บทที่ 5

ฟังก์ชันประถม (Elementary functions)

5.1 คำนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงความหมายของฟังก์ชันประถมของฟังก์ชันเชิงซ้อนแต่ละชนิด เช่นฟังก์ชันชี้กำลัง ฟังก์ชันตรีโกณ ฟังก์ชันลอการิทึม เป็นต้น คุณสมบัติของฟังก์ชันประถม นอกจากนั้นก็จะแสดงความสัมพันธ์ของฟังก์ชันชี้กำลัง e^z (exponential function) กับฟังก์ชันตรีโกณ $\sin z, \cos z, \sec z, \csc z, \tan z$ และ $\cot z$ และ ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค $\sinh z, \cosh z, \tanh z,$ และ $\coth z$ ตลอดจนความสัมพันธ์กับ $\log z$ (logarithmic function)

5.2 ฟังก์ชันชี้กำลัง (Exponential function)

ฟังก์ชันชี้กำลังซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะอยู่ในรูปแบบ e^z ก่อนอื่น เราจะกล่าวถึงคุณสมบัติบางประการของฟังก์ชันชี้กำลังซึ่งมีตัวชี้กำลังเป็นตัวแปรค่าจริงที่อยู่ในรูปแบบ e^x ก่อน

พิจารณา $f(x) = e^x$ เมื่อ x เป็นตัวแปรค่าจริง จะเป็นฟังก์ชันซึ่งส่งจากเซตของจำนวนจริง ไปยังเซตของจำนวนจริงบวก และเป็นไปตามกฎดังต่อไปนี้คือ

$$
\begin{aligned}
e^{x_1}e^{x_2} &= e^{x_1+x_2} \\
\frac{d(e^x)}{dx} &= e^x \\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots
\end{aligned}
$$

เราจะอาศัยคุณสมบัติของ e^x มาช่วยหาคุณสมบัติของฟังก์ชันชี้กำลังที่มีตัวชี้กำลังเป็นตัวแปร

ค่าเชิงซ้อน ซึ่งอยู่ในรูปแบบ e^z

นิยาม 5.2.1 ฟังก์ชันชี้กำลังซึ่งมีตัวชี้กำลังเป็นตัวแปรค่าเชิงซ้อน *(complex exponential function)* **คือฟังก์ชันเชิงซ้อน** $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ **เมื่อ** $e = 2.71828\ldots$

นิยามของ e^z นี้ ได้มาจากคุณสมบัติของฟังก์ชัน e^x ดังนี้คือ

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

เรามี

$$e^{iy} = 1 + iy + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \cdots$$

จากอนุกรมนี้ ถ้าแยกส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพจะได้

$$\begin{aligned} e^{iy} &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} \cdots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} \cdots\right) \\ &= \cos y + i \sin y \end{aligned}$$

ดังนั้นเราจะให้นิยามของ e^{iy} ดังต่อไปนี้คือ

นิยาม 5.2.2 ให้ y เป็นจำนวนจริง แล้ว **ฟังก์ชันเชิงซ้อน** e^{iy} จะนิยามโดย $e^{iy} = \cos y + i \sin y$

รูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ e^z เมื่อ $z = x + iy$ คือ

$$f(z) = e^z = |e^z|(\cos\theta + i \sin\theta)$$

เมื่อ $|e^z| = e^x$ และ $\theta = \arg(e^z)$

ตัวอย่าง 5.2.3 ให้ $e^z = -1$ จงหาค่าของ z

$$\begin{aligned} e^z &= -1 \\ &= |e^z|(\cos\theta + i \sin\theta) \end{aligned}$$

จะได้

$$|e^z| = e^x = 1 \quad \text{และ} \quad \theta = \pi + 2n\pi$$

เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
จาก $e^x = 1$ จะได้ $x = \ln 1 = 0$ เมื่อ ln คือ ลอการิทึมธรรมชาติ *(Natural logarithm)*

$$\therefore \; z = x + iy = 0 + i(\pi + 2n\pi) = \pi(1 + 2n)i$$

เมื่อ $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ◇◇◇

คุณสมบัติของ e^z

1. ทฤษฎีบทดีมัววร์ (De Moivre's law) จะได้ว่า

$$(\cos y + i \sin y)^n = \cos ny + i \sin ny$$

ดังนั้น $(e^{iy})^n = e^{iny}$ และ $|e^{iy}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$ เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใดๆ

2. $|e^z| = |e^x e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x$ และ $e^z \neq 0 \;\; \forall z \in \mathbb{C}$

3. $e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z(\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z$
ดังนั้น e^z เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบ $2\pi i$

4. ถ้าให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ แล้ว

$$\begin{aligned} e^{z_1} e^{z_2} &= e^{x_1 + iy_1} e^{x_2 + iy_2} \\ &= e^{x_1} e^{iy_1} e^{x_2} e^{iy_2} \\ &= (e^{x_1} e^{x_2} e^{iy_1} e^{iy_2}) \\ &= e^{x_1 + x_2} e^{i(y_1 + y_2)} \\ &= e^{z_1 + z_2} \end{aligned}$$

5. ในทำนองเดียวกับข้อ (4) จะได้ว่า

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$$

6. $e^{z \ln a} = a^z$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงใดๆ

7. $e^{\overline{z}} = \overline{(e^z)}$ เพราะ

$$\begin{aligned} e^{\overline{z}} &= e^{x-iy} \\ &= e^x(\cos y - i\sin y) \\ &= \overline{e^x(\cos y + i\sin y)} \\ &= \overline{e^x e^{iy}} \\ &= \overline{(e^z)} \end{aligned}$$

8. e^z เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ และ $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$ เพราะ

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x(\cos y + i\sin y) \end{aligned}$$

จะได้

$$u(x,y) = e^x\cos y \text{ และ } v(x,y) = e^x\sin y$$

ดังนั้น

$$u_x(x,y) = e^x\cos y \text{ ส่วน } v_x(x,y) = e^x\sin y$$

และ

$$u_y(x,y) = -e^x\sin y \text{ และ } v_y(x,y) = e^x\cos y$$

จะพบว่าเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ $\forall(x,y) \in \mathbb{C}$ และ u_x, u_y, v_x, v_y มีความต่อเนื่องดังนั้น e^z เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ และ

$$\begin{aligned} \frac{d(e^z)}{dz} &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) \\ &= -iu_y(x,y) + v_y(x,y) \\ &= e^x\cos y + ie^x\cos y = e^z \end{aligned}$$

ถ้ากำหนดให้ $e^z = a + ib$ ซึ่ง $a \neq 0$, $b \neq 0$ แล้ว

$$e^x(\cos y + i\sin y) = a + ib$$

จะได้

$$e^x\cos y = a \tag{5.1}$$

$$e^x\sin y = b \tag{5.2}$$

ยกกำลังสองทั้ง 2 ข้างของ (5.1) และ (5.2) จะได้

$$e^{2x}\cos^2 y = a^2 \tag{5.3}$$
$$e^{2x}\sin^2 y = b^2 \tag{5.4}$$

(5.3) + (5.4) จะได้

$$\begin{aligned} e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) &= a^2 + b^2 \\ \therefore\ e^{2x} &= a^2 + b^2 \\ x &= \frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

ในการหาค่า y พิจารณา เมื่อ $a \neq 0$ นำ (5.2) หารด้วย (5.1) จะได้

$$\begin{aligned} \tan y &= \frac{b}{a}, \quad \text{เมื่อ } a \neq 0 \\ y &= \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2n\pi \end{aligned}$$

เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ
ดังนั้นจะได้ผลเฉลยของสมการเป็น

$$z = \frac{1}{2}\ln(a^2 + b^2) + i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right) + 2k\pi$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$
พิจารณาเมื่อ $a = 0$ จาก (5.1) จะได้

$$\begin{aligned} \cos y &= 0 \\ \therefore\ y &= \frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ดังนั้นผลเฉลยของสมการจะเป็น

$$z = \begin{cases} \ln b + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & b > 0 \\ \ln|b| + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right), & b < 0 \end{cases}$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ตัวอย่าง 5.2.4 กำหนดให้ $e^z = 5 - 5i$ จงหาค่า z

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\ln\left(5^2 + (-5)^2\right) + i\tan^{-1}\left(\frac{-5}{5}\right) \\ &= \frac{\ln 50}{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

◇◇◇

ตัวอย่าง 5.2.5 กำหนดให้ $e^z = -5 + 5i$ จงหาค่า z

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}\ln\left((-5)^2 + (5)^2\right) + i\tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right) \\ &= \frac{\ln 50}{2} + i\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

◇◇◇

หมายเหตุ $\tan^{-1}\left(\frac{-b}{a}\right) \neq \tan^{-1}\left(\frac{b}{-a}\right)$

5.3 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (Trigonometric functions)

จากที่ได้ศึกษาฟังก์ชัน e^z เราก็จะได้นิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติโดยอาศัยฟังก์ชัน e^z ดังนี้ จากนิยาม (5.2.2) จะได้ว่า

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} e^{-iy} &= \cos(-y) + i\sin(-y) \\ &= \cos y - i\sin y \end{aligned} \tag{5.6}$$

(5.5) +(5.6) จะได้

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$$

และ (5.5) - (5.6) จะได้

$$\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

ดังนั้นนิยามของฟังก์ชันตรีโกณมิติที่มีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน z คือ

นิยาม 5.3.1 ให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad \text{ส่วน} \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

สำหรับฟังก์ชันตรีโกณมิติอื่นๆ ก็จะสามารถให้นิยามได้ โดยอาศัยฟังก์ชัน $\sin z$ และ $\cos z$ ดังนี้คือ

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\sin z}$$

จากการหาค่าอนุพันธ์ของ e^z จะได้ค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันตรีโกณมิติดังนี้คือ

$$\frac{d(\sin z)}{dz} = \cos z, \qquad \frac{d(\cos z)}{dz} = -\sin z, \qquad \frac{d(\tan z)}{dz} = \sec^2 z,$$
$$\frac{d(\cot z)}{dz} = -\csc^2 z, \qquad \frac{d(\sec z)}{dz} = \sec z \tan z, \qquad \frac{d(\csc z)}{dz} = -\csc z \cot z$$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงพิสูจน์ว่า $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos z$

จากนิยาม *(5.3.1)* ของ $\sin z$ จะได้

$$\begin{aligned}
\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) &= \frac{e^{i(z+\frac{\pi}{2})} - e^{-i(z+\frac{\pi}{2})}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-iz}e^{-i\frac{\pi}{2}}}{2i} \\
&= \frac{ie^{iz} + ie^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z
\end{aligned}$$

◇◇◇

ตัวอย่าง 5.3.3 จงพิสูจน์ว่า $\sin 2z = 2\sin z \cos z$

$$2\sin z \cos z = 2\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)\left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{4i}\right) \\
&= \left(\frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i}\right) \\
&= \sin 2z
\end{aligned}
$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาค่า z ซึ่ง $\cos z = 2$

จากนิยาม *(5.3.1)* จะได้

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 2$$

ดังนั้น

$$e^{iz} + e^{-iz} - 4 = 0$$

คูณตลอดด้วย e^{iz} จะได้

$$
\begin{aligned}
e^{2iz} + e^{0} - 4e^{iz} &= 0 \\
e^{2iz} - 4e^{iz} + 1 &= 0
\end{aligned}
$$

จากสูตรของการหารากสมการกำลังสองจะได้

$$e^{iz} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

จากที่

$$e^{iz} = e^{i(x+iy)} = e^{-y}(\cos x + i \sin x)$$

ดังนั้นจะได้ว่า

$$e^{-y}(\cos x + i \sin x) = 2 \pm \sqrt{3}$$

เทียบส่วนจริง และส่วนจินตภาพ จะได้

$$e^{-y} \cos x = 2 \pm \sqrt{3} \tag{5.7}$$

$$e^{-y} \sin x = 0 \tag{5.8}$$

จาก *(5.8)* จะได้ $x = k\pi$ เมื่อ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ และจาก *(5.7)* จะได้ว่า k ต้องเป็นจำนวนคู่ ดังนั้น

$$\begin{aligned} y &= -\ln(2 \pm \sqrt{3}) \\ z &= 2k\pi - i\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

◇◇◇

5.4 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค (Hyperbolic functions)

เมื่อได้รู้จักฟังก์ชันตรีโกณมิติแล้ว ต่อไปก็จะให้นิยามของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิคในพจน์ของฟังก์ชันชี้กำลังดังนี้คือ

นิยาม 5.4.1 ฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค $\sinh z, cosh z$ คือ ฟังก์ชันซึ่งกำหนดโดย

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

ส่วนฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค อื่นๆ ก็จะได้จากความสัมพันธ์ต่อไปนี้คือ

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}, \qquad cothz = \frac{\cosh z}{\sinh z} \qquad \text{sech } z = \frac{1}{\cosh z}, \qquad \text{cosech } z = \frac{1}{\sinh z}$$

ดังนั้นจะสามารถแสดงฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิคทุกตัวในพจน์ของ e^z และ e^{-z} ได้ จากที่ e^z และ e^{-z} เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ ดังนั้น $\sinh z, \cosh z$ จะเป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ ส่วน $\tanh z$, sech z จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์เมื่อ $coshz \neq 0$ ส่วน $\coth z$, csch z จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์เมื่อ $\sinh z \neq 0$

คุณสมบัติของฟังก์ชันไฮเปอร์โบลิค

1. $\sinh z, \cosh z, \tanh z, \coth z$, sech z เป็นฟังก์ชันซึ่งมีคาบเป็น $2\pi i$

2. ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชัน $\sin z, \cos z$ และ $\sinh z, \cosh z$ จะเป็นไปดังนี้คือ

$$\sinh(iz) = i\sin z, \quad \cosh(iz) = \cos z$$

3. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$

4. $\coth^2 z - \operatorname{cosech}^2 z = 1$

5. $\sinh(z_1 \pm z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 \sinh z_2$

6. $\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm \sinh z_1 \sinh z_2$

7. $\sinh(-z) = -\sinh z$

8. $\cosh(-z) = \cosh z$

ตัวอย่าง 5.4.2 จงหาค่าของ z ซึ่งทำให้ $\sinh z = 0$
จากนิยาม

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

ดังนั้น $\sinh z = 0$ ก็ต่อเมื่อ $e^z = e^{-z}$ นั่นก็คือ

$$\begin{aligned} e^x(\cos y + i \sin y) &= e^{-x}(\cos y - i \sin y) \\ \left(e^x - e^{-x}\right) \cos y + i \left(e^x - e^{-x}\right) \sin y &= 0 \end{aligned}$$

เทียบส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ จะได้

$$\left(e^x - e^{-x}\right) \cos y = 0 \tag{5.9}$$

$$\left(e^x - e^{-x}\right) \sin y = 0 \tag{5.10}$$

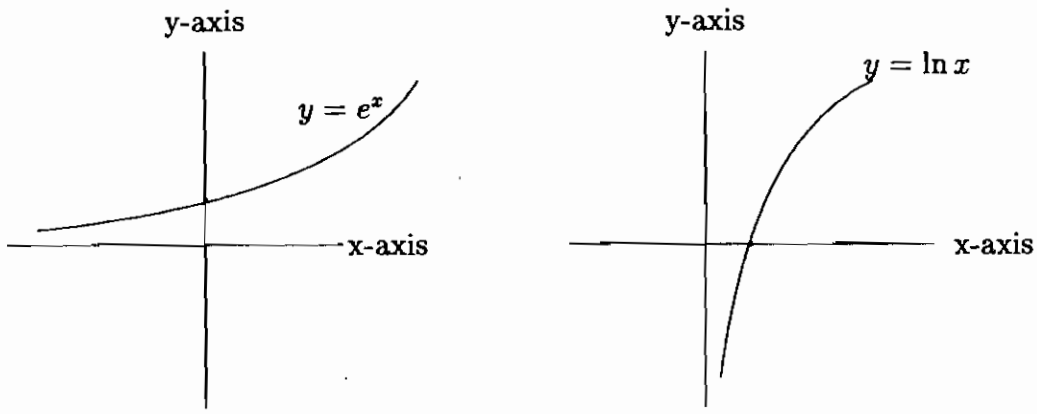
(5.9) และ *(5.10)* จะเป็นจริงเมื่อ

$$x = 0 \quad \text{และ} \quad y = \pm k\pi, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

ดังนั้น

$$z = \pm k\pi i \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

◇◇◇



รูปที่ 5.1: กราฟของฟังก์ชัน $y = \ln x$ และ $y = \ln x$

5.5 ฟังก์ชันลอการิทึม (Logarithmic function)

ก่อนที่จะพูดถึงฟังก์ชันลอการิทึมซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน เราจะกล่าวถึงฟังก์ชันลอการิทึมที่มีตัวแปรเป็นจำนวนจริงก่อน
สำหรับทุกๆ ค่าของจำนวนจริงบวก x จะมีจำนวนจริงบวก y เพียงหนึ่งจำนวนเท่านั้น ซึ่ง $e^y = x$ ดังนั้นจะได้ $y = \ln x$ เมื่อ $\ln x$ คือ $\log_e$
สำหรับ $x_1, x_2 > 0$

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$$

ฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ จะเป็นฟังก์ชันซึ่งส่งจากเซตของจำนวนจริงบวก ไปยังเซตของจำนวนจริง และฟังก์ชันผกผัน f^{-1} ของฟังก์ชัน $f(x) = \ln x$ จะส่งจากเซตของจำนวนจริงไปยังเซตของจำนวนจริงบวกดังในรูปที่ 5.1 $y = f(x) = e^x$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง (one-one function) ดังนั้นฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x) = \ln x$ จะเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งด้วย ต่อไปเราจะกล่าวถึงฟังก์ชันลอการิทึมซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 5.5.1 ถ้า $z = e^w$ แล้ว $w = \ln z$ จะเรียกว่าเป็น **ลอการิทึมธรรมชาติ** *(Natural logarithm)* ของตัวแปรเชิงซ้อน z ซึ่งกำหนดโดย

$$w = \ln z = \ln|z| + iarg(z)$$

5.6 คุณสมบัติของฟังก์ชันลอการิทึม

1. ฟังก์ชัน $\ln z$ จะมีค่าอนุพันธ์ ดังนี้คือ ถ้า

$$z = \ln w \quad \text{แล้ว} \quad \frac{dz}{dw} = \frac{d(\ln w)}{dw} = \frac{1}{w}$$

2. $\ln(w_1 w_2) = \ln w_1 + \ln w_2$

3. $\ln\left(\frac{w_1}{w_2}\right) = \ln w_1 - \ln w_2 \quad$ เมื่อ $\quad w_2 > 0$

สำหรับการพิสูจน์คุณสมบัติของลอการิทึม จะสามารถพิสูจน์ได้ง่ายๆ โดยใช้นิยาม ดังนั้นจะไม่แสดงในที่นี้

ตัวอย่าง 5.6.1 จงหาค่าของ $\ln(1-i)$
หาค่า $|1-i|$ และ $\arg(1-i)$ จะได้

$$|1-i| = \sqrt{2} \quad \text{และ} \quad \arg(1-i) = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$
ดังนั้นรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ $1-i$ คือ

$$\begin{aligned} 1-i &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \\ &= \sqrt{2}e^{i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)} \end{aligned}$$

นั่นก็คือ

$$\ln(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

◇◇◇

5.7 ฟังก์ชันยกกำลังทั่วๆ ไป (Complex exponents)

ฟังก์ชันยกกำลังทั่วๆไปจะอยู่ในรูปแบบ $f(z) = z^{\alpha}$ เมื่อ α และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนจากที่เราทราบว่า $z = e^{\ln z}$ ดังนั้นจะได้นิยามของ z^{α} ดังนี้คือ

นิยาม 5.7.1 ให้ z และ α เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว **ฟังก์ชันยกกำลังทั่วๆ ไป** z^{α} จะกำหนดโดย

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z} = e^{\alpha[\ln|z| + i\arg(z)]}$$

ตัวอย่าง 5.7.2 จงหาค่าของ

1. i^{i} *2.* $i^{\frac{1}{2}}$ *3.* $(-i)^{i}$

1.

$$\begin{aligned} i^{i} &= e^{i\ln i} \\ &= e^{i[\ln 1 + i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)]} \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \\ &= e^{-(\frac{\pi}{2}+2k\pi)} \\ &= e^{-\frac{\pi}{2}+2k\pi} \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

2.

$$\begin{aligned} i^{\frac{1}{2}} &= e^{\frac{1}{2}\ln i} \\ &= e^{\frac{1}{2}[\ln|i| + i\arg i]} \\ &= e^{\frac{1}{2}[\frac{\pi}{2}+2k\pi]i} \\ &= e^{\frac{\pi i}{4}+k\pi i} \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

3.

$$
\begin{aligned}
(-i)^i &= e^{i\ln(-i)} \\
&= e^{i[\ln 1+\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)i]} \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \\
&= e^{i\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right]i} \\
&= e^{\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}
\end{aligned}
$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

◊◊◊

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า

ก. $e^{\overline{z}} = \overline{e^{z}}$

ข. $e^{nz} = (e^{z})^{n}$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็ม

ข. $e^{(2\pm 3\pi i)} = -e^{2}$

ค. $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$

ค. $e^{(z+\pi i)} = -e^{z}$

ง. $e^{(-nz)} = \frac{1}{(e^{z})^{n}}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, \ldots$

2. จงพิสูจน์ว่า 2π คือคาบของฟังก์ชัน $f(z) = e^{iz}$

3. จงหาค่าของ z ซึ่ง

ก. $e^{3z} = 1$

ข. $e^{4z} = i$

ข. $e^{z} = -2$

ค. $e^{z} = 1 + i\sqrt{3}$

ค. $e^{2z-1} = 1$

4. ถ้า $\cos z = 2$ จงหาค่าของ

ก. $\cos 2z$

ข. $\cos 3z$

5. จงพิสูจน์ว่าผลเฉลยทั้งหมดของสมการ

ก. $\sin z = a$

ข. $\cos z = a$

เมื่อ $-1 \leq a \leq 1$ เป็นจำนวนจริง

6. จงพิสูจน์ว่า

ก. $\sinh^{2}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh z - 1)$

ข. $\cosh^{2}\left(\frac{z}{2}\right) = \frac{1}{2}(\cosh z + 1)$

7. จงหาค่าของ

ก. $\ln i$

ข. $\ln(1+i)$

ข. $(1+i)^{1+i}$

8. จงหาค่าของ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ซึ่ง

ก. $\sinh 2z = u + iv$ ข. $z\cosh z = u + iv$

9. จงพิสูจน์ว่า

ก. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$

ข. $\sin 2z = 2\sin z \cos z$ ข. $\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$

10. จงหาค่าของ

ก. $\sinh\left(\frac{\pi i}{3}\right)$ ข. $\cosh\left[(2k+1)\frac{\pi i}{2}\right],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

ข. $\coth \frac{3\pi i}{4}$

11. จงหาค่าของ

ก. 5^i ข. $(\pi i)^e$

ข. $(2^i)^i$ ค. $\ln(1+i)^{\pi i}$

12. จงแสดงว่า $\ln\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \left(\frac{4\pi}{3} + 2k\pi\right)i$ เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

13. จงหาค่าของ

ก. $\ln(-4)$ ข. $\ln(3i)$

ข. $\ln(\sqrt{3} - i)$

14. จงหาส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของพจน์ต่อไปนี้

ก. x^x เมื่อ x เป็นจำนวนจริง และ $x \neq 0$

ข. $(iy)^{iy}$ เมื่อ y เป็นจำนวนจริง และ $y \neq 0$

ข. z^z เมื่อ $z \neq 0$

15. จงหาค่าของ z^z เมื่อ z มีค่าดังต่อไปนี้คือ

ก. $\frac{\pi i}{4}$ ข. $-\frac{\pi i}{4}$

ฆ. $1+i$ ค. $3+\pi i$

16. จงหาส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของพจน์ต่อไปนี้

ก. e^{2z} ข. e^{-4z}

ฆ. e^{z^2} ค. e^{z^3}

17. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้และแสดงผลเฉลยของสมการเหล่านี้ลงในระนาบจำนวนเชิงซ้อน

ก. $e^z = 1$ ข. $e^z = -2$

18. จงแสดงว่า $\cos z, \sin z, \cosh z$ และ $\sinh z$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์สำหรับทุกๆ ค่าของ z

19. จงหาค่าของ

ก. $|\cos z|$ ข. $|\tanh z|$

ฆ. $\Re(\cot z)$

20. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

ก. $\sinh z = 0$ ข. $\sin z = 1000$

ฆ. $\sin z = i \sinh 1$

21. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

ก. $\cos z = 5$ ข. $\cosh z = 0$

ฆ. $\cosh z = 0.5$

22. จงหาค่าของ

ก. $\ln 2$ ข. $\ln e$

ฆ. $\ln(-ie)$ ค. $\ln(e^{-2})$

ต. $\ln 1$ ฆ. $\ln i$

ง. $\ln(ie)$ จ. $\ln(e^i)$

23. จงหาผลเฉลยของสมการต่อไปนี้

ก. $\ln z = \frac{\pi i}{2}$

ข. $\ln z = (1+i)\pi$

ข. $\ln z = -\frac{\pi i}{2}$

ค. $\ln z = 1 + \pi i$

24. จงหาค่ามุขสำคัญ (Principal value) ของ

ก. $(1+i)^i$

ข. $(1-i)^{1+i}$

ข. 2^{2i}

ค. 2^{3+2i}

ค. $(2i)^{\frac{1}{2}}$

ง. $(1+i)^{1-i}$

ง. 3^{3-i}

จ. $(2-i)^{1+i}$