บทที่ 7

อนุกรมกำลัง (Power Series)

7.1 คำนำ

ในบทที่ 3 เราได้ศึกษาถึงเรื่องลำดับ (sequence) มาแล้ว สำหรับในบทนี้ก็จะกล่าวถึงเรื่องอนุกรม (series) ซึ่งเป็นผลจากการนำแต่ละเทอมในลำดับมาบวกกันไปเรื่อยๆ จนถึงอนันต์เทอม ก่อนที่จะพูดถึงเรื่องของอนุกรมจะทบทวนเรื่องของลำดับในหัวข้อต่อไปก่อน

7.2 ลำดับ (Sequences)

ลำดับจำนวนเชิงซ้อนก็คือ ฟังก์ชันซึ่งกำหนดจำนวนเต็มบวกแต่ละตัวไปได้ค่าซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นถ้าให้ f เป็นฟังก์ชันที่กล่าวนี้แล้ว ค่าของฟังก์ชันก็จะเป็น

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$$

จะเห็นได้ว่า ฟังก์ชันซึ่งเป็นลำดับจำนวนเชิงซ้อนนี้จะมีโดเมน (domain) เป็นเซตของจำนวนเต็มบวกเสมอ ดังนั้นจึงนิยมเขียนลำดับจำนวนเชิงซ้อนว่า

$$\{z_n\} = z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \ldots$$

อย่างเช่น ลำดับ

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1, i, \ldots$$

เป็นลำดับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งเกิดจากฟังก์ชันที่กำหนดให้ จำนวนเต็มบวก $1, 2, 3, \ldots$ ไปได้ค่าซึ่งเป็นจำนวนเชิงซ้อน $i, i^2, i^3, \ldots$ ตามลำดับ สำหรับลำดับ

$$i, -1, -i, 1, i, -1, -i, i, i, \ldots$$

อาจจะเขียนสั้นๆ เป็น $\{i^n\}_{n=1}^{\infty}$ หรือ $\{i^n\}$

7.3 อนุกรม (Series)

ให้ $w_1, w_2, \ldots, w_m$ เป็นลำดับของจำนวน ซึ่งอาจจะเป็นจำนวนจริงหรือจำนวนเชิงซ้อนก็ได้ แล้ว จะได้อนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \cdots$$

แต่ละพจน์ของ w_i, $i = 1, 2, \ldots$ จะเรียกว่าเป็นพจน์ (term) ของอนุกรม ถ้าให้ S_n เป็นผลบวกของ n พจน์แรกของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ จะได้

$$S_n = w_1 + w_2 + \cdots + w_n$$

S_n นี้จะเรียกว่าเป็น **ผลบวกย่อย n พจน์** (n th partial sum) ของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ให้

$$R_n = w_{n+1} + w_{n+2} + \cdots = \sum_{m=1}^{\infty} w_m - S_n$$

R_n จะเรียกว่าเป็น**เศษเหลือของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ หลังจาก n พจน์**
พิจารณาลำดับของผลบวกย่อย $S_1, S_2, S_3, \ldots$ เมื่อ

$$\begin{aligned} S_1 &= w_1 \\ S_2 &= w_1 + w_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

ถ้าลำดับนี้ลู่เข้า นั่นคือ

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

แล้ว อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ จะเรียกว่า **เป็นอนุกรมลู่เข้า** (convergent series) และ S จะเรียกว่าเป็นค่าผลบวก (sum) ของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ และจะเขียนได้ว่า

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + \cdots$$

ถ้าลำดับผลบวกย่อย $S_1, S_2, S_3, \ldots$ ลู่ออก แล้วเราจะกล่าวว่าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ลู่ออก **หรือเป็นอนุกรมลู่ออก** (divergent series) ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ลู่เข้า และมีค่าเท่ากับ S แล้วจะได้ว่า

$$\begin{aligned} S &= S_n + R_n \\ \therefore\ R_n &= S - S_n \end{aligned}$$

จากนิยามของการลู่เข้า จะได้ว่า $|R_n|$ สามารถทำให้เล็กเท่าไหร่ก็ได้ โดยกำหนดให้ n มีค่าใหญ่มากพอ ในบางกรณี เราอาจจะไม่สามารถหาค่า S ของอนุกรมลู่เข้าได้ ดังนั้นเราอาจจะใช้ S_n เป็นค่าโดยประมาณของ S โดยให้ R_n เป็นตัวบอกค่าความถูกต้องนั่นคือ ถ้า $|R_n|$ เล็กมากจนเกือบเข้าใกล้ 0 จะได้ S เกือบเท่ากับ S_n แต่ถ้า $|R_n|$ มีค่ามาก จะทำให้ S ไม่เท่ากับ S_n

ตัวอย่าง 7.3.1 อนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าที่อนุกรมลู่เข้าด้วย
อนุกรมนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า และจะลู่เข้าสู่ค่า *1* เพราะว่า

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

ดังนั้น

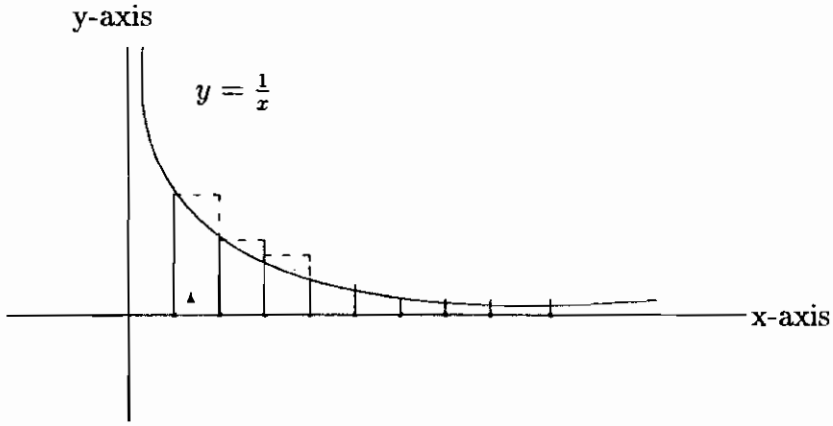
$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 7.3.2 อนุกรม ต่อไปนี้

1. $\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$
2. $\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = 1 - 1 + 1 - \cdots$
3. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$

ว่าเป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้า จงหาค่าที่อนุกรมลู่เข้าด้วย



รูปที่ 7.1: สี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งสร้าง พ.ท. S_n และ พ.ท. A_n

1. อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะ

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

2. อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m = -1+1-1+\cdots$ เป็นอนุกรมลู่ออกเพราะว่า $S_1 = -1, S_2 = -1+1 = 0, S_3 = -1+1-1 = -1, S_4 = -1+1-1+1 = 0, \ldots$ ดังนั้นจะได้ลำดับของผลบวกย่อยเป็น $-1, 0, -1, 0, \ldots$ ซึ่งจะเป็นลำดับลู่ออก

3. อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ เป็นอนุกรมลู่ออก เพราะว่า

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

ดังนั้น S_n คือ ผลบวกของพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้า n รูป
ส่วน A_n จะเป็นพื้นที่ของส่วนใต้เส้นโค้ง $y = \frac{1}{x}$ ซึ่งสมนัยกับ S_n ดังในรูปที่ *7.1*
$S_n > A_n$

$$\begin{aligned} A_n &= \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \ln(n+1) \\ \therefore \lim_{n\to\infty} A_n &= \infty \end{aligned}$$

จาก $S_n > A_n$ ดังนั้น จะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ ด้วย

◊◊◊

ทฤษฎี 7.3.3 ให้ $w_m = u_m + iv_m$ แล้วอนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} w_m = w_1 + w_2 + w_3 + \cdots$$

ลู่เข้าสู่ค่า $a + ib$ ก็ต่อเมื่ออนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} u_m$ และ $\sum_{m=1}^{\infty} v_m$ ลู่เข้าและ

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m = a \text{ และ } \sum_{m=1}^{\infty} v_m = b$$

จะเห็นได้ว่าทฤษฎี (7.3.3) นี้ จะแสดงความสัมพันธ์ระหว่างอนุกรมจำนวนเชิงซ้อน และอนุกรมจำนวนจริงสำหรับการพิสูจน์ จะสามารถใช้คุณสมบัติของลำดับมาแสดงได้ง่ายๆ

นิยาม 7.3.4 อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ จะกล่าวว่า เป็น**อนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์** *(absolutely convergent)* ถ้าอนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} |w_m| = |w_1| + |w_2| + \cdots$$

ลู่เข้า ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ลู่เข้า แต่อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} |w_m|$ ลู่ออก เราจะเรียกอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ นี้ว่าเป็น**อนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข** *(conditionally convergent)*

ตัวอย่าง 7.3.5 อนุกรม

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ ส่วน อนุกรม

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างมีเงื่อนไข ◊◊◊

ทฤษฎี 7.3.6 ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นอนุกรมลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ *(absolutely convergent)* แล้ว อนุกรมนี้จะเป็นอนุกรมลู่เข้า

พิสูจน์ ให้ $\{S_n\}$ เป็นผลบวกย่อย n พจน์ของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} |w_m|$ จากที่ อนุกรมนี้ลู่เข้า จะได้ว่าลำดับ $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า และจากทฤษฎี (3.4.2) จะได้ว่า $\{S_n\}$ เป็นลำดับโคชี
ให้ $\epsilon > 0$ จะมี N ซึ่ง เมื่อ

$$m > n > N \text{ แล้ว } |S_m - S_n| < \epsilon$$

ให้ $m = n + p$ เมื่อ p เป็นจำนวนเต็มบวก นั่นก็คือ

$$|S_{n+p} - S_n| = |w_{n+1}| + |w_{n+2}| + \cdots + |w_p| < \epsilon$$

แต่เรามี

$$\left| \sum_{m=n+1}^{p} w_m \right| \leq \sum_{m=n+1}^{p} |w_m| < \epsilon$$

ซึ่งจะทำให้ ลำดับของผลบวกย่อย n พจน์ของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นลำดับโคชี โดยทฤษฎี (3.4.2) จะได้ว่า ลำดับของผลบวกย่อย n พจน์ของอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่งจะทำให้อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

◊◊◊

ทฤษฎี 7.3.7 ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ลู่เข้า แล้ว

$$\lim_{m\to\infty} w_m = 0$$

พิสูจน์ ให้อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ ลู่เข้าสู่ค่า s ดังนั้น

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= w_1 + w_2 + \cdots + w_{n+1} \\
S_n &= w_1 + w_2 + \cdots + w_n \\
\therefore\ w_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\
\lim_{n\to\infty} w_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= s - s = 0
\end{aligned}$$

◇◇◇

ดังนั้นจากผลของทฤษฎีนี้ จะกล่าวได้ว่า ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ มี พจน์ที่ n ซึ่งมีคุณสมบัติว่า

$$\lim_{n\to\infty} w_n \neq 0$$

แล้ว อนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นอนุกรมลู่ออก ถ้าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ มีพจน์ที่ n มีคุณสมบัติว่า

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0$$

ก็ยังไม่สามารถที่จะบอกว่าอนุกรม $\sum_{m=1}^{\infty} w_m$ เป็นอนุกรมลู่เข้า อย่างเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 7.3.8 *1.* อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

มี พจน์ที่ n คือ $\frac{1}{n}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

แต่อนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

ลู่ออก

2. พิจารณาอนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

ซึ่งจะมีพจน์ที่ m คือ $w_m = m$ จะได้ว่า

$$\lim_{m\to\infty} w_m = \lim_{m\to\infty} m \neq 0$$

ดังนั้น จากทฤษฎี *(7.3.7)* เราจึงได้ว่าอนุกรม

$$\sum_{m=1}^{\infty} m = 1 + 2 + 3 + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่ออก ส่วนอนุกรม

$$\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

จะพบว่าพจน์ที่ n ของอนุกรม คือ w_n จะเป็นดังต่อไปนี้

$$w_n = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -1 & \text{ถ้า } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

ดังนั้น $\lim_{n\to\infty} w_n$ ไม่มีค่าดังนั้น จากทฤษฎี *(7.3.7)* จึงได้ว่าอนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

เป็นอนุกรมลู่ออก

◇◇◇

7.4 อนุกรมกำลัง (Power series)

ในเรื่องของอนุกรมนั้น มีอนุกรมที่สำคัญอนุกรมหนึ่ง คือ อนุกรมกำลัง อนุกรมกำลังนี้จะอยู่ในรูปยกกำลังของ $(z-a)$ เมื่อ a เป็นค่าคงที่ ลักษณะทั่วๆ ไปของอนุกรมกำลังจำนวนเชิงซ้อนจะอยู่ในรูปแบบ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

เมื่อ z คือ ตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน $c_0, c_1, c_2, \ldots$ เป็นค่าคงที่ ซึ่งจะเรียกว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง**(coefficients) ส่วน a จะเป็นค่าคงที่ เรียกว่า **ศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง** (center) ในกรณีที่ $a = 0$ จะได้อนุกรมกำลังเฉพาะเป็นรูปยกกำลังของ z คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots$$

เราจะพิจารณาดูตัวอย่างของอนุกรมกำลัง ซึ่งจะพบเห็นกันอยู่บ่อยๆ

ตัวอย่าง 7.4.1 อนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

เป็นอนุกรมเรขาคณิต *(geometric series)* ซึ่งลู่เข้าอย่างสมบูรณ์สำหรับค่า z ซึ่ง $|z| < 1$ และจะเป็นอนุกรมลู่ออก สำหรับค่า z ซึ่ง $|z| \geq 1$

◇◇◇

ตัวอย่าง 7.4.2 อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

เป็นอนุกรมซึ่งลู่เข้าอย่างสมบูรณ์สำหรับทุกๆ ค่าของ z ซึ่งเราจะแสดงได้โดยการใช้การทดสอบแบบอัตราส่วน *(ratio test)* ซึ่งนักศึกษาได้ศึกษามาแล้วจากแคลคูลัส จะได้

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \left|\frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}}\right| = \frac{|z|}{n+1}$$

ซึ่ง

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0$$

ดังนั้น $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์

◇◇◇

ตัวอย่าง 7.4.3 อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n = 1 + z + 2z^2 + 6z^3 + \cdots$$

เป็นอนุกรมกำลังที่มีศูนย์กลางที่ $a = 0$ จะลู่เข้าสำหรับ $z = 0$ เท่านั้น และอนุกรมกำลังนี้จะลู่ออกสำหรับ ทุกๆค่าของ $z \neq 0$ เพราะว่าจากการทดสอบแบบอัตราส่วนจะได้

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = \left|\frac{(n+1)! z^{n+1}}{n! z^n}\right| = (n+1)|z|$$

ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)|z| = \begin{cases} \infty & \text{เมื่อ } z \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } z = 0 \end{cases}$$

ดังนั้นอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ จะเป็นอนุกรมลู่ออกสำหรับ $z \neq 0$ และจะเป็นอนุกรมลู่เข้าสำหรับ $z = 0$ เท่านั้น ◊◊◊

อนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

จะลู่เข้า เมื่อ $z = a$ เพราะว่า $z - a = 0$ ดังนั้นอนุกรมจะเหลือเพียง c_0 ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ลู่เข้าสำหรับบางค่าของ z ซึ่ง$z_0 \neq a$ แล้ว อนุกรมนี้จะลู่เข้าสำหรับทุกๆ ค่าของ z ซึ่งระยะจากศูนย์กลางน้อยกว่า z_0 ซึ่งเราจะกล่าวถึงในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 7.4.4 ถ้าอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots$$

ลู่เข้าสำหรับ $z = z_0$ แล้ว อนุกรมนี้จะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ สำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่ง $|z-a| < |z_0 - a|$

นั่นก็คือ อนุกรมนี้จะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์ สำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่งระยะทางของ z จากศูนย์กลาง a น้อยกว่าระยะทางของ z_0 จากศูนย์กลาง a

พิสูจน์ จากที่อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ลู่เข้าเมื่อ $z = z_0$ จากทฤษฎี (7.3.7) จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} c_n(z_0-a)^n = 0$$

ดังนั้นโดยทฤษฎี (3.2.12) จะได้ว่า ลำดับ $\{c_n(z_0-a)^n\}$ จะเป็นลำดับที่มีขอบเขต นั่นก็คือ จะมี $M > 0$ ซึ่งสำหรับทุกๆค่าของ $n = 1, 2, 3, \ldots$

พิจารณา $|c_n(z-a)^n|$ จะได้ว่า

$$|c_n(z-a)^n| = \left| c_n(z_0-a)^n \left(\frac{z-a}{z_0-a}\right)^n \right|$$

$$= \quad |c_n(z_0-a)^n| \left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$
$$< \quad M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

ดังนั้น

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-a)^n| < \sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n = M\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

จาก $|z-a| < |z_0-a|$ ดังนั้น $\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right| < 1$ ดังนั้น อนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{z-a}{z_0-a}\right|^n$$

จะเป็นอนุกรมเรขาคณิตซึ่งลู่เข้า ซึ่งจะทำให้ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n(z-a)^n|$ จะลู่เข้า
$\therefore$ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ จะลู่เข้าอย่างสัมบูรณ์เมื่อ $|z-a| < |z_0-a|$

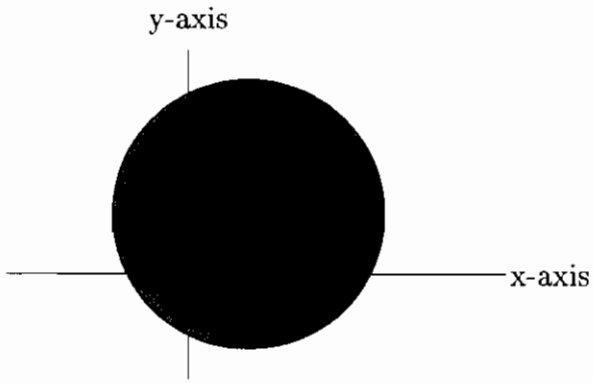
◊◊◊

อนุกรมกำลังในตัวอย่าง (7.4.3) จะสังเกตเห็นได้ว่าอนุกรมกำลังจะลู่เข้าเพียงบางค่าของ z เท่านั้นดังนั้นเราจะพิจารณาหาค่าของ z ซึ่งทำให้อนุกรมกำลังลู่เข้า
พิจารณาอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n = c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{7.1}$$

เราจะพิจารณาหาค่า z ในระนาบจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งทำให้อนุกรมนี้ลู่เข้า สมมติให้ R เป็นจำนวนจริงบวกที่มีค่าน้อยสุด ซึ่งทำให้ทุกๆจุด z ในระนาบเชิงซ้อนซึ่งเมื่อ $|z-a| < R$ แล้วจะทำให้อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ลู่เข้า และทุกๆจุด z ในระนาบเชิงซ้อนซึ่งเมื่อ $|z-a| > R$ แล้วจะทำให้ อนุกรมนี้จะลู่ออก เราจะเรียกวงกลม $|z-a| = R$ นี้ว่าเป็น"**วงกลมแห่งการลู่เข้า**" (circle of convergence) และค่า R จะเรียกว่าเป็น "**รัศมีของการลู่เข้า**" (radius of convergence)
ส่วนจุด z ซึ่งอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม $|z-a| = R$ นี้ อาจจะทำให้อนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออกก็ได้

ตัวอย่าง 7.4.5 จงพิจารณา วงกลมแห่งการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้



รูปที่ 7.2: วงกลมแห่งการลู่เข้า

1. อนุกรม

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots$$

จะมีรัศมีของการลู่เข้าเป็น $R = 1$ และจุดบนเส้นรอบวง $|z| = 1$ จะมีค่า z ซึ่งทำให้อนุกรมลู่ออกอย่างเช่น $z = 1$ อนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2. อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} \cdots$$

อนุกรมนี้จะลู่เข้าสำหรับ z เมื่อ $|z| < 1$ และจะลู่ออกสำหรับ z เมื่อ $|z| > 1$
ในกรณีที่ $z = 1$ อนุกรมจะลู่ออกในกรณีที่ $z = -1$ อนุกรมจะเป็น $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots$ และจะเป็นอนุกรมซึ่งลู่เข้า

◊◊◊

ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ ลู่เข้าสำหรับค่า z ทั้งหมดในระนาบเชิงซ้อน จะได้ ว่า $R = \infty$ และ $\frac{1}{R} = 0$ แต่ถ้าอนุกรมลู่เข้าเฉพาะจุด $z = a$ จะได้ $R = 0$ และ $\frac{1}{R} = \infty$ ในการหาค่าของรัศมีของการลู่เข้า R ของอนุกรมกำลัง อาจจะหาได้จากสัมประสิทธิ์ของอนุกรมซึ่งจะกล่าวถึงในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 7.4.6 ถ้าลำดับ $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ ลู่เข้า ด้วยลิมิตเท่ากับ L แล้ว รัศมีของการลู่เข้า R ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ คือ $R = \frac{1}{L}$

ค่าของ R ที่หาได้จากสูตรข้างบนนี้จะเรียกว่าสูตรโคชี-ฮาดดามาร์ด (Cauchy - Hardamard formula) ในกรณีที่ $L = 0$ จะได้ $R = \infty$ นั่นก็คือ อนุกรมจะลู่เข้าสำหรับทุกๆ ค่าของ z ในระนาบของจำนวนเชิงซ้อน ถ้าลำดับ $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ ไม่ลู่เข้า แต่มีคุณสมบัติว่า

1. เป็นลำดับที่มีขอบเขต แล้ว

$$R = \frac{1}{L}$$

   เมื่อ L เป็นค่าที่มากที่สุด ของจุดลิมิตของลำดับย่อยของลำดับ $\left\{\sqrt[n]{|c_n|}\right\}$ หรือ

2. เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต แล้ว จะได้ $R = 0$ ดังนั้น อนุกรมนี้จะลู่เข้าเฉพาะค่าของ $z = a$ เท่านั้น

สำหรับการพิสูจน์จะหาดูได้ใน [Conway] เราจะไม่นำมาพิสูจน์ในที่นี้
ในการหารัศมีของการลู่เข้า R ของอนุกรมกำลังนั้นเราอาจจะหาได้อีกวิธีหนึ่งโดยใช้ทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 7.4.7 ถ้าอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0} a_n(z-a)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้าเป็น R แล้ว

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

ถ้าลิมิตนี้มีค่า

การพิสูจน์จะหาดูได้จาก [Conway] ซึ่งเราจะไม่นำมาพิสูจน์ในที่นี้
หมายเหตุ ถ้าค่าของลิมิตในทฤษฎีมีค่าเป็น ∞ เราก็จะได้ว่า $R = \infty$ ซึ่งก็หมายความว่าอนุกรมจะลู่เข้าสำหรับทุกๆ ค่าของ z ในระนาบของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นในทฤษฎีนี้เรายอมรับค่าของลิมิตเป็น ∞

7.5 อนุกรมเทเลอร์ (Taylor series)

พิจารณา $f(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในย่านจุดของจุด $z = a$ และให้ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งอยู่ภายในย่านจุด a นี้ โดยสูตรอินทิกรัลของโคชี (Cauchy's integral formula) จะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{z^* - z}dz^* \tag{7.2}$$

เมื่อ z เป็นจุดคงที่ใดๆ ซึ่งอยู่ภายใน C และ z^* เป็นตัวแปรเชิงซ้อนซึ่งอยู่บนเส้นโค้ง C
พิจารณา $\frac{1}{z^*-z}$ จะได้

$$\begin{aligned}\frac{1}{z^* - z} &= \frac{1}{z^* - a - (z - a)} = \frac{1}{(z^* - a)\left(1 - \frac{z-a}{z^*-a}\right)} \\ &= \frac{1}{(z^* - a)} \cdot \frac{1}{1 - \left[\frac{z-a}{z^*-a}\right]}\end{aligned} \tag{7.3}$$

จาก z^* อยู่บน C ขณะที่ z อยู่ภายใน C ดังนั้น

$$\left|\frac{z - a}{z^* - a}\right| < 1$$

จากสูตรของอนุกรมเรขาคณิตที่ว่า

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

สำหรับ $q \neq 1$
จะได้

$$\frac{1}{1 - q} = 1 + q + \cdots q^n + \frac{q^{n+1}}{1 - q}$$

โดยการให้ $q = \left[\frac{z-a}{z^*-a}\right]$ จะได้ว่า

$$\frac{1}{1 - \left[\frac{z-a}{z^*-a}\right]} = 1 + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right) + \cdots + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^n + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^{n+1}\left(\frac{z^* - a}{z^* - z}\right)$$

แทนค่านี้ลงใน (7.3) จะได้

$$\frac{1}{z^* - z} = \frac{1}{z^* - a}\left\{1 + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right) + \cdots + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^n + \left(\frac{z - a}{z^* - a}\right)^{n+1}\left(\frac{z^* - a}{z^* - z}\right)\right\}$$

แทนค่านี้ลงใน (7.2) และ จากที่ z และ a เป็นค่าคงที่ ดังนั้นจะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{z^*-a}dz^* + \frac{z-a}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^2}dz^* + \cdots \\ &\quad + \frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}dz^* + R_n(z) \end{aligned}$$

เมื่อ

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}dz^*$$

ดังนั้น

$$f(z) = f(a) + \frac{(z-a)}{1!}f'(a) + \frac{(z-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(z)$$

ซึ่งเรียกว่า **"สูตรของเทเลอร์"** (Taylor's formula) และ $R_n(z)$ จะเรียกว่า **"เป็นเศษเหลือ"** (remainder) จากที่ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $f(z)$ จะมีอนุพันธ์ทุกๆ อันดับ n ถ้าเลือก n ให้ใหญ่มากๆ โดยให้ $n \to \infty$ จะได้อนุกรมกำลัง

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n$$

ซึ่งจะเรียกว่าเป็น**"อนุกรมเทเลอร์"** (Taylor series) ของ $f(z)$ ด้วยศูนย์กลางที่ a ในกรณีที่ $a = 0$ จะได้

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$$

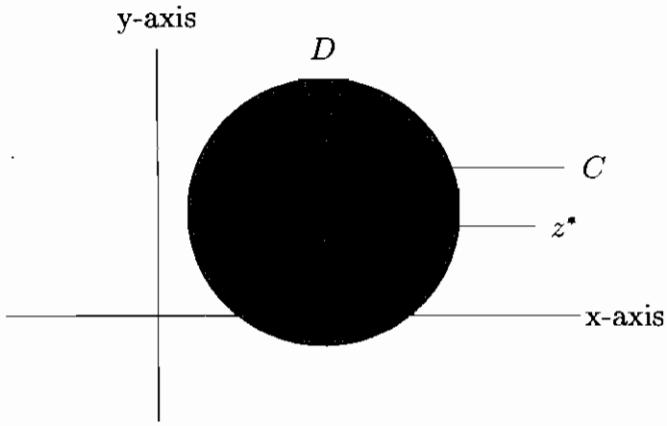
ซึ่งจะเรียกว่าเป็น **"อนุกรมแมคคลอรีน"** (Maclaurine series) ของ $f(z)$ จะเห็นได้ว่าอนุกรมเหล่านี้จะลู่เข้า และเท่ากับ $f(z)$ ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$$

เพื่อที่จะแสดงว่า $\lim_{n\to\infty} R_n(z) = 0$ เราจะพิจารณาค่า $R_n(z)$

$$R_n(z) = \frac{(z-a)^{n+1}}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}dz^*$$

เพราะว่า z^* อยู่บน C และ z อยู่ภายใน C ดังนั้น $|z^*-z| > 0$ เพราะว่า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายใน และบน C ดังนั้น $\left|\frac{f(z^*)}{z^*-z}\right| < \tilde{M}$ เมื่อ $\tilde{M}$ เป็นจำนวนจริงบวกตัวหนึ่งสำหรับ



รูปที่ 7.3: ลักษณะของเส้นโค้ง C ในทฤษฎีของเทเลอร์

ทุกๆค่า ของ z^* บน C ให้ r เป็นรัศมีของ C ดังนั้น $|z^* - a| = r, \forall z^*$ บน C ความยาวของ $C = 2\pi r$ จากการหาขอบเขตบนจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
|R_n(z)| &= \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}(z^*-z)}dz^*\right| \\
&< \frac{|z-a|^{n+1}}{2\pi}\tilde{M}\frac{1}{r^{n+1}}2\pi r \\
&= \tilde{M}r\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1} \\
\therefore \lim_{n\to\infty}|R_n(z)| &= \lim_{n\to\infty}\tilde{M}r\left|\frac{z-a}{r}\right|^{n+1} = 0
\end{aligned}
$$

ทฤษฎี 7.5.1 ทฤษฎีเทเลอร์ *(Taylor's theorem)*
ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และให้ $z = a$ เป็นจุดใดๆ ใน D แล้วจะมีอนุกรมกำลังอันหนึ่งที่ศูนย์กลางที่ a ซึ่งแทน $f(z)$ และอนุกรมกำลังนี้จะอยู่ในรูปแบบ

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

เมื่อ

$$b_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

สำหรับค่า $f(z)$ ในทฤษฎี (7.5.1) นี้ จะมีค่าเท่ากับอนุกรมทางขวา สำหรับทุกๆ ค่าของ z ซึ่งอยู่ในวงกลมเปิดที่ใหญ่ที่สุดโดยมีศูนย์กลางที่ a และวงกลมนี้จะต้อง ที่อยู่ภายใน D

ทฤษฎี 7.5.2 ทุกๆ อนุกรมกำลังซึ่งมีรัศมีของการลู่เข้า $R \neq 0$ จะเป็นอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันวิเคราะห์ ซึ่งแทนโดยอนุกรมกำลัง

พิสูจน์ ให้อนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า $R \neq 0$ และ ให้อนุกรมนี้แทนด้วยฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ บางอัน สำหรับ z ซึ่ง $|z-a| < R$ นั่นคือ

$$\begin{aligned} f(z) &= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots \\ f'(z) &= b_1 + 2b_2(z-a) + \cdots \end{aligned}$$

และโดยทั่วๆ ไปจะได้

$$f^{(n)}(z) = n!b_n + (n+1)n \ldots 321 b_{n+1}(z-a) + \cdots$$

อนุกรมเหล่านี้จะลู่เข้าสำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่ง $|z-a| < R$ และ จะแทนฟังก์ชันวิเคราะห์นี้สำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่ง $|z-a| < R$ โดยการให้ $z = a$ จะได้

$$f(a) = b_0, \; f'(a) = b_1, \ldots, f^{(n)}(a) = n!b_n$$

แทนค่า $b_0, b_1, \ldots, b_n$ จะได้

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots$$

จะเป็นอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน $f(z)$ ◊◊◊

7.6 อนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันประถม (Taylor series of elementary functions)

ตัวอย่าง 7.6.1 ให้ $f(z) = \frac{1}{1-z}$ จะได้

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}, \ f^{(n)}(0) = n!$$

ดังนั้นจะได้อนุกรมแมคคลอรีน ซึ่งเป็นอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, \ |z| < 1$$

$f(z)$ มีจุดเอกฐาน *(singular point)* ที่ $z = 1$ ซึ่งจุดนี้จะอยู่บนเส้นรอบวงของวงกลมของการลู่เข้า

◊◊◊

ตัวอย่าง 7.6.2 ให้ $f(z) = e^z$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ ของ z และค่าของ $f'(z) = e^z$ ดังนั้น จะได้อนุกรมแมคคลอรีน

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots$$

gเ ◊◊◊

ตัวอย่าง 7.6.3 พิจารณาอนุกรมแมคคลอรีนของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. ให้ $f(z) = \cos z$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ สำหรับทุกๆค่าของ z ใน $\mathbb{C}$ อนุกรมแมคคลอรีนของ $f(z)$ คือ

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots$$

2. ให้ $f(z) = \sin z$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ สำหรับทุกๆค่าของ z ใน $\mathbb{C}$ อนุกรมแมคคลอรีนของ $f(z)$ คือ

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots$$

◇◇◇

7.7 วิธีการหาอนุกรมกำลัง

เราจะกล่าวถึงวิธีการหาอนุกรมกำลังในตัวอย่างต่างๆ ต่อไปนี้

การหาอนุกรมกำลังโดยการแทนที่ในเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 7.7.1 จงหาอนุกรมแมคคลอรีนของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$
จากเอกลักษณ์

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, \ |z| < 1$$

แทนที่ $-z^2$ สำหรับ z ลงในเอกลักษณ์จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+z^2} &= \frac{1}{1-(-z^2)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-z^2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} \\
&= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots
\end{aligned}$$

เมื่อ $|-z^2| < 1 \Rightarrow |z|^2 < 1 \Rightarrow |z| < 1$

◇◇◇

การหาอนุกรมกำลังโดยการใช้อินทิกรัล

ตัวอย่าง 7.7.2 จงหาอนุกรมแมคคลอรีนของฟังก์ชัน $f(z) = \tan^{-1} z$
จาก

$$\begin{aligned} f(z) &= \tan^{-1}(z) \\ \therefore \quad f'(z) &= \frac{1}{1+z^2} \end{aligned}$$

จากตัวอย่าง *(7.7.1)*

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+z^2} &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \\ \therefore \quad f'(z) &= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots \end{aligned}$$

อินทิเกรททีละพจน์ จะได้

$$\begin{aligned} \int f(z)dz &= f(z) \\ &= \int dz - \int z^2 dz + \cdots \\ &= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \cdots, \quad |z| < 1 \\ \therefore \quad f(z) &= \tan^{-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \end{aligned}$$

◊◊◊

การหาอนุกรมกำลังโดยการใช้อนุกรมเรขาคณิต

ตัวอย่าง 7.7.3 จงหาอนุกรมแมคคลอรีนของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{c-bz}$
พิจารณา $f(z) = \frac{1}{c-bz}$ จะได้ว่า

$$f(z) = \frac{1}{c-bz}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{c-ab-b(z-a)} \\
&= \frac{1}{(c-ab)\left[1-\frac{b(z-a)}{c-ab}\right]} \qquad (7.4)
\end{aligned}
$$

โดยการใช้สูตร

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots, \ |z| < 1 \qquad (7.5)$$

แทนค่า $z = \frac{b(z-a)}{c-ab}$ ลงใน *(7.5)* จะได้

$$\frac{1}{1-\frac{b(z-a)}{c-ab}} = 1 + \frac{b(z-a)}{c-ab} + \left(\frac{b(z-a)}{c-ab}\right)^2 + \cdots$$

แทนค่าที่ได้นี้ใน *(7.4)* จะได้

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{c-ab}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{b(z-a)}{c-ab}\right]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{(c-ab)^{n+1}}(z-a)^n \\
&= \frac{1}{c-ab} + \frac{b}{(c-ab)^2}(z-a) + \frac{b^2}{(c-ab)^3}(z-a)^2 + \cdots
\end{aligned}
$$

อนุกรมนี้จะลู่เข้าสำหรับ $\left|\frac{b(z-a)}{c-ab}\right| < 1$ นั่นก็คือ อนุกรมจะลู่เข้าสำหรับ z ซึ่ง

$$|z-a| < \left|\frac{c-ab}{b}\right| = \left|\frac{c}{b} - a\right|$$

◊◊◊

การหาอนุกรมกำลังโดยการใช้อนุกรมไบโนเมียล และเศษส่วนย่อย (Binomial series and partial fractions)

ตัวอย่าง 7.7.4 จงหาอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชัน

$$f(z) = \frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12}$$

ด้วยศูนย์กลาง $z = 1$
จากอนุกรมไบโนเมียล

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1+z)^n} &= (1+z)^{-n} \\ &= 1 - nz + \frac{n(n+1)}{2!}z^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}z^3 + \cdots\end{aligned}$$

จากฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{(1+z)^n}$ ที่มีจุดเอกฐานที่ $z = -1$ ดังนั้นอนุกรมข้างบนนี้จะลู่เข้าเมื่อ $|z| < 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{2z^2+9z+5}{z^3+z^2-8z-12} \\ &= \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{2}{z-3} \\ &= \frac{1}{[3+(z-1)]^2} - \frac{2}{2-(z-1)} \\ &= \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\left[1+\frac{1}{3}(z-1)\right]^2}\right) - \frac{1}{1-\frac{1}{2}(z-1)} \\ &= \frac{1}{9}\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{3}\right)^2} - \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}}\end{aligned}$$

โดยอนุกรมไบโนเมียลจะได้

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{9}\left(1 - 2\left(\frac{z-1}{3}\right) + \frac{6}{2!}\left(\frac{z-1}{3}\right)^2 + \cdots\right) \\ &- \left(1 + \frac{z-1}{2} + \left(\frac{z-1}{2}\right)^2 - \cdots\right) \\ &= \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{3}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n(n+1)}{3^{n+2}} - \frac{1}{2^n}\right](z-1)^n \\ &= -\frac{8}{9} - \frac{31}{54}(z-1) - \frac{23}{108}(z-1)^2 - \cdots\end{aligned}$$

เพราะว่า $z = 3$ เป็นจุดเอกฐานของ $f(z)$ และเป็นจุดซึ่งอยู่ใกล้ศูนย์กลาง $z = 1$ มากที่สุด ดังนั้น อนุกรมนี้จะลู่เข้า สำหรับทุกๆค่าของ z ซึ่ง $|z-1| < 2$

◇◇◇

การหาอนุกรมกำลังโดยการใช้หาค่าอนุพันธ์

ตัวอย่าง 7.7.5 จงหาอนุกรมแมคคลอรีน ของฟังก์ชัน $f(z) = \tan z$
จาก $f(z) = \tan z$ หาค่าอนุพันธ์ของ $f(z)$ จะได้

$$f'(z) = \sec^2 z = 1 + \tan^2 z = 1 + f^2(z)$$

นั่นก็คือ $f'(0) = 1, \quad f(0) = 0$ หาค่าอนุพันธ์ของ $f'(z)$ จะได้

$$\begin{aligned} f''(z) &= 2f(z)f'(z), & f''(0) &= 0 \\ f'''(z) &= 2(f'(z))^2 + 2f(z)f''(z), & f'''(0) &= 2 \\ f^{(4)}(z) &= 6f'(z)f''(z) + 2f(z)f'''(z), & f^{(4)}(0) &= 0 \\ f^{(5)}(z) &= 6(f''(z))^2 + 8f'(z)f'''(z) + 2f(z)f^{(4)}(z), & f^{(5)}(0) &= 16 \end{aligned}$$

จากสูตรของอนุกรมเทเลอร์ในทฤษฎี *(7.5.1)* จะได้

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \frac{17}{315}z^7 + \cdots, |z| < \frac{\pi}{2}$$

◇◇◇

การหาอนุกรมกำลังโดยการเทียบสัมประสิทธิ์ (undetermined coefficients)

ตัวอย่าง 7.7.6 จงหาอนุกรมแมคคลอรีนของ $f(z) = \tan z$ จาก $\tan z$ เป็นฟังก์ชันคี่ *(odd function)* ดังนั้นอนุกรมจะอยู่ในลักษณะ

$$\tan z = b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots \tag{7.6}$$

และจาก

$$\sin z = \tan z \cos z$$

แทน $\sin z, \cos z$ ในรูปแบบของอนุกรมจะได้

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots = \left(b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots\right)\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)$$

จาก $\tan z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆ ค่าของ z ยกเว้นคือ $z = \pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots$
ดังนั้น อนุกรมแมคคลอรีนของ $\tan z$ จะลู่เข้าในกรณีที่ $|z| < \frac{\pi}{2}$
คูณอนุกรม $(b_1 z + b_3 z^3 + b_5 z^5 + \cdots)$ และ $\left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right)$
แล้วเปรียบเทียบสัมประสิทธิ์ของกำลังของ z ทางพจน์ด้านซ้ายและด้านขวา จะได้

$$\begin{aligned} b_1 &= 1 \\ -\frac{1}{3!} &= -\frac{b_1}{2!} + b_3 \\ \frac{1}{5!} &= \frac{b_1}{4!} - \frac{b_3}{2!} + b_5 \end{aligned}$$

หาค่า b_1, b_3 และ $b_5 \ldots$ จะได้

$$b_1 = 1,\ b_3 = \frac{1}{3},\ b_5 = \frac{2}{15} \ldots$$

แทนค่า $b_1, b_2, \ldots$ ลงใน *(7.6)* จะได้อนุกรมแมคคลอรีนของ $f(z) = tanz$ เป็น

$$\tan z = z + \frac{1}{3}z^3 + \frac{2}{15}z^5 + \cdots$$

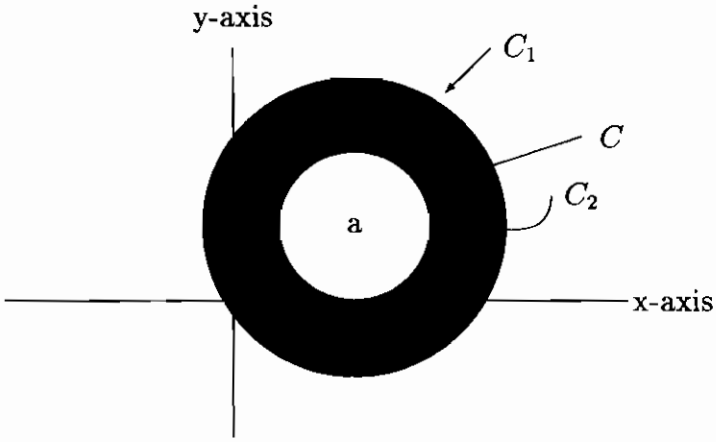
◊◊◊

7.8 อนุกรมลอร์เรนท์ (Laurent series)

จะมีอนุกรมกำลังอีกชนิดหนึ่งซึ่งคล้ายๆ กับอนุกรมเทเลอร์ ซึ่งรูปแบบของอนุกรมนี้คือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n}$$

อนุกรมนี้จะแทนฟังก์ชัน $f(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงแหวน $r < |z-a| < R$ ซึ่งจะกล่าวถึงในทฤษฎีต่อไปนี้



รูปที่ 7.4: วงแหวนที่มีขอบเขตเป็นเส้นรอบวงของวงกลมในทฤษฎีของลอร์เรนท์

ทฤษฎี 7.8.1 ทฤษฎีลอร์เรนท์ *(Laurent theorem)*
ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงแหวนซึ่งมีขอบเขตเป็นเส้นรอบวงของวงกลม C_1 และ C_2 ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ a แล้ว $f(z)$ จะสามารถแทนโดยอนุกรมลอร์เรนท์ คือ

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z-a)^n} \\ &= b_0 + b_1(z-a) + b_2(z-a)^2 + \cdots + \frac{c_1}{z-a} + \frac{c_2}{(z-a)^2} + \cdots \end{aligned}$$

เมื่อ

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}dz^* \\ c_n &= \frac{1}{2\pi i}\int_C (z^*-a)^{n-1} f(z^*)dz \end{aligned}$$

เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิด อยู่ภายในวงแหวนระหว่าง C_1, C_2 และ ทิศทางของ C ทวนเข็มนาฬิกา

อนุกรมลอร์เรนท์นี้อาจจะเขียนสั้นๆ ได้ว่า

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n (z-a)^n$$

เมื่อ

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} dz^*$$

พิสูจน์ ให้ z เป็นจุดใดๆ ซึ่งอยู่ภายในวงแหวน จากสูตรของโคชี จะได้

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z} dz^* - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z^*)}{z^*-z} dz^*$$

ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ทฤษฎีของเทเลอร์จะได้

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{z^*-z} dz^* = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-a)^n$$

เมื่อสัมประสิทธิ์ b_n คือ

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} dz^*$$

จากที่ a ไม่ใช่จุดที่อยู่ภายในวงแหวน ดังนั้น $\frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}}$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงแหวน ดังนั้น จะสามารถใช้ C แทนเส้นโค้ง C_1 ได้ดังนั้นจะได้สัมประสิทธิ์ b_n เป็น

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z^*)}{(z^*-a)^{n+1}} dz^*$$

ในกรณีของ C_2 จาก z อยู่ภายนอกของเส้น C_2 ดังนั้น

$$\left| \frac{z^*-a}{z-a} \right| < 1$$

พิจารณา

$$\frac{1}{z^*-z} = \frac{1}{z^*-a-(z-a)} = \frac{-1}{(z-a)\left(1-\frac{z^*-a}{z-a}\right)}$$

จากอนุกรมเรขาคณิต เมื่อ $\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right| < 1$ จะได้

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^*-z} &= -\frac{1}{z-a}\left\{1 + \frac{z^*-a}{z-a} + \left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^n\right\} \\ &\quad -\frac{1}{z-z^*}\left(\frac{z^*-a}{z-a}\right)^{n+1} \end{aligned} \tag{7.7}$$

คูณตลอด (7.7) ด้วย $-\frac{1}{2\pi i}f(z^*)$ และหาค่าอินทิกรัลบน C_2 จะได้

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_2}\frac{f(z^*)}{z^*-z}dz^* &= \frac{1}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-a}\int_{C_2}f(z^*)dz^*\right. \\
&\quad +\frac{1}{(z-a)^2}\int_{C_2}(z^*-a)f(z^*)dz^*+\cdots \\
&\quad \left.+\frac{1}{(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}(z^*-a)^n f(z^*)dz^*\right\}+R_n^*(z)
\end{aligned}$$

เมื่อ

$$R_n^*(z)=\frac{1}{2\pi i(z-a)^{n+1}}\int_{C_2}\frac{(z^*-a)^{n+1}f(z^*)}{z-z^*}dz^*$$

เราสามารถใช้ C แทน C_2 ได้ โดยค่าของอินทิกรัลไม่เปลี่ยนแปลง
จาก $z-z^*\neq 0$ และ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในวงแหวน C_2 และบน ดังนั้น

$$\left|\frac{f(z^*)}{z-z^*}\right|<M,\ \forall z^* \text{ บน } C_2$$

ให้ความยาวของ $C_2=l$ จะได้

$$|R_n^*(z)|<\frac{1}{2\pi|z-a|^{n+1}}|z^*-a|^{n+1}Ml=\frac{Ml}{2\pi}\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|^{n+1}$$

จาก $\left|\frac{z^*-a}{z-a}\right|<1$
ดังนั้น

$$\lim_{n\to\infty}|R_n^*(z)|=0$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 7.8.2 อนุกรมลอร์เรนท์ของฟังก์ชัน $z^2e^{\frac{1}{z}}$ เมื่อศูนย์กลาง 0 คือ

$$\begin{aligned}
z^2e^{\frac{1}{z}} &= z^2\left(1+\frac{1}{1!z}+\frac{1}{2!z^2}+\cdots\right) \\
&= z^2+z+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!z}+\frac{1}{4!z^2}+\cdots,\ \ |z|>0
\end{aligned}$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 7.8.3 จงหาอนุกรมลอร์เรนท์ของ $f(z) = \frac{1}{1-z^2}$ เมื่อศูนย์กลางคือ $z = 1$
จาก

$$(1 - z^2) = (1 + z)(1 - z) = -(z + 1)(z - 1)$$

และจากอนุกรมเรขาคณิต

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

เมื่อ $|a| < 1$ จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{2+(z-1)} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\left[1-\left(-\frac{z-1}{2}\right)\right]} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}(z-1)^n
\end{aligned}$$

อนุกรมที่ลู่เข้าเมื่อ $\left|\frac{z-1}{2}\right| < 1$ นั่นคือ $|z-1| < 2$
ในทำนองเดียวกัน จะได้

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z+1} &= \frac{1}{(z-1)+2} \\
&= \frac{1}{(z-1)\left(1+\frac{2}{z-1}\right)} \\
&= \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

อนุกรมนี้ลู่เข้า เมื่อ $\left|\frac{2}{z-1}\right| < 1$ นั่นคือ $|z-1| > 2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{-1}{(z-1)(z+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}(z-1)^{n-1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}}{z-1} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}(z-1) + \frac{1}{16}(z-1)^2 - \cdots$$

อนุกรมจะลู่เข้า เมื่อ $0 < |z-1| < 2$
ส่วนอนุกรม

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(z-1)^{n+2}} = -\frac{1}{(z-1)^2 + \frac{2}{(z-1)^3}} - \frac{4}{(z-1)^4} + \cdots$$

จะลู่เข้า เมื่อ $|z-1| > 2$ ◇◇◇

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า ถ้าลำดับ $\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ลู่เข้าด้วยลิมิต L แล้ว รัศมีของการลู่เข้า R ของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ คือ $R = \frac{1}{L}$ เมื่อ $L > 0$ และ $R = \infty$ เมื่อ $L = 0$

2. จงแสดงว่า ถ้าอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ มีรัศมีของการลู่เข้า R เมื่อ R เป็นจำนวนที่นับได้ แล้ว รัศมีของการลู่เข้า ของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ คือ $\sqrt{R}$

3. จงหารัศมีของการลู่เข้าของอนุกรมต่อไปนี้

ก.	$\sum_{n=0}^{\infty}(z-2i)^n$	ข.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2)^n}{2^n}$
ฃ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2z)^n}{n!}$	ค.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{2n}}{n!}$
ฅ.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}$	ฆ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$
ง.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}z^n$	จ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}z^n$
ฉ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}z^n$	ช.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^n}$
ซ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$	ฌ.	$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n^2}$
ญ.	$\sum_{n=0}^{\infty}6^n(z-i)^n$	ฎ.	$\sum_{n=0}^{\infty}(n!)z^n$
ฏ.	$\sum_{n=0}^{\infty}3^{2n}z^n$	ฐ.	$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\pi}{2}\right)^n z^n$

4. จงหาอนุกรมเทเลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ศูนย์กลางอยู่ที่ a และจงหารัศมีของการลู่เข้าด้วย

ก.	$\cos 2z$,	$a = 0$	ข.	$\sin z^2$,	$a = 0$
ฃ.	e^{-z},	$a = 0$	ค.	e^z,	$a = 1$
ฅ.	e^z,	$a = \pi i$	ฆ.	$\frac{1}{1-z}$,	$a = -1$
ง.	$\frac{1}{z}$,	$a = -1$	จ.	$\frac{1}{1-z}$,	$a = i$
ฉ.	$\cos^2 z$,	$a = 0$	ช.	$\sin^2 z$,	$a = 0$

5. จงหา พจน์ที่ 1, 2 และ 3 ของอนุกรมแมคคอรีนของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $\tan z$ ข. $e^z \sin z$ ค. $z \cot z$

6. จงหาอนุกรมแมคคอรีนของฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $\frac{1}{1-z^3}$ ข. $\frac{1}{1+z^3}$ ฃ. $\frac{1}{1-z^6}$

ค. $\frac{1}{(1+z^2)^2}$ ฅ. $\frac{4z^2+30z+68}{(z+4)^2(z-2)}$ ฆ. $\cos z^2$

ง. e^{z^2-z} จ. e^{z^4}

7. จงแสดงฟังก์ชันต่อไปนี้ ในรูปแบบของอนุกรมลอร์เรนท์ ซึ่งลู่เข้าสำหรับ $0 < |z| < R$ และจงบอกบริเวณซึ่งอนุกรมจะลู่เข้าด้วย

ก. $\frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{z^6}$ ข. $\frac{\cos 2z}{z^2}$ ฃ. $\frac{1}{z^4(1+z)}$

ค. $\frac{1}{z^2(1-z^2)}$ ฅ. $\frac{1}{z^2(z-3)}$ ฆ. $\frac{\sinh 3z}{z^3}$

ง. $\frac{1}{z^6+z^4}$ จ. $\frac{1}{z^2(1+z)^2}$