บทที่ 6

อินทิกรัล(Integral)

6.1 คำนำ

ก่อนที่จะกล่าวถึงอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าเชิงซ้อนจะทบทวนคุณสมบัติบางประการของอินทิกรัลของฟังก์ชันค่าจริงเสียก่อน ดังนี้คือสมมติให้ $f(t)$, $g(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงของตัวแปรจำนวนจริง t ซึ่งต่อเนื่องบนช่วง $a \leq t \leq b$ และ c_1, c_2 เป็นจำนวนจริงคงที่แล้ว

1. $\int_a^b [c_1 f(t) + c_2 g(t)]dt = c_1 \int_a^b f(t)dt + c_2 \int_a^b g(t)dt$
2. $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$

ในกรณีของฟังก์ชันเชิงซ้อนก็จะมีคุณสมบัติคล้ายกับ 2 ข้อนี้ คือ ถ้าให้

$$F(t) = f_1(t) + if_2(t)$$

เมื่อ $f_1(t)$, $f_2(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งต่อเนื่องบนช่วง $a \leq t \leq b$ แล้ว นิยามของอินทิกรัลของ $F(t)$ คือ

$$\int_a^b F(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$$

และจะสังเกตพบว่า

$$\begin{aligned} \Re\left[\int_a^b F(t)dt\right] &= \int_a^b \Re(F(t))dt = \int_a^b f_1(t)dt \\ \Im\left[\int_a^b F(t)dt\right] &= \int_a^b \Im(F(t))dt = \int_a^b f_2(t)dt \end{aligned}$$

ในการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อน เราจะหาค่าของอินทิกรัลบนเส้นโค้ง (curves) ทั่วๆ ไป ดังนั้น จะกล่าวถึงเส้นโค้งชนิดต่างๆ เสียก่อน

6.2 เส้นโค้ง (Curves)

เส้นโค้งที่จะกล่าวถึงต่อไปนี้ ส่วนใหญ่จะเป็นเส้นโค้งที่ต่อเนื่องกันตลอด (Continuous curves)

นิยาม 6.2.1 เส้นโค้งที่ต่อเนื่องกันตลอดในระนาบเชิงซ้อน ก็คือการส่งแบบต่อเนื่อง *(continuous map)* $z : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

ดังนั้น ถ้า C เป็นเส้นโค้งที่ต่อเนื่องกันตลอดในระนาบเชิงซ้อน จะแทน C โดย

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \;\; a \leq t \leq b \tag{6.1}$$

เมื่อ $x(t)$, $y(t)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่ต่อเนื่องในช่วง $a \leq t \leq b$ โดยมี t เป็นตัวแปรจำนวนจริง ซึ่งเรียกว่า **ตัวพารามิเตอร์** (parameter) สมการ (6.1) นี้จะเรียกว่า **สมการอิงตัวแปรเสริม** (parametric equaton) ของเส้นโค้ง
ให้ C เป็นเส้นโค้งซึ่งกำหนดโดยสมการอิงตัวแปรเสริม

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \;\; a \leq t \leq b$$

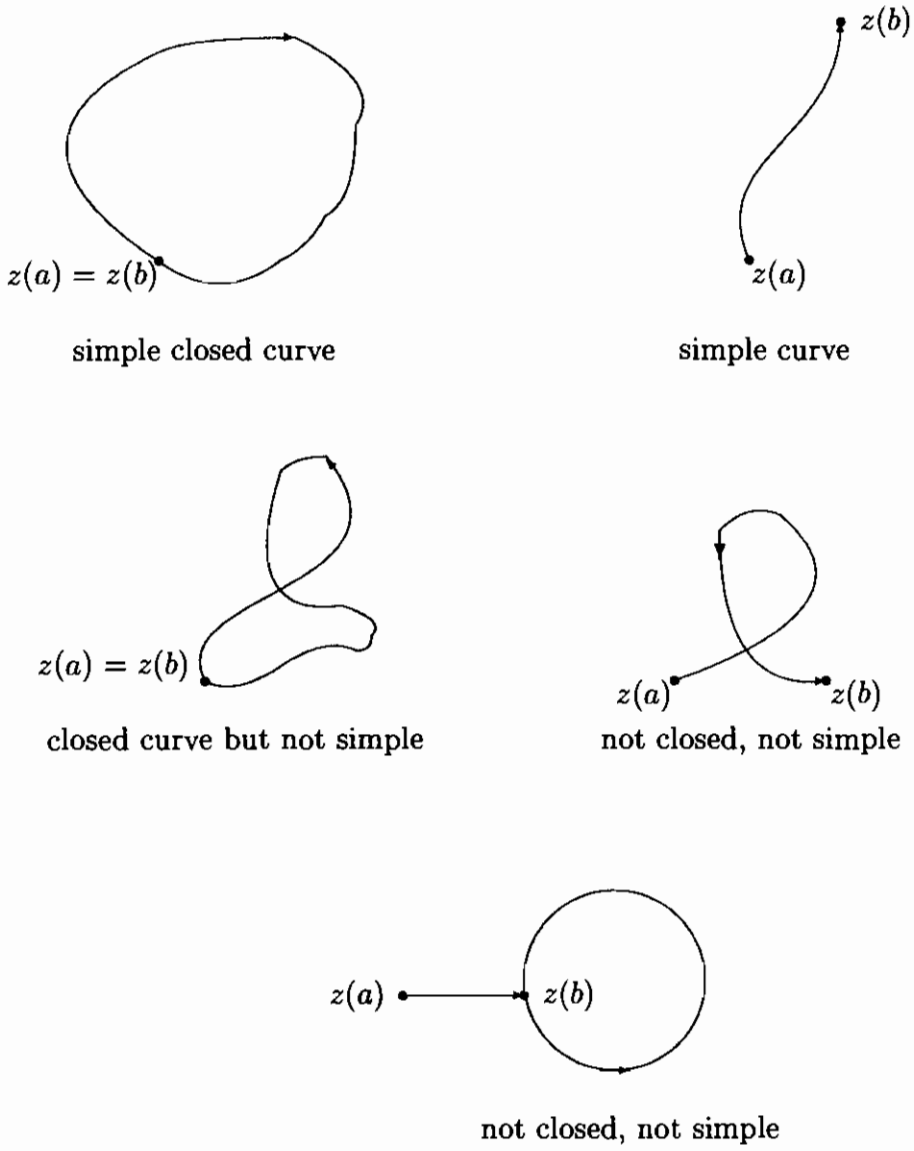
แล้ว

จุด $z(a)$ จะเรียกว่าเป็น **จุดเริ่มต้น** (initial point) ของเส้นโค้ง C

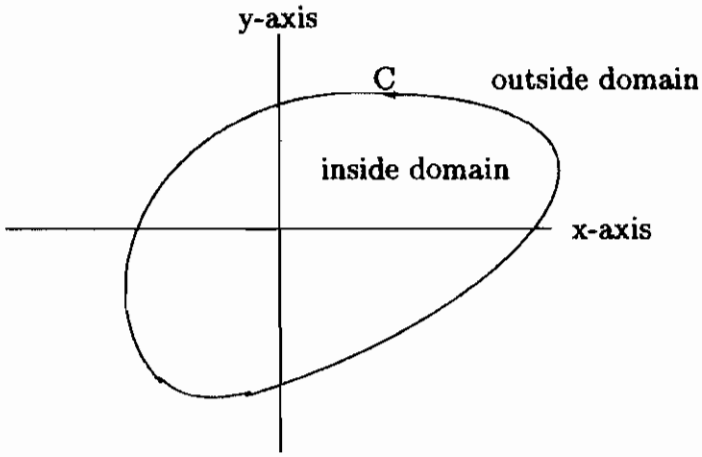
จุด $z(b)$ จะเรียกว่าเป็น**จุดสุดท้าย** (terminal point) ของเส้นโค้ง C

ถ้าจุดเริ่มต้น $z(a)$ เป็นจุดเดียวกับจุดสุดท้าย $z(b)$ จะเรียกเส้นโค้ง นี้ว่าเป็น**เส้นโค้งปิด** (closed curve) ถ้า $z(t_1) \neq z(t_2)$ เมื่อ $t_1 \neq t_2$ นั่นก็คือ C จะไม่มีจุดตัดกันเลย จะเรียก C ว่าเป็น **เส้นโค้งเชิงเดียว** (simple curve) ถ้า C มีคุณสมบัติเป็นทั้งเส้นโค้งปิด และเป็นเส้นโค้งเชิงเดียว จะเรียก C ว่าเป็น**เส้นโค้งปิดเชิงเดียว** (simple closed curve) **หรือเส้นโค้งจอร์แดน** (Jordan curve)

ทฤษฎี 6.2.2 ทฤษฎีของเส้นโค้งจอร์แดน *(Jordan curve theorem)*
ถ้า C เป็นเส้นโค้งจอร์แดนแล้ว คอมพลีเมนต์ของ C จะประกอบไปด้วย *2* โดเมน ซึ่งไม่มีจุดร่วมกัน



รูปที่ 6.1: เส้นโค้งชนิดต่างๆ



รูปที่ 6.2: โดเมนภายใน และ โดเมนภายนอก

หมายเหตุ การพิสูจน์ทฤษฎีนี้จะหาดูได้ใน [Newman] ซึ่งจะไม่นำมาพิสูจน์ในที่นี้
โดเมนที่มีขอบเขต (bounded domain) จะเรียกว่า **โดเมนภายใน** (inside domain) และโดเมนที่ไม่มีขอบเขต (unbounded domain) จะเรียกว่า **โดเมนภายนอก** (outside domain) และเส้นโค้ง C จะเป็นขอบเขต (boundary) ของแต่ละโดเมน

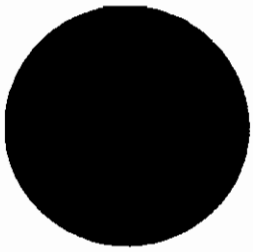
นิยาม 6.2.3 ให้ D เป็นโดเมน จะเรียก D ว่าเป็น **โดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว** *(simply connected domain)* ถ้าทุกๆ เส้นโค้งจอร์แดนอยู่ภายใน D แล้ว เส้นโค้งจอร์แดนนั้นจะต้องประกอบด้วยจุดภายในโดเมน D เท่านั้น ถ้า D ไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว *(simply connected domain)* จะเรียก D ว่าเป็น**โดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง** *(multiply connected domain)*

ตัวอย่าง 6.2.4 ให้

$$A = \{z : 0 < |z| < 1\}$$

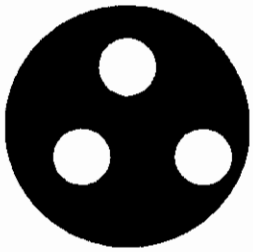
จะสังเกตเห็นได้ว่า $0 \notin A$ ถ้าเราเขียนเส้นโค้งจอร์แดนลงใน A ดังในรูปที่ *6.4* จะพบว่า 0 จะอยู่บนเส้นโค้งจอร์แดน ดังนั้น A จะไม่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว

◇◇◇



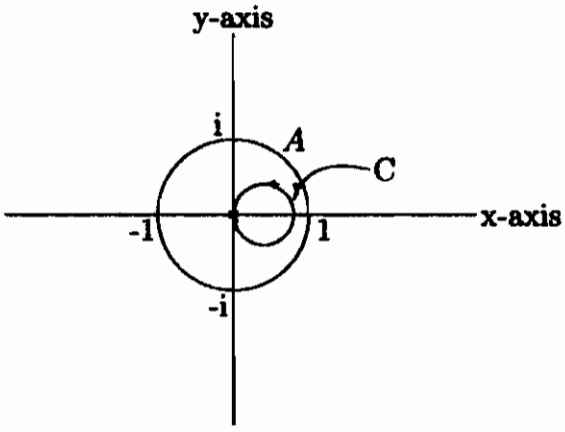
simply connected domain

multiply connected domain

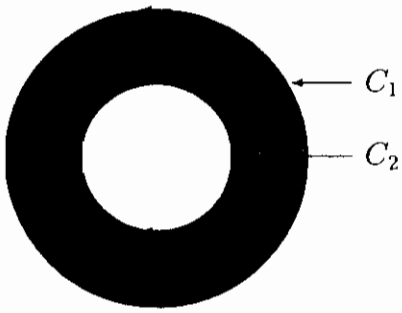


multiply connected domain

รูปที่ 6.3: โดเมนชนิดต่างๆ



รูปที่ 6.4: $A = \{z : 0 < |z| < 1\}$



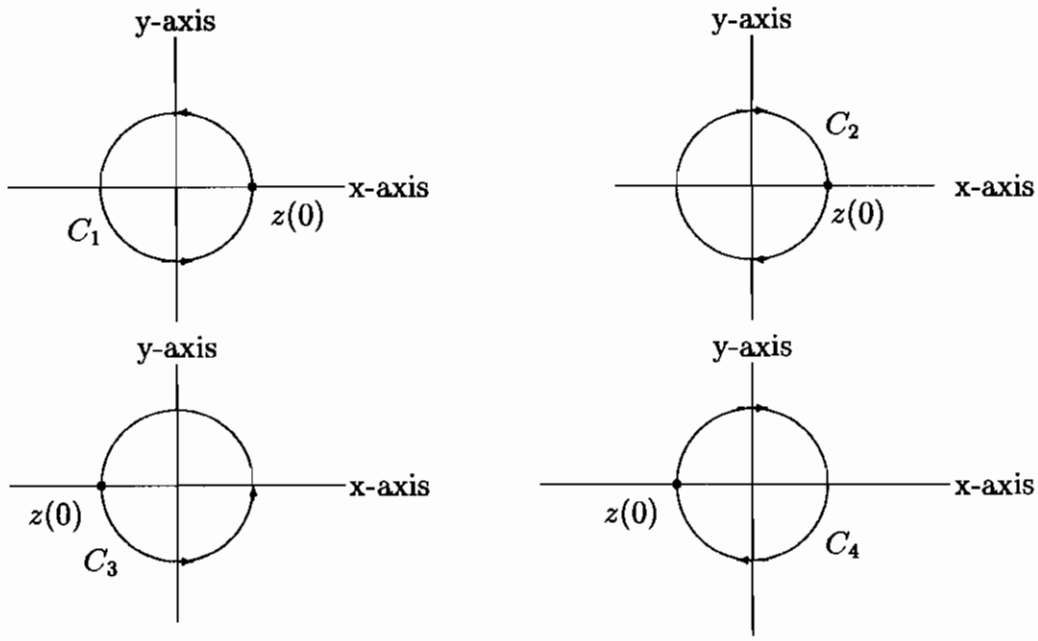
รูปที่ 6.5: C_1 มีทิศทางบวก C_2 มีทิศทางบวก

ถ้าให้ เส้นโค้ง C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งเป็นขอบเขตของโดเมน D โดเมนใดโดเมนหนึ่ง จะกล่าวว่า C มีการวางทิศทางเป็นบวก (positive orientation) หรือมีทิศทางเป็นบวก เมื่อ C มีทิศทางเดียวกับทิศทางการเดินของผู้เดินทางตามเส้นโค้ง C ซึ่งทำให้ส่วนของโดเมนจะอยู่ทางซ้ายของผู้เดินทาง ในกรณีที่ C เป็นเส้นรอบของวงกลมแล้ว C จะมีทิศทางเป็นบวก ถ้า C มีทิศทางตรงข้ามกับการเดินของเข็มนาฬิกา และ C จะมีทิศทางเป็นลบ ถ้า C มีทิศทางเดียวกับการเดินของเข็มนาฬิกา แต่เราไม่ได้หมายความว่า ทิศทางบวกของเส้นโค้งที่เป็นเส้นรอบวงของวงกลม จะเป็นทิศทางเดียวกับทิศทางตรงข้ามกับการเดินของเข็มนาฬิกา ดังเช่น วงแหวนโดเมน ซึ่งมีขอบเขตเป็นเส้นรอบวงของวงกลม C_1, C_2 ดังในรูปที่ 6.5 จะพบว่า เส้นรอบรูปวงนอกซึ่งเป็นเส้นรอบวงของวงกลม C_1 จะมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นทิศทางบวก ส่วนเส้นรอบรปูวงในซึ่งเป็นเส้นรอบรูปของวงกลม C_2 มีทิศทางตามเข็มนาฬิกาเป็นทิศทางบวก

ตัวอย่าง 6.2.5 พิจารณาเส้นโค้ง C_1, C_2, C_3, C_4 ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมดังต่อไปนี้คือ

$$
\begin{aligned}
C_1 :&\quad z_1(t) = e^{it} = \cos t + i\sin t, && 0 \le t \le 2\pi \\
C_2 :&\quad z_2(t) = e^{-it} = \cos t - i\sin t, && 0 \le t \le 2\pi \\
C_3 :&\quad z_3(t) = -e^{it} = -\cos t - i\sin t, && 0 \le t \le 2\pi \\
C_4 :&\quad z_4(t) = -e^{-it} = -\cos t + i\sin t, && 0 \le t \le 2\pi
\end{aligned}
$$

ทั้ง C_1, C_2, C_3 และ C_4 เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ *0* และมีรัศมีเท่ากับ *1* หน่วย ความแตกต่างของ C_1, C_2, C_3 และ C_4 อยู่ที่จุดเริ่มต้นและทิศทางของเส้นโค้ง เส้นโค้ง C_1, C_2 มีจุดเริ่มต้นที่ $(1, 0)$ ส่วน C_3, C_4 มีจุดเริ่มต้น $(-1, 0)$ เส้น



รูปที่ 6.6: เส้นโค้ง C_1, C_2, C_3, C_4 ในตัวอย่าง (6.2.5)

โค้ง C_1, C_3 มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ส่วน C_2, C_4 มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา ดังรูปที่ *6.6*

◊◊◊

6.3 อินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อนบนเส้นโค้ง

จากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง C

$$z(t) = x(t) + iy(t), \ a \leq t \leq b$$

ถ้าเส้นโค้งนี้มีค่าอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง นั่นคือ

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องแล้ว จะเรียกเส้นโค้งนี้ว่าเป็น **เส้นโค้งเรียบ** (smooth curve)

นิยาม 6.3.1 กำหนดให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบ ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม ดังนี้ คือ

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ a \leq t \leq b$$

และให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้งเรียบ C แล้ว จะได้ว่า $f(z(t))z'(t)$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องสำหรับ $a \leq t \leq b$ ด้วย และค่าของอินทิกรัล ของ $f(z)$ บนเส้นโค้ง C จะกำหนดโดย

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$$

ข้อควรสังเกต ค่าของอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อนจะมีข้อที่น่าสังเกตดังนี้คือ

1. ค่าของ $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ จะเป็นค่าที่ถูกต้องเมื่อ C เป็นเส้นโค้งเรียบ และ $f(z)$เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน C

2. จาก $\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt$ ค่าของอินทิกรัลทางขวา ได้จากการแทนค่า $z = z(t),\ dz = z'(t)dt$ และลิมิตจะเป็นลิมิตของ t คือจาก a ไปยัง b

3. ในกรณีที่ C มีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น $z(t) = t$ เส้นโค้ง C จะเป็นเส้นตรงบนแกนค่าจริง (real axis) และจะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))dt$$

4. ค่าของ $\int_a^b f(x)dx$ เมื่อ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมี x เป็นตัวแปรจำนวนจริงจะขึ้นอยู่กับ $f(x)$ และจุดปลาย a, b ส่วนค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งมี z เป็นตัวแปรจำนวนเชิงซ้อน จะขึ้นอยู่กับฟังก์ชัน $f(z)$ และทุกๆ จุดบนเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 6.3.2 จงหาค่าของ $\int_C |z|^2 dz$ เมื่อ C คือ

ก) $C_1 : z_1(t) = t + it, \qquad 0 \leq t \leq 1$

ข) $C_2 : z_2(t) = t^2 + it, \qquad 0 \leq t \leq 1$

ก)

$$\begin{aligned}\int_{C_1} |z|^2 dz &= \int_0^1 |t+it|^2(1+i)dt \\ &= (1+i)\int_0^1 2t^2 dt \\ &= (1+i)\left[\frac{2t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}(1+i)\end{aligned}$$

ข)

$$\begin{aligned}\int_{C_2} |z|^2 dz &= \int_0^1 |t^2+it|^2(2t+i)dt \\ &= \int_0^1 (t^4+t^2)(2t+i)dt \\ &= 2\int_0^1 (t^5+t^3)dt + i\int_0^1 (t^4+t^2)dt \\ &= \left[\frac{2t^6}{6}+\frac{2t^4}{4}\right]_0^1 + i\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\ &= \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right] + i\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right] \\ &= \frac{5}{6}+i\frac{8}{15}\end{aligned}$$

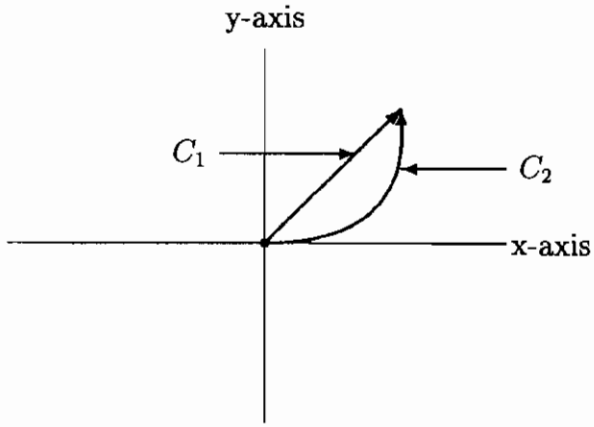
◊◊◊

ลักษณะของ C_1 และ C_2 ในตัวอย่าง (6.3.2) จะเป็นดังในรูปที่ 6.7 จากตัวอย่าง (6.3.2) จะเห็นได้ว่า ถึงแม้ว่า C_1 และ C_2 จะเป็นเส้นโค้ง ซึ่งมีจุดเริ่มต้น $z_1(0) = z_2(0) = 0$ และจุดสุดท้าย $z_1(1) = z_2(1) = 1+i$ เหมือนกัน และค่าของ $f(z)$ ก็เป็นค่าเดียวกันแต่ค่าของ

$$\int_{C_1} |z|^2 dz \neq \int_{C_2} |z|^2 dz$$

ที่เป็นเช่นนี้เพราะจุดอื่นๆบน C_1 และ C_2 จะแตกต่างกัน

ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\int_C z^2 dz$ เมื่อ C คือเส้นโค้งต่อไปนี้



รูปที่ 6.7: เส้นโค้ง C_1, C_2 ในตัวอย่าง (6.3.2)

ก) $C_1: \quad z_1(t) = t + it, \qquad 0 \le t \le 1$

ข) $C_2: \quad z_2(t) = t^2 + it, \qquad 0 \le t \le 1$

ก)

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} z^2 dz &= \int_0^1 (t^2 + it)^2 (1+i) dt \\
&= \int_0^1 (t^2 + 2it^2 - t^2)(1+i) dt \\
&= (1+i) \int_0^1 (2it^2) dt \\
&= \left[2i(1+i)\frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\
&= \frac{2i(1+i)}{3} \\
&= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ข)

$$\int_{C_2} z^2 dz = \int_0^1 (t^2 + it)^2 (2t + i) dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 (t^4 + 2it^3 - t^2)(2t + i)dt \\
&= \int_0^1 (2t^5 + 4it^4 - 2t^3 + it^4 - 2t^3 - it^2)dt \\
&= \int_0^1 (2t^5 + 5it^4 - 4t^3 - it^2)dt \\
&= \left[\frac{2t^6}{6} + \frac{5it^5}{5} - \frac{4t^4}{4} - \frac{it^3}{3}\right]_0^1 \\
&= \left[\frac{1}{3} + i - 1 - \frac{i}{3}\right] \\
&= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

◊◊◊

ในตัวอย่าง 6.3.3 จะสังเกตเห็นได้ว่า

$$\int_{C_1} z^2 dz = \int_{C_2} z^2 dz$$

เมื่อ C_1 และ C_2 เป็นเส้นโค้งเหมือนกับตัวอย่าง (6.3.2) ดังในรูปที่ 6.7 และ $f(z) = z^2$ มีอนุพันธ์เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้ง C ความแตกต่างของตัวอย่าง (6.3.2) และ ตัวอย่าง (6.3.3) คือคุณสมบัติของฟังก์ชัน ในตัวอย่าง (6.3.2) มีค่า $f(z) = |z|^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ แต่ใน ตัวอย่าง (6.3.3) $f(z) = z^2$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

6.4 คุณสมบัติของสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง

ให้ C เป็นเส้นโค้งเรียบซึ่งมีสมการเป็น $z(t) = x(t) + iy(t)$ กำหนดบนช่วง $[a, b]$ ถ้าแบ่งช่วง$[a, b]$ ออกเป็นช่วงย่อย 2 ช่วงคือ $[a, c]$ และ $[c, b]$ จะได้เส้นโค้ง 2 เส้นคือ C_1 และ C_2 จากสมการ $z(t) = x(t) + iy(t)$ โดยให้พารามิเตอร์ (parameter) t ให้อยู่ในแต่ละช่วง $[a, c]$ และ $[c, b]$ ตามลำดับ และถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนเส้นโค้ง C แล้ว

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_a^c f(z(t))z'(t)dt + \int_c^b f(z(t))z'(t)dt \\
&= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz
\end{aligned}
$$

ในทำนองเดียวกันนี้ ถ้าแบ่งเส้นโค้ง C ให้อยู่ในรูปของเส้นโค้งย่อย n เส้นด้วยกันคือ

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$

จะได้

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz \\ &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz\end{aligned}$$

นิยาม 6.4.1 ฟังก์ชัน $f(z)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ** *(sectionally continuous)* ในช่วงๆ หนึ่ง ถ้า $f(z)$ มีจุดที่ไม่ต่อเนื่องเป็นจำนวนที่จะนับได้ และค่าของลิมิตทางซ้าย ลิมิตทางขวา ของจุดที่ไม่ต่อเนื่องนั้นมีค่า

นิยาม 6.4.2 เส้นโค้งซึ่งมีอนุพันธ์ ของ $z(t)$ คือ $z'(t)$ เป็น **ฟังก์ชันต่อเนื่องเป็นช่วงๆ** จะเรียกว่าเป็น **คอนทัวร์** *(contour)* เมื่อ $z(t)$ ได้มาจากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้ง

$$z(t) = x(t) + iy(t),\ a \le t \le b$$

ถ้าให้ C เป็นคอนทัวร์ สามารถจะเขียนอยู่ในรูปของผลบวกของเส้นโค้งเรียบ n เส้น นั่นก็คือ

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n$$

ดังนั้น อินทิกรัลของฟังก์ชันต่อเนื่องตามคอนทัวร์ สามารถจะหาได้จาก

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_{C_1+C_2+\cdots+C_n} f(z)dz \\ &= \int_{C_1} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาค่าของ $\int_C zdz$ เมื่อ C คือ คอนทัวร์ต่อไปนี้

$$C:\ z(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le 1 \\ 2 + i(t-1), & 1 \le t \le 2 \end{cases}$$

ให้ C_1 เป็นเส้นโค้ง ซึ่งค่าของพารามิเตอร์ t อยู่ในช่วง $[0,1]$
และ C_2 เป็นเส้นโค้งซึ่งค่าของพารามิเตอร์ t อยู่ในช่วง $[1,2]$ แล้ว

$$C = C_1 + C_2$$

$$\begin{aligned}
\int_C zdz &= \int_{C_1} zdz + \int_{C_2} zdz \\
&= \int_0^1 2t(2)dt + \int_1^2 [2 + i(t-1)]idt \\
&= \int_0^1 4tdt + 2i\int_1^2 dt - \int_1^2 tdt + \int_1^2 dt \\
&= \left[2t^2\right]_0^1 + 2i\left[t\right]_1^2 - \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 + \left[t\right]_1^2 \\
&= 2 + 2i(2-1) - \frac{1}{2}(4-1) + (2-1) \\
&= \frac{3}{2} + 2i
\end{aligned}$$

◊◊◊

ลักษณะของเส้นโค้ง C_1, C_2 ในตัวอย่าง (6.4.3) จะเป็นไปดังรูปที่ 6.8
จากสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นโค้งเรียบ C

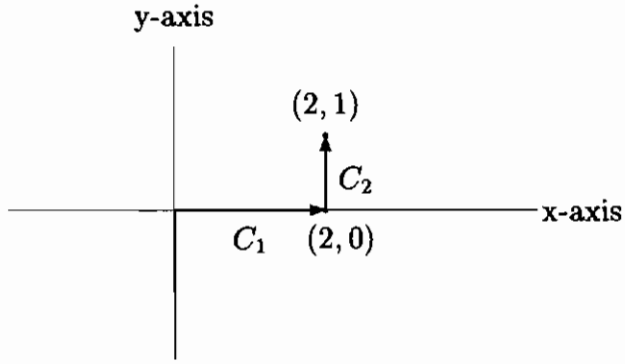
$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \;\; a \le t \le b$$

ถ้าให้ l เป็นความยาวของ C จากแคลคูลัสจะได้

$$\begin{aligned}
l &= \int_a^b |z'(t)|dt \\
&= \int_a^b \left|\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt}\right| dt \\
&= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt
\end{aligned}$$

ในกรณีเฉพาะที่ C เป็นเส้นโค้งซึ่งเชื่อมระหว่างจุด $z_0 = x_0 + iy_0$ กับจุด $z_1 = x_1 + iy_1$
สมการอิงตัวแปรเสริมของ C คือ

$$C : z(t) = z_0 + t(z_1 - z_0)$$



รูปที่ 6.8: เส้นโค้ง C_1, C_2 ในตัวอย่าง (6.4.3)

$$
\begin{aligned}
&= x_0 + t(x_1 - x_0) + i(y_0 + t(y_1 - y_0)), \quad 0 \le t \le 1 \\
z'(t) &= z_1 - z_0
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$l = \int_0^1 |z'(t)|dt = \int_0^1 |z_1 - z_0|dt = |z_1 - z_0|$$

เมื่อ z อยู่บนเส้นโค้ง C จะได้

$$|dz| = |z'(t)|dt$$

ดังนั้น l อาจจะเขียนเป็น

$$l = \int_C |dz|$$

ทฤษฎี 6.4.4 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนคอนทัวร์ C ซึ่งมีความยาว l และ $|f(z)| \le M$ สำหรับทุกๆ ค่าของ z บน C แล้ว

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \le \int_C |f(z)||dz| \le M \int_C |dz| = Ml$$

พิสูจน์ ให้ C เป็นคอนทัวร์ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น $z(t)$ บนช่วง $[a,b]$

$$\begin{aligned}\left|\int_C f(z)dz\right| &= \left|\int_a^b f(z(t))z'(t)dt\right| \\ &\leq \int_a^b |f(z(t))||z'(t)|dt \\ &\leq \int_C |f(z)||dz| \\ &\leq M\int_a^b |z'(t)|dt \leq Ml\end{aligned}$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 6.4.5 จงหาขอบเขตบน *(upper bound)* ของ

$$\left|\int_C \frac{dz}{z^2+10}\right|$$

เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริม เป็น

$$C : z(t) = 2e^{it}, \ \ -\pi \leq t \leq \pi$$

จากทฤษฎี *(6.4.4)*

$$\begin{aligned}\left|\int_C \frac{dz}{z^2+10}\right| &\leq \int_C \frac{|dz|}{|z^2+10|} \\ &\leq \int_C \frac{|dz|}{10-|z|^2} \\ &\leq \frac{1}{6}\int_C |dz| \\ &\leq \frac{2\pi}{3}\end{aligned}$$

◊◊◊

จากการหาความยาวของเส้นโค้งในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริม

$$z(t) = x(t) + iy(t), \ \ a \leq t \leq b$$

จะพบว่าในกรณีที่เส้นโค้งเป็นเส้นโค้งเชิงเดียว ความยาวของเส้นโค้งนั้นเป็นอิสระไม่ขึ้นอยู่กับค่าของตัวพารามิเตอร์ ในช่วงใดช่วงหนึ่ง ดังเช่นตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 6.4.6 จงหาความยาวของเส้นโค้ง C_1 และ C_2 เมื่อสมการอิงตัวแปรเสริมของ C_1 และ C_2 คือ

$$C_1: \quad z_1(t) = e^{it}, \qquad 0 \le t \le \pi$$
$$C_2: \quad z_2(t) = e^{2it}, \qquad 0 \le t \le \tfrac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} |dz_1| &= \int_0^{\pi} |z_1'(t)|dt \\
&= \int_0^{\pi} dt = \pi \\
\int_{C_2} |dz_2| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |z_2'(t)|dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2dt = \pi
\end{aligned}$$

◇◇◇

จากสมการอิงตัวแปรเสริมของ C_1 และ C_2 ในตัวอย่าง (6.4.6)จะพบว่าถึงแม้ว่าสมการอิงตัวแปรเสริมจะแตกต่างกัน แต่ทั้ง C_1 และ C_2 ก็ยังมีความยาวเท่ากัน

ถ้า C เป็นคอนทัวร์ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$C: \ z(t) = x(t) + iy(t), \ a \le t \le b$$

แล้ว $-C$ จะเป็นคอนทัวร์ ซึ่งมีลักษณะเหมือน C แต่มีทิศทางตรงข้ามกับ C และ $-C$ จะมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$-C: \ z(-t) = x(-t) + iy(-t), \ -b \le t \le -a$$

และค่าของอินทิกรัลบนคอนทัวร์ $-C$ จะเป็นไปดังนี้คือ

$$\int_{-C} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(z(-t))z'(-t)(-1)dt$$

ให้ $r = -t$ จะได้

$$\begin{aligned}
\int_{-C} f(z)dz &= \int_b^a f(z(r))z'(r)dr \\
&= -\int_a^b f(z(r))z'(r)dr \\
&= -\int_C f(z)dz
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.4.7 จงหาค่าของ $\int_C |z|dz$ ตามเส้นตรง C ซึ่งเชื่อมระหว่างจุดกำเนิด และจุด $1+i$ สมการอิงตัวแปรเสริมของ C คือ

$$C: \ z(t) = t + it, \ 0 \le t \le 1$$

ดังนั้น

$$z'(t) = (1+i)dt$$

แทนค่าลงในอินทิกรัลจะได้

$$\begin{aligned}
\int_C |z|dz &= \int_0^1 |t+it|(1+i)dt \\
&= \int_0^1 \sqrt{2}t(1+i)dt \\
&= \sqrt{2}(1+i)\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 \\
&= \frac{1+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

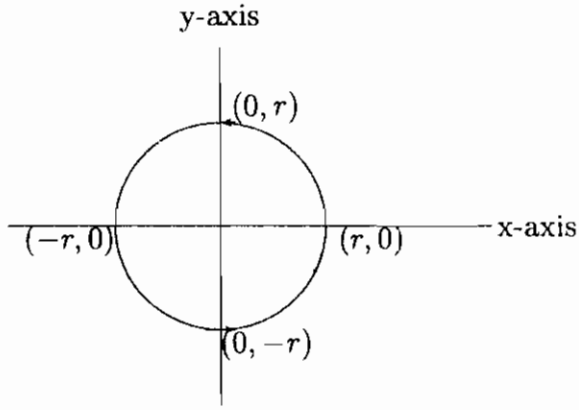
◊◊◊

ตัวอย่าง 6.4.8 จงหาค่าของ $\int_C |z|dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิดและมีรัศมี $= r$ ดังในรูปที่ *6.10*
C จะมีสมการอิงตัวแปรเสริม ดังนี้คือ

$$C: z(t) = re^{it}, \ 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\therefore \int_C |z|dz &= \int_0^{2\pi} |re^{it}|ire^{it}dt \\
&= ir^2 \int_0^{2pi} e^{it}dt \\
&= \frac{ir^2}{i}\int_0^{2pi} e^{it}d(it) \\
&= r^2\left[e^{it}\right]_0^{2\pi} \\
&= r^2\left[e^{2\pi i} - e^0\right] \\
&= r^2\left[\cos 2\pi + i\sin 2\pi - 1\right] \\
&= r^2[1+0-1] = 0
\end{aligned}$$

◊◊◊



รูปที่ 6.9: เส้นโค้งในตัวอย่าง (6.4.8)

ตัวอย่าง 6.4.9 จงหาค่าของ $\int_C z^n dz$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มและ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี r ลักษณะของ C จะอยู่ในรูปที่ *6.9*
จะได้ สมการอิงตัวแปรเสริมของ C คือ

$$C: \quad z(t) = re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{aligned}
\int_C z^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{it})^n (ire^{it}) dt \\
&= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{int+it} dt \\
&= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} dt \\
&= \frac{ir^{n+1}}{i(n+1)} \int_0^{2\pi} e^{it(n+1)} d(it(n+1)), \text{ เมื่อ } n \neq -1 \\
&= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[e^{it(n+1)}\right]_0^{2\pi}, \text{ เมื่อ } n \neq -1 \\
&= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[e^{i(n+1)2\pi} - e^0\right], \text{ เมื่อ } n \neq -1 \\
&= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[\cos(n+1)2\pi + i\sin(n+1)2\pi - 1\right], \text{ เมื่อ } n \neq -1 \\
&= \frac{r^{n+1}}{n+1} \left[1 + 0 - 1\right] = 0, \text{ เมื่อ } n \neq -1
\end{aligned}$$

ถ้า $n = -1$

$$\begin{aligned}\int_C z^{-1}dz &= \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}}dt \\ &= i\int_0^{2\pi} dt \\ &= i\,[t]_0^{2\pi} = i[2\pi - 0] = 2\pi i\end{aligned}$$

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\int_C z^n dz = \begin{cases} 0, & \text{ถ้า } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{ถ้า } n = -1 \end{cases}$$

◇◇◇

จากตัวอย่าง (6.4.9) จะเห็นได้ว่าค่าของอินทิกรัลไม่ขึ้นอยู่กับค่า r ซึ่งเป็นรัศมีของวงกลมเลย

6.5 อินทิกรัลตามเส้น (Line integral)

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนใด ๆจะเขียน $f(z)$ ในพจน์ของฟังก์ชันค่าจริง $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ได้ว่า

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนคอนทัวร์ C ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$C : z(t) = x(t) + iy(t), \;\; a \leq t \leq b$$

แล้วจากนิยาม (6.3.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \\ &= \int_a^b [u(z(t)) + iv(z(t))][x'(t) + iy'(t)]dt \\ &= \int_a^b [u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t)]dt + i\int_a^b [u(z(t))y'(t) + v(z(t))x'(t)]dt\end{aligned}$$

ซึ่งเราจะเขียนสั้น ๆได้ว่า

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b [ux' - vy']dt + i\int_a^b [uy' + vx']dt \tag{6.2}$$

(6.2) ข้างบนนี้จะแสดงค่าอินทิกรัลตามเส้นของฟังก์ชันเชิงซ้อน

ตัวอย่าง 6.5.1 จงหาค่าของ $\int_C z^2 dz$ เมื่อ C เป็นคอนทัวร์ซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$C : z(t) = t^2 + it, \;\; 0 \le t \le 1$$

วิธีที่ 1

$$\begin{aligned}
z^2(t) &= (t^2 + it)^2 = t^4 + 2it^3 - t^2 \\
dz &= (2t + i)dt \\
\int_C z^2 dz &= \int_0^1 [t^4 + 2it^3 - t^2](2t + i)dt \\
&= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3)dt + i\int_0^1 (5t^4 - t^2)dt \\
&= -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i
\end{aligned}$$

วิธีที่ 2

$$\begin{aligned}
z(t) &= t^2 + it \\
x(t) &= t^2, \;\; y(t) = t \\
f(z) &= z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy \\
\therefore \;\; u &= x^2 - y^2, \;\; v = 2xy
\end{aligned}$$

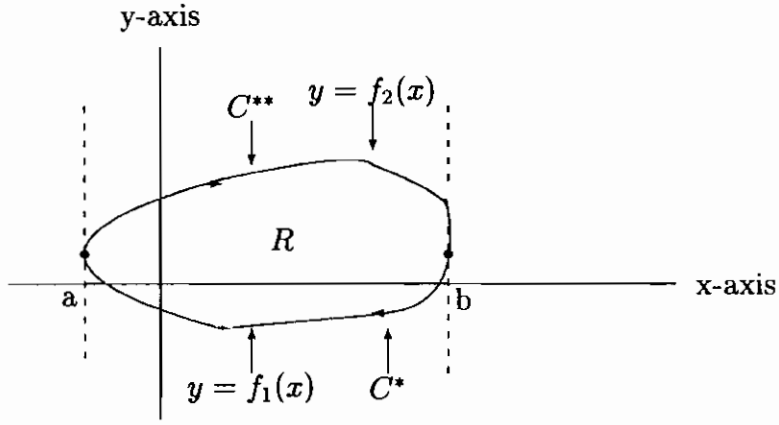
จาก *(6.2)* จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b [ux' - vy']dt + i\int_a^b [uy' + vx']dt$$

แทนค่า u, x', v, y' จะได้

$$\begin{aligned}
\int_C z^2 dz &= \int_0^1 \left[(t^4 - t^2)(2t) - 2t^2 t\right] dt + i\int_0^1 \left[(2t^2 t(2t)) + (t^4 - t^2)\right] dt \\
&= \int_0^1 (2t^5 - 4t^3)dt + i\int_0^1 (5t^4 - t^2)dt \\
&= -\frac{2}{3} + i\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

◊◊◊



รูปที่ 6.10: บริเวณ R สำหรับทฤษฎีบทของกรีน

หลังจากที่ได้หาค่าอินทิกรัลตามเส้นโค้งโดยใช้นิยาม (6.3.1) มาแล้ว ต่อไปเราจะพูดถึงทฤษฎีที่เกี่ยวกับการหาค่าอินทิกรัล ในการพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปต่อไป เราต้องอาศัยทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับค่าอินทิกรัลสองครั้ง (double integral) ต่อไปนี้

ทฤษฎี 6.5.2 ทฤษฎีกรีน *(Green's theorem)*
ให้ R เป็นบริเวณปิดเชื่อมโยงเชิงเดียวในระนาบ xy ซึ่งมีเส้นรอบบริเวณ R เป็นคอนทัวร์ C และให้ $f(x,y)$, $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และมีอนุพันธ์ย่อย $\frac{\partial f}{\partial y}$ และ $\frac{\partial g}{\partial x}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมนซึ่งประกอบด้วยบริเวณ R แล้ว

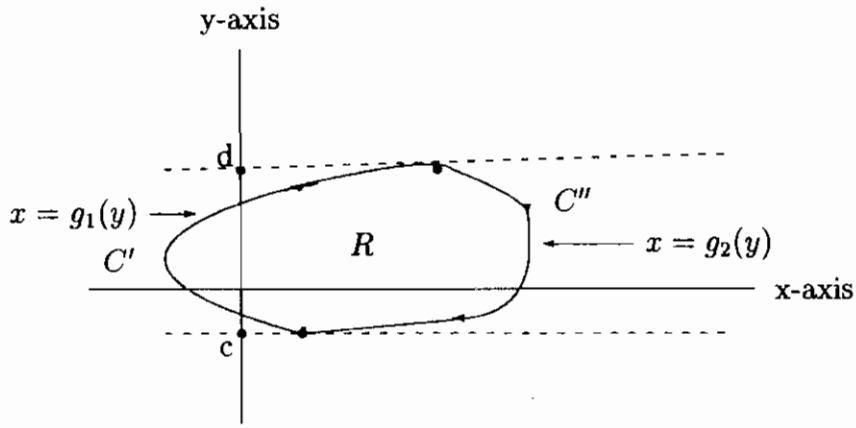
$$\int_C (f dx + g dy) = \int_R \int \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy$$

พิสูจน์ พิจารณาบริเวณ R ในรูปที่ 6.10 จากรูปที่ 6.10 จะได้

$$a \leq x \leq b, \;\; f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

และจากรูป 6.11 จะได้

$$c \leq y \leq d, \;\; g_1(y) \leq x \leq g_2(y)$$



รูปที่ 6.11: บริเวณ R สำหรับทฤษฎีบทของกรีน

จากรูป 6.10

$$\int_R\int \frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \int_a^b \left[\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy\right] dx \tag{6.3}$$

หาค่าของ $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy$ จะได้

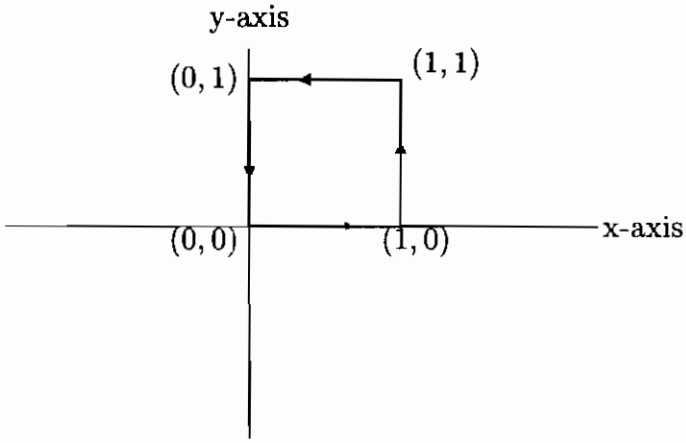
$$\begin{aligned}\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy &= f(x,y)|_{f_1(x)}^{f_2(x)} \\ &= f(x,f_2(x)) - f(x,f_1(x))\end{aligned}$$

แทนค่า $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial f}{\partial y}dy$ ลงใน (6.3) จะได้

$$\begin{aligned}\int_R\int \frac{\partial f}{\partial y}dxdy &= \int_a^b [f(x,f_2(x)) - f(x,f_1(x))]\, dx \\ &= \int_a^b f(x,f_2(x))dx - \int_a^b f(x,f_1(x))dx \\ &= -\int_a^b f(x,f_1(x))dx - \int_b^a f(x,f_2(x))dx \qquad (6.4)\end{aligned}$$

จากรูปที่ 6.10 $y = f_1(x)$ จะแทนเส้นโค้ง C^* และ $y = f_2(x)$ จะแทนเส้นโค้ง C^{**} ดังนั้นค่าของอินทิกรัลทางขวามือ จะเขียนในเทอมของอินทิกรัลตามเส้น C^*, C^{**} จะได้ว่า

$$\int_R\int \frac{\partial f}{\partial y}dxdy = \int_{C^*} f(x,y)dx - \int_{C^{**}} f(x,y)dx$$



รูปที่ 6.12: ลักษณะของเส้นโค้งในตัวอย่าง (6.5.3)

$$
\begin{aligned}
&= -\int_C f(x,y)dx \\
&= -\int_a^b f(x,f_1(x))dx - \int_b^a f(x,f_2(x))dx
\end{aligned}
$$

นั่นก็คือ

$$\int_C f dx = -\int_R\int \frac{\partial f}{\partial y} dydx$$

ในทำนองเดียวกัน เราสามารถที่จะใช้ รูปที่ 6.11 โดยใช้ค่าของ $g_1(y), g_2(y)$ จะได้ว่า

$$\int_C g dy = \int_R\int \frac{\partial g}{\partial x} dxdy$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$\int_C (f dx + g dy) = \int_R\int \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy$$

◇◇◇

ตัวอย่าง 6.5.3 จงหาค่าของ $\int_C xydx + (x^2+y^2)dy$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ซึ่งมี $0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1$

วิธีที่ 1 หาค่าโดยตรง

$$\begin{aligned}\int_C xydx + (x^2+y^2)dy &= \int_0^1 (x)(0)dx + \int_0^1 (1+y^2)dy + \int_1^0 (x)(1)dx + \int_1^0 (0+y^2)dy \\ &= 0 + \frac{4}{3} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

วิธีที่ 2 โดยใช้ทฤษฎีของกรีน จะได้ $f = xy$, และ $g = x^2 + y^2$ ส่วน $\frac{\partial f}{\partial y} = x$, และ $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$

$$\begin{aligned}\int_C xydx + (x^2+y^2)dy &= \int_0^1 \int_0^1 (2x - x)dxdy \\ &= \int_a^b f(x, v(x))dx - \int_a^b f(x, u(x))dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dy \\ &= \frac{1}{2}[y]_0^1 = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 6.5.4 จงหาค่าของ $\int_C xdy - ydx$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ซึ่งมีจุดยอดเป็น $(1,1), (2,1)$, และ $(2,2)$

วิธีที่ 1 โดยการหาค่าโดยตรง

$$\begin{aligned}\int_C xdx - ydy &= \int_1^2 (-1)dx + \int_1^2 2dy + \int_1^2 ydy - ydy \\ &= -1 + 2 + 0 = 1\end{aligned}$$

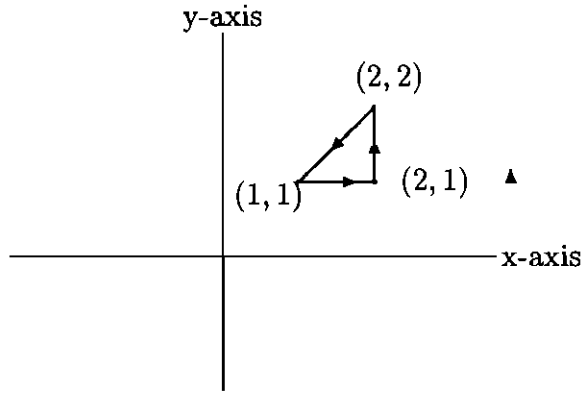
วิธีที่ 2 โดยการใช้ทฤษฎีของกรีน จะได้

$$\begin{aligned}\int_C xdy - ydx &= \int_R\int (1+1)dxdy \\ &= 2\int_R\int dxdy\end{aligned}$$

แต่ $\int_R \int dxdy$ คือ พื้นที่ของ $\triangle$ ในรูปที่ *6.13* ดังนั้น

$$\int_C xdy - ydx = 2\int\int_R dxdy = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

◊◊◊



รูปที่ 6.13: ลักษณะของ C ในตัวอย่าง (6.5.4)

เมื่อได้ศึกษาถึงทฤษฎีของกรีนแล้ว ต่อไปก็จะกล่าวถึงทฤษฎีของอินทิกรัลของฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งต้องอาศัยทฤษฎีของกรีนมาช่วยในการพิสูจน์

ทฤษฎี 6.5.5 *(Cauchy weak theorem)*
ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในบริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว D ซึ่งมี $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และ ให้ C เป็นคอนทัวร์ปิด ซึ่งอยู่ภายใน D แล้ว

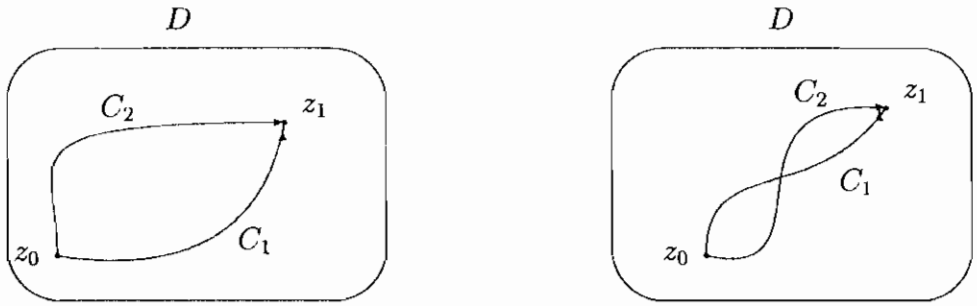
$$\int_C f(z)dz = 0$$

พิสูจน์ ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ จาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $f'(z)$ มีค่า และ

$$f'(z) = u_x + iv_x = v_y - iu_y$$

จากที่กำหนดให้ $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D ถ้าให้ R เป็นส่วนที่ล้อมรอบด้วย C โดยทฤษฎีกรีน จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\int_C f(z)dz &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \\ &= \int_R\int (-v_x - u_y)\,dxdy + i\int_R\int (u_x - v_y)\,dxdy\end{aligned}$$



รูปที่ 6.14: ลักษณะของ C_1, C_2 ในบทแทรก (6.5.6)

จาก $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้นจะต้องสอดคล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ โดยสมการโคชี-รีมานน์ จะได้ว่า

$$\int_C f(z)dz = \int_R\int (-v_x + v_x)\, dxdy + i\int_R\int (u_x - u_x)\, dxdy = 0$$

◊◊◊

บทแทรก 6.5.6 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D ซึ่งมี $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน D และถ้าให้ C_1, C_2 เป็นคอนทัวร์ใดๆ ในโดเมน D ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดสุดท้ายเหมือนกันแล้ว

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

พิสูจน์ ให้ C_1, C_2 มีจุดเริ่มต้นเดียวกันคือ z_0 และจุดท้ายเดียวกันคือ z_1 ตามรูปที่ 6.14 $\therefore\ C = C_1 - C_2$ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)dz &= \int_{C_1 - C_2} f(z)dz \\
&= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz \\
&= \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz
\end{aligned}$$

จาก C เป็นคอนทัวร์ปิด ดังนั้นจากทฤษฎี (6.5.5) จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz - \int_{C_2} f(z)dz = 0$$

นั่นก็คือ

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

◇◇◇

จากบทแทรกนี้ เราอาจจะกล่าวได้ว่าค่าของอินทิกรัลนั้นไม่ได้ขึ้นอยู่กับส่วนใดๆ ในโดเมน แต่ขึ้นอยู่กับจุดเริ่มต้น และจุดสุดท้ายของเส้นโค้ง ซึ่งอยู่ภายในโดเมนที่ทำให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และค่าของ $f'(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

พิจารณาค่าของ $\int_C \frac{1}{z}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปของวงกลม ซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด และความยาวของรัศมีเป็น 1 หน่วยจะได้

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}dt = 2\pi i$$

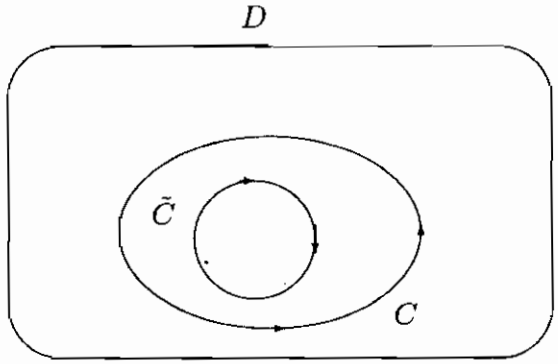
จากค่าของอินทิกรัลนี้ จะสังเกตได้ว่า ถึงแม้ว่าเส้นโค้ง C จะเป็นเส้นโค้งปิด แต่ค่าของอินทิกรัลไม่เท่ากับ 0 เป็นเพราะว่าฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง C ฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$ จะไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 0$ ซึ่งจุด $z = 0$ นี้จะเรียกว่า **จุดเอกฐาน** (singularity point) ของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$

ถ้าเราลองพิจารณาหาค่าของอินทิกรัลของฟังก์ชัน $f(z) = \frac{1}{z}$ ตามเส้นโค้ง C ใหม่ โดยให้ C เป็นเส้นรอบรูปวงแหวน $0 < r_0 < |z| < r_1$ ดังในรูป ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{z}dz &= \int_{|z|=r_1} \frac{1}{z}dz + \int_{|z|=r_0} \frac{1}{z}dz \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{ir_1e^{i\theta}}{r_1e^{i\theta}}d\theta + \int_0^{-2\pi} \frac{ir_0e^{i\theta}}{r_0e^{i\theta}}d\theta \\
&= 2\pi i - 2\pi i = 0
\end{aligned}$$

การที่ค่าอินทิกรัลนี้มีค่าเป็น 0 จะเห็นได้ในทฤษฎีต่อไปซึ่งจะพูดถึง ทฤษฎีของโคชี ในบริเวณเชื่อมโยงหลายเชิง ก่อนอื่นเราจะให้ความหมายของคำบางคำก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎี

นิยาม 6.5.7 ให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวในบริเวณเชื่อมโยง D เราจะกล่าวว่า C มีการ**เปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่อง** *(continuously deformed)* กับเส้นโค้งปิดเชิงเดียว $\tilde{C}$ ในบริเวณ D ถ้า C สามารถที่จะหดตัวมาเป็น $\tilde{C}$ โดยไม่ต้องผ่านออกนอกบริเวณ D



รูปที่ 6.15: เส้นโค้ง C มีการเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องกับเส้นโค้ง $\tilde{C}$ ในบริเวณ D

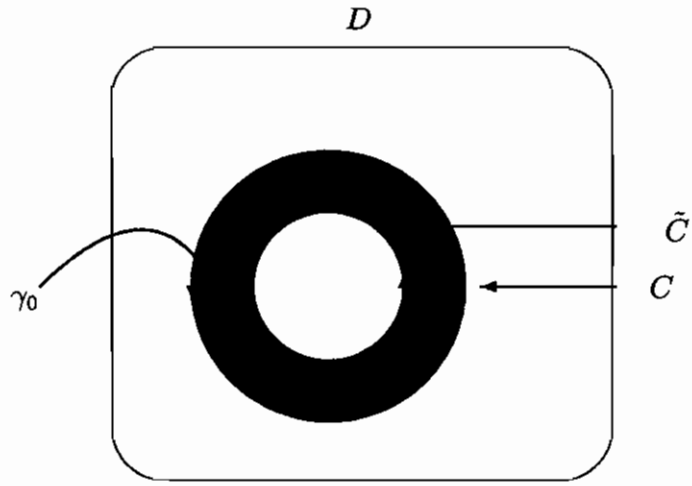
การที่เส้นโค้งปิดเชิงเดียว C มีการเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องกับเส้นโค้งปิดเชิงเดียว $\tilde{C}$ ในบริเวณ D นี้ เราจะกล่าวว่า C **ฮอมอโทปิค** (homotopic to) กับ $\tilde{C}$ ใน D เราสามารถที่จะใช้การเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องของเส้นโค้งมาให้นิยามของ บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียวได้ ดังนี้คือ

นิยาม 6.5.8 บริเวณ $D \subset \mathbb{C}$ จะเรียกว่าเป็น **บริเวณเชื่อมโยงเชิงเดียว** *(simply connected)* ถ้า ทุกๆเส้นโค้งปิดเชิงเดียวใน D สามารถที่จะเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องกับ เส้นโค้งคงที่ $z_0 \in D$ หรือกล่าวอีกอย่างว่า C เป็นโฮโมโทปิคกับจุดหนึ่งในบริเวณ D

ทฤษฎี 6.5.9 *(Deformation theorem)*
ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D และให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวซึ่งอยู่ภายในบริเวณ D ถ้า C มีการเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องกับเส้นโค้งปิดเชิงเดียว $\tilde{C}$ ในบริเวณ D และ $f'(z)$ มีความต่อเนื่องใน D แล้ว

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$

หมายเหตุ ฟังก์ชัน f ในทฤษฎีจะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บน C แต่จะไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด



รูปที่ 6.16: รูปสำหรับทฤษฎี (6.5.9)

ภายในของเส้นโค้ง C ดังนั้นเราจะใช้ทฤษฎี (6.5.5) สำหรับ C ไม่ได้

พิสูจน์ สร้างเส้นโค้ง γ_0 ซึ่งเชื่อมระหว่าง C กับ $\tilde{C}$ ดังในรูปที่ 6.16 ให้ C^* เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง $C, \gamma_0, -\tilde{C}$ และ $-\gamma_0$ ตามลำดับ ดังนั้น C^* จะเป็นเส้นโค้งปิด และจากรูปที่ 6.16 ส่วนที่แรเงาจะเป็นจุดที่อยู่ภายในของเส้นโค้ง C^* ซึ่ง ฟังก์ชัน f จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และต่อเนื่องบนจุดภายในของเส้นโค้ง C^* ด้วย ดังนั้นโดยทฤษฎี (6.5.5) จะได้ว่า

$$\int_{C+\gamma_0-\tilde{C}-\gamma_0} f(z)dz = 0$$

$$\therefore \int_C f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\tilde{C}} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$$

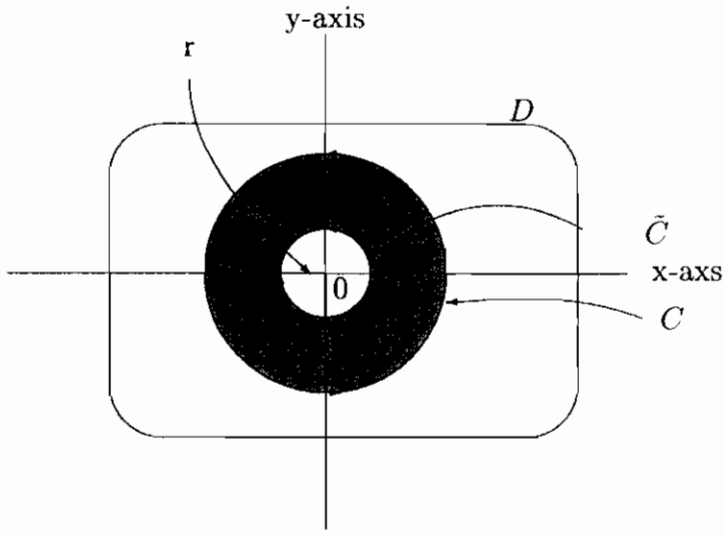
นั่นก็คือ

$$\int_C f(z)dz = \int_{\tilde{C}} f(z)dz$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 6.5.10 ถ้าให้ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว ซึ่งมี 0 เป็นจุดภายใน แล้ว จงแสดงว่า

$$\int_C \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$



รูปที่ 6.17: รูปสำหรับตัวอย่าง (6.5.10)

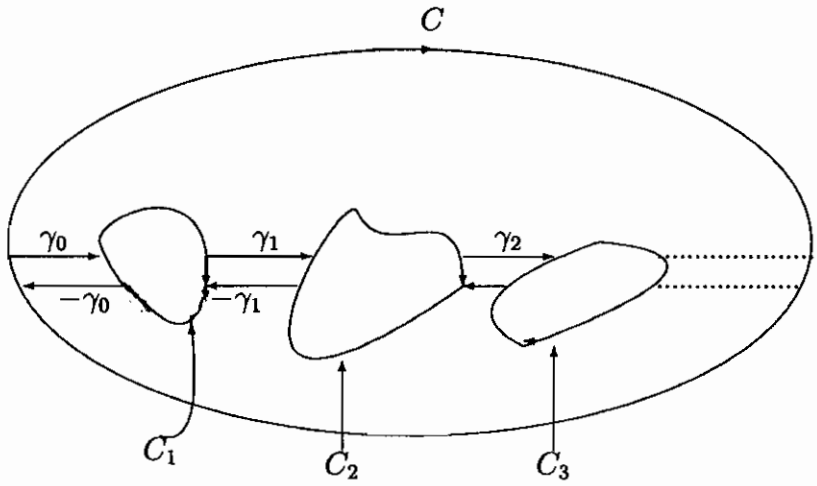
เราสามารถที่จะหาค่า $r > 0$ ซึ่งวงกลมจุดศูนย์กลางที่ 0 รัศมี r อยู่ภายใน C ดังรูปที่ *6.17* ให้ $\tilde{C}$ เป็นเส้นโค้งซึ่งเป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่สร้างนี้ ดังนั้น C จะเปลี่ยนรูปแบบต่อเนื่องกับ $\tilde{C}$ โดยไม่ต้องผ่าน 0 จากทฤษฎี *(6.5.9)* จะได้ว่า

$$\int_C \frac{1}{z}dz = \int_{\tilde{C}} \frac{1}{z}dz = 2\pi i$$

◊◊◊

ทฤษฎี 6.5.11 *(Generalized deformation theorem)*
ให้ $C_1, C2, \ldots, C_n$ เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียวที่อยู่ภายในของเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C และให้ f เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์และ f' เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในบริเวณระหว่าง C และ $C_1, C_2, \ldots, C_n$ แล้ว

$$\int_C f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz$$

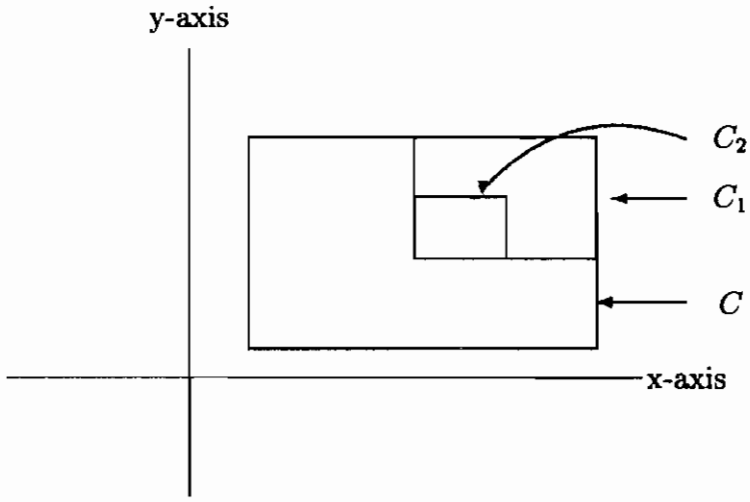


รูปที่ 6.18: รูปสำหรับทฤษฎี (6.5.11)

พิสูจน์ สร้างเส้นโค้ง $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ เชื่อมระหว่าง C ไปยัง $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ตามลำดับดังในรูปที่ ให้ γ เป็นเส้นโค้งที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง $C, -C_1, -C_2, \ldots, -C_n$ ส่วน เส้นโค้งแต่ละ γ_i จะมีทิศทางไปกลับ ดังนั้นสามารถที่จะตัดทิ้งออกได้ จากทฤษฎี (6.5.5) จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f(z)dz &= 0 \\
\int_C f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz + \int_{-C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{-C_n} f(z)dz &= 0 \\
\int_C f(z)dz &= \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz
\end{aligned}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่า ทฤษฎีของโคชีนั้นเงื่อนไขของโดเมนจะเป็นไปได้ทั้งในกรณีที่เป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวหรือโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง เราจึงเรียกทฤษฎีของโคชีในกรณีของโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวว่า weak Cauchy theorem ต่อไปจะกล่าวถึงทฤษฎีของโคชีอีกรูปแบบหนึ่ง



รูปที่ 6.19: รูปสำหรับทฤษฎี (6.5.12)

ทฤษฎี 6.5.12 ทฤษฎีโคชี-เกอร์ซาท *(Cauchy-Goursat theorem)*
ให้ $D \subset \mathbb{C}$ เป็นเซตเปิด และ $f : D \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ให้ $R = [a, b] \times [c, d]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่ภายใน D แล้ว

$$\int_C f(z)dz = 0$$

เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า R

จะเห็นได้ว่า ทฤษฎีโคชี-เกอร์ซาท มีเงื่อนไขน้อยกว่าทฤษฎีของโคชี ตรงที่ว่า $f'(z)$ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน D

พิสูจน์ แบ่งสี่เหลี่ยมผืนผ้า C ออกเป็นสี่ส่วนเท่าๆ กัน ดังรูปที่ 6.19 ให้ชื่อแต่ละรูปว่า C_1 จากคุณสมบัติของอินทิกรัล เราทราบว่า

$$\int_{-C} f(z)dz = -\int_C f(z)dz$$

ดังนั้นสำหรับค่าของอินทิกรัลทางด้านร่วม ซึ่งมีทิศทางสวนทางกัน สามารถจะลบกันหมดไปดัง

นั้น

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_1} f(z)dz$$

และจากอสมการของรูปสามเหลี่ยม

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \left|\int_{C_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_1} f(z)dz\right| + \left|\int_{C_1} f(z)dz\right|$$

นั่นก็คือ

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq 4\left|\int_{C_1} f(z)dz\right|$$

ดังนั้น

$$\left|\int_{C_1} f(z)dz\right| \geq \frac{\left|\int_C f(z)dz\right|}{4}$$

นำสี่เหลี่ยมผืนผ้า C_1 มา 1 รูป แล้วแบ่งแบบเดิมตามรูปที่ 6.19 จะได้สี่เหลี่ยมผืนผ้าเท่าๆ กัน อีก 4 รูป ให้แต่ละรูปมีชื่อว่า C_2 ในทำนองเดียวกับการแบ่งครั้งแรกจะได้

$$\left|\int_{C_2} f(z)dz\right| \geq \frac{\left|\int_{C_1} f(z)dz\right|}{4} \geq \frac{\left|\int_C f(z)dz\right|}{4^2}$$

ทำการแบ่งแบบนี้ไปเรื่อยๆ จะได้ลำดับ (sequence) ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าซึ่งมีคุณสมบัติว่า

1. $C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \ldots$
2. $\left|\int_{C_n} f(z)dz\right| \geq \frac{\left|\int_{C_{(n-1)}} f(z)dz\right|}{4^{n-1}} \geq \frac{\left|\int_C f(z)dz\right|}{4^n}$
3. C_k จะมีเส้นทแยงมุมมีความยาวเป็น $\frac{D}{2^k}$ เมื่อ D เป็นความยาวของเส้นทแยงมุมของ C
4. C_k จะมีเส้นรอบรูปมีความยาวเป็น $\frac{P}{2^k}$ เมื่อ P เป็นความยาวของเส้นรอบรูปของ C

ลักษณะของการสร้าง $C_1, C_2, C_3, \ldots$ จะแสดงอยู่ในรูปที่ 6.19
จากการสร้าง $C_1, C_2, C_3, \ldots$ จะพบว่ามีอยู่ 1 จุด ให้ชื่อว่า z_0 อยู่ภายใน $\cap_{k=1}^{\infty} C_k$ จากที่ z_0 เป็นจุดที่อยู่ในโดเมน ดังนั้น $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด z_0 นั่นก็คือ ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$f'(z_0) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \eta(z) \tag{6.5}$$

ซึ่ง $|\eta(z) < \epsilon|$ เมื่อ $|z - z_0| < \delta$
คูณตลอด (6.5) ด้วย $z - z_0$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(z_0)(z - z_0) &= f(z) - f(z_0) - \zeta(z)(z - z_0) \\ f(z) &= f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0) + \zeta(z)(z - z_0) \end{aligned}$$

อินทิเกรททั้ง 2 ข้างจะได้

$$\begin{aligned} f'(z_0)(z - z_0) &= f(z) - f(z_0) - \eta(z)(z - z_0) \\ \therefore\ f(z) &= f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0) + \eta(z)(z - z_0) \end{aligned}$$

อินทิเกรททั้ง 2 ข้างจะได้

$$\begin{aligned} \int_{C_n} f(z)dz &= \int_{C_n} [f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0) + \eta(z)(z - z_0)]\, dz \\ &= \int_{C_n} [f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0)]\, dz + \int_{C_n} \eta(z)(z - z_0)dz \quad (6.6) \end{aligned}$$

ฟังก์ชัน $f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ดังนั้นจากทฤษฎี (6.5.5) จะได้ว่า

$$\int_{C_n} [f'(z_0)(z - z_0) + f(z_0)]\, dz = 0$$

$\therefore$ จาก (6.6) จะได้

$$\int_{C_n} f(z)dz = \int_{C_n} \eta(z)(z - z_0)dz$$

ให้ n มีค่ามากพอที่จะทำให้ $C_n \subset N(z_0; \delta)$

$$\begin{aligned} \therefore\ \left|\int_{C_n} f(z)dz\right| &= \left|\int_{C_n} \eta(z)(z - z_0)dz\right| \\ &\leq \int_{C_n} |\eta(z)|\,|z - z_0|\,|dz| \\ &\leq \epsilon \int_{C^{(n)}} |z - z_0||dz| \quad (6.7) \end{aligned}$$

ให้ D_n เป็นความยาวของเส้นทะแยงมุมของสี่เหลี่ยมผืนผ้า C_n และ L_n เป็นความยาวของ C_n ดังนั้น $|z - z_0| \leq D_n,\ \forall z \in C_n$ จาก (6.7)

$$\left|\int_{C_n} f(z)dz\right| \leq \epsilon D_n L_n = \epsilon \frac{D}{2^n}\frac{L}{2^n} = \frac{\epsilon DL}{4^n}$$

เมื่อ D เป็นความยาวของเส้นทะแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า C
L เป็นความยาวของเส้นรอบรูป C

จากการสร้าง C_n และ (6.7) จะได้ว่า

$$\left|\int_{C^{(n)}} f(z)dz\right| \leq 4^n \frac{\epsilon DL}{4^n} = \epsilon DL$$

จาก $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ ดังนั้นกำหนดให้ ϵ เล็กมากจนเกือบเป็น 0 จะได้

$$\left|\int_C f(z)dz\right| = 0$$

นั่นก็คือ $\int_C f(z)dz = 0$

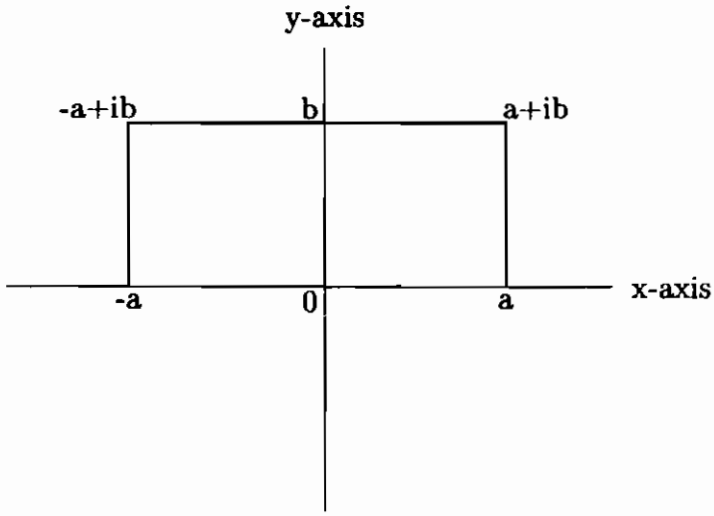
◇◇◇

ตัวอย่าง 6.5.13 จงแสดงว่า

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos bx dx = \sqrt{\pi} e^{-b^2}$$

เราจะนำทฤษฎีของโคชี-เกอร์ซาท มาใช้ โดยให้ $f(z) = e^{-z^2}$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน ซึ่งประกอบด้วยสี่เหลี่ยมผืนผ้า $|x| \leq a, 0 \leq y \leq b$.

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx + \int_0^b e^{-(a+iy)^2} i dy + \int_a^{-a} e^{-(x+ib)^2} dx + \int_b^0 e^{-(-a+iy)^2} i dy \\
0 &= \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx - \int_{-a}^{a} e^{-(x^2+2ibx-b^2)} dx + i \int_0^b e^{-(a^2+2aiy-y^2)} dy \\
&\quad -i \int_0^b e^{-(a^2-2iay-y^2)} dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx - e^{b^2} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} (\cos 2bx - i \sin 2bx) dx \\
&\quad + ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} \left(e^{-2iay} - e^{2iay}\right) dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-x^2} dx - e^{b^2} \int_{-a}^{a} e^{-x^2} \cos 2bx dx + ie^{b^2} \int_{-a}^{a} \sin 2bx dx \\
&\quad + ie^{-a^2} \int_0^b e^{y^2} (\cos 2ay - i \sin 2ay - \cos 2ay - i \sin 2ay) dy
\end{aligned}$$



รูปที่ 6.20: รูปสำหรับตัวอย่าง(6.5.13)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx - e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\cos 2bx dx + ie^{b^2}\left[\frac{-\cos 2bx}{2b}\right]_{-a}^{a} \\
&\quad + ie^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}(-2i\sin 2ay)dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}dx - e^{b^2}\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\cos 2bx dx + 2e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay dy \\
&= \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\left(1 - e^{b^2}\cos 2bx\right)dx + 2e^{-a^2}\int_0^b e^{y^2}\sin 2ay dy
\end{aligned}
$$

ให้ $a \to \infty$ จะได้

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx - e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx dx \tag{6.8}$$

นั่นก็คือ

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx dx \tag{6.9}$$

พิจารณา

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy\right)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy$$

จะทำการหาค่าของอินทิกรัลในรูปแบบของพิกัดเชิงขั้ว โดยการให้

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta, \;\; x^2+y^2 = r^2$$

ให้ *Jacobian* $= J$ ซึ่ง J จะหาได้จาก

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

ดังนั้น

$$J = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

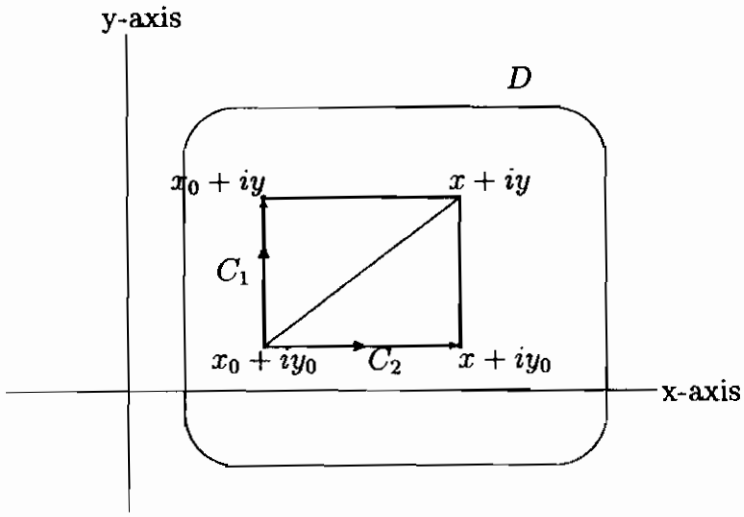
นั่นก็คือ

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \left[\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \pi \\
\therefore \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx &= \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

แทนค่าลงใน *(6.8)* จะได้

$$\begin{aligned}
e^{b^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{b^2}e^{-x^2}\cos 2bx\,dx &= \sqrt{\pi} \\
\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos 2bx\,dx &= \sqrt{\pi}e^{-b^2}
\end{aligned}$$

◊◊◊



รูปที่ 6.21: รูปสำหรับทฤษฎี (6.5.14)

ข้อควรสังเกต ทฤษฎีของโคชี-เกอร์ซาท ยังคงเป็นจริง ไม่ว่า D จะเป็นโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวหรือหลายเชิง

ทฤษฎี 6.5.14 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D และ z_0, z เป็นจุด 2 จุดใดๆ ในโดเมน D แล้ว จะมีฟังก์ชันวิเคราะห์ $F(z)$ ซึ่ง กำหนดในโดเมน D ซึ่งมีคุณสมบัติว่า $F'(z) = f(z)$

พิสูจน์ ให้ $z_0 = x_0 + iy_0, \;\; z = x + iy$ สร้างสี่เหลี่ยมผืนผ้าเพื่อเชื่อมระหว่างจุด z_0 และจุด z ดังในรูปที่ 6.20 ให้ C_1 เป็นส่วนโค้งที่ประกอบด้วยเส้นตรงจาก $x_0 + iy_0$ ไปยัง $x_0 + iy$ และ $x_0 + iy$ ไปยัง $x + iy$ ส่วน C_2 เป็นส่วนโค้งที่ประกอบด้วยเส้นตรงจาก $x_0 + iy_0$ ไปยัง $x + iy_0$ และ $x + iy_0$ ไปยัง $x + iy$

ให้

$$F(z) = \int_{C_1} f(z)dz = \int_{x_0}^{x} f(t + iy_0)dt + i\int_{y_0}^{y} f(x + it)dt \qquad (6.10)$$

จากรูปที่ 6.21 จะพบว่า $C_2 - C_1$ จะเป็นเส้นรอบรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่งอยู่ใน D และ $f(z)$

เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน D ดังนั้น จากทฤษฎีของโคชี-เกอร์ซาท จะได้

$$\int_{C_2-C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz = 0$$

นั่นก็คือ

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

จาก (6.10) จะได้

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_{C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz \\ F(z) &= i\int_{y_0}^{y} f(x_0+it)dt + \int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt \end{aligned} \tag{6.11}$$

จาก (6.11) ดิฟเฟอเรนทิเอท เทียบกับ y จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial y} = i\frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} f(x+it)dt$$

ให้

$$\begin{aligned} \int f(x+it)dt &= F(x+it) \\ \therefore\ f(x+it) &= \frac{\partial F}{\partial y}(x+it) \\ \int_{y_0}^{y} f(x=it)dt &= [F(x+it)]_{y_0}^{y} \\ &= F(x+iy) - F(x+iy_0) \\ \frac{\partial}{\partial y}\int_{y_0}^{y} f(x+it)dt &= \frac{\partial F}{\partial y}(x+it) \\ &= f(x+iy) = f(z) \\ \text{ดังนั้น}\ \frac{\partial F}{\partial y}(z) &= if(z) \end{aligned}$$

ดิฟเฟอเรนทิเอท (6.11) เทียบกับ x จะได้

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int_{x_0}^{x} f(t+iy)dt = f(z)$$

ดังนั้น $F(z)$ เป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ คือ

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}$$

ดังนั้น $F(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ และ

$$F'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} = f(z)$$

◊◊◊

นิยาม 6.5.15 ถ้า $F(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ซึ่ง $F'(z) = f(z)$ แล้วจะเรียก $F(z)$ ว่าเป็น**ปฏิยานุพันธ์** *(antiderivative)* ของฟังก์ชัน $f(z)$

บทแทรก 6.5.16 สองปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันอันเดียวกัน จะมีผลต่างเป็นค่าคงที่

พิสูจน์

ให้ $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$
และ $H(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(z)$

$$\begin{aligned} \therefore\ [F(z) - H(z)]' &= F'(z) - H'(z) \\ &= f(z) - f(z) = 0 \end{aligned}$$

สำหรับทุกๆ ค่าของ z ดังนั้น $F(z) - H(z)$ เป็นค่าคงที่

◊◊◊

ทฤษฎี 6.5.17 ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน D ซึ่งมี $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์และ C เป็นคอนทัวร์ใดๆ ซึ่งอยู่ภายในโดเมน D ถ้า C มีสมการอิงตัวแปรเสริมเป็น

$$C : z(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

แล้วค่าของ

$$\int_C f(z)dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

พิสูจน์ จาก $F(z)$ เป็นปฏิยานุพันธ์ของ $f(z)$ ซึ่งเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น $F(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้นจากสมการของโคชี-รีมานน์ จะได้ว่า

$$\frac{\partial F}{\partial x} = f(z) = -i\frac{\partial F}{\partial y}$$

ให้ $f(z) = u + iv$ และ $F(z) = U + iV$

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial V}{\partial y} \\ -i\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} = u + iv = \frac{\partial V}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial y}$$

นั่นก็คือ

$$u = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \text{ และ } v = \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_C (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy \end{aligned}$$

แทนค่า u และ v จะได้

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta \left[\frac{\partial U}{\partial x}x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}y'(t)\right] dt$$

$$
\begin{aligned}
&+i\int_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial V}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial V}{\partial y}y'(t)\right]dt \\
= &\int_{z(\alpha)}^{z(\beta)} dU + i\int_{z(\alpha)}^{z(\beta)} dV \\
= &[U+iV]_{z(\alpha)}^{z(\beta)} = [F(z)]_{z(\alpha)}^{z(\beta)} \\
= &F(z(\beta)) - F(z(\alpha))
\end{aligned}
$$

ดังนั้น

$$\int_C f(z)dz = F(z(\beta)) - F(z(\alpha))$$

◇◇◇

ตัวอย่าง 6.5.18 ให้ $f(z) = z^2$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ จุดของ z แล้ว ปฏิยานุพันธ์ของ $f(z)$ คือ $F(z) = \frac{z^3}{3}$
ถ้าให้ C เป็นคอนทัวร์ใดๆ ในระนาบของจำนวนเชิงซ้อนโดยมีจุดเริ่มต้นเป็น z_0 และจุดสุดท้ายเป็น z_1 แล้ว

$$\int_C z^2 dz = \int_{z_0}^{z_1} z^2 dz = \frac{z_1^3}{3} - \frac{z_0^3}{3}$$

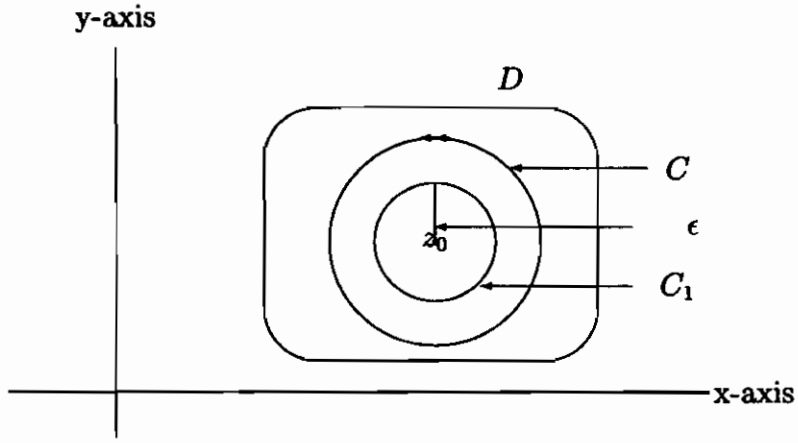
◇◇◇

ตัวอย่าง 6.5.19 จงหาค่าของ $\int_C \frac{1}{(z-z_0)}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นโค้งปิดเชิงเดียว *(simple closed contour)* และมีจุด z_0 อยู่ภายใน
ให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ สร้างวงกลม $C_1 : |z - z_0| = \epsilon$ ดังในรูปที่ *6.22*
ดังนั้น $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิง *(multiply connected domain)* ซึ่งอยู่ระหว่าง C และ C_1 ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
\int_{C+C_1}\frac{1}{z-z_0}dz &= \int_C \frac{1}{z-z_0}dz + \int_{C_1}\frac{1}{z-z_0}dz \\
&= 0 \\
\int_C \frac{1}{z-z_0}dz &= -\int_{C_1}\frac{1}{z-z_0}dz \\
&= \int_{-C_1}\frac{1}{z-z_0}dz
\end{aligned}
$$

ให้สมการอิงตัวแปรเสริมของ $-C_1$ คือ

$$-C_1 : z(t) = \epsilon e^{it} + z_0, \ \ 0 \le t \le 2\pi$$



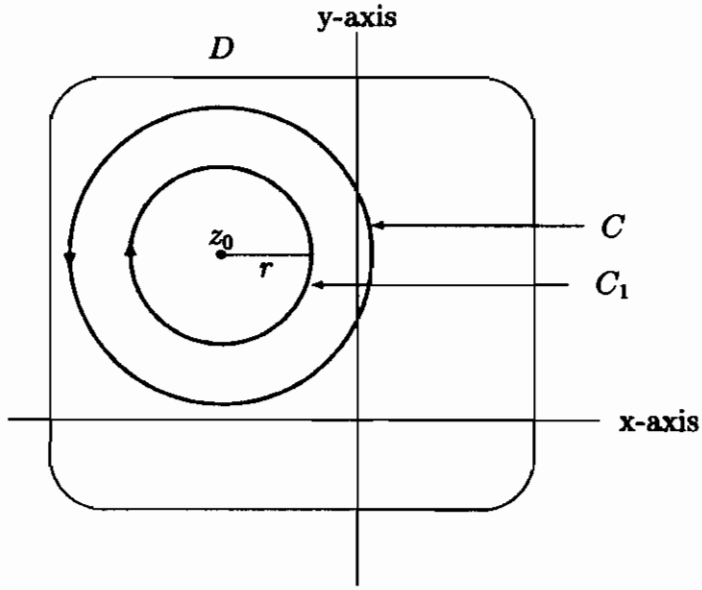
รูปที่ 6.22: รูปสำหรับตัวอย่าง (6.5.19)

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}\int_C \frac{1}{z-z_0}dz &= \int_{-C_1} \frac{1}{z-z_0}dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{i\epsilon e^{it}}{\epsilon e^{it}}dt \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

◊◊◊

จากตัวอย่างนี้ จะสังเกตได้ว่าค่าของ $\int_C \frac{1}{z-z_0}dz$ จะมีค่าเท่ากับ $2\pi i$ หรือ 0 ขึ้นอยู่กับจุด z_0 ว่าอยู่ภายในหรือภายนอกคอนทัวร์ปิดเชิงเดียว C ถ้า z_0 อยู่ภายในเส้นโค้งปิด C จะได้ $\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = 2\pi i$ ถ้า z_0 อยู่ภายนอกเส้นโค้งปิด C แล้ว $\int_C \frac{1}{z-z_0}dz = 0$



รูปที่ 6.23: รูปสำหรับทฤษฎี (6.6.1)

6.6 สูตรของโคชีอินทิกรัล (The Cauchy integral formula)

ทฤษฎี 6.6.1 ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ภายในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียว D ซึ่งประกอบด้วยเส้นโค้งปิดเชิงเดียว C ถ้า z_0 เป็นจุดใดๆ ซึ่งอยู่ภายในเส้นโค้งปิด C แล้ว

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

พิสูจน์ ให้ $\epsilon > 0$ สร้างวงกลม $C_1 : |z - z_0| = r$ และให้ C_1 อยู่ภายใน C และให้ C_1 เป็นวงกลมเล็กพอที่จะทำให้ $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$, $\forall z$ บน C_1 จากทฤษฎีโคชี สำหรับโดเมนเชื่อมโยง

หลายเชิง จะได้

$$\begin{aligned}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz \\ &= \int_{C_1} \frac{f(z_0)+f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \\ &= \int_{C_1} \frac{f(z_0)}{z-z_0}dz + \int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \qquad (6.12)\end{aligned}$$

(6.13)

จากตัวอย่าง (6.5.19) เราทราบว่า

$$\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i$$

แทนค่านี้ลงใน (6.12) จะได้

$$\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz = 2\pi i f(z_0) + \int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz \qquad (6.14)$$

พิจารณาค่าของ $\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz$

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| &\leq \int_{C_1} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}|dz| \\ &< \frac{\epsilon}{r}\int_{C_1} |dz| = \frac{\epsilon}{r}2\pi r = 2\pi\epsilon\end{aligned}$$

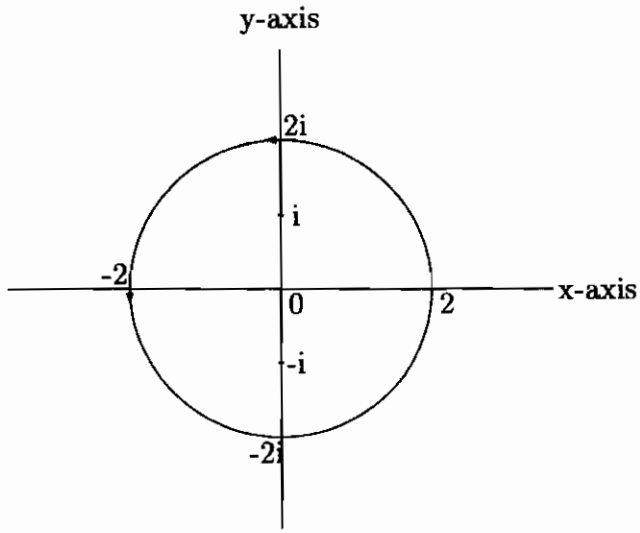
แต่ ϵ เป็นค่าใดๆที่มากกว่า 0 ดังนั้น

$$\left|\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}dz\right| = 0$$

แทนค่าที่ได้นี้ลงใน (6.14) จะได้

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz &= 2\pi i f(z_0) \\ \therefore\ f(z_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}dz\end{aligned}$$

◊◊◊



รูปที่ 6.24: เส้นโค้ง $C : |z| = 2$

ตัวอย่าง 6.6.2 จงหาค่าของ $\int_C \frac{\cos z}{z^3+z} dz$
ตามเส้นโค้งต่อไปนี้

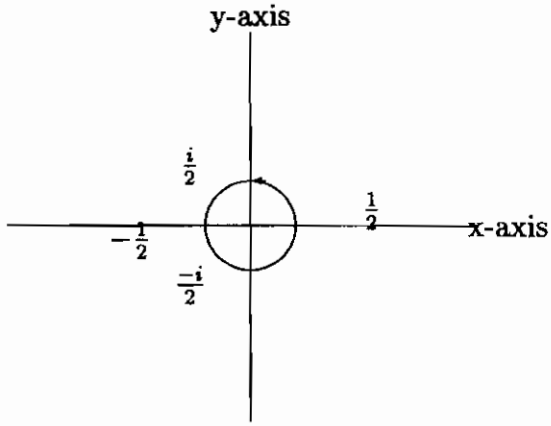
ก) $C : |z| = 2$ ข) $C : |z| = \frac{1}{2}$ ค) $C : |z - \frac{i}{2}| = 1$

ก) โดยการหาเศษส่วนย่อย *(partial fractions)* จะได้

$$\frac{\cos z}{z^3+z} = \frac{\cos z}{z} - \frac{\cos z}{2(z+i)} - \frac{\cos z}{2(z-i)}$$

ลักษณะของเส้นโค้ง $C : |z| = 2$ จะเห็นได้จากรูปที่ *6.24*

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\cos z}{z^3+z} dz &= \int_C \frac{\cos z}{z} dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z+i} dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z-i} dz \\
&= 2\pi i[\cos 0 - \frac{1}{2}\cos(-i) - \frac{1}{2}\cos i] \\
&= 2\pi i\left[1 - \frac{1}{2}\cosh 1 - \frac{1}{2}\right] \\
&= 2\pi i[1 - \cosh 1]
\end{aligned}$$



รูปที่ 6.25: เส้นโค้ง $C : |z| = \frac{1}{2}$

ข) จากเส้นโค้ง $C : |z| = \frac{1}{2}$ จะมีลักษณะดังในรูปที่ *6.25* พิจารณา $f(z) = \frac{\cos z}{z^2+1}$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนและภายใน C โดยทฤษฎีของโคชี จะได้

$$\int_C \frac{\cos z}{z^3+z}dz = \int_C \frac{\cos z}{z(z^2+1)}dz = 2\pi i\frac{\cos 0}{0^2+1} = 2\pi i$$

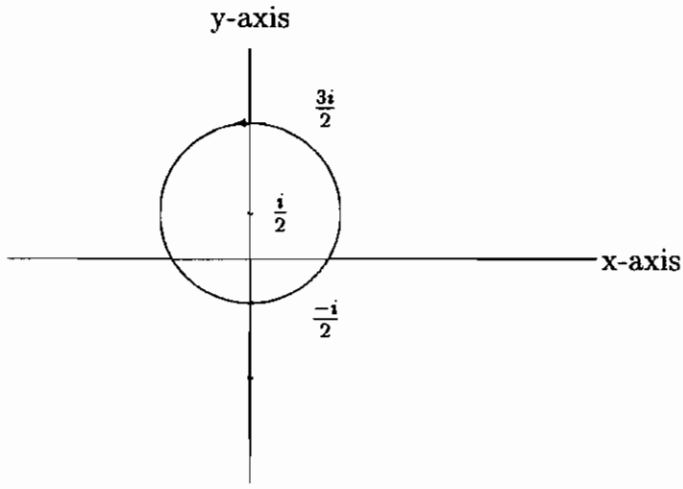
ค) $C : |z - \frac{i}{2}| = 1$ ลักษณะของเส้นโค้งจะอยู่ในรูปที่ *6.26* พิจารณา $f(z) = \frac{\cos z}{z-i}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์บนและภายใน C ดังนั้น

$$\begin{aligned}\int_C \frac{\cos z}{z^3+z}dz &= \int_C \frac{\cos z}{z}dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z+i}dz - \frac{1}{2}\int_C \frac{\cos z}{z-i}dz \\ &= 2\pi i\cos 0 - \frac{1}{2}2\pi i\cos(-i) - \frac{1}{2}0 \\ &= (1 - \frac{1}{2}\cosh 1)2\pi i\end{aligned}$$

◊◊◊

จากที่เราได้ทราบมาแล้วว่า ถ้าฟังก์ชันเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดใดๆ แล้ว อนุพันธ์ทุกอันดับของฟังก์ชันนั้นจะหาค่าได้ และจะมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ด้วย

ให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุดภายในและบนเส้นโค้งปิด C ให้ z_0 เป็นจุดใดๆ ใน C และ z



รูปที่ 6.26: ลักษณะของเส้นโค้ง $C : |z - \frac{i}{2}| = 1$

เป็นจุดบน C จากสูตรของโคชีอินทิกรัลจะได้

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz$$

เลือก $\triangle z_0$ ให้เล็กพอที่จะทำให้ $z_0 + \triangle z_0$ อยู่ภายใน C จากสูตรของโคชีอินทิกรัลจะได้ว่า

$$f(z_0 + \triangle z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - (z_0 + \triangle z_0)}dz$$

พิจารณา $\frac{f(z_0+\triangle z_0)-f(z_0)}{\triangle z_0}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(z_0 + \triangle z_0) - f(z_0)}{\triangle z_0} &= \frac{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0-\triangle z_0}dz - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z-z_0}dz}{\triangle z_0} \\
&= \frac{\frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{1}{z-z_0-\triangle z_0} - \frac{1}{z-z_0}\right] f(z)dz}{\triangle z_0} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \triangle z_0)(z - z_0)}dz
\end{aligned}$$

ให้ $\triangle z_0 \to 0$ จะได้

$$\lim_{\triangle z_0 \to 0} \frac{f(z_0 + \triangle z_0) - f(z_0)}{\triangle z_0} = \lim_{\triangle z_0 \to 0} \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0 - \triangle z_0)(z - z_0)}dz$$

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz$$

ในทำนองเดียวกัน เมื่อหา $f''(z_0)$ จะได้

$$f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz$$

และ

$$f'''(z_0) = \frac{3!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^4}dz$$

และโดยอุปนัยทางคณิตศาสตร์ จะได้

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

ดังนั้นเราจะสรุปเป็นทฤษฎีได้ว่า

ทฤษฎี 6.6.3 ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนเชื่อมโยงเชิงเดียวใดๆ ซึ่งประกอบไปด้วยเส้นโค้งปิด C แล้ว $f(z)$ จะมีค่าอนุพันธ์ทุกๆ อันดับที่จุด z_0 ใดๆซึ่งอยู่ภายใน C และ

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

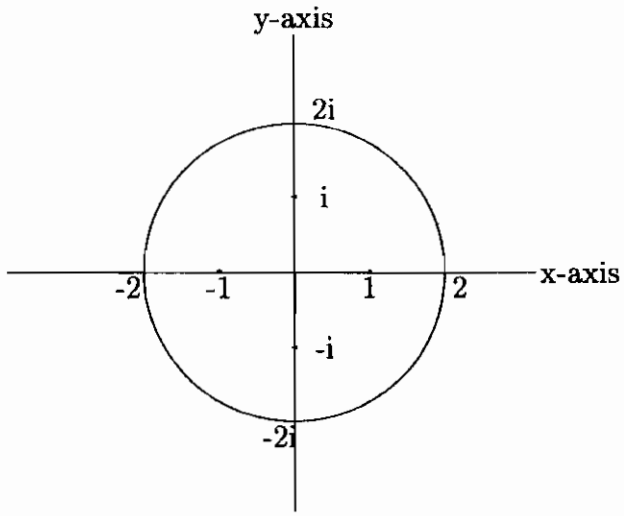
หมายเหตุ สำหรับสูตรของโคชีอินทิกรัลนี้จะเป็นจริงในกรณีที่โดเมนเป็นโดเมนเชื่อมโยงหลายเชิงด้วย

ตัวอย่าง 6.6.4 จงหาค่าของ

$$\int_{|z|=2} \frac{z-3\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz$$

ให้ $f(z) = z - 3\cos z$ ซึ่งจะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆ จุดของ z ซึ่งอยู่ในโดเมนที่ประกอบด้วยเส้นโค้ง $|z| = 2$ จากสูตรของโคชีอินทิกรัล

$$\int_{|z|=2} \frac{z-3\cos z}{(z-\frac{\pi}{2})^2}dz = 2\pi i f'(\frac{\pi}{2})$$



รูปที่ 6.27: เส้นโค้ง $C : |z| = 2$

เมื่อ $f'(z) = 1 + 3\sin z$ ดังนั้น $f'(\frac{\pi}{2}) = 1 + 3\sin\frac{\pi}{2=4}$
นั่นก็คือ

$$\int_{|z|=2} \frac{z - 3\cos z}{(z - \frac{\pi}{2})^2} dz = 8\pi i$$

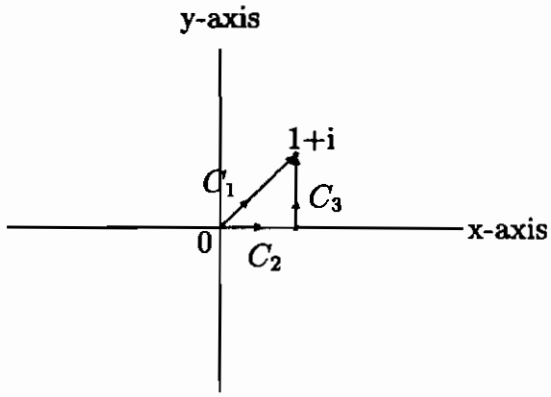
◊◊◊

ตัวอย่าง 6.6.5 จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = \Re(z) = x$ ตามเส้นซึ่งเชื่อมจากจุด $z_0 = 0$ ไปยังจุด $z_1 = 1 + i$
ถ้าให้ C_1 ดังในรูปที่ *6.28* จะได้ สมการอิงตัวแปรเสริมของ C_1 จะอยู่ในรูปแบบ

$$z(t) = x(t) + iy(t) = t + it, \;\; 0 \le t \le 1$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned} f(z) &= x = \Re(z(t)) = t \\ dz &= (1+i)dt \\ \therefore \int_C \Re(z)dz &= \int_{C_1} \Re(z)dz \end{aligned}$$



รูปที่ 6.28: เส้นโค้งสำหรับตัวอย่าง (6.6.5)

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 t(1+i)dt \\
&= (1+i)\int_0^1 tdt = \frac{1}{2}(1+i)
\end{aligned}
$$

ถ้าหาค่าของอินทิกรัลตามเส้นโค้ง C_2 และ เส้นโค้งC_3 ดังในรูปที่ *6.28* C_2 จะมีสมการอิงตัวแปรเสริม

$$z(t) = t,\ 0 \le t \le 1$$

และเส้นโค้ง C_3 จะมีสมการอิงตัวแปรเสริม

$$z(t) = 1 + i(t-1),\ 1 \le t \le 2$$

ดังนั้น

$$\int_C \Re(z)dz = \int_{C_2+C_3} \Re(z)dz = \int_0^1 tdt + \int_1^2 idt = \frac{1}{2} + i$$

◊◊◊

แบบฝึกหัด

1. จงหาสมการอิงตัวแปรเสริมของเส้นซึ่งเชื่อมจากจุด A ไปยังจุด B

   ก. $A = 0, \quad B = 1 + 2i$ ข. $A = 0, \quad B = 4 - 8i$

   ฆ. $A = 1 + i, B = 3 - 4i$ ค. $A = 3i, \quad B = 4 - i$

2. จงเขียนเส้นโค้งต่อไปนี้ในรูปของสมการอิงตัวแปรเสริม

   ก. $|z - 1 + 2i| = 3$ ข. $y = x^2$ จากจุด $(0, 0)$ ไปยังจุด $(3, 9)$

   ฆ. $x^2 + 9y^2 = 9$ ค. $4(x - 1)^2 + 9(y + 2)^2 = 36$

   ต. $y = \frac{1}{x}$ จากจุด $(1, 1)$ ไปยังจุด $(4, \frac{1}{4})$

3. จงวาดรูปเส้นโค้งซึ่งมีสมการอิงตัวแปรเสริมต่อไปนี้

   ก. $z(t) = 1 + (2 - i)t, \quad 0 \le t \le 1$

   ข. $z(t) = 3i + 3e^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$

   ฆ. $z(t) = 4 + 2e^{it}, \quad -\pi \le t \le 0$

   ค. $z(t) = t + 3t^2 i, \quad -1 \le t \le 2$

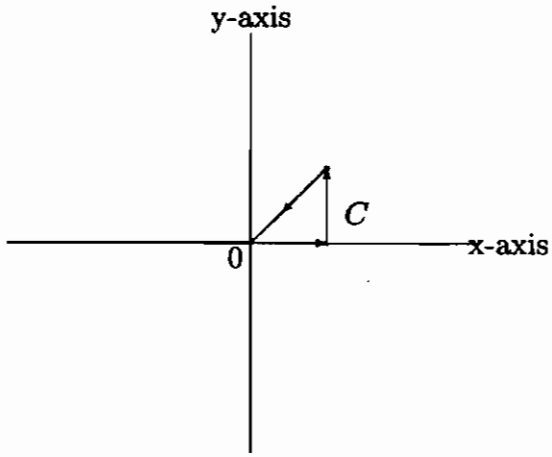
4. จงหาค่าของ $\int_C 3z^2 dz$ เมื่อ C คือเส้นโค้งซึ่งเชื่อมจากจุดต่อไปนี้

   ก. จาก $z = 0$ ไปยัง $z = 2i$ ข. จาก $z = 3i$ ไปยัง $z = 4 - i$

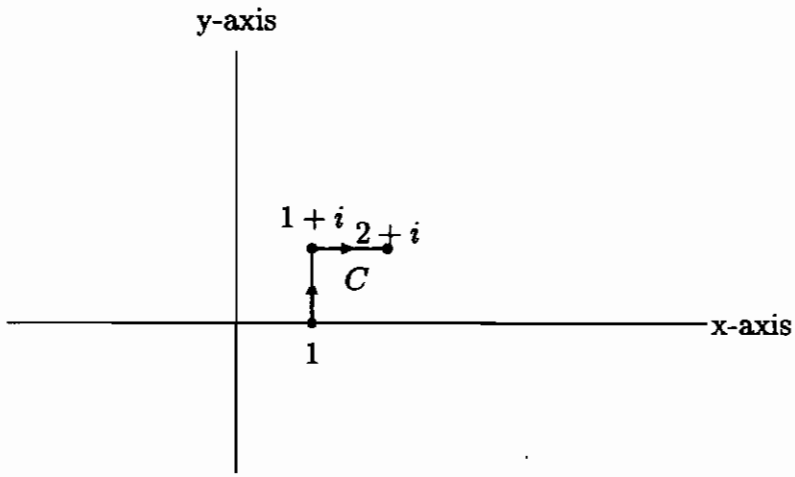
5. จงหาค่าของ $\int_C 3z^2 dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดที่ $0, 1, 1 + i$ และ C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาดังในรูปที่ 6.29

6. จงหาค่าของ $\int_C (z + \frac{1}{z}) dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด รัศมี 1 หน่วย และ C มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา

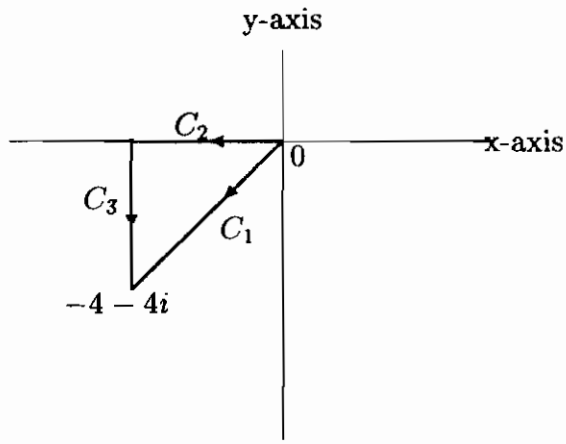
7. จงหาค่าของ $\int_C z dz$ เมื่อ C มีลักษณะดังในรูปที่ 6.30



รูปที่ 6.29: เส้นโค้ง C สำหรับข้อ 5



รูปที่ 6.30: เส้นโค้ง C สำหรับข้อ 7



รูปที่ 6.31: เส้นโค้ง C สำหรับข้อ 8

8. จงหาค่าของ $\int_{C_1}(az+b)dz$ และ $\int_{C_2+C_3}(az+b)dz$ เมื่อ C_1, C_2, C_3 เป็นเส้นโค้งซึ่งเชื่อมจาก 0 ไปยัง $-4-4i$ ดังในรูปที่ 6.31

9. จงหาค่าของ $\int_C (z-3)^{-1}dz$ เมื่อ C กำหนดโดย

   ก. $C : |z-3| = 2$ และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

   ข. $C : |z-3| = 2$ มีทิศทางตามเข็มนาฬิกา

10. จงหาค่าของ $\int_C \Re(z)dz$ ตามเส้นรอบวงของวงกลม $|z| = r$ และ C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

11. จงหาค่าของ $\int_C |z|dz$

    ก. เมื่อ C เป็นเส้นตรงจากจุด $A = -i$ ไปยังจุด $B = i$
    ข. เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของครึ่งวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง 0 รัศมี 1 หน่วย และครึ่งวงกลมนี้อยู่ทางขวาของแกน y เชื่อมจุด A ไปยังจุด B
    ฃ. เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของครึ่งวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลาง 0 รัศมี 1 หน่วย และครึ่งวงกลมนี้อยู่ทางซ้ายของแกน y เชื่อมจุด A ไปยังจุด B

12. จงหาค่าของ $\int_C \left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) dz$

ก. เมื่อ C เป็นส่วนของครึ่งวงกลม $|z| = 1$ อยู่เหนือแกน x และเชื่อมจุด 1 ไปยังจุด -1

ข. เมื่อ C เป็นส่วนของครึ่งวงกลม $|z| = 1$ อยู่ใต้แกน x และเชื่อมจุด 1 ไปยังจุด -1

13. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ

ก. $f(z) = az + b$ เมื่อ C คือ เส้นจำกัด จากจุด $-1 - i$ ไปยังจุด $1 + i$

ข. $f(z) = z^3 + 2z^{-1}$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งมีจุดศูนย์กลางที่ 0 และรัศมี 1 หน่วย ทิศทางของ C ทวนเข็มนาฬิกา

ฃ. $f(z) = e^z$ เมื่อ C เป็นเส้นจำกัดซึ่งเชื่อมจุด จาก 0 ถึง $1 + \frac{\pi i}{2}$

ค. $f(z) = (z-1)^{-1} + 2(z-1)^{-2}$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม $|z-1| = 4$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ฅ. $f(z) = \sin z$ เมื่อ C เป็นเส้นจำกัดซึ่งเชื่อมจากจุด 0 ถึงจุด i

14. จงหาขอบเขตบน (upper bound) ของอินทิกรัลต่อไปนี้ เมื่อ C เป็นเส้นจำกัดที่เชื่อมจากจุด 0 ถึงจุด $3 + 4i$

ก. $\int_C z dz$ ข. $\int_C e^z dz$

ฃ. $\int_C \ln(z+1) dz$ ค. $\int_C (z+1)^{-1} dz$

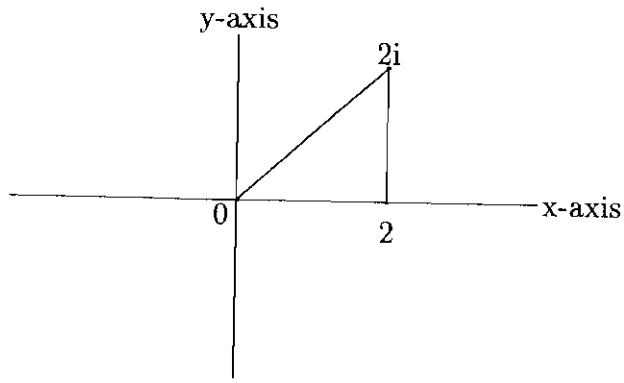
15. จงแสดงว่าทฤษฎีโคชี (Cauchy's theorem) เป็นจริงสำหรับ $\int_C z^2 dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $0, 2$ และ $2i$ ดังในรูปที่ 6.32

16. จงหาค่าของอินทิกรัลของฟังก์ชันที่กำหนดให้ตาม C เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ รัศมี 1 หน่วย และให้ทิศทางของ C ทวนเข็มนาฬิกา และจงบอกว่าข้อไหนที่สามารถจะหาค่าอินทิกรัลได้โดยใช้ทฤษฎีโคชี

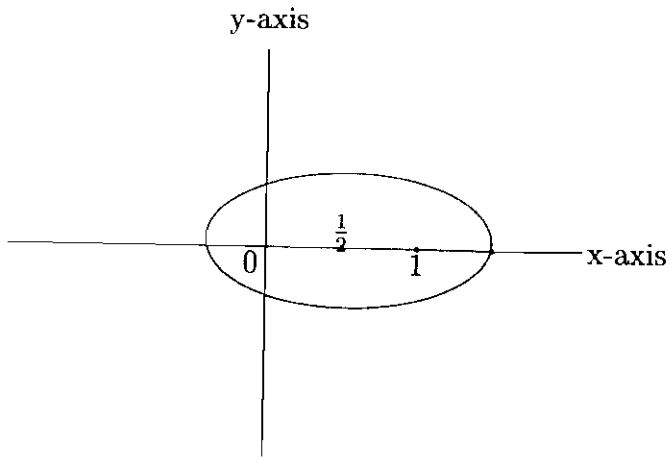
ก. $f(z) = e^{-z}$ ข. $f(z) = |z|$

ฃ. $f(z) = \Im(z)$ ค. $f(z) = \Re(z)$

ฅ. $f(z) = \tanh z$ ฆ. $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$



รูปที่ 6.32: เส้นโค้ง C สำหรับข้อ 15



รูปที่ 6.33: เส้นโค้ง C สำหรับข้อ 17

17. จงแสดงว่า $\int_C \frac{2z-1}{z^2-z}dz = \int_C \frac{1}{z}dz + \int_C \frac{1}{z-1}dz = 4\pi i$ เมื่อ C แสดงอยู่ในรูปที่ 6.33

18. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|}$ และ C คือเส้นรอบวงของ

    ก. วงกลม $|z| = 2$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
    ข. วงกลม $|z| = 4$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

19. จงหาค่าของ $\int_C \frac{1}{z}dz$ เมื่อ คือเส้นรอบวงของวงกลม $|z-2| = 1$ (ทิศทางตามเข็มนาฬิกา)

20. จงหาค่าของ $\int_C \frac{z^2-z+1}{z^3-z^2}dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งกำหนดโดย

    ก. $C : |z| = 2$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
    ข. $C : |z| = \frac{1}{2}$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

21. จงหาค่าของ $\int_C \frac{1}{z^2-1}dz$ เมื่อ C คือเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งกำหนดโดย

    ก. $C : |z| = 2$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา
    ข. $C : |z-1| = 1$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

22. จงหาค่าของ $\int_C \frac{e^z}{z}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งกำหนดโดย

    ก. $C : |z| = 2$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
    ข. $C : |z+i| = 1$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

23. จงหาค่าของ $\int_C \frac{\cos z}{z^2}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลม ซึ่งกำหนดโดย $C : |z-2i| = 1$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

24. จงหาค่าของ $\int_C \frac{3z+1}{z^3-z}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งกำหนดโดย

    ก. $C : |z| = \frac{1}{2}$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา
    ข. $C : |z| = 2$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

25. จงหาค่าของ $\int_C \frac{2z^3+z^2+4}{z^4+4z^2}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งกำหนดโดย $C : |z-2| = 4$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

26. จงหาค่าของ $\int_C \frac{1}{z^4+4z^2}dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมซึ่งกำหนดโดย

ก. $C : |z| = \frac{3}{2}$ ทิศทางตามเข็มนาฬิกา

ข. $C : |z| = 1$ ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

27. จงหาค่าของอินทิกรัลต่อไปนี้

ก. $\int_1^{3i} z^2 dz$	ข $\int_i^1 (z+1)^2 dz$
ฃ. $\int_{1-i}^{1+i} z^3 dz$	ค. $\int_1^{1+\pi i} e^z dz$
ฅ. $\int_0^i ze^{z^2} dz$	ฆ. $\int_{1-\pi i}^{1+\pi i} e^{\frac{z}{2}} dz$
ง. $\int_0^{\pi i} \cos z dz$	จ. $\int_0^{\pi i} z \cos z^2 dz$

28. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = \frac{z^2}{z^2+1}$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมที่มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกาต่อไปนี้

ก. $C : \|z+i\| = 1$	ข. $\|z-i\| = \frac{1}{2}$
ฃ. $\|z\| = 2$	ค. $\|z\| = \frac{1}{2}$

29. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ $f(z) = \frac{z^2}{z^4-1}$ เมื่อ C มีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และ C คือเส้นรอบวงของวงกลมต่อไปนี้

ก. $\|z-1\| = 1$	ข. $\|z-i\| = \frac{1}{2}$
ฃ. $\|z\| = 2$	

30. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมจุดศูนย์กลาง $(0,0)$ รัศมียาว 1 หน่วย และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา ส่วน $f(z)$ คือ ฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $f(z) = \frac{1}{z^2+4}$	ข. $f(z) = \frac{1}{4z+i}$
ฃ. $f(z) = \frac{e^z}{z}$	ค. $f(z) = \frac{e^{2z}}{z+2i}$
ฅ. $f(z) = \frac{e^{z^2}}{2z-i}$	ฆ. $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$
ง. $f(z) = \frac{\sinh z}{z}$	

31. จงหาค่าของ $\int_C f(z)dz$ เมื่อ C เป็นเส้นรอบวงของวงกลมจุดศูนย์กลาง $(0,0)$ รัศมียาว 1 หน่วย และมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา และ $f(z)$ คือ ฟังก์ชันต่อไปนี้

ก. $f(z) = \frac{z^2}{(2z-1)^2}$ ข. $f(z) = \frac{z^2}{(2z-1)^4}$

ข. $f(z) = \frac{z}{(4z+i)^2}$ ค. $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$

ต. $f(z) = \frac{e^z}{z^n}$, n เป็นจำนวนเต็มบวก