ ให้ z_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0

$$\therefore \quad f'(z_0) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \quad \text{หาค่าได้}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}\lim_{z\to z_0}[f(z)-f(z_0)] &= \lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}(z-z_0)\right]\\ &= \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lim_{z\to z_0}f(z)-\lim_{z\to z_0}f(z_0) = 0$$

$$\lim_{z\to z_0}f(z) = f(z_0)$$

ดังนั้น f มีความต่อเนื่องที่ z_0

จะเห็นว่านิยามอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อนนั้น คล้ายกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง ดังนั้นทฤษฎีบทต่าง ๆ ต่อไปนี้สามารถพิสูจน์ได้โดยตรงจากนิยามเหมือนกับเรื่องฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริงในแคลคูลัส

สูตรที่ควรทราบ

ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ z

c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อน

1. $\dfrac{dc}{dz} = 0$
2. $\dfrac{dz}{dz} = 1$
3. $\dfrac{d}{dz}[cf(z)] = cf'(z)$

ข้อ 1 และข้อ 2 พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์ 3.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[cf(z)] &= \lim_{z_1\to z}\frac{cf(z_1)-cf(z)}{z_1-z}\\ &= \lim_{z_1\to z}\frac{c[f(z_1)-f(z)]}{z_1-z}\\ &= c\lim_{z_1\to z}\frac{f(z_1)-f(z)}{z_1-z}\\ &= cf'(z)\end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.10 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่ทุก ๆ z ในเซต $S \subseteq C$ ดังนั้นจะได้

1. $\frac{d}{dz}[f(z)\pm g(z)] = \frac{d}{dz}f(z)\pm\frac{d}{dz}g(z)$

2. $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f(z)\frac{d}{dz}g(z)+g(z)\frac{d}{dz}f(z)$

3. $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z)-f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2}$ เมื่อ $g(z)\neq 0$

พิสูจน์ จะแสดงเฉพาะข้อ 2, 3

ให้ $u = f(z)$, $v = g(z)$

$\therefore\ \Delta u = f(z+\Delta z)-f(z)$ และ $\Delta v = g(z+\Delta z)-g(z)$

$f(z+\Delta z) = \Delta u+u$ และ $g(z+\Delta z) = v+\Delta v$

2.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] &= \frac{d}{dz}uv\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta z}\\ &= \lim_{\Delta z\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta z}+v\frac{\Delta u}{\Delta z}+\frac{\Delta u}{\Delta z}\Delta v\right)\\ &= u\frac{dv}{dz}+v\frac{du}{dz} \qquad (\because\ \Delta v\to 0 \text{ เมื่อ } \Delta z\to 0)\\ &= f(z)\frac{d}{dz}g(z)+g(z)\frac{d}{dz}f(z)\end{aligned}$$

3. $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{d}{dz}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right]$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{v\Delta u - u\Delta v}{\Delta z(v+\Delta v)v}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{(v+\Delta v)v}\left[v\frac{\Delta u}{\Delta z} - u\frac{\Delta v}{\Delta z}\right]$$

$$= \frac{v\left(\frac{du}{dz}\right) - u\left(\frac{dv}{dz}\right)}{v^2}$$

$$= \frac{g(z)\frac{d}{dz}f(z) - f(z)\frac{d}{dz}g(z)}{[g(z)]^2}$$

ทฤษฎีบทที่ 2.11 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 และ g หาอนุพันธ์ได้ที่ $f(z_0)$ ดังนั้นฟังก์ชันประกอบ $F(z) = g(f(z))$ สำหรับ $z \in C$ จะมีอนุพันธ์ที่ z_0 และอนุพันธ์มีค่าเท่ากับ $F'(z_0)$

$$F'(z_0) = g'(f(z_0))\, f'(z_0)$$

พิสูจน์ (แบบฝึกหัด)

ถ้าให้ $w = f(z)$ และ $u = g(w)$ ดังนั้น $u = g(f(z)) = F(z)$ อนุพันธ์ของ u คือ

$$\frac{du}{dz} = \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dz}$$

ซึ่งเรียกว่า **กฎลูกโซ่** (chain rule) นั่นเอง

สูตรการหาอนุพันธ์ของ z^n

$$\frac{d}{dz}(z^n) = nz^{n-1}$$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ

พิสูจน์ เมื่อ $n = 0$ จะได้ $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$

เมื่อ $n > 0$ จากนิยาม จะได้

$$\frac{d}{dz}z^n = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z}$$

จาก $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$

$$(z+\Delta z)^n - z^n = [z + \Delta z - z]\left[(z+\Delta z)^{n-1} + (z+\Delta z)^{n-2}z + \dots + (z+\Delta z)z^{n-2} + z^{n-1}\right]$$

เมื่อ $\Delta z \neq 0$

$$\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = (z+\Delta z)^{n-1} + (z+\Delta z)^{n-2}z + \ldots + (z+\Delta z)z^{n-2} + z^{n-1}$$

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = z^{n-1} + z^{n-1} + \ldots + z^{n-1} \quad \text{ทั้งหมด } n \text{ เทอม}$$

$$\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$$

เมื่อ $n < 0$

ให้ $g(z) = z^{-n}$ ดังนั้น $-n > 0$

จาก $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$ เมื่อ $n > 0$

จะได้ $g'(z) = -nz^{-n-1}$

เพราะว่า $(z^n)' = \left(\frac{1}{z^{-n}}\right)' = \frac{z^{-n}\cdot 0 - 1(z^{-n})'}{z^{-2n}}$

$$= -\frac{(-nz^{-n-1})}{z^{-2n}} = nz^{n-1}$$

จากอนุพันธ์ของ z^n จะได้ว่า

ถ้า $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \ldots + a_nz^n \quad (n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$ จะได้

$P'(z) = a_1 + 2a_2z + \ldots + na_nz^{n-1}$

ตัวอย่าง จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(z) = (3z^2 - z^{-1} + 2i)^4$
2. $f(z) = \frac{2+z}{3-z}$

วิธีทำ 1.

$$\frac{d}{dz}(3z^2 - z^{-1} + 2i)^4 = 4(3z^2 - z^{-1} + 2i)^3\frac{d}{dz}(3z^2 - z^{-1} + 2i)$$

$$= 4(3z^2 - z^{-1} + 2i)^3\left(6z - (-1)z^{-2}\right)$$

$$= 4(3z^2 - z^{-1} + 2i)^3\left(6z + z^{-2}\right)$$

2.

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{2+z}{3-z}\right) = \frac{(3-z)\frac{d}{dz}(2+z) - (2+z)\frac{d}{dz}(3-z)}{(3-z)^2}$$

$$= \frac{(3-z)(1) - (2+z)(-1)}{(3-z)^2}$$

$$= \frac{5}{(3-z)^2}$$

พิจารณาฟังก์ชัน f ซึ่งนิยามบนบางย่านจุด z_0 ถ้า

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

เราจะหาอนุพันธ์ $f'(z_0)$ และจะได้เงื่อนไขที่สำคัญซึ่งช่วยให้เราพิจารณาได้ว่า ฟังก์ชันนั้นจะหาอนุพันธ์ได้หรือไม่ นอกเหนือจากการพิจารณาจากนิยามลิมิต

ทฤษฎีบทที่ 2.12 ถ้า $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งนิยามบนบางย่านจุด z_0, $z_0 = x_0 + iy_0$ และ f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 จะได้ว่า

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

และจะได้

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{และ} \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0) \qquad \text{..........(2.5.4.)}$$

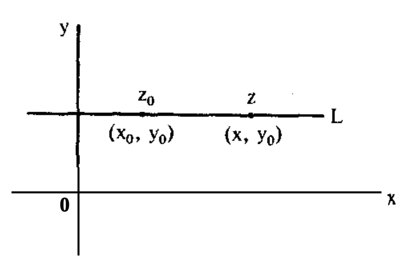
หมายเหตุ เราเรียกสมการ (2.5.4) ว่า **สมการโคชี-รีมันน์** (Cauchy-Riemann equations) เพื่อเป็นเกียรติแก่นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ *โคชี* (A.L. Cauchy) ในปี ค.ศ. 1789 – 1857 และนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมันชื่อ *รีมันน์* (G.F.B. Riemann) ในปี ค.ศ. 1826 – 1866 ซึ่งได้ค้นพบและได้พัฒนาทฤษฎีที่สำคัญในวิชาฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน

พิสูจน์ เพราะว่า $f'(z_0)$ หาค่าได้จากนิยาม จะได้

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z\to z_0} \left[\frac{u(z) - u(z_0)}{z - z_0} + i\frac{v(z) - v(z_0)}{z - z_0} \right] \\ &= \lim_{\substack{z\to z_0 \\ z\in L}} \left[\frac{u(z) - u(z_0)}{z - z_0} + i\frac{v(z) - v(z_0)}{z - z_0} \right] \end{aligned}$$

เมื่อ L เป็นเส้นตรงใด ๆ ที่ผ่านจุด z_0

พิจารณาเส้นตรง L ที่ผ่านจุด z_0 และขนานกับแกน x ดังรูป



รูป 2.11

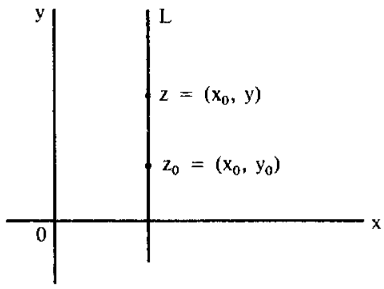
เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 หมายถึง x เข้าใกล้ x_0 และ $z-z_0 = x-x_0$

$$f'(z_0) = \lim_{x\to x_0}\left[\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}\right]$$

$$= \lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_0,y_0)}{x-x_0} + i\lim_{x\to x_0}\frac{v(x,y_0)-v(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$$

พิจารณาเส้นตรง L ที่ผ่านจุด z_0 และขนานกับแกน y ดังรูป



รูป 2.12

เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 หมายถึง y เข้าใกล้ y_0 และ $z-z_0 = i(y-y_0)$

$$f'(z_0) = \lim_{y\to y_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{i(y-y_0)} + i\frac{(v(x_0,y)-v(x_0,y_0))}{i(y-y_0)}\right]$$

$$= \lim_{y\to y_0}\left[-i\left\{\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}\right\} + \frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right]$$

$$= -i\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0} + \lim_{y\to y_0}\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}$$

$$= -i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$$

นั่นคือ $f'(z_0) = u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)$

โดยการเทียบส่วนจริงและส่วนจินตภาพ จะได้

$$u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \quad \text{และ} \quad v_x(x_0,y_0) = -u_y(x_0,y_0)$$

จากทฤษฎีบทนี้สรุปได้ว่า

f หาอนุพันธ์ที่ z_0 ได้ $\rightarrow$ สมการโคชี-รีมันน์จริงที่ z_0 ($u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ

สมการโคชี-รีมันน์ไม่จริงที่ $z_0 \rightarrow f$ หาอนุพันธ์ที่ z_0 ไม่ได้

ซึ่งเราสามารถนำทฤษฎีบทนี้ไปใช้ในการตรวจสอบว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันที่จุด z_0 หาค่าไม่ได้ โดยดูจากสมการโคชี-รีมันน์ที่ไม่จริง แต่ถ้าสมการโคชี-รีมันน์จริง เราสรุปอะไรไม่ได้ นอกจากจะหาเงื่อนไขอื่นมาเพิ่มเติม จึงจะได้ทฤษฎีบทที่สำคัญ

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = \bar{z}$ จงพิจารณาอนุพันธ์ของ f

วิธีทำ โดยใช้นิยามอนุพันธ์ตรวจสอบ เราทราบแล้วว่า $f(z) = \bar{z}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ z ใด ๆ ในที่นี้จะตรวจสอบโดยใช้ทฤษฎีบท

$$f(z) = \bar{z} = x - iy$$

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

$$u_x = 1, \quad v_y = -1$$

$$v_x = 0, \quad u_y = 0$$

เนื่องจาก $u_x = 1 \neq -1 = v_y$

นั่นคือ สมการโคชี-รีมันน์ไม่จริงที่จุด z ใด ๆ

$\therefore$ $f'(z)$ หาค่าไม่ได้ที่ z ใด ๆ

ตัวอย่าง ให้ $f(z) = |z|^2$ จงพิจารณาอนุพันธ์ของ f

วิธีทำ

$$f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$$

$$u(x, y) = x^2 + y^2, \quad v(x, y) = 0$$

$$u_x = 2x, \quad v_x = 0$$

$$u_y = 2y, \quad v_y = 0$$

เพราะฉะนั้น $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$ เมื่อ $x = 0$ และ $y = 0$ เท่านั้น

นั่นคือ สมการโคชี-รีมันน์จริงที่จุด $(0, 0)$ เพียงจุดเดียว

อนุพันธ์ของ $f(z)$ หาค่าไม่ได้ เมื่อ $z \neq 0$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\frac{d}{dz}(z^2 \bar{z})$ หาค่าไม่ได้ทุกค่า z

วิธีทำ ให้

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \bar{z} \\ &= (x + iy)^2 (x - iy) \\ &= (x^2 - y^2 + 2xyi)(x - iy) \\ &= (x^3 + xy^2) + (x^2 y + y^3)i \end{aligned}$$

ในที่นี้ $u(x, y) = x^3 + xy^2$

$$v(x, y) = x^2y + y^3$$

$$u_x = 3x^2 + y^2, \qquad u_y = 2xy$$

$$v_y = x^2 + 3y^2, \qquad v_x = 2xy$$

$\therefore\ u_x \neq v_y$ และ $v_x \neq -u_y$

นั่นคือ สมการโคชี-รีมันน์ไม่จริงทุกค่า (x, y)

ดังนั้น $\frac{d}{dz}(z^2\bar{z})$ หาค่าไม่ได้ทุกค่า z

จากตัวอย่างทั้งสามจะเห็นว่า ถ้าสมการโคชี-รีมันน์ไม่จริง จะสรุปได้โดยทฤษฎีบทที่ 2.12 ทันทีว่า อนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น **หาไม่ได้** แต่ถ้ามีฟังก์ชันซึ่งมีค่าสมการโคชี-รีมันน์จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้ ยังสรุปไม่ได้ เช่น

$$f(z) = e^x \cdot e^{iy}$$

$$= e^x(\cos y + i \sin y)$$

$$u(x, y) = e^x\cos y, \qquad v(x, y) = e^x\sin y$$

$$u_x = e^x\cos y, \qquad u_y = -e^x\sin y$$

$$v_x = e^x\sin y, \qquad v_y = e^x\cos y$$

ดังนั้น $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$ สมการโคชี-รีมันน์จริงทุกค่า (x, y)

แต่ยังสรุปเกี่ยวกับอนุพันธ์ของ $f(z)$ ไม่ได้ จนกว่าจะกล่าวถึงทฤษฎีบทถัดไป ซึ่งต้องเพิ่มเงื่อนไขให้อีก

ต่อไปจะพิจารณาตัวอย่างซึ่งแสดงว่าคล้องตามสมการโคชี-รีมันน์ แต่หาอนุพันธ์ไม่ได้ นั่นคือ บทกลับของทฤษฎีบทที่ 2.12 ไม่จริง ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง ให้ $z = x + iy$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^4+y^2} + i\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2} & z \neq 0 \\ 0 & , z = 0 \end{cases}$$

คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์ที่จุด $z = 0$ แต่หาอนุพันธ์ไม่ได้ที่ $z = 0$

วิธีทำ ที่ $z \neq 0$ $u(x, y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ และ $v(x, y) = \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^2}$

พิจารณาอนุพันธ์ย่อยของ u และ v ที่ (0, 0) จากนิยาม จะได้

$$u_x(0, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{u(x, 0) - u(0, 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$v_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{v(x, 0) - v(0, 0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{0}{x} = 0$$

$$u_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{u(0, y) - u(0, 0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

$$v_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{v(0, y) - v(0, 0)}{y - 0}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{0}{y} = 0$$

ดังนั้น $u_x = v_y$ **และ** $v_x = -u_y$ **ที่** $(0, 0)$

นั่นคือ สมการโคชี-รีมันน์เป็นจริงที่ $z = 0$

พิจารณาอนุพันธ์ของ f **ที่** $z = 0$

$$\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \frac{f(z)}{z}$$

$$= \frac{\frac{x^3y}{x^4 + y^2} + i\frac{x^2y^2}{x^4 + y^2}}{x + iy}$$

$$= \frac{x^2y(x + iy)}{(x^4 + y^2)(x + iy)}$$

$$= \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$$

จากตัวอย่างเรื่องการหาค่าลิมิตของฟังก์ชันจะเห็นว่า $\lim_{z \to 0} \frac{x^2y}{x^4 + y^2}$ หาค่าไม่ได้ ดังนั้น $\lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0}$ หาค่าไม่ได้

นั่นคือ $f'(0)$ **หาค่าไม่ได้**

ทฤษฎีบทที่ 2.13 ให้ $f(z) = u(z) + iv(z)$ อนุพันธ์ย่อยของ u และ v มีความต่อเนื่องที่ z_0 และ u, v คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์ที่ z_0 จะได้ว่า อนุพันธ์ของ f หาค่าได้ที่ z_0

พิสูจน์ ให้อนุพันธ์ย่อยของ u และ v หาค่าได้ในบางย่านของจุด z_0

ให้ z เป็นจุดใด ๆ ในย่านจุด z_0

พิจารณา
$$\begin{aligned}\Delta u &= u(z)-u(z_0)\\ &= u(x, y)-u(x, y_0)+u(x, y_0)-u(x_0, y_0)\end{aligned}$$

เพราะว่า u(x, y) สามารถพิจารณาได้ว่า เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y ตัวเดียว เพราะฉะนั้นโดยทฤษฎีบทค่าเฉลี่ย (Mean value Theorem) จะได้

$$\frac{u(x, y)-u(x, y_0)}{y-y_0} = u_y(x, y^*)$$

และ $y^* = y_0+\theta_2 k$ เมื่อ $k = y-y_0$ และ $0 < \theta_2 < 1$

$$\therefore \quad u(x, y)-u(x, y_0) = ku_y(x, y_0+\theta_2 k)$$

และ
$$\begin{aligned}u_y(x, y_0+\theta_2 k) &= u_y(x_0, y_0)+u_y(x, y_0+\theta_2 k)-u_y(x_0, y_0)\\ &= u_y(x_0, y_0)+\varepsilon_2\end{aligned}$$

เมื่อ
$$\begin{aligned}\varepsilon_2 &= u_y(x, y_0+\theta_2 k)-u_y(x_0, y_0)\\ \lim_{z\to z_0}\varepsilon_2 &= \lim_{z\to z_0} u_y(x, y_0+\theta_2 k)-u_y(x_0, y_0)\end{aligned}$$

เพราะว่าอนุพันธ์ย่อยของ u มีความต่อเนื่องที่ z_0 และ z เข้าใกล้ z_0 ทำให้ $k = 0$

$$\therefore \quad \lim_{z\to z_0}\varepsilon_2 = u_y(x_0, y_0)-u_y(x_0, y_0) = 0$$

ดังนั้น
$$u(x, y)-u(x, y_0) = k[u_y(x_0, y_0)+\varepsilon_2] \qquad \text{..........} (2.5.5.)$$

และเมื่อ z เข้าใกล้ z_0 จะได้ ε_2 เข้าใกล้ 0

ในทำนองเดียวกัน ให้ $h = x-x_0$ จะได้

$$u(x, y_0)-u(x_0, y_0) = h[u_x(x_0, y_0)+\varepsilon_1] \qquad \text{..........} (2.5.6)$$

เมื่อ z เข้าใกล้ z_0 จะได้ ε_1 เข้าใกล้ 0

(2.5.5) + (2.5.6) จะได้

$$u(x, y)-u(x_0, y_0) = h[u_x(x_0, y_0)+\varepsilon_1]+k[u_y(x_0, y_0)+\varepsilon_2]$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$v(x, y)-v(x_0, y_0) = h[v_x(x_0, y_0)+\varepsilon_3]+k[v_y(x_0, y_0)+\varepsilon_4]$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{[u(z)-u(z_0)]+i[v(z)-v(z_0)]}{h+ik}\\ &= \frac{\{h[u_x(z_0)+\varepsilon_1]+k[u_y(z_0)+\varepsilon_2]\}+i\{h[v_x(z_0)+\varepsilon_3]+k[v_y(z_0)+\varepsilon_4]\}}{h+ik}\\ &= \frac{1}{h+ik}\{h[u_x(z_0)+\varepsilon_1+iv_x(z_0)+i\varepsilon_3]+k[u_y(z_0)+\varepsilon_2+iv_y(z_0)+i\varepsilon_4]\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h+ik}\{h[u_x(z_0)+iv_x(z_0)]+k[u_y(z_0)+iv_y(z_0)]+h(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)+k(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\}$$

$$= \frac{1}{h+ik}\{h[u_x(z_0)+iv_x(z_0)]+k[-v_x(z_0)+iu_x(z_0)]+h(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)+k(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\}$$

$$= \frac{1}{h+ik}\{(h+ik)[u_x(z_0)+iv_x(z_0)]\}+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{h}{h+ik}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{k}{h+ik}$$

$$= [u_x(z_0)+iv_x(z_0)]+(\varepsilon_1+i\varepsilon_3)\frac{h}{h+ik}+(\varepsilon_2+i\varepsilon_4)\frac{k}{h+ik}$$

เพราะว่า $\left|\frac{h}{h+ik}\right| \leqslant 1$ และ $\left|\frac{k}{h+ik}\right| \leqslant 1$

และ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\, \varepsilon_4$ เข้าใกล้ 0 เมื่อ z เข้าใกล้ z_0

ดังนั้น $$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = u_x(z_0)+iv_x(z_0)$$

นั่นคือ f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0

ข้อสังเกต จากทฤษฎีบทนี้จะเห็นว่า ถ้าต้องการสรุปว่าอนุพันธ์ของ f หาค่าได้ที่ z_0 นั้น จะต้องตรวจสอบ 2 ข้อด้วยกัน คือ

1. อนุพันธ์ย่อยของ u และ v คือ u_x, u_y, v_x, v_y มีความต่อเนื่องที่ z_0
2. u, v คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ หาค่าได้ที่ใดบ้าง และมีค่าเท่าใด

1. $f(z) = z^3$
2. $f(z) = 2x+ixy^2$
3. $f(z) = e^x\cos y+ie^x\sin y$
4. $f(z) = x^2+i\,2y^3$

วิธีทำ

1. ให้ $z = x+iy$

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3$$
$$= (x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$$
$$u(x,y) = x^3-3xy^2 \quad \text{และ} \quad v(x,y) = 3x^2y-y^3$$
$$u_x = 3x^2-3y^2, \qquad v_x = 6xy$$
$$u_y = -6xy, \qquad v_y = 3x^2-3y^2$$

จะเห็นว่า u_x, v_x, u_y, v_y มีความต่อเนื่องทุกค่า (x, y)

เพราะว่า $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$ ดังนั้นสมการโคชี-รีมันน์เป็นจริง

∴ $f'(z)$ หาค่าได้ทุกค่า z และมีค่าเท่ากับ

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$
$$= (3x^2 - 3y^2) + i\ 6xy$$

2. $f(z) = 2x + ixy^2$

ในที่นี้ $u(x, y) = 2x, \quad v(x, y) = xy^2$

$$u_x = 2, \quad v_x = y^2$$
$$u_y = 0, \quad v_y = 2xy$$

สมการโคชี-รีมันน์เป็นจริงเมื่อ $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

นั่นคือ $2 = 2xy$ และ $y^2 = 0$ ซึ่งเป็นไปไม่ได้

ดังนั้น f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า z

3. $f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y$

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y$$
$$u_x = e^x \cos y, \quad v_x = e^x \sin y$$
$$u_y = e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y$$

เพราะว่า u_x, v_x, u_y, v_y มีความต่อเนื่องทุกค่า (x, y) และสมการโคชี-รีมันน์เป็นจริง

ดังนั้น $f'(z)$ หาค่าได้ทุกค่า z และมีค่าเท่ากับ

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$
$$= e^x \cos y + ie^x \sin y$$

4. $f(z) = x^2 + i\ 2y^3$

IX $u(x, y) = x^2, \quad v(x, y) = 2y^3$

$$u_x = 2x, \quad v_x = 0$$
$$u_y = 0, \quad v_y = 6y^2$$

สมการโคชี-รีมันน์จริงเมื่อ $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

นั่นคือ $2x = 6y^2$ หรือ $x = 3y^2$

และเพราะว่า u_x, v_x, u_y, v_y มีความต่อเนื่องทุกค่า (x, y)

ดังนั้น $f'(z)$ หาค่าได้สำหรับทุก z บนพาราโบลา $x = 3y^2$ เท่านั้น

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้นิยาม

   1.1 $f(z) = z^3 - 2z$ ที่ $z = -2$

   1.2 $f(z) = 3z^{-2}$ ที่ $z = 1+i$

   1.3 $f(z) = \frac{1}{z}$ ที่ $z = z_0$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ทฤษฎีบทและสูตรต่าง ๆ

   2.1 $f(z) = 3z^3 - z^2 + 9$

   2.2 $f(z) = (2-3z^2)^3$

   2.3 $f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}$

   2.4 $f(z) = \frac{i}{(z+i)^2}$

   2.5 $f(z) = \frac{(22+3i)(z-i)}{z-1}$

3. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนดให้

   3.1 $f(z) = 2z^2 + z - 3$ ที่ $z = -i$

   3.2 $f(z) = \{z + (z^2+1)^2\}$ ที่ $z = 1+i$

   3.3 $f(z) = \frac{2z-i}{z+2i}$ ที่ $z = -i$

4. จงพิสูจน์ว่า

   4.1 $\frac{dc}{dz} = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวเชิงซ้อนใด ๆ

   4.2 $\frac{dz}{dz} = 1$

5. จงพิสูจน์ว่า $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = \frac{d}{dz}f(z) \pm \frac{d}{dz}g(z)$

6. จงใช้ทฤษฎีบทที่ 2.12 แสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้หาอนุพันธ์ของ f(z) ไม่ได้ที่จุดใดเลย

   6.1 $f(z) = 3iy$

   6.2 $f(z) = z - \bar{z}$

6.3 $f(z) = 2x + ixy^2$

6.4 $f(z) = \text{Im } z$

6.5 $f(z) = x^2 + iy^3$

6.6 $f(z) = e^x \cdot e^{-iy}$

7. ถ้า $f(z) = x^3 - i(y-1)^3$ แล้ว $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 3x^2$ ทำไมจึงสรุปว่า $f'(z) = 3x^2$ เฉพาะที่จุด $z = i$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(\bar{z})^2}{z}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์ที่ $z = 0$ แต่หาอนุพันธ์ที่ $z = 0$ ไม่ได้

9. ให้ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ หาอนุพันธ์ได้ที่ z ใด ๆ ยกเว้นศูนย์ โดยการเปลี่ยนให้อยู่ในรูปเชิงขั้ว คือ

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

จงพิสูจน์ว่า ที่ $z = re^{i\theta}$ และ $z \neq 0$ สมการโคชี-รีมันน์ในรูปเชิงขั้วคือ

$$u_r = \frac{1}{r}v_\theta \quad \text{และ} \quad v_r = -\frac{1}{r}u_\theta$$

10. จงแสดงว่า ส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันต่อไปนี้คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์

10.1 $f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i$

10.2 $f(z) = ze^{-x}(\cos y - i \sin y)$

10.3 $f(z) = \sin 2x \cosh 2y + i \cos 2x \sinh 2y$

11. กำหนดให้ $f(x, y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

จงแสดงว่า $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1$ และ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$

2.6 ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic Functions)

คุณสมบัติที่สำคัญของฟังก์ชันซึ่งหาอนุพันธ์ได้ที่จุด z_0 นั้น ถ้าพิจารณากว้างออกไปถึงย่านของจุด z_0 จะหมายถึงฟังก์ชันวิเคราะห์ของฟังก์ชัน ดังนิยามต่อไปนี้

นิยาม ถ้ามีย่านจุด z_0 คือ $N(z_0, \varepsilon)$ ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ที่ทุกค่า z ใน $N(z_0, \varepsilon)$ จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์ที่** z_0 (analytic at z_0)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุก ๆ จุดในบริเวณ R จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์บน** R (analytic on R)

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกจุดในระนาบเชิงซ้อน จะกล่าวว่า f เป็น **ฟังก์ชันเอนไทร์** (entire function)

ตัวอย่าง 1. $f(z) = |z|^2$

ดังได้แสดงแล้วว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ $z = 0$ เท่านั้น ถ้าพิจารณาฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0$ จะเห็นว่าไม่สามารถหาย่านจุด 0 ซึ่ง f หาอนุพันธ์ได้ทุก z ในย่านจุด 0 ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = 0$ และจะเห็นว่าที่จุด z ใด ๆ ก็ตาม f หาอนุพันธ์ไม่ได้ ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใด ๆ

2. $f(z) = \bar{z}$

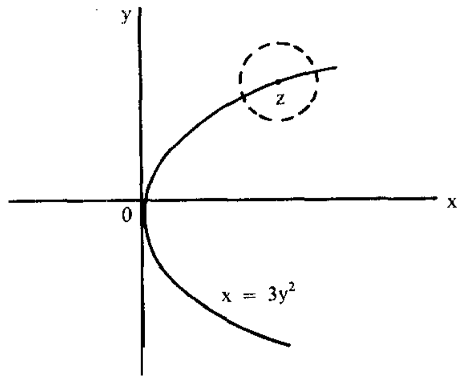
จากตัวอย่างจะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า z ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใด ๆ

3. $f(z) = z^3$

จากตัวอย่างแสดงให้เห็นแล้วว่า f หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z ในระนาบเชิงซ้อน ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกจุดในระนาบเชิงซ้อน นั่นคือ f เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

4. $f(z) = x^2 + i\,2y^3$

จะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ได้เมื่อ z อยู่บนพาราโบลา $x = 3y^2$ เท่านั้น ดังนั้นถ้าพิจารณาจุด z บนพาราโบลา จะไม่สามารถหาย่านจุด z ซึ่งทำให้ทุกจุดในย่านจุด z ทำให้ f หาอนุพันธ์ได้ ดังรูป



รูป 2.13

ดังนั้น f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดเลย

จากนิยามของฟังก์ชันวิเคราะห์ ทำให้สามารถสรุปทฤษฎีบทได้ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.14 ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 แล้ว f จะหาอนุพันธ์ได้ที่ z_0

บทกลับของทฤษฎีบทนี้ไม่จริง นั่นคือ ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่ z_0 แล้ว f อาจจะไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 เช่น $f(z) = |z|^2$ จะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ได้ที่ 0 แต่ f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ 0

ฟังก์ชันพหุนามและฟังก์ชันตรรกยะเราจะได้พบเสมอ สำหรับคุณสมบัติของฟังก์ชันวิเคราะห์ของฟังก์ชันเหล่านี้สรุปได้ดังนี้

1. ให้ $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ เป็นฟังก์ชันพหุนามระดับขั้น n จะได้ว่า P(z) หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z นั่นคือ P(z) เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

2. $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ เมื่อ P(z) และ Q(z) เป็นฟังก์ชันพหุนาม จะได้ว่า R(z) หาอนุพันธ์ได้ทุกค่า z เมื่อ $Q(z) \neq 0$ และ R(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z_0 ซึ่ง $Q(z_0) \neq 0$

ตัวอย่าง $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z^2-4}$ หาอนุพันธ์ได้ที่ z ใด ๆ ยกเว้นที่ $z = \pm 2$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ยกเว้นที่ $z = 2, -2$

นิยาม ให้ $z_0 \in C$ ถ้า f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ z_0 แต่สำหรับย่านจุด z_0 $N(z_0, \varepsilon)$ แล้วมีจุดใน $N(z_0, \varepsilon)$ ที่ทำให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะเรียก z_0 ว่า เป็น **จุดเอกฐานของ** f (singular point of f)

ตัวอย่าง 1. $f(z) = \frac{z}{2-2}$

จะเห็นว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z ยกเว้น $z = 2$ ดังนั้นย่านจุด $z = 2$ ย่านใดก็ตาม ย่อมมีจุดซึ่ง f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ นั่นคือ $z = 2$ เป็นจุดเอกฐานของ f

2. $f(z) = \frac{2z-1}{(z^2+1)^2}$

จะเห็นว่า f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ $z = \pm i$ เท่านั้น ดังนั้น $z = \pm i$ เป็นจุดเอกฐานของ f

3. $f(z) = \bar{z}$

จะเห็นว่า f หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า z นั่นคือ f ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใด ๆ ดังนั้นจากนิยามจุดเอกฐานจะเห็นว่า ไม่มีจุดใดเป็นจุดเอกฐานของ f

จากนิยามฟังก์ชันวิเคราะห์ทำให้สามารถสรุปคุณสมบัติของผลรวม ผลต่าง ผลคูณ ผลหาร และฟังก์ชันประกอบได้คล้ายกับอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 2.15 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนเซต S ดังนั้น $(f \pm g)(z)$, $(fg)(z)$, $\frac{f}{g}(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน S ด้วย

ถ้า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน S_1 และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน S_2 และพิสัยของ f เป็นสับเซตของ S_2 จะได้ $g(f(z))$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน S_1

นิยาม ให้ h เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง x และ y ซึ่ง $\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}$ หาค่าได้และมีความต่อเนื่อง และคล้องตามสมการ

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{บนโดเมน } D$$

จะกล่าวว่า $h(x, y)$ เป็น **ฟังก์ชันฮาร์มอนิก** (Harmonic function) **บน** D

ข้อสังเกต ถ้า $f(z) = u(z) + iv(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ D ดังนั้น u และ v มีอนุพันธ์ย่อยทุกอันดับที่มีความต่อเนื่องบน D ด้วย

ทฤษฎีบทที่ 2.16 ถ้า $f(z) = u(z) + iv(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ D แล้ว u และ v เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกบน D

พิสูจน์ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น f หาอนุพันธ์ได้บน D นั่นคือ u และ v คล้องตามสมการโคชี-รีมันน์

$$u_x = v_y \quad \text{และ} \quad v_x = -u_y$$

เนื่องจาก u และ v มีอนุพันธ์ย่อยที่ต่อเนื่องบน D

ดังนั้น $\quad u_{xx} = v_{yx} \quad$ และ $\quad v_{xy} = -u_{yy}$

$$\therefore \quad u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0$$

นั่นคือ u เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก

ในทำนองเดียวกัน จากสมการโคชี-รีมันน์

$$u_{xy} = v_{yy} \quad \text{และ} \quad v_{xx} = -u_{yx}$$

$$\therefore \quad v_{xx} + v_{yy} = u_{xy} - u_{yx} = 0$$

นั่นคือ v เป็นฟังก์ชันฮาร์โมนิก

เราเรียกฟังก์ชัน u และ v ซึ่งได้จากฟังก์ชันวิเคราะห์ f ว่า **ฟังก์ชันฮาร์มอนิกสังยุค** (conjugate harmonic functions)

นิยาม ให้ $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจริง x, y ถ้ามีฟังก์ชันค่าจริง $\psi(x, y)$ ซึ่ง $d\psi(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ จะกล่าวว่า $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เป็น **อนุพันธ์แบบแน่นอน** (exact differential)

ทฤษฎีบทที่ 2.17 ถ้า $f(z) = u(z) + iv(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะได้ $-u_y dx + u_x dy$ เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

พิสูจน์ เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

$$\therefore \quad u_x = v_y \quad \text{และ} \quad v_x = -u_y$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} -u_y dx + u_x dy &= v_x dx + v_y dy \\ &= dv(x, y) \end{aligned}$$

ดังนั้น $-u_y dx + u_x dy$ เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $u(x, y) = x^2 - y^2$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และจงหา v ซึ่ง $f(z) = u(z) + iv(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

วิธีทำ $\quad u(x, y) = x^2 - y^2$

$$u_x = 2x, \qquad u_y = -2y$$

$$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = -2$$

จะเห็นว่าอนุพันธ์อันดับสองมีความต่อเนื่องทุก (x, y)

$$\therefore \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

u(x, y) เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

พิจารณา $\quad -u_y dx + u_x dy = 2y dx + 2x dy$

$$= d(2xy + c)$$

ให้ $\quad v(x, y) = 2xy + c$

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

$$= x^2 - y^2 + i(2xy)$$

จะเห็นว่า $u_x = 2x = v_y$ และ $v_x = 2y = -u_y$

และ u_x, v_y, v_x, u_y มีความต่อเนื่องทุก (x, y)

ดังนั้น f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า (x, y)

ตัวอย่าง จงหาฟังก์ชันวิเคราะห์ซึ่งส่วนจริงคือ $u(x, y) = e^x \cos y$

วิธีทำ ให้ v(x, y) เป็นส่วนจินตภาพของ f(z) = u(z) + iv(z) ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น

$$u_x = v_y \quad \text{และ} \quad v_x = -u_y$$

$$u_x = e^x \cos y$$

$$\therefore \quad v_y = e^x \cos y$$

$$v = e^x \sin y + K(x)$$

$$v_x = e^x \sin y + K'(x) = -u_y = (-e^x \sin y)$$

$$\therefore \quad K'(x) = 0$$

$$K(x) = c \qquad \text{เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ดังนั้น $\quad v(x, y) = e^x \sin y + c$

$$f(z) = e^x \cos y + i(e^x \sin y + c)$$

และ f(z) เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า (x, y)

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $u(x, y) = 2x(1 - y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และจงหา v ซึ่งทำให้ f(z) = u + iv เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และเขียน f(z) ในเทอมของ z

44

วิธีทำ $\quad u(x, y) = 2x - 2xy$

$$u_x = 2 - 2y$$

$$u_{xx} = 0$$

$$u_y = -2x$$

$$u_{yy} = 0$$

ดังนั้น $u_{xx} + u_{yy} = 0$

นั่นคือ u เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

เพราะว่า $f = u+iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

$$v_y = u_x = 2-2y$$
$$v = \int(2-2y)\partial y$$
$$= 2y - y^2 + K(x)$$
$$v_x = K'(x) = -u_y$$
$$K'(x) = -(-2x) = 2x$$
$$K(x) = x^2$$
$$v(x,y) = 2y - y^2 + x^2$$

ดังนั้น $f(z) = 2x(1-y) + i(2y - y^2 + x^2)$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกค่า z

จาก
$$f(z) = 2x(1-y) + i(2y - y^2 + x^2)$$
$$= (2x + 2yi) - 2xy + i(x^2 - y^2)$$
$$= 2(x+iy) + i\left[(x^2 - y^2) + 2xyi\right]$$
$$= 2z + iz^2 \qquad \#$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $u(x, y) = e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และจงหา v ซึ่งทำให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

วิธีทำ
$$u_x = (e^{-x})(\sin y) + (-e^{-x})(x \sin y - y \cos y)$$
$$= e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$
$$u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(e^{-x}\sin y \quad xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y)$$
$$= -2e^{-x}\sin y + xe^{-x}\sin y - ye^{-x}\cos y$$
$$u_y = e^{-x}(x\cos y + y \sin y - \cos y)$$
$$= xe^{-x}\cos y + ye^{-y}\sin y - e^{-x}\cos y$$
$$u_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(xe^{-x}\cos y + ye^{-x}\sin y - e^{-x}\cos y)$$
$$= -xe^{-x}\sin y + 2e^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$
$$\therefore \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

u เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

สมการโคชี-รีมันน์ .

$$v_y = u_x = e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y$$

อินทิเกรตเทียบกับ y

$$v = -e^{-x}\cos y + xe^{-x}\cos y + e^{-x}(y\sin y + \cos y) + F(x)$$

$$= ye^{-x}\sin y + xe^{-x}\cos y + F(x)$$

$$v_x = -ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y + F'(x)$$

จากเงื่อนไขที่สองของสมการโคชี-รีมันน์

$$v_x = -u_y = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y$$

$$-ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y + F'(x) = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y$$

$$F'(x) = 0$$

$$F(x) = c$$

$$v(x, y) = e^{-x}(y\sin y + x\cos y) + c$$

ทฤษฎีบทที่ 2.18 ถ้า $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน และ $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ มีความต่อเนื่อง จะได้ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

พิสูจน์ เพราะว่า $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

$$\therefore \quad \exists \psi(x, y) \ni d\psi(x, y) = Mdx + Ndy$$

$$d\psi(x, y) = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy$$

$$\therefore \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = M \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial \psi}{\partial y} = N$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y} \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ตัวอย่าง จงแสดงว่าไม่สามารถหาฟังก์ชันวิเคราะห์ f ซึ่งมีส่วนจริง $u(x, y) = x^2 + y^2$

วิธีทำ สมมติว่า มีส่วนจินตภาพ $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f(z) = u(z) + iv(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

$$\therefore \quad \partial v = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

เพราะว่า f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เพราะฉะนั้น $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

$$av = u_y dx - u_x dy$$
$$= -2ydx + 2xdy$$

ให้ $M = -2y$ และ $N = 2x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -2 \quad \text{และ} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

จากทฤษฎีบทจะได้

$-2ydx + 2xdy = Mdx + Ndy$ ไม่เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

ดังนั้น ไม่สามารถหา $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ข้อสังเกต จะเห็นว่าในที่นี้ $u(x, y) = x^2 + y^2$ นั้น ไม่เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

เพราะว่า $u_{xx} = 2$

$$u_{yy} = 2$$
$$u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

ดังนั้น ไม่สามารถหา $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ตัวอย่าง จงพิจารณาว่า มีส่วนจินตภาพ $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์หรือไม่ เมื่อกำหนดส่วนจริงคือ $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$

วิธีทำ สมมติว่ามีส่วนจินตภาพ $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

$$\partial v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$\therefore f$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $u_x = v_y$ และ $v_x = -u_y$

$$\partial v = u_y dx + u_x dy$$

จาก $u = 2xy \text{ t } 3xy^2 \quad 2y^3$

จะได้ $u_x = 2y + 3y^2$

$$u_y = 2x + 6xy \text{ -- } 6y^2$$

$$\therefore \partial v = -(2x \text{ t } 6xy - 6y^2)dx \text{ t } (2y + 3y^2)dy$$

ให้ $M = -2x - 6xy + 6y^2$

$$N = 2y + 3y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -6x + 12y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น $Mdx + Ndy$ ไม่เป็นอนุพันธ์แบบแน่นอน

ไม่สามารถหา $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ถ้าพิจารณาว่า $u(x, y) = 2xy + 3xy^2 - 2y^3$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกหรือไม่ จะเห็นว่า

$$u_x = 2y + 3y^2$$

$$u_{xx} = 0$$

$$u_y = 2x + 6xy - 6y^2$$

$$u_{yy} = 6x - 12y$$

$$u_{xx} + u_{yy} \neq 0$$

นั่นคือ $u(x, y)$ ไม่เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงแสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันเอนไทร์

   1.1 $f(z) = 2x + y + i(2y - x)$

   1.2 $f(z) = (z - 2)e^{-x}(\cos y - i \sin y)$

   1.3 $f(z) = 2z^2 - iz^3$

   1.4 $f(z) = y^3 - 3x^2y + i(x^3 \quad 3xy^2)$

   1.5 $f(z) = 22 + iz^2$

2. จงแสดงว่า ฟังก์ชันต่อไปนี้ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดเลย

   2.1 $f(z) = z^2 \bar{z}$

   2.2 $f(z) = e^y(\cos x + i \sin x)$

   2.3 $f(z) = xy + iy$

3. จงแสดงว่า $u(x, y)$ ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และหา $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

   3.1 $u(x, y) = 2x - 3y$

   3.2 $u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$

   3.3 $u(x, y) = xe^x \cos y - ye^x \sin y$

   3.4 $u(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$

   3.5 $u(x, y) = \sinh x \sin y$

4. จงแสดงว่า ไม่สามารถหา $v(x, y)$ ซึ่งทำให้ $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ เมื่อกำหนด $u(x, y)$ ให้ดังต่อไปนี้

   4.1 $u(x, y) = x^3 + y^3$

   4.2 $u(x, y) = e^y \cos x$

5. จงหาจุดเอกฐานของฟังก์ชันต่อไปนี้ ให้เหตุผลด้วย

   5.1 $f(z) = |z|^2$

   5.2 $f(z) = \dfrac{z - 1}{z^2 + 4}$

5.3 $f(z) = \dfrac{z^3+i}{z^2-3z+2}$

5.4 $f(z) = \dfrac{3z+4}{(z+1)\ (z^2+2z+2)}$

6. ให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ D จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันค่าคงตัว ถ้า
   6.1 $\overline{f(\overline{z})}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ D ด้วย
   6.2 $|f(z)|$ เป็นค่าคงตัวสำหรับ z ใด ๆ ใน D
   6.3 f เป็นฟังก์ชันค่าจริงสำหรับทุกค่า z ใน D

7. ให้ฟังก์ชัน $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนบริเวณ D ซึ่งไม่รวมจุด $z = 0$ จงใช้สมการโคชี-รีมันน์ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) แสดงว่าฟังก์ชัน u คล้องตามสมการ

$$r^2u_{rr}(r, \theta) + ru_r(r, \theta) + u_{\theta\theta}(r, \theta) = 0$$

8. จงแสดงว่า ฟังก์ชัน $\psi = \ell n[(x-1)^2+(y-2)^2]$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกทุกบริเวณ ซึ่งไม่รวมจุด (1, 2) และหา ϕ ซึ่งทำให้ $\phi + i\psi$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

9. ถ้าเขียน Δz ในรูปแบบเชิงขั้ว คือ $r \operatorname{cis} \theta$ แล้วจะได้ $\Delta \overline{z} = \overline{\Delta z} = r \operatorname{cis}(-\theta)$ จงแสดงว่า $f(z) = \operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ หาอนุพันธ์ไม่ได้ทุกค่า z

10. ถ้า $w = |z|^2 = z \cdot \overline{z}$ จงแสดงว่า $\dfrac{\Delta w}{\Delta z} = \overline{z} + \Delta \overline{z} + z \operatorname{cis}(-2\theta)$ และจงแสดงว่า $\dfrac{dw}{dz} = 0$ แต่สำหรับ $z \neq 0$ w หาอนุพันธ์ไม่ได้