บทที่ 1
จำนวนเชิงซ้อน
(Complex Numbers)

1.1 ความนำ

ในการศึกษาระบบจำนวน จะเริ่มศึกษาถึงจำนวนนับหรือจำนวนธรรมชาติ จำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนอตรรกยะ ตามลำดับ เซตของจำนวนตรรกยะและจำนวนอตรรกยะเราเรียกว่า จำนวนจริง ซึ่งมีคุณสมบัติต่าง ๆ ที่สำคัญ ซึ่งเราได้ศึกษามาแล้ว

พิจารณาสมการ $x^2+1 = 0$ จะเห็นว่าไม่มีจำนวนจริง x ใด ๆ ซึ่งคล้องตามสมการนี้ เพราะจำนวนจริงใด ๆ ยกกำลังสองต้องมากกว่าหรือเท่ากับศูนย์เสมอ แต่เพื่อที่จะหาคำตอบของสมการนี้ จะเห็นว่า

จาก $$x^2+1 = 0$$
$$x^2 = -1$$

จะกำหนดให้ $i^2 = -1$

ดังนั้น $$x^2 = -1 = i^2$$
$$x = \pm i \quad \text{เมื่อ} \quad i = \sqrt{-1}$$

ดังนั้น จากสมการกำลังสองที่อยู่ในรูป

$$ax^2+bx+c = 0$$

เมื่อ a, b, c เป็นจำนวนจริง รากของสมการคือ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

และ x มีค่าจริงได้เมื่อ $b^2-4ac \geqslant 0$ ถ้า $b^2-4ac < 0$ รากของสมการก็จะอยู่ในรูปของ $\sqrt{-1}$ นั่นคือสมการทั้งหลายที่ไม่สามารถหารากเป็นจำนวนจริงได้ ก็จะหารากได้ในเทอมของตัว i ทำให้มีการขยายระบบจำนวนจริงออกไปให้ใหญ่ขึ้น เพื่อให้รากที่สองของ

จำนวนลบสามารถหาได้และอยู่ในระบบใหม่นี้ด้วย เราเรียกจำนวนที่อยู่ในรูปที่มี i อยู่ว่า **จำนวนเชิงซ้อน**

การขยายระบบจำนวนจริงออกไปนั้น ไม่เพียงแต่ใช้แก้ปัญหาการหารากที่สองของจำนวนลบ แต่การวิเคราะห์คุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อนนั้นยังมีประโยชน์มากในการนำไปประยุกต์ในสาขาวิชาอื่น ๆ

1.2 นิยามของจำนวนเชิงซ้อน

การให้นิยามของจำนวนเชิงซ้อน จะกำหนดในรูปคู่อันดับเหมือนกับโครงสร้างในระบบจำนวนจริง โดยทั่วไปจะให้ z แทนจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม จำนวนเชิงซ้อน z จะนิยามในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง

$$z = (x, y)$$

เมื่อ x, y เป็นจำนวนจริง

x เรียกว่า **ส่วนจริง** (real part) ของ z เขียนแทนด้วย Re z

y เรียกว่า **ส่วนจินตภาพ** (imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย Im z

จำนวนเชิงซ้อน $(x, 0)$ คือ **จำนวนจริง** x

จำนวนเชิงซ้อน $(0, y)$ เรียกว่า **จำนวนจินตภาพแท้** (pure imaginary number)

นิยาม จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนเท่ากันก็ต่อเมื่อจำนวนเชิงซ้อนทั้งสองมีส่วนจริงเท่ากันและส่วนจินตภาพเท่ากัน นั่นคือ

ให้ $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$

$(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

เช่น $(-2, 3) \neq (4, 3)$ เพราะว่า $-2 \neq 4$ เป็นต้น

นิยาม การบวกและการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = (x_1, y_1)$ และ $z_2 = (x_2, y_2)$

1. $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
2. $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$

ตัวอย่าง

$$\begin{aligned}(3, 5)(-2, 1) &= \big(3(-2) - (5)(1), (3)(1) + (5)(-2)\big) \\ &= (-11, -7)\end{aligned}$$

จากนิยามการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน พิจารณาจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ จะเห็นว่า ถ้าเขียนจำนวนเชิงซ้อนในรูปผลบวกจะได้ดังนี้

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y)$$

เพราะว่า $(0, 1)(y, 0) = (0.y - 1.0, 0.0 + 1.y) = (0, y)$

ดังนั้น $(x, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0)$

ให้ i แทนจำนวนเชิงซ้อน $(0, 1)$

$(x, 0)$ คือจำนวนจริง x

$(y, 0)$ คือจำนวนจริง y

และ $i^2 = (0, 1)(0, 1)$

$= (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0)$

$= (-1, 0) = -1$

ดังนั้น $(x,y) = x+iy$

นั่นคือ จำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ ใด ๆ อาจจะเขียนในรูป $x + iy$ เมื่อ $i^2 = -1$

$$z = (x, y) = x+iy$$

กำหนดให้ c แทนเซตของจำนวนจริงเชิงซ้อน จะได้

$$C = \{z \mid z = x + iy \text{ เมื่อ } x \in R, y \in R, i^2 = -1\}$$

จากตัวอย่างจะเห็นว่า

$$\begin{aligned}(3, 5)(-2, 1) &= (3+5i)(-2+i) \\ &= 3(-2) + 3i + 5i(-2) + (5i)(i) \\ &= -11 - 7i = (-11, -7)\end{aligned}$$

จะเห็นว่า การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อนก็เหมือนกับการคูณกันของจำนวนจริงนั่นเอง

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + x_1iy_2 + iy_1x_2 + iy_1iy_2 \\ &= x_1x_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2) + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + y_1x_2)\end{aligned}$$

1.3 คุณสมบัติทางพีชคณิต

คุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนเชิงซ้อนส่วนมากจะคล้ายกับคุณสมบัติทางพีชคณิตของจำนวนจริง

ทฤษฎีบทที่ 1.1 ให้ C เป็นเซตของจำนวนเชิงซ้อน และ $z_1, z_2, z_3 \in C$

1. $z_1 + z_2 \in C$, $z_1z_2 \in C$ (คุณสมบัติปิด)
2. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (กฎการสลับที่)

3. $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$ (กฎการเปลี่ยนกลุ่ม)

4. $\forall z \in C\ \exists z_0 \in C \ni z+z_0 = z = z_0+z$

5. $\forall z \in C\ \exists(-z) \in C \ni z+(-z) = z_0 = (-z)+z$

6. $z_1z_2 = z_2z_1$

7. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

8. $\forall z \in C\ \exists u \in C \ni u\cdot z = z = z\cdot u$

9. $\forall z \in C\ (z \neq z_0 \rightarrow \exists z^{-1} \in C \ni z\cdot z^{-1} = u = z^{-1}\cdot z)$

10. $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$ (กฎการกระจาย)

พิสูจน์ 1. ให้ $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$$z_1+z_2 = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

เนื่องจาก x_1+x_2 และ y_1+y_2 เป็นจำนวนจริง

ดังนั้น $z_1+z_2 \in C$

ในทำนองเดียวกัน จากนิยาม z_1z_2 สามารถพิสูจน์ได้ว่า $z_1z_2 \in C$

2. ให้ $z_1 = (x_1, y_1),\ z_2 = (x_2, y_2)$

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (x_1+x_2, y_1+y_2) \\ &= (x_2+x_1, y_2+y_1) \\ &= (x_2, y_2)+(x_1, y_1) \\ &= z_2+z_1 \end{aligned}$$

3. พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

4. ให้ $z = (x, y) \in C$

และ $z_0 = (0, 0)$

$$\begin{aligned} z+z_0 &= (x, y)+(0, 0) \\ &= (x, y) = z \\ z_0+z &= (0, 0)+(x, y) = z \end{aligned}$$

ดังนั้น $\exists z_0 \in C \ni z+z_0 = z = z_0+z$

5. ให้ $z = (x, y) \in C$

ให้ $-z = (-x, -y)$

$$\begin{aligned} z+(-z) &= (x, y)+(-x, -y) \\ &= (x-x, y-y) \end{aligned}$$

$= (0,\ 0) = z_0$

$(-z)+z = (-x,\ -y)+(x,\ y)$

$= (0,\ 0) = z_0$

ดังนั้น $\exists(-z) \in C \ni z+(-z) = z_0 = (-z)+z$

6. ให้ $z_1 = (x_1,\ y_1)$ และ $z_2 = (x_2,\ y_2)$

$$
\begin{aligned}
z_1z_2 &= (x_1,\ y_1)\ (x_2,\ y_2) \\
&= (x_1x_2 - y_1y_2,\ y_1x_2 + x_1y_2) \\
&= (x_2x_1 - y_2y_1,\ y_2x_1 + x_2y_1) \\
&= (x_2,\ y_2)\ (x_1,\ y_1) \\
&= z_2z_1
\end{aligned}
$$

7. พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

8. ให้ $z = (x,\ y) \in c$

ให้ $u = (1,\ 0)$

$$
\begin{aligned}
u\cdot z &= (1,\ 0)\ (x,\ y) \\
&= (1\cdot x - 0\cdot y,\ 0\cdot x + 1\cdot y) \\
&= (x,\ y) = z \\
z\cdot u &= (x,\ y)\ (1,\ 0) \\
&= (x,\ y) = z
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $\forall z \in C\ \exists u \in c \ni u\cdot z = z = z\cdot u$

9. ให้ $z = (x,\ y)$

ให้ $z^{-1} = (u,\ v)$ ซึ่ง $z\cdot z^{-1} = 1 = (1,\ 0)$

$$
\begin{aligned}
z\cdot z^{-1} &= (x,\ y)\ (u\cdot v) \\
&= (xu - yv,\ yu + xv)
\end{aligned}
$$

ต้องการให้ $z\cdot z^{-1} = (1, 0)$

นั่นคือ $xu-yv = 1$ และ $yu+xv = 0$

แก้สมการจะได้ $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$

และ $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$

ดังนั้น $z^{-1} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2},\ \dfrac{-y}{x^2+y^2}\right)$

พิจารณา $$z \cdot z^{-1} = (x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{yx-xy}{x^2+y^2}\right)$$

$$= (1, 0)$$

ในทำนองเดียวกันสามารถแสดงได้ว่า $z^{-1} \cdot z = (1, 0)$

10. พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

หมายเหตุ

1. คุณสมบัติข้อ 4 z_0 ในที่นี้คือ **เอกลักษณ์การบวก** และ $0 = (0, 0) = 0+i0$ สำหรับคุณสมบัติข้อ 8 u คือ **เอกลักษณ์การคูณ** นั่นคือ $1 = (1, 0) = 1+i0$

2. $-z$ เรียกว่า **ตัวผกผันการบวก** ของ z ซึ่งมีค่าเท่ากับ $-x-iy$ ส่วน z^{-1} เรียกว่า **ตัวผกผันการคูณ** ของ z

3. ในการคูณจำนวนเชิงซ้อนนั้นไม่เหมือนกับการคูณจำนวนจริงนัก จึงควรระวังความผิดพลาด ดังตัวอย่างต่อไปนี้

จะเห็นว่า $$\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{(-1)3}\cdot\sqrt{(-1)5}$$

$$= (\sqrt{(-1)})^2\sqrt{3.5}$$

$$= -\sqrt{15}$$

ทั้งนี้เนื่องจาก $\sqrt{-3} = \sqrt{3}i$

และ $\sqrt{-5} = \sqrt{5}i$

ดังนั้น $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{15}i^2 = -\sqrt{15}$

แต่ในการคูณจำนวนจริง จะเห็นว่า $\sqrt{-3}\cdot\sqrt{-5} = \sqrt{15}$

นิยาม สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 ใด ๆ

1. $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$
2. $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$ do $z_2 \neq 0$

ถ้า $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ จะเห็นว่า

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(-1+2i)+(3+2i)(1-i)$

วิธีทำ *วิธีที่ 1* $(-1+2i)+(3+2i)(1-i) = (-1, 2)+(3, 2)(1, -1)$

$$= (-1, 2)+(5, -1)$$

$$= (4,\ 1)$$
$$= 4+i$$

วิธีที่ 2 $$(-1+2i)+(3+2i)(1-i) = (-1+2i)+(3-3i+2i+2)$$
$$= (-1+2i)+(5-i)$$
$$= 4+i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\frac{3-2i}{-1+i}$ ในรูป $x+iy$

วิธีทำ ในการหาค่าจำนวนเชิงซ้อน $\frac{a+bi}{c+di}$ จะใช้เศษส่วน $\frac{c-di}{c-di}$ คูณ เพื่อให้ผลลัพธ์มีส่วนเป็นจำนวนจริง เพราะว่า

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di}$$
$$= \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$
$$= \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i$$

ดังนั้น
$$\frac{3-2i}{-1+i} = \frac{3-2i}{-1+i} \cdot \frac{-1-i}{-1-i}$$
$$= \frac{-3-3i+2i+2i^2}{1-i^2}$$
$$= \frac{-5-i}{2}$$
$$= -\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $z = 3-4i$ จงหา z^{-1} ซึ่งทำให้ $z \cdot z^{-1} = 1$

วิธีทำ ในที่นี้
$$z = 3-4i$$
$$z^{-1} = \frac{1}{3-4i}$$

แล้วหาค่า z^{-1} ให้อยู่ในรูป $x+iy$ นั่นเอง

โดยทั่วไป
$$\frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy}$$
$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

ดังนั้น $\frac{1}{3-4i} = \frac{3-i(-4)}{(3)^2+(-4)^2}$

$= \frac{3+4i}{25}$

จะเห็นว่า $z \cdot z^{-1} = (3-4i)\left(\frac{3}{25}+\frac{4}{25}i\right)$

$= \left(\frac{3^2+(-4)^2}{25}, \frac{(-4)3-3(-4)}{25}\right)$

$= (1, 0) = 1$

ตัวอย่าง โดยเขียน z อยู่ในรูปของ $x+iy$ จงหาค่า z จากสมการ $z^2 = -5+12i$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$

$z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi$

ดังนั้น $x^2-y^2+2xyi = -5+12i$

จะได้ $x^2-y^2 = -5$ และ $2xy = 12$

นั่นคือ $x = \frac{6}{y}$

unu x ในสมการแรก จะได้

$y^4-5y^2-36 = 0$

$(y^2-9)(y^2+4) = 0$

$y^2-9 = 0$ จะได้ $y = \pm 3$

และ $x = \pm 2$

$y^2+4 = 0$ หาค่า y ไม่ได้ เพราะว่า y เป็นค่าจริง

ดังนั้น $z = 2+3i$ และ $-2-3i$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาค่าของข้อต่อไปนี้ในรูป a+ bi

   1.1 $(\sqrt{2}-i)-i(1-\sqrt{2}i)$

   1.2 $(1,-3)(-4,5)$

   1.3 $\dfrac{(1+i)^2}{3-4i}$

   1.4 $(2-3i)(4+2i)$

   1.5 $\dfrac{3i^{30}-i^{19}}{2i-1}$

   1.6 $3\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^3$

2. จงหาค่า z^{-1} ของ

   2.1 $z = -1+3i$

   2.2 $z = 3-2i$

3. โดยการเขียน z ในรูป $x+iy$ จงหาค่า z จากสมการต่อไปนี้

   3.1 $z^2 = 2+i$

   3.2 $z^2-(3+i)z+(2+2i) = 0$

   3.3 $z^2-3z+1+i = 0$

4. จงแสดงว่า คำตอบของสมการ $az^2+bz+c = 0, a \neq 0$ คือ

$$z = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

   และหาค่า z จากสมการ $z^2+(2i-3)z+5-i = 0$

5. จงหาค่า x, y จากสมการ $3x+2iy-ix+5y = 7+5i$

6. จงแสดงว่า $z = 1\pm i$ คล้องตามสมการ $z^2-2z+2 = 0$

7. จงแสดงว่า สำหรับจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2, z_3 ใน c จะได้

   7.1 $(z_1+z_2)+z_3 = z_1+(z_2+z_3)$

   7.2. $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

7.3 $z_1(z_2+z_3) = z_1z_2+z_1z_3$

8. จงแสดงว่า

8.1 $\text{Im}\,(iz) = \text{Re}\,z$

8.2 $\text{Re}\,(iz) = -\text{Im}\,z$

9. จงแสดงว่า $(1+z)^2 = 1+2z+z^2$

และจงพิสูจน์โดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

$$(1+z)^n = 1+\frac{n}{1!}z+\frac{n(n-1)}{2!}z^2+\ldots$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}z^k+\ldots+z^n$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ

1.4 คู่สังยุคและค่าสัมบูรณ์ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม จำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ใด ๆ นิยาม **คู่สังยุคของ** z (conjugate of z) คือ จำนวนเชิงซ้อน $x-iy$ เขียนแทนด้วย $\bar{z}$

นั่นคือ $\quad \bar{z} = x-iy$

ตัวอย่าง

1. $\overline{z - i} = \overline{(x+iy)-i}$

   $= x+\overline{(y-1)i} = x-(y-1)i$

2. $\bar{3} = 3$ เพราะว่า 3 เป็นจำนวนจริง

3. $\overline{-2i} = -(-2i) = 2i$

คุณสมบัติของคู่สังยุคของ z

1. $\bar{\bar{z}}_1 = z_1$

2. $z_1+z_2 = \bar{z}_1+\bar{z}_2$

3. $z_1-z_2 = \bar{z}_1-\bar{z}_2$

4. $\overline{z_1 z_2} = z_1 z_2$

5. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

6. $\text{Re}\, z = \frac{1}{2}(z+ i)$

7. $\text{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

พิสูจน์

1. ให้ $\quad z = x+iy$

   $\bar{z} = x-iy = x+i(-y)$

   $\bar{\bar{z}} = x-i(-y) = x+iy = z$

2. ให้ $\quad z_1 = x_1+iy_1, \quad z_2 = x_2+iy_2$

   $z_1+z_2 = (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

   $z_1+z_2 = (x_1+x_2)-i(y_1+y_2)$

   $= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)$

   $= \bar{z}_1 \, t \, \bar{z}_2$

3. พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 2

4. ให้ $z_1 = x_1+iy_1, \quad z_2 = x_2+iy_2$

$$
\begin{aligned}
\overline{z_1z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} \\
&= \overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(y_1x_2+x_1y_2)} \\
&= (x_1x_2-y_1y_2)-i(y_1x_2+x_1y_2) \\
z_1\bar{z}_2 &= \overline{(x_1+iy_1)}\,\overline{(x_2+iy_2)} \\
&= (x_1-iy_1)(x_2-iy_2) \\
&= (x_1x_2-y_1y_2)-i(y_1x_2+x_1y_2) \\
\overline{z_1z_2} &= \bar{z}_1\cdot\bar{z}_2
\end{aligned}
$$

5. ให้ $z_1 = x_1+iy_1, \quad z_2 = x_2+iy_2$

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \overline{\left(\frac{x_1+iy_1}{x_2+iy_2}\cdot\frac{x_2-iy_2}{x_2-iy_2}\right)} \\
&= \frac{\overline{(x_1x_2+y_1y_2)+(y_1x_2-x_1y_2)i}}{x_2^2+y_2^2} \\
&= \frac{x_1x_2+y_1y_2-(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2} \\
\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} &= \frac{x_1-iy_1}{x_2-iy_2}\cdot\frac{x_2+iy_2}{x_2+iy_2} \\
&= \frac{(x_1x_2+y_1y_2)-(y_1x_2-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2} \\
\therefore\quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}
\end{aligned}
$$

6. และ 7. ให้เป็นแบบฝึกหัด

ตัวอย่าง จงหาค่าของ

1. $\overline{\bar{z}-5i}$ 2 $\overline{\frac{(2+i)^2}{3-4i}}$

วิธีทำ 1. $\overline{z-5i} = \bar{z} - \overline{5i}$ (คุณสมบัติข้อ 3)

$= z-(-5i)$ (นิยามคู่สังยุค)

$= z+5i$

2. $\overline{\frac{(2+i)^2}{3-4i}} = \frac{\overline{(4+4i+i^2)}}{3-4i}$

$= \frac{3+4i}{3-4i}$

$= \cdot\frac{3-4i}{3\quad 4i} = 1$

ตัวอย่าง จงแสดงว่า $\mathrm{Re}\,(z_1\bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1 z_2)$

วิธีทำ ให้ $z = z_1\bar{z}_2$

จากคุณสมบัติข้อ 6 $\mathrm{Re}\,z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

และ $\bar{z} = \overline{z_1\bar{z}_2}$

$= \bar{z}_1\cdot\bar{\bar{z}}_2$

$= \bar{z}_1\cdot z_2$

ดังนั้น แทนค่า z จะได้

$$\mathrm{Re} z = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1\cdot z_2)$$

นิยาม ค่าสัมบูรณ์ (absolute value) หรือ **มอดูลัส** (modulus) ของจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$ ใด ๆ คือ $\sqrt{x^2+y^2}$ เขียนแทนด้วย $|z|$

นั่นคือ $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$

จะเห็นว่า $|z|^2 = x^2+y^2$

$= (\mathrm{Re}\ z)^2+(\mathrm{Im}\ z)^2$

และจากนิยามของ $|z|$ จะได้

1. $|z|$ เป็นจำนวนจริง และ $|z| \geqslant 0$

2. $|z|$ คือ ระยะห่างระหว่างจุดกำเนิดและจุด z นั่นเอง สำหรับจำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนใด ๆ ไม่สามารถจะเปรียบเทียบกันได้ว่าตัวไหนมากกว่าหรือน้อยกว่ากันได้ เช่น z_1 และ z_2 ถ้าเขียน $z_1 > z_2$ จะไม่มีความหมาย แต่ถ้าพิจารณา $|z_1| > |z_2|$ จะบอกได้ว่าจุด z_1 อยู่ห่างจากจุดกำเนิดมากกว่าจุด z_2 อยู่ห่างจากจุดกำเนิด

3. z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ จะได้ว่า $|z_1 - z_2|$ เป็นระยะห่างระหว่างจุด z_1 และ z_2 เพราะว่าถ้าให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ

พิจารณา
$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &= |(x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2)| \\
&= |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
\end{aligned}
$$

ดังนั้น $|z_1 - z_2|$ เป็นระยะห่างระหว่างจุด (x_1, y_1) และจุด (x_2, y_2) นั่นเอง

คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์ของ z

1. $|z| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\text{Re } z = 0$ และ $\text{Im} z = 0$
2. $|z| = |-z| = |\bar{z}|$
3. $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|$
4. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|$
5. $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
6. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
7. $\text{Re } z \leqslant |\text{Re } z| \leqslant |z|$ และ $\text{Im } z \leqslant |\text{Im } z| \leqslant |z|$
8. $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$ คุณสมบัติอสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
9. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$
10. $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$

คุณสมบัติเหล่านี้สามารถพิสูจน์ไม่ยากนัก จึงจะแสดงให้เห็นบางข้อ ส่วนที่เหลือให้พิสูจน์เป็นแบบฝึกหัด

พิสูจน์

3. ให้ $z = x + iy$ ดังนั้น $\bar{z} = x - iy$

$$
\begin{aligned}
z \cdot \bar{z} &= (x + iy)(x - iy) \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

และ
$$
\begin{aligned}
|z|^2 &= (\sqrt{x^2 + y^2})^2 \\
&= x^2 + y^2
\end{aligned}
$$

เพราะว่า $z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+i2xy$

$$|z^2| = \sqrt{(x^2-y^2)^2+(2xy)^2}$$

$$= \sqrt{(x^2+y^2)^2} = x^2+y^2$$

ดังนั้น $z\cdot\bar{z} = |z|^2 = |z^2|$

5. $|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}$ (จากข้อ 3)

$= (z_1z_2)(\bar{z}_1\ \bar{z}_2)$ (คุณสมบัติของ $\bar{z}$)

$$= (z_1\ \bar{z}_1)\ (z_2\bar{z}_2)$$

$$= |z_1|^2\ |z_2|^2$$

$$= (|z_1|\ |z_2|)^2$$

$$\therefore\ |z_1z_2| = |z_1|\ |z_2|$$

8. $|z_1+z_2|^2 = (z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}$

$$= (z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)$$

$$= z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+z_2\cdot\bar{z}_2$$

$$= |z_1|^2+z_2\bar{z}_1+z_1\bar{z}_2+|z_2|^2$$

$$= |z_1|^2+z_1\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+|z_2|^2$$

แต่ $z_1\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2 = 2\,\mathbf{Re}\,(z_1\bar{z}_2)$

$$\leqslant 2\ \mathbf{Re}\,(z_1\cdot\bar{z}_2)|$$

$$\leqslant 2\,|z_1\cdot\bar{z}_2| = 2|z_1|\cdot|\bar{z}_2|$$

$$\leqslant 2\ |z_1|\ |z_2|$$

$$|z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2+2|z_1|\,|z_2|+|z_2|^2 = (|z_1|+|z_2|)^2$$

เพราะว่า $|z_1+z_2|$ และ $|z_1|+|z_2|$ เป็นจำนวนบวกทั้งคู่

ดังนั้น $|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$

9 . เพราะว่า $|z_1| = |(z_1-z_2)+z_2|$ ....**(1.4.1)**

$$\leqslant |z_1-z_2|+|z_2|$$

ดังนั้น $|z_1|-|z_2| \leqslant |z_1-z_2|$

ถ้า $|z_1| \geqslant |z_2|$ จะได้

$$\big||z_1|-|z_2|\big| = |z_1|-|z_2| \leqslant |z_1-z_2|$$

ถ้า $|z_1| < |z_2|$ จะได้

$$\big||z_1|-|z_2|\big| = -(|z_1|-|z_2|)$$

$$= |z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1|$$

(โดยการสลับ z_1 และ z_2 ในสมการ (1.4.1))

นั่นคือ $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$

10. เพราะว่า

$$\begin{aligned} |z_1| &= |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \\ &\leqslant |z_1 + z_2| + |-z_2| \\ |z_1| - |-z_2| &\leqslant |z_1 + z_2| \\ |z_1| - |z_2| &\leqslant |z_1 + z_2| \end{aligned}$$

พิสูจน์ในทำนองเดียวกับข้อ 9

ถ้า $|z_1| \geqslant |z_2|$ จะได้ $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$

ถ้า $|z_1| < |z_2|$ จะได้

$$\begin{aligned} ||z_1| - |z_2|| &= -(|z_1| - |z_2|) \\ &= |z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 + z_1| = |z_1 + z_2| \end{aligned}$$

ดังนั้น $||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2|$

หมายเหตุ จะเห็นว่าคุณสมบัติข้อ 8 สามารถขยายผลบวกออกไปมากกว่า 2 จำนวน เช่น ถ้า z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จะได้

$$|z_1 + z_2 + z_3| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_3| \leqslant |z_1| + |z_2| + |z_3|$$

นั่นคือ ถ้ามี $z_1, z_2, \ldots, z_n$ จะได้อสมการโดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\dfrac{3+i}{3-4i} + \dfrac{10}{4+3i}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} \frac{3+i}{3-4i} + \frac{10}{4+3i} &= \frac{3+i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i} + \frac{10}{4+3i} \cdot \frac{4-3i}{4-3i} \\ &= \frac{9+3i+12i+4i^2}{9-16i^2} + \frac{40-30i}{16-9i^2} \\ &= \frac{5+15i}{25} + \frac{40-30i}{25} \\ &= \frac{9}{5} - \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(2-i)^3$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}(2-i)^3 &= (2-i)^2(2-i)\\ &= \left[4-4i+i^2\right](2-i)\\ &= (3-4i)(2-i)\\ &= 6-3i-8i+4i^2\\ &= 2-11i\end{aligned}$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\dfrac{|3-2i|+|\overline{-4+3i}|}{|3+4i|}$

วิธีทำ

$$\begin{aligned}\frac{|3-2i|+|\overline{-4+3i}|}{|3+4i|} &= \frac{|3-2i|+|-4-3i|}{|3+4i|}\\ &= \frac{\sqrt{9+4}+\sqrt{16+9}}{\sqrt{9+16}}\\ &= \frac{\sqrt{13}+5}{5}\end{aligned}$$

แบบฝึกหัด 1.2

1. กำหนดให้ $z_1 = 1-i$, $z_2 = -2+4i$, $z_3 = \sqrt{3}-2i$ จงหาค่าของ

   1.1 $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$

   1.2 $\left|\dfrac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

   1.3 $\mathrm{Im}\left\{\dfrac{z_1z_2}{z_3}\right\}$

   1.4 $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z_3}{\bar{z}_3} + \dfrac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$

   1.5 $\mathrm{Re}\,\{z_1^2 - 3z_2^2\}$

2. จงแสดงว่า

   2.1 $\overline{iz} = -i\bar{z}$

   2.2 $|(2\bar{z}+5)(\sqrt{2}-i)| = \sqrt{3}|2z+5|$

3. จงพิสูจน์ว่า

   3.1 $\mathrm{Re}\,z = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$

   3.2 $\mathrm{Im}\,z = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$

4. จงพิสูจน์ว่า $|\mathrm{Re}\,z| + |\mathrm{Im}\,z| \leqslant \sqrt{2}|z|$

5. จงพิสูจน์ว่า z เป็นค่าจริงก็ต่อเมื่อ $\bar{z} = z$

6. จงแสดงว่า สมการไฮเพอร์โบลา $x^2-y^2 = 1$ สามารถเขียนในรูปของ $\bar{z}^2+z^2 = 2$

7. กำหนดสมการ $x-3y = 2$ จงเขียนสมการในรูปตัวแปรเชิงซ้อน

8. จงแสดงว่า เมื่อ $|z_2| \neq |z_3|$ จะได้

$$\left|\frac{z_1}{z_2+z_3}\right| \leqslant \frac{|z_1|}{\big||z_2|-|z_3|\big|}$$

9. จงพิสูจน์ว่า ถ้า z_1+z_2 และ z_1z_2 เป็นจำนวนจริงทั้งคู่ จะได้ว่า z_1 และ z_2 เป็นจำนวนจริง หรือ $z_2 = \bar{z}_1$

10. จงพิสูจน์ว่า $z+\frac{1}{z}$ เป็นจำนวนจริง ถ้า $\text{Im}\, z = 0$ หรือถ้า $|z| = 1$

11. จงพิสูจน์ว่า $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2|z_1|^2+2|z_2|^2$

12. ถ้า $|z| < 1$ จงพิสูจน์ว่า

12.1 $\text{Re}\,\frac{1}{1-z} > \frac{1}{2}$

12.2 $\text{Re}\,\frac{z}{1-z} > -\frac{1}{2}$

13. ถ้ากำหนดให้ $e(\alpha) = \cos\alpha + i\sin\alpha$ เมื่อ α เป็นค่าจริง จงพิสูจน์ข้อต่อไปนี้

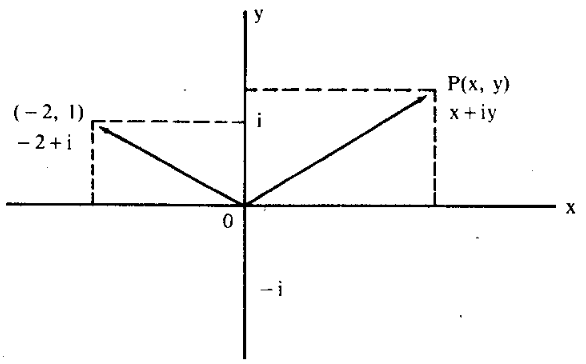
13.1 $e(0) = 1$

13.2 $|e(\alpha)| = 1$

13.3 $e(\alpha_1+\alpha_2) = e(\alpha_1)e(\alpha_2)$

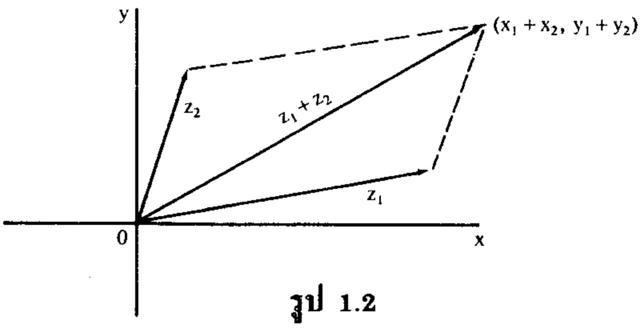
1.5 ระนาบเชิงซ้อน

การเขียนกราฟในระบบพิกัดฉากนั้น จะมีแกนโคออร์ดิเนต x และ y ตัดกันเป็นมุมฉากที่จุดกำเนิด 0 สำหรับจุด P ใด ๆ ในระนาบจะกำหนดอยู่ในรูปคู่อันดับ P(x, y) สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy = (x, y)$ นั้น เรานิยามอยู่ในรูปคู่อันดับอยู่แล้ว ดังนั้นในการเขียนแทนจำนวนเชิงซ้อนในกราฟจึงทำได้ทันที โดยแทนส่วนจริงของ z ตามแกน x และส่วนจินตภาพของ z ตามแกน y ดังนั้นจำนวนเชิงซ้อนแต่ละตัวจะแทนได้ด้วยจุดในระนาบเพียงจุดเดียว และในทางกลับกันคือ จุดในระนาบแต่ละจุดย่อมแทนได้ด้วยจำนวนเชิงซ้อนเพียงตัวเดียว เช่น จำนวนเชิงซ้อน $-3+i$ แทนได้ด้วยจุด $(-3, 1)$ เป็นต้น นอกจากนั้นเราอาจจะใช้เวกเตอร์ในระนาบจากจุดกำเนิดถึงจุด (x, y) แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ ได้ การใช้จุดในระนาบ xy แทนจำนวนเชิงซ้อนจะเรียกระนาบนั้นว่า **ระนาบเชิงซ้อน** (complex plane) หรือระนาบ z (z plane) เรียกแกน x ว่า **แกนจริง** (real axis) เรียกแกน y ว่า **แกนจินตภาพ** (imaginary axis) ดังรูป



รูป 1.1

ถ้าพิจารณาผลบวก $z_1+z_2 = (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$ ถ้าเขียนแทน z_1+z_2 ในรูปเวกเตอร์จะได้ว่าผลบวก z_1+z_2 คือ เส้นทแยงมุมของสี่เหลี่ยมด้านขนานจากจุด 0 ดังรูป

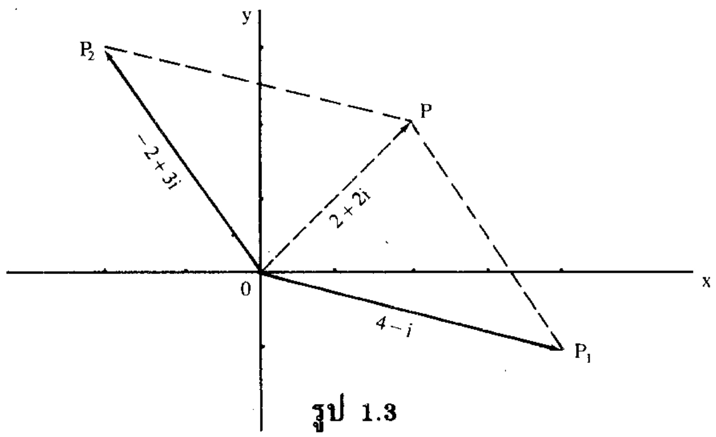


รูป 1.2

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(4-i)-(2-3i)$ และเขียนกราฟแสดงผลลัพธ์

วิธีทำ $$(4-i)-(2-3i) \;=\; 4-2-i+3i \;=\; 2+2i$$

ถ้าแสดงโดยกราฟจะเห็นว่า ในที่นี้จะแทนเวกเตอร์ $4-i$ ด้วย $\overrightarrow{OP_1}$ และ $-2+3i$ ด้วย $\overrightarrow{OP_2}$ ผลลัพธ์คือ $\overrightarrow{OP}$ ดังรูป



รูป 1.3

ตัวอย่าง กำหนดให้ $A = \{z \,/\, |z-1|<2\}$ และ $B = \{z \,/\, |z-i| < 1\}$ จงเขียนกราฟของ $A \cap B$

วิธีทำ ให้ $z = x+iy$

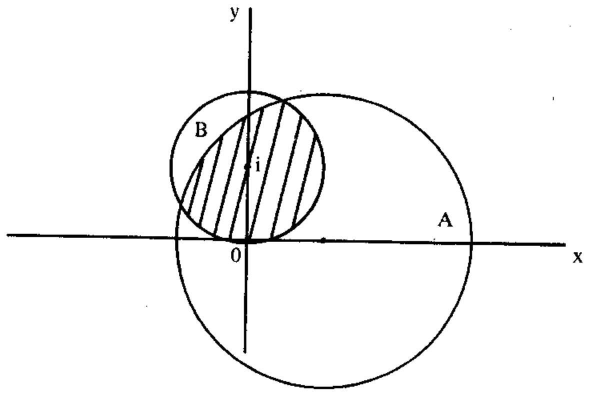
$$\begin{aligned}
|z-1| &= |(x+iy)-1| \\
&= |(x-1)+iy| \\
&= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \\
|z-1| &= \sqrt{(x-1)^2+y^2} \;<\; 2
\end{aligned}$$

ดังนั้น A เป็นเซตของจุดภายในวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(1, 0)$ รัศมี 2 หน่วย

ในทำนองเดียวกัน $|z-i| < 1$ จะได้

$$\sqrt{x^2+(y-1)^2} \;<\; 1$$

B เป็นเซตของจุดภายในวงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(0, 1)$ รัศมี 1 หน่วย



รูป 1.4

$A \cap B$ คือส่วนที่แรเงา

ตัวอย่าง จงหาสมการของ

1. วงกลมจุดศูนย์กลางที่ (2, −1) รัศมี 3 หน่วย
2. วงรีมีแกนเอก (major axis) ยาว 10 หน่วย จุดโฟกัสอยู่ที่ (−3, 0) และ (3, 0)

วิธีทำ 1. จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ (2, −1) เขียนในรูปจำนวนเชิงซ้อนได้ คือ $2-i$ ให้ z เป็นจุดใด ๆ บนเส้นรอบวง จากนิยามของวงกลมจะได้ว่า z อยู่ห่างจาก $2-i$ เป็นระยะ 3 หน่วย นั่นคือ

$$|z-(2-i)| = 3$$

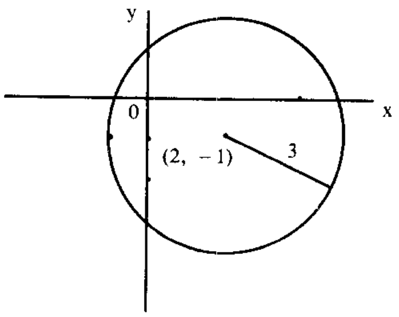
$$|z-2+i| = 3 \qquad \text{เป็นสมการตามต้องการ}$$

2. ให้ z เป็นจุดใด ๆ บนวงรี จากนิยามของวงรีจะได้ว่า ผลบวกของระยะห่างระหว่างจุด z และจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 10 หน่วย ดังนั้นจะได้สมการ คือ

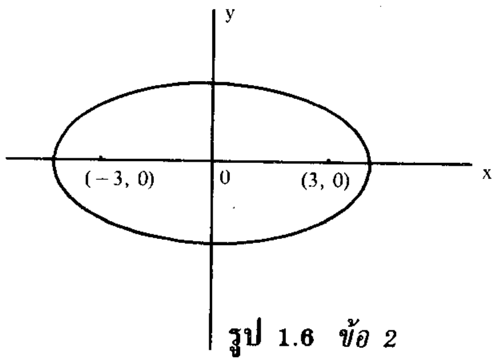
$$|z+3|+|z-3| = 10$$

ถ้าเปลี่ยน $z = x+iy$ จะได้สมการเป็น

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16} = 1$$



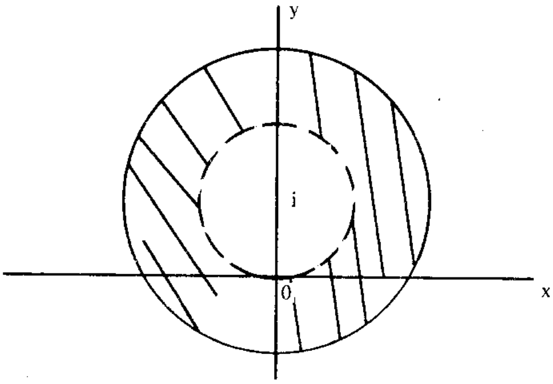
รูป 1.5 *ข้อ 1*



รูป 1.6 *ข้อ 2*

ตัวอย่าง จงเขียนกราฟของบริเวณ $1 < |z-i| \leqslant 2$

วิธีทำ จะเห็นว่า $|z-i| = 1$ และ $|z-i| = 2$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางที่ (0, 1) รัศมี 1 หน่วย และ 2 หน่วยตามลำดับ ดังรูป 1.7



รูป 1.7

บริเวณ $1 < |z-i| \leqslant 2$ เป็นวงแหวนจุดศูนย์กลางที่ (0, 1) ไม่รวมขอบของวงกลม $|z-i| = 1$ ดังรูป

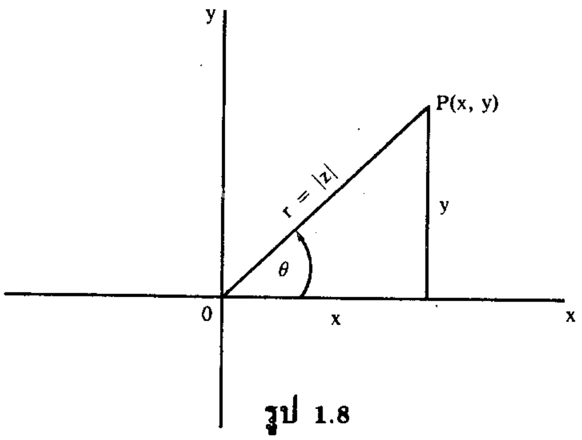
จำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบเชิงขั้ว

นอกจากการเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = (x, y)$ ในระบบพิกัดฉากแล้ว ยังสามารถเขียน z ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinates) ได้

ให้ P เป็นจุดในระนาบเชิงซ้อน แทนจำนวนเชิงซ้อน $z = x+iy$

ให้ $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ และ

θ เป็นมุมที่เวกเตอร์ $\overline{OP}$ ทำกับแกน x



รูป 1.8

จะได้ $\tan\theta = \frac{y}{x}$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ดังนั้น จุด P(x, y) ในระบบพิกัดฉาก แทนได้ด้วย P(r, θ) ในระบบพิกัดเชิงขั้ว โดยที่ $r = \sqrt{x^2+y^2}$ และ $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

จากรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

ดังนั้น $z = x+iy$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

หรือเขียนแทนด้วย $z = r \text{ cis } \theta$

นิยาม z ซึ่งเขียนอยู่ในรูป $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เรียกว่า **จำนวนเชิงซ้อนรูปเชิงขั้ว**

r คือ **ค่าสัมบูรณ์** หรือ **มอดูลัส** (absolute value or modulus) ของ z

θ เรียกว่า **อาร์กิวเมนต์** (argument) ของ z เขียนแทนด้วย $\theta = \arg z$

ถ้า $z = 0$ นั่นคือ $x = 0$ และ $y = 0$ ดังนั้น arg (0) หาค่าไม่ได้ arg (z) มีจำนวนอนันต์ และแต่ละค่าต่างกันด้วย $2n\pi$ ดังนั้นถ้าพิจารณาเฉพาะในช่วงหนึ่ง จึงนิยามค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์ (principal value of arg z) ขึ้น

นิยาม **ค่าสำคัญของอาร์กิวเมนต์** ของจำนวนเชิงซ้อน z ใด ๆ ยกเว้นศูนย์ เขียนแทนด้วย Arg z หมายถึงค่าของ arg z เพียงค่าเดียว ซึ่ง $-\pi < \arg z \leqslant \pi$

ตัวอย่าง ถ้า $z = -\sqrt{6}-\sqrt{2}i$ จงหาค่า $|z|$, arg z และ Arg z

วิธีทำ ให้ $z = -\sqrt{6}-\sqrt{2}i$

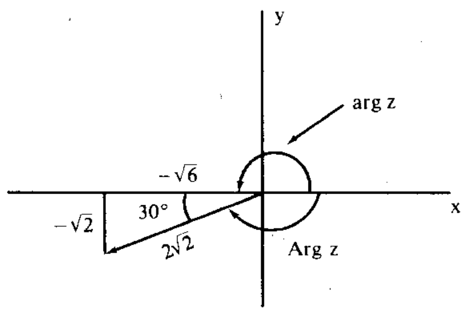
$$|z| = \sqrt{(-\sqrt{6})^2+(-\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{6+2} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

เนื่องจาก x และ y มีเครื่องหมายลบทั้งคู่ ดังนั้นมุมจะอยู่ในจตุภาค 3 ดังรูป



รูป 1.9

$$\theta = 180° + 30° = 210° = \frac{7\pi}{6}$$

ดังนั้น $\arg z = \frac{7\pi}{6} + 2n\pi$

$\text{Arg } z = -\frac{5\pi}{6}$ (เพราะว่าอยู่ในช่วง $(-\pi, \pi)$)

ตัวอย่าง จงเขียนจำนวนเชิงซ้อน $z = -3+3i$ ในรูปเชิงขั้ว

วิธีทำ จาก $z = -3+3i$

ในที่นี้ $x = -3, \quad y = 3$

$$r = |z| = \sqrt{(-3)^2+3^2} = 3\sqrt{2}$$

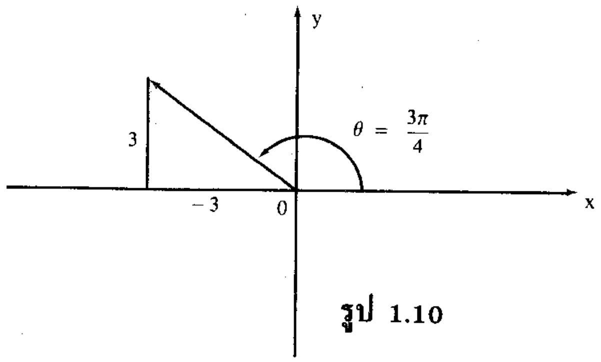
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{3}{-3}$$

$$= -1$$

θ อยู่ในจตุภาค 2

$$\theta = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4} + 2n\pi$$

ดังนั้น
$$-3+3i = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)\right)$$
$$= 3\sqrt{2}\,\mathrm{cis}\left(\frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right)$$



รูป 1.10

ดังนั้นจะเห็นว่า จำนวนเชิงซ้อนสองจำนวนจะเท่ากันก็ต่อเมื่อมีค่า r เท่ากัน และมุมของจำนวนหนึ่งต่างกับอีกจำนวนหนึ่งอยู่ $2n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

นั่นคือ ถ้า $z_1 = r_1\mathrm{cis}\,\theta_1$ และ $z_2 = r_2\mathrm{cis}\,\theta_2$ จะได้ $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $r_1 = r_2$ และ $\theta_1 = \theta_2 + 2n\pi$

ทฤษฎีบทที่ 1.2 ถ้า $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในรูปเชิงขั้วสองจำนวนใด ๆ จะได้

1. $z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$

2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

พิสูจน์

1. ให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$, $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$z_1z_2 = r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)]$$
$$= r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)]$$

2. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\ \frac{[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)]}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$$

ข้อสังเกต

1. จาก

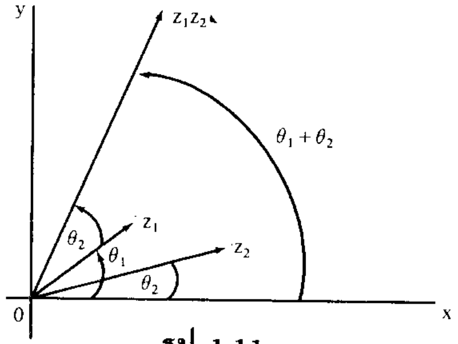
$$z_1z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$|z_1z_2| = |r_1r_2|\,|\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)|$$

$$= r_1r_2$$

$$= |z_1|\,|z_2|$$

จะได้ $\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$ ดังรูป 1.11



รูป 1.11

จะเห็นว่า ความยาวของเวกเตอร์ z_1z_2 จะเท่ากับผลบวกของความยาวของเวกเตอร์ z_1 บวกกับเวกเตอร์ z_2 และมุมที่เวกเตอร์ z_1z_2 ทำกับแกน x จะเท่ากับผลบวกของมุมที่ z_1 และ z_2 ทำกับแกน x นอกจากนี้การเท่ากันของ $\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$ หมายถึง กรณีที่บวกด้วย $2k\pi$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มด้วย ดังนั้นจะได้รูปทั่วไปดังนี้คือ

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$$

เช่น ให้ $z = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

จะได้ $\arg z = \tan^{-1}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}$

$$= \tan^{-1}(-\sqrt{3})$$

$$= \frac{2\pi}{3}$$

พิจารณา $\arg\left\{\frac{-1+\sqrt{3}i)}{2} \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}\right\} = \arg\frac{(-1-\sqrt{3}i)}{2}$

$= \frac{2\pi}{3}$

$\arg\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \arg\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) - 2\pi = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} - 2\pi$

$= -\frac{2\pi}{3}$

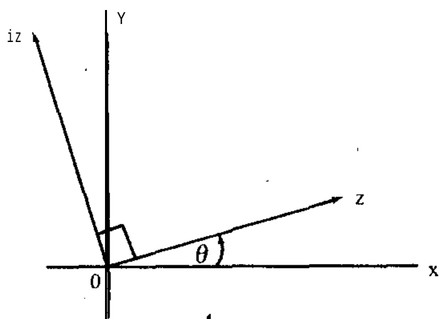
ดังนั้น $\arg\left\{\frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2} \frac{(-1+\sqrt{3}i)}{2}\right\} = \arg\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) + \arg\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right) - 2\pi$

ให้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และเขียน i ในรูปเชิงซ้อน $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$

$$iz = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= r\left|\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right|$$

จะเห็นว่า iz แทนเวกเตอร์ซึ่งหมุนไปจาก z เดิมเป็นมุม $\frac{\pi}{2}$ แต่มีขนาดเท่าเดิม



รูป 1.12

2. จาก $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

จะได้ $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

และ $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ จะเห็นว่า

$$z^{-1} = \frac{1}{r}\left[\cos(0 - \theta) + i\sin(0 - \theta)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\left[\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right]$$

ทฤษฎีบทที่ 1.3 ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ และ n เป็นจำนวนเต็ม จะได้ $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

พิสูจน์ *กรณี 1* $n = 0$ แล้ว $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

กรณี 2 $n > 0$ จะแสดงโดยวิธีอุปนัยทางคณิตศาสตร์

เมื่อ $n = 1$ จะได้ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

ถ้า $z^k = r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)$ จะแสดงว่า $z^{k+1} = r^{k+1}(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta)$

พิจารณา
$$\begin{aligned} z^{k+1} &= z^k \cdot z \\ &= r^k(\cos k\theta + i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= r^{k+1}\big(\cos(k\theta+\theta) + i\sin(k\theta+\theta)\big) \\ &= r^{k+1}\big(\cos(k+1)\theta + i\sin(k+1)\theta\big) \end{aligned}$$

กรณี 3 $n < 0$

$$\begin{aligned} z^n &= \frac{1}{z^{-n}} \\ &= \frac{1}{r^{-n}}\big(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)\big) = \frac{1}{r^{-n}}\operatorname{cis}(-n\theta) \\ &= \frac{1}{r^{-n}\operatorname{cis}(-n\theta)}\cdot\frac{r^n\operatorname{cis}(n\theta)}{r^n\operatorname{cis}(n\theta)} \\ &= \frac{r^n\operatorname{cis}(n\theta)}{\operatorname{cis} 0} \\ &= r^n\operatorname{cis}(n\theta) \end{aligned}$$

หมายเหตุ ถ้า $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ และ $r = 1$ จะได้

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

ซึ่งเรียกว่า **สูตรของเดอโมวีร์** (De Moivre's Formula)

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\dfrac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}}$

วิธีทำ
$$\begin{aligned} \frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{12} + i\sin\frac{7\pi}{12}\right)}{\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}} &= 2\left|\cos\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} - \frac{3\pi}{4}\right)\right| \\ &= 2\left|\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right| \end{aligned}$$

$$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \sqrt{3} - i$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(2+2\sqrt{3}i)^4\,(1-\sqrt{3}i)^{10}$

วิธีทำ

$$2+2\sqrt{3}i = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

และ

$$1-\sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

ดังนั้น

$$(2+2\sqrt{3}i)^4 = 4^4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$$

และ

$$(1-\sqrt{3}i)^{10} = 2^{10}\left[\cos\left(-\frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$\therefore\ (2+2\sqrt{3}i)^4\,(1-\sqrt{3}i)^{10} = 4^4\cdot 2^{10}\left[\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{10\pi}{3}\right)\right]$$

$$= 2^{18}[\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)]$$

$$= 2^{18}[\cos 2\pi - i\sin 2\pi]$$

$$= 2^{18}$$

การหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $w^n = z$ จะกล่าวว่า w **เป็นรากที่** n **ของ** z

ในการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนนั้น จะอาศัยสูตรในรูป $z^n = r^n \operatorname{cis} n\theta$ เช่น ต้องการหารากที่ n ของ 1 นั่นคือต้องการแก้สมการ $w^n = 1$ วิธีหาทำดังนี้คือ

ให้ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$w^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = 1 = \cos 0 + i\sin 0$$

$\therefore\ r^n = 1$ และ $n\theta = 0 + 2k\pi,\quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$r = 1$ และ $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$

ดังนั้น จะมีคำตอบที่ต่างกันคือ

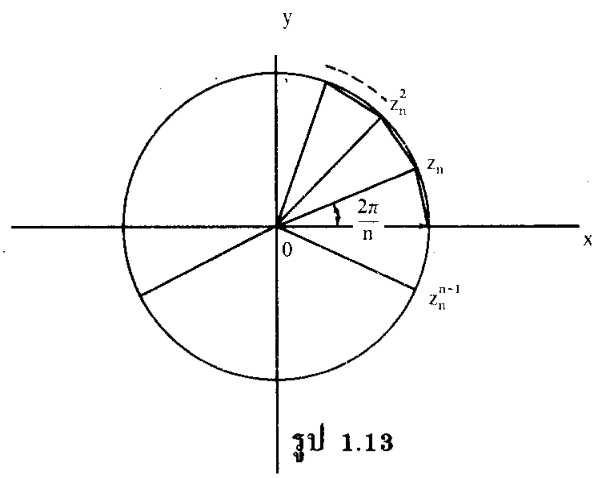
$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},\quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

และรากที่ n ของ 1 มี n ราก

เราอาจเขียนรากทั้ง n ราก ในรูปต่อไปนี้คือ

$$z_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

โดยสูตรของเดอโมวีร์จะได้ว่า รากที่ n ของ 1 คือ $1, z_n, z_n^2, \ldots, z_n^{n-1}$ ถ้าเขียนแทนด้วยรูปจะเห็นว่า รากทั้ง n รากจะอยู่บนวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมีหนึ่งหน่วย แต่ละรากห่างกันเป็นมุมที่จุดศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{2\pi}{n}$ ดังรูป



รูป 1.13

สำหรับการหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ หาได้ในทำนองเดียวกัน โดยให้ $w = s(\cos\phi + i\sin\phi)$ เป็นรากที่ n ของ z

ดังนั้น จะได้ $w^n = z$

และ $s^n = r$ และ $n\phi = \theta + 2k\pi$

$$s = r^{\frac{1}{n}} \quad \text{และ} \quad \phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

ดังนั้น $$w = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

ถ้าเขียนกราฟในระนาบเชิงซ้อน จะได้รูป n เหลี่ยมด้านเท่าบรรจุอยู่ภายในวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดรัศมี $r^{\frac{1}{n}}$ ตำแหน่งของรากทั้ง n รากคือ จุดยอดของรูป n เหลี่ยมด้านเท่านั่นเอง รากทั้ง n รากมีค่าสัมบูรณ์เท่ากัน และอาร์กิวเมนต์ของแต่ละรากห่างกันเป็นมุม $\frac{2\pi}{n}$ เรเดียน

เราจะใช้สัญลักษณ์ $z^{\frac{1}{n}}$ แทนรากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อน z เมื่อ $z \neq 0$

ตัวอย่าง จงหารากที่ 5 ของ 1

วิธีทำ ให้ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 5 ของ 1

$$\therefore\ w^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 1$$

แต่ $1 = \cos 0 + i\sin 0$

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin\theta) = \cos 0 + i\sin 0$$

$\therefore\ r^5 = 1$ และ $5\theta = 0 + 2k\pi$

$r = 1$ และ $\theta = \dfrac{2k\pi}{5}$

ดังนั้น $w = \cos\dfrac{2k\pi}{5} + i\sin\dfrac{2k\pi}{5}, \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

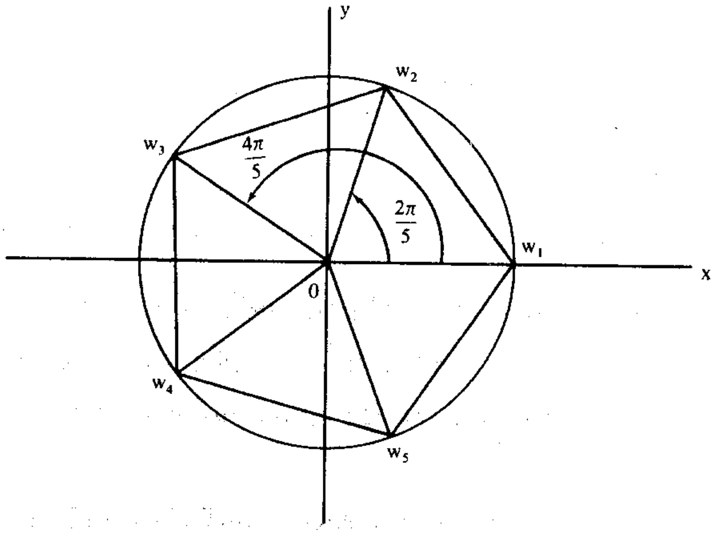
$k = 0,\quad w_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1$

$k = 1,\quad w_2 = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$

$k = 2,\quad w_3 = \cos\dfrac{4\pi}{5} + i\sin\dfrac{4\pi}{5}$

$k = 3,\quad w_4 = \cos\dfrac{6\pi}{5} + i\sin\dfrac{6\pi}{5}$

$k = 4,\quad w_5 = \cos\dfrac{8\pi}{5} + i\sin\dfrac{8\pi}{5}$



รูป 1.14

ตัวอย่าง จงหารากที่ 4 ของ $-3i$

วิธีทำ ให้ $w = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ เป็นรากที่ 4 ของ $-3i$

เขียน $-3i$ ในรูปเชิงขั้ว

$$|-3i| = 3$$

$$\arg(-3i) = \frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad -3i = 3\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\therefore \quad w^4 = r^4 \operatorname{cis} 4\theta = 3\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$$

$$\therefore \quad r^4 = 3 \quad \text{และ} \quad 4\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$r = 3^{\frac{1}{4}} \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$$

รากที่ 4 ของ $-3i$ ทั้ง 4 รากที่ไม่ซ้ำกัน คือ

$$w_k = 3^{\frac{1}{4}}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}\right), \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

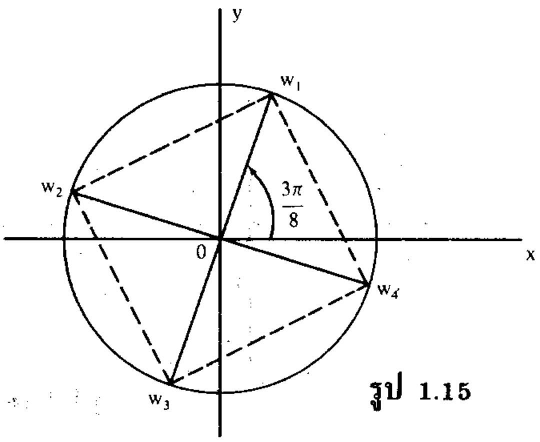
นั่นคือ

$$w_1 = 3^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{3\pi}{8} + i\sin\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$w_2 = 3^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$w_3 = 3^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{11\pi}{8} + i\sin\frac{11\pi}{8}\right)$$

$$w_4 = 3^{\frac{1}{4}}\left(\cos\frac{15\pi}{8} + i\sin\frac{15\pi}{8}\right)$$



รูป 1.15

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

วิธีทำ $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$ คือรากที่สามของ $-1+i$

ให้ $\quad w = r \operatorname{cis} \theta = (-1+i)^{\frac{1}{3}}$

ดังนั้น $\quad w^3 = r^3 \operatorname{cis} 3\theta = -1+i$

$-1+i$ เปลี่ยนในรูปเชิงขั้ว จะได้

$$|-1+i| = \sqrt{2}, \quad \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \quad -1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\therefore \quad r^3 \operatorname{cis} 3\theta = \sqrt{2} \operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$$

$$r^3 = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad 3\theta = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

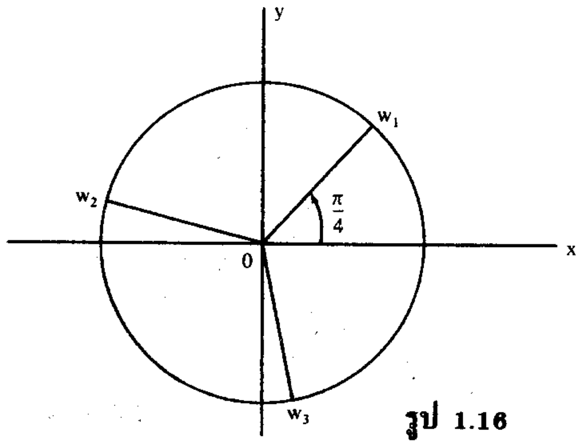
$$r = 2^{\frac{1}{6}} \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{1}{3}\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

$$(-1+i)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3} + i\sin\frac{\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)}{3}\right], \quad k = 0, 1, 2$$

$$k = 0, \quad w_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$k = 1, \quad w_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$k = 2, \quad w_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$$



รูป 1.16

ตัวอย่าง จงหารากที่ 2 ของ $1+\sqrt{3}i$

วิธีทำ $$1+\sqrt{3}i = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ให้ $w = r\,\text{cis}\,\theta$ **เป็นรากที่** 2 **ของ** $1+\sqrt{3}i$

$$w^2 = r^2\text{cis}\,2\theta = 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$r^2 = 2$ **นั่นคือ** $r = \sqrt{2}$

$$2\theta = \frac{\pi}{3}+2k\pi$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}+k\pi, \quad k = 0, 1$$

$$k = 0, \quad w_1 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$k = 1, \quad w_1 = 2^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงหาค่าและเขียนกราฟของ

   1.1 $-\pi < \operatorname{Arg} z < 0$ เมื่อ $|z+i| > 2$

   1.2 $3(1+2i)-2(2-3i)$

   1.3 $3(1+i)+2(4-3i)-(2+5i)$

2. จงเขียนกราฟของข้อต่อไปนี้

   2.1 $|z-i| = 4$

   2.2 $|z-3|-|z+3| = 4$

   2.3 $|z-2i|+|z+2i| = 6$

   2.4 $\operatorname{Im}(z+1) \leqslant 3$

   2.5 $|\operatorname{Re} z| > 1$

3. จงหาสมการของ

   3.1 วงกลมจุดศูนย์กลางที่ $(-3, 4)$ รัศมี 2 หน่วย

   3.2 วงรีแกนเอกยาวเท่ากับ 10 หน่วย จุดโฟกัสทั้งสองอยู่ที่ $(0, 2)$ และ $(0, -2)$

4. จงหาค่าอาร์กิวเมนต์ของ z เมื่อ

   4.1 $z = -1+\sqrt{3}i$

   4.2 $z = -1-\sqrt{3}i$

   4.3 $z = \dfrac{i}{-2-2i}$

   4.4 $z = (\sqrt{3}-i)^6$

5. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปเชิงขั้ว

   5.1 $2-2i$

   5.2 $-1+\sqrt{3}i$

   5.3 $2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$

   5.4 $\sqrt{2}i$

   5.5 $-2\sqrt{3}-2i$

6. จงใช้การเปลี่ยน z ให้อยู่ในรูปเชิงขั้วแสดงว่า

6.1 $i(1-i\sqrt{3})(\sqrt{3}+i) = 2+2\sqrt{3}i$

6.2 $\dfrac{5i}{2+i} = 1+2i$

6.3 $(-1+i)^7 = -8(1+i)$

7. จงหารากของข้อต่อไปนี้

7.1 รากที่ 3 ของ 1

7.2 รากที่ 2 ของ $2-2\sqrt{3}i$

7.3 รากที่ 5 ของ $16+16\sqrt{3}i$

7.4 รากที่ 4 ของ $-2\sqrt{3}-2i$

7.5 รากที่ 5 ของ -32

8. จงแสดงโดยสูตรเดอโมวีร์ว่าสำหรับจำนวน θ ใด ๆ

8.1 $\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \sin\theta - \sin^3\theta$

8.2 $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta \sin^2\theta$

9. จงหาค่าของ $(-2-2i)^{\frac{1}{3}}$, $(-4)^{\frac{1}{4}}$, $(-i)^{\frac{1}{3}}$

1.6 บริเวณในระนาบเชิงซ้อน (Region in the Complex Plane)

ถ้าเราพิจารณาถึงเซตของจำนวนเชิงซ้อนหรือของจุดในระนาบเชิงซ้อน จะช่วยให้เราสามารถขยายความคิดเกี่ยวกับจำนวนเชิงซ้อนไปยังตัวแปรเชิงซ้อน และฟังก์ชันของตัวแปรเชิงซ้อน ดังนั้นในหัวข้อนี้จึงศึกษาถึงนิยามของจุดในระนาบเชิงซ้อนในเชิงโทโพโลยี (Topology)

ดังได้ทราบแล้วว่า ถ้า z, z_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใด ๆ $|z-z_0|$ คือ ระยะห่างระหว่างจุด z และ z_0 ก่อนอื่นจะดูนิยามของย่านจุด z_0 ดังนี้

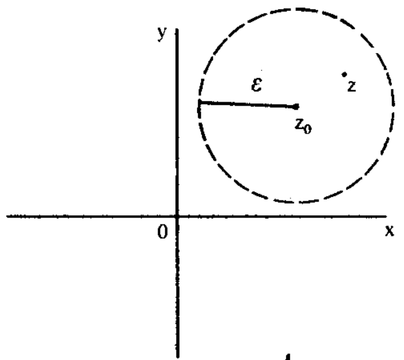
นิยาม ถ้า z_0 เป็นจำนวนเชิงซ้อน และ $\varepsilon > 0$ เรียกเซต $N(z_0, \varepsilon)$

$$N(z_0, \varepsilon) \quad = \quad \{z \,/\, |z-z_0| < \varepsilon\}$$

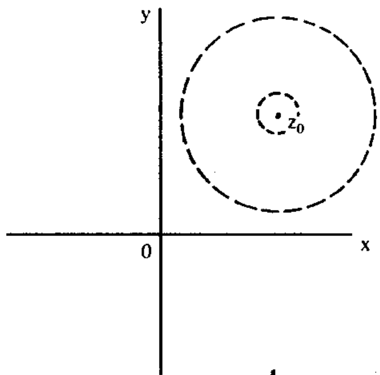
ว่า **ย่านจุด** z_0 (ε neighbourhood of z_0)

และ $N^*(z_0, \varepsilon) = N(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$ เรียกว่า **ย่านใกล้เคียงจุด** z_0 (deleted ε neighbourhood of z_0)

จากนิยามจะเห็นว่า $N(z_0, \varepsilon)$ คือ เซตของจุดทั้งหลายซึ่งอยู่ห่างจาก z_0 น้อยกว่า ε ถ้าเขียนรูปก็จะเห็นว่า เซตของจุดจะอยู่ในวงกลมจุดศูนย์กลางที่ z_0 รัศมี ε ไม่รวมเส้นรอบวง สำหรับ $N^*(z_0, \varepsilon)$ คือ เซตของจุดในวงกลมเดียวกัน แต่ไม่รวมจุดศูนย์กลาง z_0



$N(z_0, \varepsilon)$ **รูป 1.17**

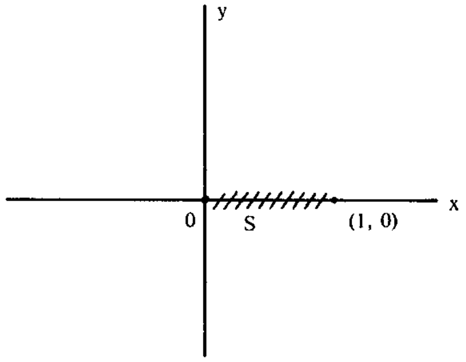


$N^*(z_0, \varepsilon)$ **รูป 1.18**

นิยาม ถ้า $S \subseteq C$ และสำหรับ ε ใด ๆ ที่มากกว่าศูนย์ $N^*(z_0, \varepsilon) \cap S \neq \phi$ จะกล่าวว่า z_0 เป็น **จุดลิมิต** (limit point) ของ S

ตัวอย่าง ให้ $S = \left\{\left(\frac{1}{n}, 0\right) \big/ n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$

จะเห็นว่า $S = \left\{(1, 0), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{3}, 0\right), \ldots\right\}$



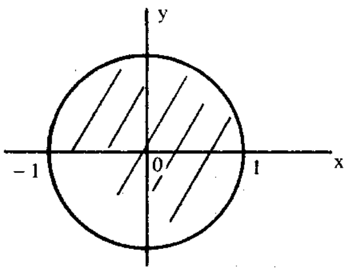
รูป 1.19

จะเห็นว่า จุด (0, 0) ไม่อยู่ใน S และ $N^*((0, 0), \varepsilon) \cap S \neq \phi$
ดังนั้น (0, 0) เป็นจุดลิมิตของ S

นิยาม ถ้า $S \subseteq C$ และ S เป็นเซตซึ่งรวมจุดลิมิตของมันทั้งหมด จะกล่าวว่า S เป็น **เซตปิด** (closed set)

นิยาม ให้ $S \subseteq C$ จุด z_0 เรียกว่า **จุดข้างใน** (interior point) ของ S ถ้ามีบางย่านจุด z_0, $N(z_0, \varepsilon)$ ซึ่ง $N(z_0, \varepsilon) \subseteq S$

ตัวอย่าง วงกลม $|z| = 1$ จะเห็นว่าทุกจุดภายในวงกลมเป็นจุดข้างใน หรือ $S = \{z / |z| < 1\}$ เป็นเซตของจุดข้างใน



รูป 1.20

นิยาม $S \subseteq C$ จุด z_0 เรียกว่า **จุดข้างนอก** (exterior point) ของ S ถ้ามีบางย่านจุด z_0 ซึ่งไม่มีจุดของ S อยู่เลย

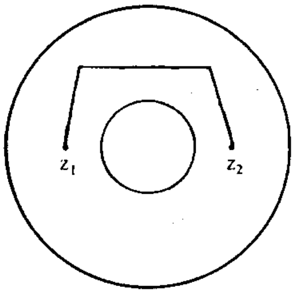
นิยาม $S \subseteq C$ จุด z_0 เรียกว่า **เป็นจุดขอบ** (boundary point) ของ S ถ้าทุกย่านของจุด z_0 $N(z_0, \varepsilon)$ ซึ่ง $N(z_0, \varepsilon)$ มีทั้งจุดใน S และจุดที่ไม่อยู่ใน S

เซตของจุดขอบทั้งหมดของ S เรียกว่า **ขอบของ** S (boundary of S)

วงกลม $|z| = 1$ จุดบนเส้นรอบวงคือ จุดขอบ

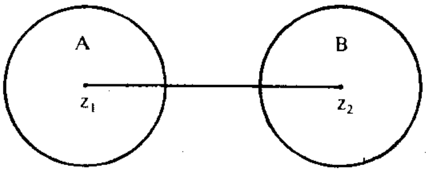
นิยาม $S \subseteq C$ S เรียกว่า **เซตเปิด** (open set) ถ้าทุกจุดของ S เป็นจุดข้างในของ S เช่น $S = \{z / |z| < 1\}$ จะเห็นว่า S เป็นเซตของจุดภายในวงกลมจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ รัศมี 1 และทุกจุดของ S เป็นจุดข้างในทั้งหมด ดังนั้น S เป็นเซตเปิด

นิยาม $S \subseteq C$ S เรียกว่า **เซตไม่ขาดตอน** (connected set) ถ้าสำหรับจุด 2 จุดใด ๆ ใน S สามารถเชื่อมต่อกันด้วยกราฟซึ่งประกอบด้วยเส้นตรงจำนวนจำกัดที่เอาปลายต่อกัน และทุกจุดอยู่ใน S ตลอด



S_1 *เซตไม่ขาดตอน*

รูป 1.21



$S_2 = A \cup B$

S_2 *ไม่เป็นเซตไม่ขาดตอน*

รูป 1.22

นิยาม ถ้า S เป็นเซตเปิดและไม่ขาดตอน จะกล่าวว่า S เป็น **โดเมน** (domain) หรือ **บริเวณเปิด** (open region)

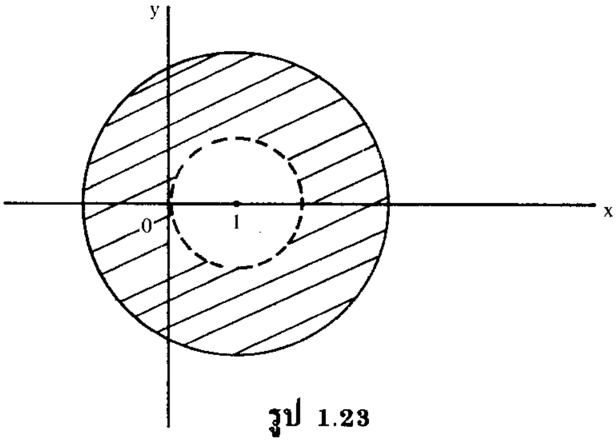
นิยาม $S \subseteq C$ ถ้ามีจำนวนจริง M ซึ่ง $|z| < M$ สำหรับทุกค่า $z \in S$ จะกล่าวว่า S เป็น **เซตมีขอบเขต** (bounded set)

นิยาม $S \subseteq C$, $\bar{S} = S \cup \{z / z \text{ เป็นจุดลิมิตของ } S\}$ เรียก $\bar{S}$ ว่า **เซตโคลเชอร์** (closure set)

นิยาม ถ้า S เป็นโดเมน แล้ว $\bar{S}$ เป็น **บริเวณปิด** (closed region)

ตัวอย่าง ให้ $S = \{z / 1 < |z-1| \leqslant 2\}$ **จงพิจารณา จุดข้างใน จุดข้างนอก จุดขอบ จุดลิมิต** ของ S

วิธีทำ เขียนบริเวณของ S เป็นแผ่นวงแหวน ดังรูป



รูป 1.23

จะได้ว่า จุดข้างในของ S คือจุดที่อยู่ในแผ่นวงแหวน ถ้าเขียนอยู่ในรูปเซตจะได้ว่าเซตของจุดข้างในคือ $\{z / 1 < |z-1| < 2\}$

จุดข้างนอกของ S คือจุดที่อยู่ในวงกลม $|z-1| = 1$ หรือจุดที่อยู่นอกวงกลม $|z-1| = 2$

จุดขอบของ S คือเส้นรอบวงของวงกลม $|z-1| = 1$ และ $|z-1| = 2$

จุดลิมิตของ S คือทุกจุดใน S และจุดขอบทั้งหมดของ S ถ้าเขียนแทนด้วยเซตจะได้ว่า เซตของจุดลิมิตของ $S = \{z / 1 \leqslant |z-1| \leqslant 2\}$

ตัวอย่าง ให้ $S = \left\{z / z = \frac{i}{n}, n = 1, 2, 3, \ldots\right\}$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. S เป็นเซตมีขอบเขตหรือไม่
2. จงหาจุดลิมิต, จุดข้างใน, จุดขอบของ S
3. S เป็นเซตปิด, เซตเปิด, เซตไม่ขาดตอน หรือไม่ และจงหา $\bar{S}$
4. S เป็นบริเวณเปิดหรือไม่

วิธีทำ 1. S เป็นเซตมีขอบเขต เพราะว่าทุกจุด z ใน S $\exists M \ni |z| < M$ เช่น $M = 2$ $\therefore$ $|z| < 2$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลาง 0 รัศมี 2 ซึ่งทุกจุดใน S จะอยู่ในวงกลมนี้หมด

2. *จุดลิมิต* เนื่องจาก $N^*(0, \varepsilon) \cap S \neq \phi$ สำหรับ $\varepsilon > 0$
ดังนั้น $z = 0$ เป็นจุดลิมิตของ S เพียงจุดเดียว

จุดข้างในและจุดขอบ

เพราะว่า $N\left(\frac{i}{n}, \varepsilon\right)$ เป็นวงกลมจุดศูนย์กลางของ $\frac{i}{n}$ รัศมี ε มีจุดซึ่งอยู่ใน S และอยู่นอก S ดังนั้นทุก ๆ จุดของ S รวมทั้งจุด $z = 0$ ด้วย เป็นจุดขอบ ดังนั้น S ไม่มีจุดข้างใน

3. *เซตปิด* เพราะว่ามีจุดลิมิต $z = 0$ ของ S ไม่อยู่ใน S ดังนั้น S ไม่เป็นเซตปิด

   เซตเปิด เพราะว่า S ไม่มีจุดข้างใน ดังนั้น S ไม่เป็นเซตเปิด

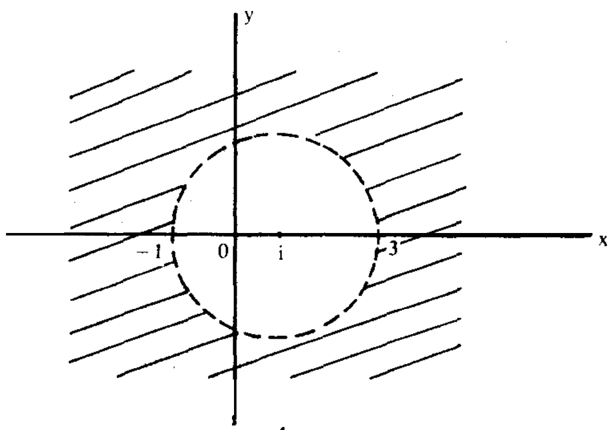
   เซตไม่ขาดตอน ถ้าพิจารณาจุด 2 จุดใด ๆ ใน S แล้วเชื่อมด้วยเส้นที่เอาปลายต่อกัน จะมีจุดบนเส้นเชื่อมต่อนี้ที่ไม่อยู่ใน S ดังนั้น S ไม่เป็นเซตไม่ขาดตอน

$$\bar{S} = \left\{0, i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \ldots\right\}$$

4. เพราะว่า S ไม่เป็น*เซตเปิดที่ไม่ขาดตอน* (open connected set) ดังนั้น S ไม่เป็นบริเวณเปิด

ตัวอย่าง ให้ $S = \{z \,/\, |z-1| > 2\}$ **จงพิจารณาเซตเปิด เซตปิด เซตไม่ขาดตอน เซตมีขอบเขต และเซตโคลเชอร์ของ S**

วิธีทำ เขียนรูปแสดงเซต S ได้ดังนี้



รูป 1.24

S เป็นเซตเปิด เพราะว่าทุกจุดใน S เป็นจุดข้างใน

S ไม่เป็นเซตปิด เพราะว่าจุดลิมิตบนเส้นรอบวงของวงกลมไม่อยู่ใน S

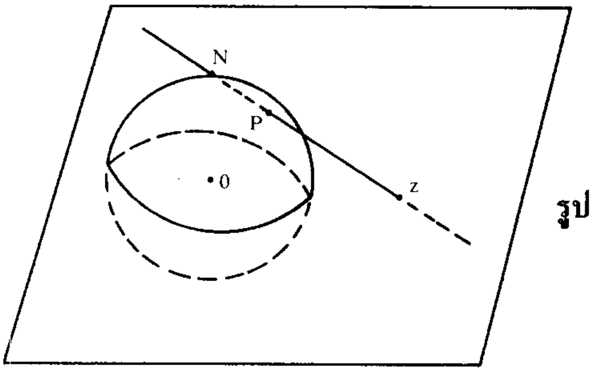
S เป็นเซตไม่ขาดตอน เพราะว่าถ้าพิจารณา 2 จุดใด ๆ ใน S สามารถเชื่อมต่อกันได้ด้วยกราฟซึ่งทุกจุดอยู่ใน S

S เป็นเซตไม่มีขอบเขต

$$\bar{S} = \{z / |z-1| \geq 2\}$$

1.7 ฉายาสเตริโอกราฟ (Stereographic Projection)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนผิวทรงกลม และจำนวนเชิงซ้อนรวมทั้งจุดที่อนันต์ (the point at infinity) ซึ่งใช้สัญลักษณ์ ∞ นั้น รวมเรียกว่า **ระนาบเชิงซ้อนขยาย** (extended complex plane)



รูป 1.25

ในการแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยจุดบนผิวทรงกลมนั้น จะพิจารณาทรงกลมรัศมียาว 1 หน่วย และให้ระนาบเชิงซ้อนตัดผ่านทรงกลมที่เส้นผ่านศูนย์กลาง ให้จุดศูนย์กลางของทรงกลมอยู่ที่จุด $z = 0$ ดังนั้น จุดศูนย์กลางของทรงกลมมีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, 0, 0)$ ให้ขั้วเหนือแทนด้วย N ดังนั้น N มีโคออร์ดิเนตเป็น $(0, 0, 1)$ จุด P เกิดจากเส้นตรงซึ่งต่อระหว่าง N และจุด z ในระนาบเชิงซ้อน จุด P จะอยู่บนผิวทรงกลมซึ่งไม่ใช่ขั้วเหนือ N ดังรูป ดังนั้น จุด N, P, z อยู่บนเส้นตรงเดียวกัน นั่นคือสำหรับแต่ละจุด P บนผิวทรงกลมจะถูกฉายลงมายังจุด ๆ เดียวในระนาบ และในทางกลับกันสำหรับจุด z ใด ๆ ในระนาบเชิงซ้อน จะมีจุดเพียงจุดเดียวบนผิวทรงกลมที่สมนัยกัน ดังนั้นเราได้การสมนัยแบบ 1 – 1 (one – to – one correspondence) ระหว่างจุดบนผิวทรงกลม และจุดในระนาบทรงกลมนี้เรียกว่า **ทรงกลมรีมันน์** (Riemann sphere) และการสมนัยกันนี้เรียกว่า **ฉายาสเตริโอกราฟ** (stereographic projection)

ถ้าให้จุด N ของทรงกลมสมนัยกับ **จุดอนันต์** (point at infinity) และแทนด้วย ∞ และเรียกระนาบเชิงซ้อนที่รวมกับจุดอนันต์นี้ว่า **ระนาบเชิงซ้อนขยาย** และจะให้นิยามการบวก ∞ และจำนวนเชิงซ้อน การคูณ การหาร ดังต่อไปนี้

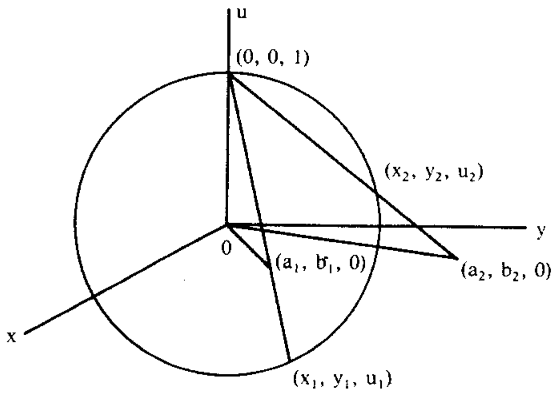
นิยาม ให้ $C^* = C \cup \{\infty\}$ สำหรับ $z \in C$ จะได้

1. $z + \infty = \infty$
2. $z \cdot \infty = \infty$
3. $\frac{z}{\infty} = 0$
4. $\frac{z}{0} = \infty$

และ **ย่านของ** ∞ (neighbourhood of ∞) คือเซต $\{z / |z| > M, M \in R\} = N(\infty, M)$

C^* เรียกว่า **ระบบจำนวนเชิงซ้อนขยาย** (extended complex number system)

พิจารณาทรงกลมหนึ่งหน่วย เขียนได้ในรูปสมการ $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ ดังรูป 1.26



รูป 1.26

สำหรับจำนวนเชิงซ้อน $z = (a, b)$ ลากเส้นตรงใน R^3 เชื่อมจุด $(a, b, 0)$ และ $(0, 0, 1)$ เส้นตรงจะตัดทรงกลม $x^2 + y^2 + u^2 = 1$ ที่ $(0, 0, 1)$ และอีกจุดหนึ่งคือ (x_1, y_1, u_1)

ในการหาค่า (x_1, y_1, u_1) บนทรงกลมนี้ จะพิจารณา 3 จุด คือ $(0, 0, 1)$, (x_1, y_1, u_1) และ $(a, b, 0)$

จะได้ $\quad \frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{u_1 - 1}{-1} = t \quad$ เมื่อ t เป็นค่าสเกลาร์

แต่ $\quad x_1^2 + y_1^2 + u_1^2 = (at)^2 + (bt)^2 + (1-t)^2 = 1$

แก้สมการหาค่า t จะได้

$$t = \frac{2}{a^2 + b^2 + 1}$$

ดังนั้น จุด $\quad (x_1, y_1, u_1) = \left(\frac{2a}{a^2+b^2+1}, \frac{2b}{a^2+b^2+1}, \frac{a^2+b^2-1}{a^2+b^2+1} \right)$

$$= \left(\frac{2a}{|z|^2+1}, \frac{2b}{|z|^2+1}, \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \right)$$

ดังนั้น จำนวนเชิงซ้อน $z = a+bi$ สมนัยกับจุด $P(x, y\ u)$ บนผิวทรงกลม จะได้ความสัมพันธ์ของ z และจุด P คือ

$$x = \frac{2a}{|z|^2+1}$$

$$y = \frac{2b}{|z|^2+1}$$

$$u = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

จะเห็นว่า ถ้าจุด z มีค่า $|z|$ มาก หรือมีขนาดใหญ่มาก ๆ ค่าของ x และ y มีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ในขณะที่ค่า u มีค่าเข้าใกล้ 1 ซึ่งจะกล่าวว่า จุด z อยู่ห่างจากจุดกำเนิดเป็นระยะทางยาวมาก ซึ่งจะสมนัยกับจุด P บนผิวทรงกลมซึ่งอยู่ใกล้ขั้วเหนือของทรงกลม จุดที่มีค่ามอดูลัสใหญ่กว่ามอดูลัสของจุดอื่นใดก็ตามในระนาบเชิงซ้อน และเป็นจุดที่สมนัยกับขั้วเหนือ เราเรียกว่า **จุดอนันต์** (∞) นั่นเอง และเรียกระนาบ $C^* = C \cup \{\infty\}$ ว่า **เป็นระนาบเชิงซ้อน**

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงเขียนกราฟและพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตเปิด, เซตปิด, เซตที่ไม่เป็นทั้งเซตเปิดและเซตปิด, เซตมีขอบเขต หรือเซตไม่มีขอบเขต

   1.1 $|z| = 2$

   1.2 $|2z+1| > 3$

   1.3 $\text{Im } z > 1$

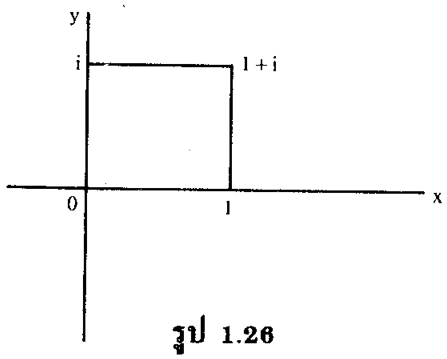
   1.4 $|z-1+2i| \leqslant 1$

   1.5 $|z-4| \geqslant |z|$

   1.6 $|z| > 0, \quad 0 \leqslant \arg z \leqslant \frac{\pi}{4}$

2. เซตในข้อ 1 เซตใดเป็นเซตไม่ขาดตอน

3. ถ้า S เป็นเซตของจุด $z = x+iy$ เมื่อ x, y เป็นจำนวนตรรกยะที่อยู่ภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสดังรูป



รูป 1.26

จงตอบคำถามต่อไปนี้

3.1 S เป็นเซตมีขอบเขตหรือไม่

3.2 จงหาจุดลิมิตของ S

3.3 S เป็นเซตปิดหรือไม่

3.4 จงหาจุดข้างในและจุดขอบของ S

3.5 S เป็นเซตเปิดหรือไม่

3.6 S เป็นเซตไม่ขาดตอนหรือไม่

4. ถ้า S เป็นเซตเปิดซึ่งประกอบด้วยจุด z ทั้งหลาย ซึ่ง $|z| < 1$ หรือ $|z-2| < 1$ S เป็นเซตไม่ขาดตอนหรือไม่ เพราะเหตุใด

5. จงตอบคำถามข้อ 3 ถ้า S เป็นเซตของทุกจุดภายในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส