# บทที่ 4

# ฟังก์ชันตัวแปรเชิงซ้อน (Functions of one complex variable)

## 4.1 คำนำ

ในบทนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน ความหมายของฟังก์ชันต่อเนื่อง (continuous function) ฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ ได้ (differentiable function) ฟังก์ชันที่หาค่าอนุพันธ์ย่อยได้ (partial differentiable function) และความหมายของฟังก์ชันวิเคราะห์ (analytic function) ของฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน

## 4.2 ฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน (Functions of one complex variable)

**นิยาม 4.2.1** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันหรือเป็นการส่ง *(mapping)* จากเซต $A$ ไปยังเซต $B$ จะเขียนเป็นสัญลักษณ์ว่า $f : A \to B$, $f$ ก็คือกฎซึ่งทำให้แต่ละค่าของ $z \in A$ ไปได้ค่า $w$ หนึ่งค่า ซึ่งค่า $w \in B$ สำหรับเซต $A$ นี้จะเรียกว่าเป็น **โดเมน** *(domain)* หรือ**บุพภาพ** *(pre-image)* ของ $f$ ส่วนเซต $B$ จะเรียกว่าเป็น**เซตที่ยอมรับ** *(receiving set )* ส่วนเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกซึ่งถูกส่งโดย $f$ จะเขียนสัญลักษณ์ของเซตนี้ว่า $f(A)$ จะสังเกตเห็นได้ว่า $f(A) \subset B$ เรียกเซต $f(A)$ นี้ว่าเป็น**พิสัย** *(range)* ของ $f$

ฟังก์ชัน $f$ จะเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันบน** (onto) เซต $B$ ก็ต่อเมื่อพิสัยของ $f$ เป็นเซตเดียวกันกับ

เซตที่ยอมรับ นั่นก็คือ

$$f(A) = B$$

ฟังก์ชัน $f$ จะเรียกว่าเป็น**ฟังก์ชันใน** (into) $B$ ก็ต่อเมื่อพิสัยของ $f$ เป็นเซตย่อยแท้ของเซตที่ยอมรับ นั่นก็คือ

$$f(A) \subsetneq B$$

ฟังก์ชัน $f$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one) ถ้า $f(z_1) = f(z_2)$ แล้ว $z_1 = z_2$ ฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน อาจจะเป็นฟังก์ชันค่าจริง (real valued function) หรือ ฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน (complex valued function) ก็ได้ อย่างเช่น

$$f(z) = 0, \ \forall z$$

จะเป็นฟังก์ชันค่าจริง ส่วน

$$f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

จะเป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน แต่จากที่เราทราบว่า จำนวนจริงเป็นเซตย่อยของจำนวนเชิงซ้อน ดังนั้นฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน ก็จะกล่าวได้ว่าเป็นฟังก์ชันค่าเชิงซ้อน และต่อไปเราจะเรียกสั้นๆว่า เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ดังนั้นรูปแบบทั่วไปของฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนเชิงซ้อน จะเป็นดังนี้คือ

$$f(z) = u + iv$$

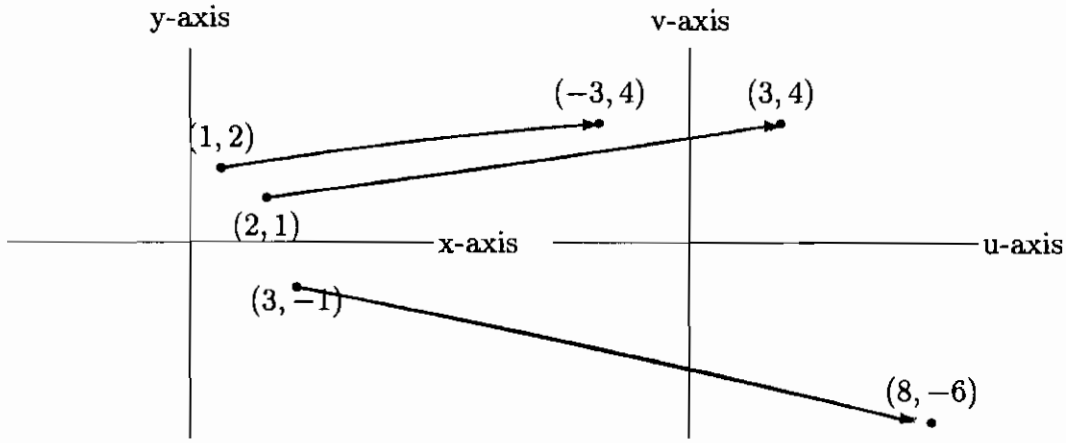
ซึ่งจะเรียก $u$ ว่าเป็นส่วนจริง (real part) ของฟังก์ชัน $f(z)$
และ $v$ ว่าเป็นส่วนจินตภาพ (imaginary part) ของฟังก์ชัน $f(z)$

$u, v$ นี้เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีตัวแปรเป็นจำนวนจริง $x, y$ ตัวแปร $x, y$ นี้ได้มาจากรูปแบบของจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ดังนั้นจึงสามารถจะเขียนพจน์ทั่วๆ ไปของ $u, v$ ในรูปตัวแปรจำนวนจริงได้ว่า

$$u = u(x,y) \ \text{ และ } \ v = v(x,y)$$

**ตัวอย่าง 4.2.2** จงหาส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชัน $f(z) = z^2$
พิจารณา

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 = (x+iy)^2 \\ &= x^2 - y^2 + i(2xy) \end{aligned}$$




รูปที่ 4.1: กราฟของฟังก์ชันเชิงซ้อนในตัวอย่าง (4.2.3)

เมื่อเปรียบเทียบกับ $f(z) = u + iv$ จะได้

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \Re(f(z)) = x^2 - y^2 \\ v(x,y) &= \Im(f(z)) = 2xy \end{aligned}$$

◊◊◊

ในการเขียนกราฟของฟังก์ชันจำนวนเชิงซ้อน เราจะต้องใช้ระนาบ 2 ระนาบ ดังนี้คือถ้าให้ $z = x + iy$ อยู่ในระนาบ $xy$ แล้ว $f(z) = u + iv$ จะอยู่ในระนาบ $uv$ อย่างเช่นในตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.2.3** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชัน ซึ่งกำหนดโดย

$z = 2 + i$ ส่งไปยัง $f(z) = f(2+i) = 3 + 4i$
$z = 1 + 2i$ ส่งไปยัง $f(z) = f(1+2i) = -3 + 4i$
$z = 3 - i$ ส่งไปยัง $f(z) = f(3-i) = 8 - 6i$

จะเขียนกราฟได้ดังรูปที่ *4.1*

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.2.4** ให้ $f(z) = z^2 + 3z$ แล้ว

*1.* จงหา $\Re(f(z))$ และ $\Im(f(z))$

*2.* จงหาค่าของ $f(1+3i)$

*1.* แสดง $f(z)$ ในเทอมของ $x$ และ $y$ จะได้

$$\begin{aligned} f(z) &= (x+iy)^2 + 3(x+iy) \\ &= (x^2 - y^2 + 3x) + i(2xy + 3y) \\ \therefore\ \Re(f(z)) &= x^2 - y^2 + 3x \qquad (4.1) \\ \Im(f(z)) &= 2xy + 3y \qquad (4.2) \end{aligned}$$

*2.* ในการหาค่าของ $f(1+3i)$ เราจะทำได้ *2* วิธี ดังนี้คือ
**วิธีที่ 1** หาค่าโดยตรง จะได้

$$\begin{aligned} f(1+3i) &= (1+3i)^2 + 3(1+3i) \\ &= -5 + 15i \end{aligned}$$

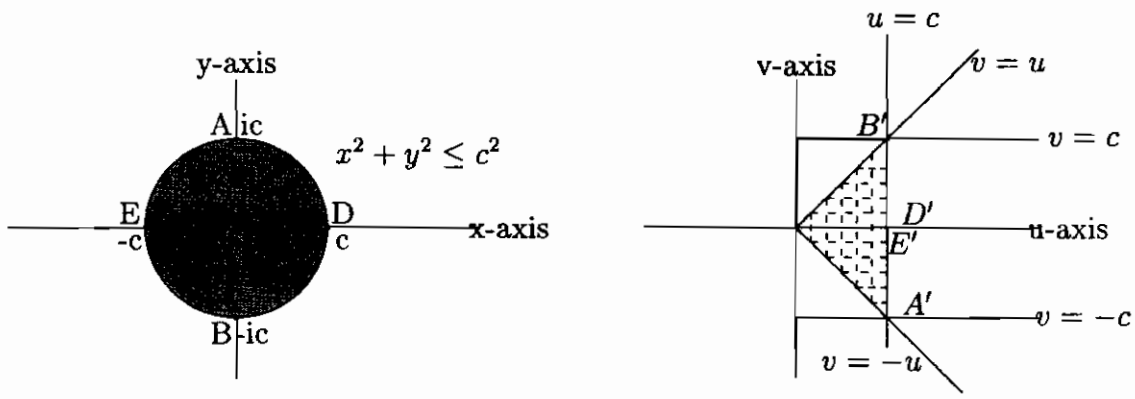
นั่นก็คือ

$$\Re(f(1+3i)) = -5 \quad \text{และ} \quad \Im(f(1+3i)) = 15$$

**วิธีที่ 2** แทนค่า $x = 1, y = 3$ แทนค่าลงใน $\Re(f(z))$ และ $\Im(f(z))$ ใน *(4.1)* และ *(4.2)* ตามลำดับ จะได้

$$\begin{aligned} \Re(f(z)) &= \Re f(1+3i) \\ &= 1 - 3^2 + 3 = -5 \\ \Im(f(z)) &= \Im(f(1+3i)) \\ &= 2(1)(3) + 3(3) = 15 \\ \therefore\ f(1+3i) &= \Re(f(1+3i)) + i\Im(f(1+3i)) \\ &= -5 + 15i \end{aligned}$$

◊◊◊




รูปที่ 4.2: เซตที่เป็นโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันในตัวอย่าง (4.2.5)

**ตัวอย่าง 4.2.5** กำหนดให้ $f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$ ให้โดเมนของ $f$ คือค่าของ $x, y$ ซึ่งมีเงื่อนไขว่า $x^2 + y^2 \leq c^2$ เมื่อ $c > 0$ จงหาพิสัยของ $f$

จาก

$$f(z) = \sqrt{x^2 + y^2} - iy$$

เมื่อเปรียบเทียบกับ $f(z) = u + iv$ จะได้

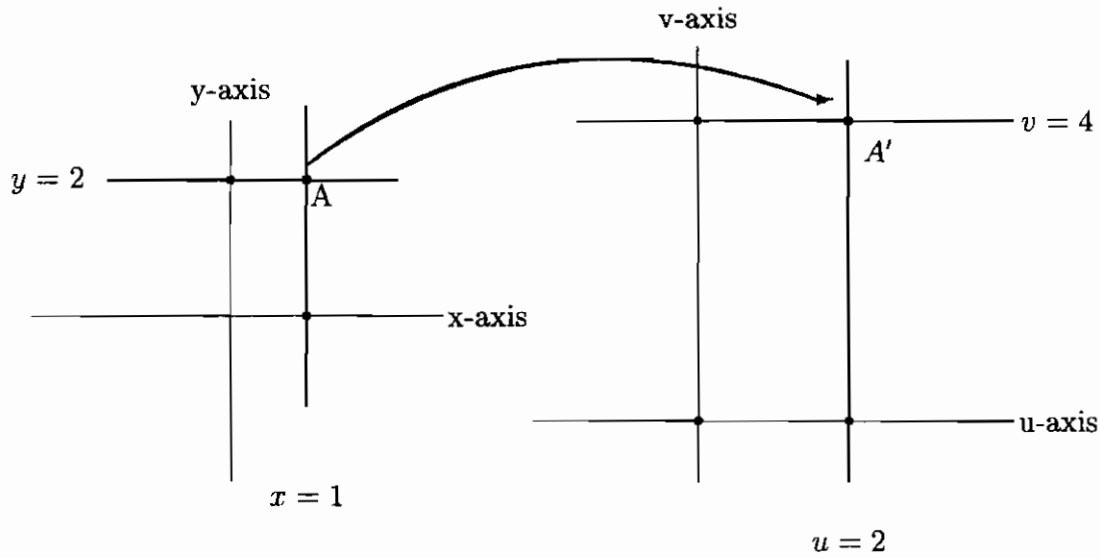
$$u(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{และ} \quad v(x, y) = -y$$

พิจารณาโดเมนส่วนที่ $x^2 + y^2 = c^2$ ซึ่งจากกราฟในรูปที่ *4.2* ก็คือเส้นรอบวงของวงกลมนั่นเอง ส่วนนี้ของค่า $x, y$ จะส่งไปได้ค่า $u, v$ ซึ่งจะได้

$$u(x, y) = c \quad \text{และ} \quad v(x, y) = -y$$

เมื่อ $-c \leq y \leq c$ ดังนั้นโดเมนส่วนที่เป็นค่า $x, y$ ซึ่ง $x^2 + y^2 = c^2$ จะส่งไปที่ระนาบ $uv$ ที่เป็นเส้นตรง ที่เชื่อมจุด $(c, ic)$ และ $(c, -ic)$ โดเมนส่วนที่ $x^2 + y^2 < c^2$ จะได้ค่า $u$ และ $v$ เป็น $u < c$, $-u < v < u$ ดังนั้นโดเมนส่วนที่ $x^2 + y^2 < c^2$ จะส่งไปได้พิสัย ซึ่งอยู่ในระนาบ $uv$ โดยมีค่า $u < c$ และ $-u < v < u$ กราฟของโดเมนและพิสัยจะสดงอยู่ในรูปที่ *4.2*

◊◊◊




รูปที่ 4.3: กราฟของโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันในตัวอย่าง (4.2.6)

**ตัวอย่าง 4.2.6** จงหาโดเมนซึ่งเป็นจุดในระนาบ $xy$ ที่ส่งโดยฟังก์ชัน $f(z) = 2z$ ไปยังจุด ในระนาบ $uv$ โดยมีค่า $u = 2$ และค่า $v = 4$

จาก

$$f(z) = 2z = 2(x + iy) = 2x + 2iy$$

จะได้

$$u(x, y) = 2x \quad \text{และ} \quad v(x, y) = 2y$$

จากที่กำหนดให้ $u = 2$ และ $v = 4$ ดังนั้น จะได้

$$\begin{aligned} 2x &= 2 \\ 2y &= 4 \end{aligned}$$

นั่นก็คือ โดเมนของ $f = \{(x, y) : x = 1 \text{ และ } y = 2\}$

◊◊◊

กราฟของโดเมนและพิสัยของฟังก์ชันในตัวอย่าง (4.2.6) จะแสดงในรูปที่ 4.3

**นิยาม 4.2.7** ถ้า $f(z) = w$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งมี $w$ เพียง *1* ค่าที่สมนัยกับแต่ละค่าของ $z$ จะเรียก $w$ ว่าเป็น **ฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว***(single-valued function)* ของ $z$ แต่ถ้าหากว่ามี $w$ มากกว่า *1* ค่าที่สมนัยกับแต่ละค่าของ $z$ จะเรียก $w$ ว่า **เป็นฟังก์ชันหลายค่า** *(multiple-valued function)* ของ $z$

**ตัวอย่าง 4.2.8** ฟังก์ชัน

1. $f(z) = z^2 = w$ จะเห็นได้ว่าแต่ละค่าของ $z$ จะมี $w$ ได้เพียง *1* ค่าเท่านั้นเช่น ถ้า $z = 1$ จะได้ $f(1) = 1^2 = 1$ ดังนั้น $f(z) = z^2 = w$ เป็นฟังก์ชันค่าเชิงเดี่ยว

2. $f(z) = z^{\frac{1}{2}} = w$ จะเห็นได้ว่า $z$ แต่ละค่าจะมี $w$ ได้ *2* ค่า ตัวอย่างเช่นถ้า $z = 4$ จะได้ $f(4) = 2, -2$ ดังนั้น $w = f(z) = z^{\frac{1}{2}}$ เป็นฟังก์ชันหลายค่า

◊◊◊

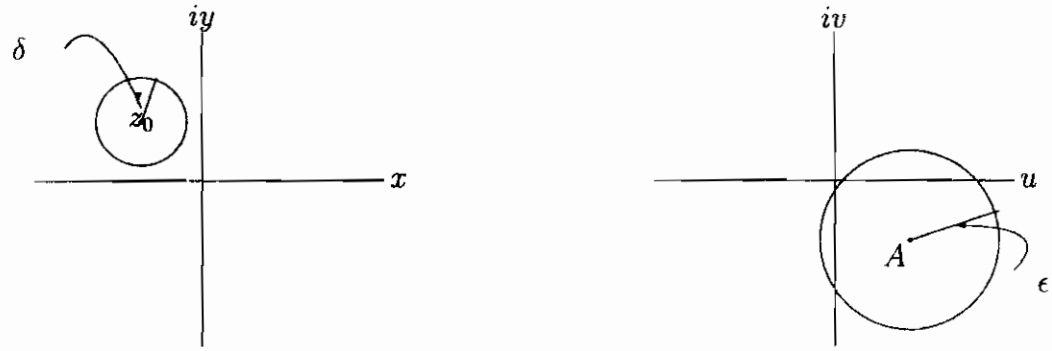
**นิยาม 4.2.9** ถ้า $w = f(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ถ้าพิจารณา $z$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีตัวแปรเป็น $w$ จะได้ $z = g(w) = f^{-1}$ ฟังก์ชัน $g = f^{-1}$ นี้จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันผกผัน** *(inverse function)* ของฟังก์ชัน $f$

## 4.3 ลิมิตของฟังก์ชันเชิงซ้อน

**นิยาม 4.3.1** ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ จะกล่าวว่า **มีลิมิต** $A$ ขณะที่ $z$ เข้าใกล้ $z_0$ ก็ต่อเมื่อ ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจำนวนจริง $\delta > 0$ ซึ่งทำให้ $|f(z) - A| < \epsilon$ เมื่อ $0 < |z - z_0| < \delta$

สำหรับสัญลักษณ์ของฟังก์ชัน $f(z)$ มีลิมิต $A$ ขณะที่ $z$ เข้าใกล้ $z_0$ คือ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A$$




รูปที่ 4.4: ความหมายของ $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$

ในทางเรขาคณิตหมายความว่าในระนาบ $uv$ เมื่อมีย่านจุด $\epsilon$ ของจุด $A$ จะต้องมีย่านจุด $\delta$ ของจุด $z_0$ ในระนาบ $xy$ ซึ่งเมื่อจุด $z$ อยู่ในย่านจุด $\delta$ ของจุด $z_0$ แล้ว $f(z)$ จะต้องอยู่ในย่านจุด $\epsilon$ ของจุด $A$ ดังในรูปที่ 4.4

**ตัวอย่าง 4.3.2** จงพิสูจน์ว่าฟังก์ชัน $f(z) = \frac{iz}{2}$ มีลิมิตเท่ากับ $\frac{i}{2}$ เมื่อ $z$ มีค่าเข้าใกล้ 1
กำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ พิจารณา

$$\begin{aligned}\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| &= \left|\frac{i(z-1)}{2}\right| \\ &= \frac{|i||z-1|}{2} \\ &= \frac{|z-1|}{2}\end{aligned}$$

ถ้าให้ $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| = \frac{|z-1|}{2} < \epsilon$ จะได้ $|z-1| < 2\epsilon$ นั่นก็คือ ถ้ามี $\epsilon > 0$ แล้วมี $\delta = 2\epsilon$ ซึ่งเมื่อ $|z-1| < \delta$ แล้ว $\left|\frac{iz}{2} - \frac{i}{2}\right| < \epsilon$ ดังนั้น

$$\lim_{z\to 1} \frac{iz}{2} = \frac{i}{2}$$

◇◇◇

**ตัวอย่าง 4.3.3** จงพิสูจน์ว่า $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ ไม่มีค่า
ให้ $z \to 0$ ตามแกน $x$ ดังนั้นค่า $y = 0$ จะได้ $z = x + iy = x$ และ $\overline{z} = x - iy = x$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = 1$$

ให้ $z \to 0$ ตามแกน $y$ ดังนั้นค่า $x = 0$ จะได้ $z = x + iy = iy$ และ $\overline{z} = x - iy = -iy$

$$\therefore \lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z} = \lim_{y\to 0}\frac{iy}{-iy} = -1$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าค่าลิมิตไม่เท่ากัน นั่นก็คือ $\lim_{z\to 0}\frac{\overline{z}}{z}$ ไม่มีค่า

◊◊◊

## 4.4 ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต (Theorems on limits )

**ทฤษฎี 4.4.1** ให้

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y),\ \ z_0 = x_0 + iy_0 \text{ และ } w_0 = u_0 + iv_0$$

แล้ว

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ และ } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

**พิสูจน์**($\Rightarrow$) กำหนดให้ $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะมี $\delta > 0$ เป็นเลขจำนวนจริงซึ่งทำให้

$$|f(z) - w_0| < \epsilon \text{ เมื่อ } 0 < |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $|f(z) - w_0|$ จะได้

$$\begin{aligned} |f(z) - w_0| &= |u(x,y) + iv(x,y) - (u_0 + iv_0)| \\ &= |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \epsilon \end{aligned}$$

เมื่อ $0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$ แต่เรามี

$$|u(x,y) - u_0| \leq < |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \epsilon$$

และ

$$|v(x,y) - v_0| \leq |u(x,y) - u_0 + i(v(x,y) - v_0)| < \epsilon$$

ดังนั้น

$$|u(x,y) - u_0| < \epsilon \text{ และ } |v(x,y) - v_0| < \epsilon$$

เมื่อ $\quad 0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)| < \delta$
นั่นก็คือ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0 \text{ และ } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

($\Leftarrow$) กำหนดให้

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$$

และ

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$$

ดังนั้นถ้าให้ $\epsilon > 0$, เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ เป็นจำนวนจริงซึ่งทำให้

$$|u(x,y) - u_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

เมื่อ

$$0 < |(x - x_0) + i(y - y_0)|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_1^2$$

และ ในทำนองเดียวกันจะได้ว่า

$$|v(x,y) - v_0| < \frac{\epsilon}{2}$$

เมื่อ

$$0 < (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta_2^2$$

ให้ $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ และจากอสมการของรูปสามเหลี่ยมจะได้

$$\begin{aligned} |(u(x,y) - u_0) + i(v(x,y) - v_0)| &\leq |u(x,y) - u_0| + |v(x,y) - v_0| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

เมื่อ

$$0 < |(x+iy) - (x_0 + iy_0)| < \min\{\delta_1, \delta_2\} = \delta$$

นั่นก็คือ $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$

จากการพิสูจน์ข้างบนนี้ จึงสรุปได้ว่า

$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ ก็ต่อเมื่อ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$ และ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v_0$

◊◊◊

**ทฤษฎี 4.4.2** กำหนดให้ $\lim_{z\to z_0} f(z) = A$ และ $\lim_{z\to z_0} g(z) = B$ แล้ว

1. $\lim_{z\to z_0}[f(z) + g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) + \lim_{z\to z_0} g(z) = A + B$
2. $\lim_{z\to z_0}[f(z) - g(z)] = \lim_{z\to z_0} f(z) - \lim_{z\to z_0} g(z) = A - B$
3. $\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = [\lim_{z\to z_0} f(z)][\lim_{z\to z_0} g(z)] = AB$
4. $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\lim_{z\to z_0} f(z)}{\lim_{z\to z_0} g(z)} = \frac{A}{B}$ ถ้า $B \neq 0$

ในการพิสูจน์นี้ก็คล้ายๆ กับการพิสูจน์ในเรื่องลิมิตของฟังก์ชันจำนวนจริง ดังนั้นจึงจะไม่นำมาพิสูจน์ในที่นี้

**ตัวอย่าง 4.4.3** จงหาค่าของ $\lim_{z\to(1+i)}(z^2 - 5z + 10)$

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to(1+i)}(z^2 - 5z + 10) &= \lim_{z\to(1+i)} z^2 + \lim_{z\to(1+i)}(-5z) + \lim_{z\to(1+i)} 10 \\
&= \left[\lim_{z\to(1+i)} z\right]\left[\lim_{z\to(1+i)} z\right] + \left[\lim_{z\to(1+i)}(-5)\right]\left[\lim_{z\to(1+i)} z\right] \\
&\quad + \left[\lim_{z\to(1+i)} 10\right] \\
&= (1+i)(1+i) - 5(1+i) + 10 \\
&= 5 - 3i
\end{aligned}$$

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.4.4** จงหาค่าของ

$$\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16}$$

ในกรณีนี้จะใช้ทฤษฎีของลิมิตโดยตรงไม่ได้ เพราะลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนด *(indeterminate form)* คือ $\frac{0}{0}$ จึงต้องใช้กฎของโลปิตัส *(l'Hospital's rule) 2* ครั้ง ซึ่งจะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{z^3+8}{z^4+4z^2+16} &= \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{3z^2}{4z^3+8z} \\
&= \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{6z}{12z^2+8} \\
&= \lim_{z\to 2e^{\frac{\pi i}{3}}} \frac{3z}{6z^2+4} \\
&= \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i
\end{aligned}$$

◇◇◇

## 4.5 ฟังก์ชันต่อเนื่อง (Continuous functions)

**นิยาม 4.5.1** ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ซึ่งนิยามในโดเมน $D$ จะกล่าวว่าเป็น**ฟังก์ชันต่อเนื่อง** *(continuous function)* ที่จุด $z_0 \in D$ ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้ว จะมี $\delta > 0$ เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \quad \text{เมื่อ} \quad |z - z_0| < \delta$$

หรือจะกล่าวอีกอย่างได้ว่า $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0 \in D$ ถ้าสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้คือ

1. $f(z_0)$ หาค่าได้
2. $\lim_{z\to z_0} f(z)$ หาค่าได้
3. $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$

ถ้า $f(z)$ ต่อเนื่องทุกๆ จุดในโดเมน $D$ จะกล่าวได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $D$

**ทฤษฎี 4.5.2** ถ้า $f(z)$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z = z_0$ แล้วฟังก์ชัน

$$f(z) + g(z),\ f(z) - g(z),\ f(z)g(z) \text{ และ } \frac{f(z)}{g(z)} \text{ เมื่อ } g(z_0) \neq 0$$

จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ ด้วย

ในการพิสูจน์ทฤษฎี (4.5.2) ใช้ผลของทฤษฎี (4.4.2) ก็จะพิสูจน์ได้ตามต้องการ

**ทฤษฎี 4.5.3** ถ้า $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ และ $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(z_0)$ แล้ว ฟังก์ชันประกอบ $g(f(z))$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ ด้วย

**พิสูจน์** จาก $g$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $f(z_0)$
ดังนั้นถ้าให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon \text{ เมื่อ } |f(z) - f(z_0)| < \delta$$

จาก $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ ดังนั้นจากที่ $\delta > 0$ เป็นจำนวนจริงแล้ว จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(z) - f(z_0)| < \delta \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta_1$$

ดังนั้น จะได้ว่า ถ้าให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆแล้ว จะมี $\delta_1 > 0$ ซึ่งทำให้

$$|g(f(z)) - g(f(z_0))| < \epsilon \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta_1$$

นั่นก็คือ $g(f(z))$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.5.4** กำหนดให้

$$f(z) = \begin{cases} z^2, & z \neq 2 \\ 5, & z = 2 \end{cases}$$

$f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z = 2$ หรือไม่ ?
หาค่าของลิมิตจะได้ว่า

$$\lim_{z \to 2} f(z) = 4 \neq f(2)$$

$\therefore$ $f(z)$ ในที่นี้ไม่ต่อเนื่องที่จุด $z = 2$

◇◇◇

**ตัวอย่าง 4.5.5** จงหาค่าของ $z$ ซึ่งทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

*1.* $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$ *2.* $f(z) = \cos z$

*1.* $f(z) = \frac{z}{z^2+1} = \frac{z}{(z-i)(z+i)}$
จะเห็นได้ว่า $(z-i)(z+i) = 0$ เมื่อ $z = \pm i$
ดังนั้น $f(z)$ ในที่นี้จะต่อเนื่องทุกๆ จุด ยกเว้นจุดเมื่อ $z = \pm i$

*2.* $f(z) = \cos z = \frac{1}{\sin z}$
$\sin z = 0$ เมื่อ $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$
ดังนั้น $f(z)$ ในที่นี้จะต่อเนื่องทุกๆ จุด ยกเว้นจุดเมื่อ $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$

◇◇◇

**ทฤษฎี 4.5.6** ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$ ก็ต่อเมื่อ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ต่อเนื่องที่จุด $(x_0, y_0)$

**พิสูจน์** ($\Rightarrow$) กำหนดให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z = z_0$
ดังนั้นถ้าให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $|f(z) - f(z_0)|$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |u(x,y) + iv(x,y) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)| \\ &= |[u(x,y) - u(x_0,y_0)] + i\,[v(x,y) - v(x_0,y_0)]| < \epsilon \end{aligned}$$

แต่เรามี

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta$$

และ

$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| \leq |f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta$$

$\therefore$ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$

($\Leftarrow$) กำหนดให้ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $(x_0,y_0)$

ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|u(x,y) - u(x_0,y_0)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ เมื่อ } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |z - z_0| < \delta$$

และ

$$|v(x,y) - v(x_0,y_0)| < \frac{\epsilon}{2} \text{ เมื่อ } \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = |z - z_0| < \delta$$

พิจารณา $|f(z) - f(z_0)|$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= |[u(x,y) - u(x_0,y_0)] + i\,[v(x,y) - v(x_0,y_0)]| \\ &\leq |u(x,y) - u(x_0,y_0)| + |v(x,y) - v(x_0,y_0)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

เมื่อ $|z - z_0| < \delta$ $\quad\therefore$ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z = z_0$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$ ก็ต่อเมื่อ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0 = x_0 + iy_0$

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.5.7** ให้

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

ถ้าลิมิตมีค่าแล้ว

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{x\to 0} f(x,mx)$$

ค่าของ

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

แต่

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

จะเห็นได้ว่าลิมิตของฟังก์ชันนี้มีหลายค่าขึ้นอยู่กับค่า $m$
ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ ไม่มีค่า

◇◇◇

**ตัวอย่าง 4.5.8** กำหนดให้

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x+y^2)^3}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

จงหาค่าของ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
สมมติว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ มีค่า
พิจารณาเมื่อ $y = mx$ เพื่อที่จะหาค่าของ $\lim_{x\to 0} f(x, mx)$

$$\begin{aligned} f(x,mx) &= \frac{m^2x^4}{(x+m^2x^2)^3} \\ \therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{x\to 0} f(x,mx) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^4}{(x+m^2x^2)^3} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{m^2x}{(1+m^2x)^3} = 0 \end{aligned}$$

พิจารณาเมื่อ $x = y^2$ เพื่อที่จะหาค่าของ $\lim_{y\to 0} f(y^2, y)$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{y\to 0} f(y^2,y) \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^4y^2}{(y^2+y^2)^3} \\ &= \lim_{y\to 0} \frac{y^6}{8y^6} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

จะเห็นได้ว่าลิมิตมีค่าแตกต่างกัน ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \text{ ไม่มีค่า}$$

◇◇◇

**ตัวอย่าง 4.5.9** กำหนดให้

$$f(x,y) = \frac{x^3 - 2y^3}{x^2 + y^2}, \quad (x,y) \neq (0,0)$$

จงแสดงว่า $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ ในการที่จะแสดงว่าลิมิตมีค่าเราไม่สามารถที่จะใช้วิธีที่ใช้ในตัวอย่าง *(4.5.8)* ได้ในที่นี้เราจะแสดงโดยใช้นิยามของลิมิต ซึ่งจะแสดงได้ *2* วิธีดังนี้คือ

**วิธีที่ 1** พิจารณา $|x^3 - 2y^3|$

$$\begin{aligned}
|x^3 - 2y^3| &= |x^3 + (-2y^3)| \\
&\leq |x^3| + |-2y^3| \text{ (จากอสมการของรูปสามเหลี่ยม)} \\
&= |x^3| + 2|y^3| \\
&= |x|x^2 + 2|y|y^2 \\
&= \sqrt{x^2}x^2 + 2\sqrt{y^2}y^2 \\
&\leq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)x^2 + 2\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)y^2 \\
&= \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(x^2+2y^2\right) \\
&< \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(2x^2+2y^2\right) \\
&= 2\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}} \\
&= 2|x^2+y^2|\sqrt{x^2+y^2} \\
\therefore \quad \frac{|x^3-2y^3|}{|x^2+y^2|} &< 2\sqrt{x^2+y^2} < \epsilon
\end{aligned}$$

เมื่อ $\sqrt{x^2+y^2} < \frac{\epsilon}{2} = \delta$ นั่นก็คือ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

**วิธีที่ 2** เปลี่ยนให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้ว โดยกำหนดให้ $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

$$\therefore \quad x^2 + y^2 = r^2, \ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

ต้องการแสดงว่า $|f(r,\theta)| < \epsilon$ เมื่อ $r < \delta$

$$|f(x,y)| = \left|\frac{x^3 - 2y^3}{x^2+y^2}\right|$$

$$\begin{aligned}\therefore\ |f(r,\theta)| &= \left|\frac{r^3\cos^3\theta - 2r^3\sin^3\theta}{r^2}\right| \\ &= r|\cos^3\theta - 2\sin^3\theta| \\ &\leq 3r \text{ เพราะ } |\cos\theta| \leq 1, |\sin\theta| < 1\end{aligned}$$

ดังนั้นถ้าเลือก $\delta = \frac{\epsilon}{3}$ จะได้ว่า เมื่อ $r < \delta = \frac{\epsilon}{3}$ แล้ว $|f(r,\theta)| < 3\left(\frac{\epsilon}{3}\right) = \epsilon$ นั่นก็คือ

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

◊◊◊

**นิยาม 4.5.10** ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ซึ่งนิยามในโดเมน $D$ จะกล่าวว่า $f(z)$ **เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ** *(uniformly continuous function)* บน $D$ ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่งทำให้

$$|f(z) - f(z^*)| < \epsilon \text{ เมื่อไรก็ตามที่ } z, z^* \in D \text{ และ } |z - z^*| < \delta$$

จากนิยาม (4.5.10) เมื่อเปรียบเทียบกับนิยาม (4.5.1) จะสังเกตเห็นได้ว่า ถ้า $f$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $D$ แล้ว $f$ จะมีความต่อเนื่องบน $D$ ด้วย และในกรณีที่ $f$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอ ค่า $\delta > 0$ นี้จะไม่ขึ้นอยู่กับจุด $z$ ใน $D$ ซึ่งความแตกต่างนี้จะเห็นจากตัวอย่างต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.5.11** จงแสดงว่า $f(z) = z^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบนบริเวณ $|z| < 1$

ให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ และให้ $z, z^*$ เป็นจุดใดๆ ในบริเวณ $|z| < 1$

$$\begin{aligned}\therefore\ |z^2 - z^{*2}| &= |z + z^*|\,|z - z^*| \\ &\leq [|z| + |z^*|]\,|z - z^*| \text{ (จากอสมการของสามเหลี่ยม)} \\ &< 2|z - z^*| \text{ (เพราะ } |z| < 1 \text{ และ } |z^*| < 1\text{)}\end{aligned}$$

ถ้าให้ $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ จะได้ว่า เมื่อ $|z - z^*| < \delta$ แล้ว

$$|z^2 - z^{*2}| < 2|z - z^*| < 2\delta = 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าค่า $\delta$ ขึ้นอยู่กับค่า $\epsilon$ ไม่ขึ้นอยู่กับค่า $z^*$ ดังนั้น $f(z) = z^2$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอบน $|z| < 1$ ◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.5.12** จงแสดงว่า $f(z) = \frac{1}{z}$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในบริเวณ $|z| < 1$
เราจะแสดงโดยการขัดแย้ง คือ
สมมติให้ $f(z) = \frac{1}{z}$ มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในบริเวณ $|z| < 1$
$\therefore$ ถ้าให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมี $\delta > 0$ ซึ่ง $\delta$ จะมีค่าระหว่าง 0 และ 1 ซึ่งทำให้

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon \text{ เมื่อ } |z - z_0| < \delta$$

เมื่อ $z, z_0$ อยู่ในบริเวณ $|z| < 1$
ให้ $z = \delta$ และ $z_0 = \frac{\delta}{1+\epsilon}$ ดังนั้น $z$ และ $z_0$ จะอยู่ในบริเวณ $|z| < 1$ พิจารณา

$$\begin{aligned}
|z - z_0| &= \left|\delta - \frac{\delta}{1+\epsilon}\right| \\
&= \left|\frac{\delta + \epsilon\delta - \delta}{1+\epsilon}\right| \\
&= \left(\frac{\epsilon}{1+\epsilon}\right)\delta < \delta \\
\left|\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}\right| &= \left|\frac{1}{\delta} - \frac{1+\epsilon}{\delta}\right| \\
&= \frac{\epsilon}{\delta} > \epsilon \text{ (เพราะว่า } 0 < \delta < 1)
\end{aligned}$$

$\therefore$ ขัดแย้งกับนิยาม จึงสรุปได้ว่า $f(z) = \frac{1}{z}$ ไม่มีความต่อเนื่องอย่างสม่ำเสมอในบริเวณ $|z| < 1$
◊◊◊

## 4.6 ฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ (Differentiable functions)

**นิยาม 4.6.1** ให้ $f : D \to \mathbb{C}$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งนิยามในโดเมน $D$ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน $f$ **มีค่าอนุพันธ์** ที่ จุด $z_0 \in D$ *(differentiable)* ถ้า

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

มีค่า ถ้าค่านี้เท่ากับ $A$ จะเรียก $A$ ว่าเป็น **ค่าอนุพันธ์** *(derivative )* ของ $f$ ที่จุด $z_0$ และใช้สัญลักษณ์ว่า $f'(z_0)$ หรือ $\frac{df}{dz}(z_0)$

ถ้า $f$ มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z$ จะได้ว่า $f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ ในกรณีที่ $f$ มีค่าอนุพันธ์บน $D$

**ตัวอย่าง 4.6.2** จงแสดงว่า $f(z) = z^2$ สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ทุกๆจุดของ $z \in \mathbb{C}$
พิจารณา $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$ จะได้

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z(2z + \Delta z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} (2z + \Delta z) \\
&= 2z
\end{aligned}$$

ดังนั้นไม่ว่า $z$ จะมีค่าใดๆก็ตาม $f'(z) = 2z$ ซึ่งจะเป็นค่าที่เป็นไปได้สำหรับทุกๆค่าของ $z \in \mathbb{C}$

◇◇◇

### ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ และฟังก์ชันต่อเนื่อง

**ทฤษฎี 4.6.3** ถ้า $f'(z_0)$ มีค่า แล้วฟังก์ชัน $f$ จะต่อเนื่องที่ $z_0$

**พิสูจน์** ให้ $f$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z_0$ ดังนั้นจะมีค่า $A$ ซึ่ง

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = A$$

พิจารณาค่า $f(z) - f(z_0)$ จะได้

$$\begin{aligned}
f(z) - f(z_0) &= \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right](z - z_0) \\
\therefore \lim_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] &= \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right](z - z_0) \\
&= \lim_{z \to z_0}\left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\right] \lim_{z \to z_0}(z - z_0) \\
&= A \cdot 0 = 0 \\
\therefore \lim_{z \to z_0}[f(z) - f(z_0)] &= 0
\end{aligned}$$

นั่นก็คือ

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z_0) = f(z_0)$$

ดังนั้น $f$ ต่อเนื่องที่จุด $z_0$ ด้วย

◊◊◊

ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า "ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่จุด $z$ ด้วย"

แต่บทกลับของประโยคนี้ไม่เป็นความจริง นั่นก็คือ ถ้าฟังก์ชัน $f$ ต่อเนื่องที่จุด $z_0$ แล้ว $f$ อาจจะไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z_0$ ดังเช่นตัวอย่างดังต่อไปนี้

**ตัวอย่าง 4.6.4** ให้ $f(z) = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

ฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่จุด $(x, y) = (0, 0)$ เพราะว่า

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 0} f(z) &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0) \\
\text{แต่} \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0 + \Delta z) - f(0)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z| - 0}{\Delta z} \\
&= 1, -1, i, -i
\end{aligned}$$

ค่าของลิมิตมีได้หลายค่า ขึ้นอยู่กับการหาค่าของลิมิตว่า จะเลือกค่าของ $\Delta z \to 0$ ทางด้านไหน เมื่อเลือกค่าของ $\Delta z \to 0$ ทางแกน $x$ ทางขวามือซึ่งค่า $x$ เป็นบวก จะได้ค่าของลิมิตเป็น *1* ถ้าทางซ้ายมือซึ่งค่า $x$ เป็นลบ จะได้ค่าลิมิตเป็น *-1* เป็นต้น เมื่อลิมิตมีหลายค่า ดังนั้น $f'(0)$ หาค่าไม่ได้

◊◊◊

จากตัวอย่างนี้จะสามารถสรุปได้ว่า ถึงแม้ว่า $f(z)$ จะต่อเนื่องที่จุด $z_0$ แต่อาจจะไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z_0$ นั้นได้

กฎของการหาอนุพันธ์ของจำนวนเชิงซ้อนก็จะเหมือนกับกฎของการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันจำนวนจริง ดังนั้นเราจะกล่าวไว้ในทฤษฎีต่อไปนี้คือ

**ทฤษฎี 4.6.5** ให้ $f(z), g(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งมีค่าอนุพันธ์ และ $c$ เป็นค่าคงที่ แล้ว

1. $\frac{d(c)}{dz} = 0$
2. $\frac{d(z)}{dz} = 1$
3. $\frac{d(cf(z))}{dz} = c\frac{d(f(z))}{dz} = cf'(z)$
4. $\frac{d(z^n)}{dz} = nz^{n-1}$ เมื่อ $n$ เป็นจำนวนเต็มบวก
5. $\frac{d[f(z)+g(z)]}{dz} = \frac{d(f(z))}{dz} + \frac{d(g(z))}{dz} = f'(z) + g'(z)$
6. $\frac{d[f(z)g(z)]}{dz} = f(z)\frac{d(f(z))}{dz} + g(z)\frac{d(f(z))}{dz} = f(z)g'(z) + g(z)f'(z)$
7. $$\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{(g(z))^2}, \text{ เมื่อ } g(z) \neq 0$$
8. ถ้าให้ ฟังก์ชัน $g$ หาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด $z$ และฟังก์ชัน $f$ สามารถหาค่าอนุพันธ์ได้ที่จุด $g(z)$ แล้ว
$$\frac{d[f(g(z))]}{dz} = f'(g(z))g'(z)$$

**ตัวอย่าง 4.6.6** ให้ $f(z) = (z^3+1)^{10}$ จงหา $f'(z)$

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{d}{dz}(z^3+1)^{10} \\ &= 10(z^3+1)^9\frac{d}{dz}(z^3+1) \end{aligned}$$

$$= 10(3z^2)(z^3+1)^9$$
$$= 30z^2(z^3+1)^9$$

◊◊◊

## 4.7 สมการโคชี-รีมานน์ (Cauchy - Riemann equations)

สมการโคชี-รีมานน์ นี้จะมีความสัมพันธ์กับ การมีค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน ดังในทฤษฎี ต่อไปนี้

**ทฤษฎี 4.7.1** ถ้า ฟังก์ชัน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z$ แล้ว อนุพันธ์ย่อยอันดับที่ *1* ของ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ซึ่งเทียบกับตัวแปรจริง $x$ และ $y$จะมีค่า และคล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ที่จุด $z$

**พิสูจน์** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z$ ดังนั้น

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

มีค่าเป็นไปได้

หาค่าลิมิตนี้โดยให้ $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to$ ตามแกน $x$ ดังนั้น $\Delta y = 0,\ \Delta z = \Delta x$

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x, y) + iv(x+\Delta x, y) - u(x,y) - iv(x,y)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right]\end{aligned}$$

ถ้า $f'(z)$ มีค่าที่เป็นไปได้แล้วลิมิตทางขวามือก็จะมีค่าที่เป็นไปได้ด้วย และจะสังเกตเห็นได้ว่าลิมิตทางขวามือก็คือค่าอนุพันธ์ย่อยของ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เมื่อเทียบกับตัวแปร $x$

$$\therefore\ f'(z) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \tag{4.3}$$

ต่อไปจะทำการหาค่าของ $f'(z)$ โดยให้ $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$ ตามแกน $y$ ดังนั้น $\Delta x = 0$ และ $\Delta z = i\Delta y$ จะได้ว่า

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x, y+\Delta y) + iv(x, y+\Delta y) - u(x,y) - iv(x,y)}{i\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \left[ \frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{i\Delta y} + i\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{i\Delta y} \right]$$

จาก $f'(z)$ มีค่าที่เป็นไปได้ ลิมิตทางขวามือก็จะมีค่าที่เป็นไปได้ด้วย และลิมิตทางขวามือก็คือ ค่าอนุพันธ์ย่อยของ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ เมื่อเทียบกับ $y$

$$\begin{aligned} \therefore\ f'(z) &= \frac{1}{i}\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ &= \frac{1}{i}\left[\frac{i}{i}\right]\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \\ \therefore\ f'(z) &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.4}$$

จาก (4.3), (4.4) จะได้

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

เทียบส่วนจริงเท่ากับส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพเท่ากับส่วนจินตภาพจะได้

$$\boxed{\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \text{ และ } \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}}$$

สมการทั้งสองนี้จะเรียกว่า**สมการโคชี-รีมานน์**

◊◊◊

ข้อความแย้งสลับที่ของทฤษฎี (4.7.1) คือ"**ถ้า ฟังก์ชัน** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ **ไม่คล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ที่จุด** $z_0$ **แล้ว ฟังก์ชัน** $f(z)$ **จะไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด** $z_0$" ดังนั้นเราจะใช้สมการโคชี-รีมานน์ เป็นเงื่อนไขที่จะบอกว่าฟังก์ชันเชิงซ้อนจะ ไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุดไหนบ้าง

**ตัวอย่าง 4.7.2** ให้ $f(z) = \bar{z} = x - iy$ จงหาจุด $z$ ที่ $f'(z)$ มีค่า
ในที่นี้ จะได้

$$u(x,y) = x \text{ และ } v(x,y) = -y$$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 1 \text{ และ } \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -1$$

ส่วน

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0 \text{ และ } \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0$$

นั่นก็คือ

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} \neq \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \ \forall (x,y) \in \mathbb{C}$$

$\therefore$ $f(z) = \overline{z}$ ไม่เป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ ทุกๆจุดของ $z \in \mathbb{C}$ ดังนั้น $f(z)$ ไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุดใดเลย

◊◊◊

ตัวอย่าง (4.7.2) นี้จะแสดงให้เห็นว่า ถ้าฟังก์ชัน $f$ ไม่เป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์แล้ว จะสรุปได้ว่า $f$ จะไม่มีค่าอนุพันธ์ด้วย ซึ่งการที่ $f(z) = \overline{z}$ ไม่มีค่าอนุพันธ์จะเห็นได้จากการดูค่าลิมิตต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z+\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[ \frac{\overline{x+iy+\Delta x+i\Delta y} - \overline{x+iy}}{\Delta x + i\Delta y} \right] \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[ \frac{x+\Delta x - i(y+\Delta y) - (x-iy)}{\Delta x + i\Delta y} \right] \\
&= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \left[ \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \right]
\end{aligned}$$

ถ้า $\Delta z \to 0$ ทางแกน $x$ นั่นก็คือ $\Delta y = 0$ จะได้

$$\frac{d\overline{z}}{dz} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

ถ้า $\Delta z \to 0$ ทางแกน $y$ นั่นก็คือ $\Delta x = 0$ จะได้

$$\frac{d\overline{z}}{dz} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta y}{i\Delta y} = -1$$

ดังนั้น $\frac{d\overline{z}}{dz}$ หาค่าไม่ได้

จากที่เราได้ทราบมาแล้วว่า สมการโคชี-รีมานน์ สามารถจะบอกได้ว่า ฟังก์ชันเชิงซ้อนจะไม่มีค่าอนุพันธ์ตรงไหนบ้าง เราจะแสดงในตัวอย่างต่อไปนี้ว่า ถึงแม้ว่าฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ มีคุณสมบัติตามสมการโคชี-รีมานน์ แล้วก็อาจจะไม่มีค่าอนุพันธ์ได้

**ตัวอย่าง 4.7.3** ให้

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^5}{|z|^4}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

หาค่า $f'(0)$ จะได้

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} \\ &= \lim_{z \to 0} \frac{z^4}{|z|^4} \\ &= \lim_{z \to 0} \left( \frac{z}{|z|} \right)^4 \end{aligned}$$

ถ้าให้ $z = x + iy \to 0$ ตามแกน $x$ นั่นก็คือ $y = 0$ ดังนั้น $z = x \to 0$ จะได้

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \left( \frac{z}{|z|} \right)^4 = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x}{|x|} \right)^4 = 1$$

ถ้าให้ $z = x + iy \to 0$ ตามเส้น $y = x$ นั่นก็คือ $z = x + ix \to 0 = 0$ ดังนั้น จะได้

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \left( \frac{z}{|z|} \right)^4 = \lim_{x \to 0} \left( \frac{x + ix}{\sqrt{2}x} \right)^4 = -1$$

ดังนั้น $f'(0)$ ไม่มีค่า

พิจารณาค่าของ $f(z)$ เมื่อ $z = x + i0 = x$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5}{|x|^4}, \text{ เมื่อ } x \neq 0 \\ &= x \end{aligned}$$

$\therefore\ u(x, 0) = x$ และ $v(x, 0) = 0$

ดังนั้นจะได้

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial x} = 1, \ \frac{\partial v(x,0)}{\partial y} = 0 \text{ และ } \frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = 1$$

เมื่อให้ $z = 0 + iy = iy$ จะได้

$$\begin{aligned} f(iy) &= \frac{(iy)^5}{|iy|^4}, \ y \neq 0 \\ &= \frac{iy^5}{y^4} = iy \end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$u(0,y) = 0 \text{ และ } v(0,y) = y$$

นั่นก็คือ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(0,y)}{\partial y} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial v(0,y)}{\partial y} = 1 &\Rightarrow \frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = 1 \\
\frac{\partial u(0,y)}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = 0 \\
\frac{\partial v(0,y)}{\partial x} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial v(0,0)}{\partial y} = 1$$

และ

$$\frac{\partial u(0,0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(0,0)}{\partial x} = 0$$

ซึ่งเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ ที่ $z = 0$ แต่ $f'(0)$ ไม่มีค่า

◊◊◊

## 4.8 ฟังก์ชันวิเคราะห์ (Analytic functions)

จากตัวอย่าง (4.7.3) เราพบว่า ถึงแม้ว่าฟังก์ชันจะเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ ที่จุด $z_0$ แต่ก็ยังไม่เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันมีค่าอนุพันธ์ได้ เราต้องการที่จะหาเงื่อนไขที่เพียงพอที่จะทำให้ฟังก์ชันมีค่าอนุพันธ์ ก่อนอื่นเราจะให้ความหมายของฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ภายในย่านจุด $\epsilon$ ของจุดหนึ่งๆในนิยามต่อไปนี้

**นิยาม 4.8.1** ฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันวิเคราะห์** *(analytic or holomorphic function)* ที่จุด $z_0$ ถ้า $f(z)$ มีค่าอนุพันธ์ทุกๆจุดซึ่งอยู่ในย่านจุด $\epsilon$ บางอันของจุด $z_0$

จากนิยามของฟังก์ชันวิเคราะห์ เราจะได้ว่า ถ้าฟังก์ชัน $f(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ในโดเมน $D$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $D$ ฟังก์ชัน $f(z)$ จะเรียกว่าเป็น **ฟังก์ชันเอ็นไทร์**(entire function) ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่ทุกๆจุดในระนาบจำนวนเชิงซ้อน (complex plane)

**ตัวอย่าง 4.8.2** พิจารณาการเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2$ จะมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$ เท่านั้น แต่ไม่มีค่าอนุพันธ์ที่จุดซึ่งอยู่ในย่านจุด $\epsilon$ ของจุด $z = 0$ ดังนั้น $f(z) = |z|^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุดใดๆเลย

2. $f(z) = x^2y^2$ จะสามารถหาค่าอนุพันธ์ได้เฉพาะจุดซึ่งอยู่บนแกนโคออร์ดิเนตเท่านั้น แต่นอกเหนือจากจุดบนแกนโคออร์ดิเนตจะไม่มีค่าอนุพันธ์ดังนั้น $f(z) = x^2y^2$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ณ จุดใดๆเลย

3. $f(z) = a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+a_{n-2}z^{n-2}+\cdots a_1z+a_0$ เป็นฟังก์ชันพหุนาม *(polynomial function)* จะมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z$ ทุกๆจุด ดังนั้นฟังก์ชันพหุนามจะเป็นเอ็นไทร์ฟังก์ชัน

4. $f(z) = \frac{1}{1-z}$ จะมีค่าอนุพันธ์ทุกๆจุดยกเว้นที่จุด $z = 1$ ดังนั้น $f(z) = \frac{1}{1-z}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ทุกๆจุด $z$ ยกเว้นที่จุด $z = 1$

◊◊◊

**ข้อควรสังเกต** จากความหมายของฟังก์ชันวิเคราะห์จะได้ว่า ถ้า $f(z)$ และ $g(z)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ แล้ว

1. $f(z) + g(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$
2. $f(z) - g(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$
3. $f(z)g(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$
4. $\frac{f(z)}{g(z)}$ เมื่อ $g(z) \neq 0$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$
5. ฟังก์ชันประกอบ $f(g(z))$ ของ $f(z)$ และ $g(z)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$
6. $\frac{P(z)}{Q(z)}$ เมื่อ $P(z), Q(z)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามและ $Q(z) \neq 0$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ด้วย

**ตัวอย่าง 4.8.3** ให้ $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$

*1.* จงหาค่าของ $\frac{d(f(z))}{dz}$

*2.* จงหาว่าจุด $z$ ที่ไหนบ้างที่ $f(z)$ ไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

*1)* หาค่าของ $\frac{d(f(z))}{dz}$ โดยใช้นิยามจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{d(f(z))}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\Delta z}\left[\frac{1+z+\Delta z}{1-z-\Delta z} - \frac{1+z}{1-z}\right] \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \left[\frac{2}{(1-z-\Delta z)(1-z)}\right] \\
&= \frac{2}{(1-z)^2}
\end{aligned}$$

มีค่าที่เป็นไปได้ เมื่อ $z \neq 1$

*2)* จากการหาค่าของอนุพันธ์ของ $f(z)$ ในข้อ *(1)* พบว่าอนุพันธ์ที่มีค่าที่เป็นไปได้ยกเว้นที่จุด $z = 1$ ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า $f(z) = \frac{1+z}{1-z}$ นี้จะไม่เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ที่จุด $z = 1$

◊◊◊

**ทฤษฎี 4.8.4** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อนซึ่งนิยามในโดเมน $D$ ที่มีจุด $z_0$ และให้ $u(x,y), v(x,y)$ มีอนุพันธ์ย่อย $u_x, u_y, v_x, v_y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องใน $D$ และคล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ ที่ $z_0$ แล้ว $f'(z_0)$ จะมีค่า

**พิสูจน์** พิจารณา $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{u(x,y)-u(x_0,y_0)}{z-z_0} + i\frac{v(x,y)-v(x_0,y_0)}{z-z_0} \\
&= \frac{u(x,y)-u(x_0,y)+u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{z-z_0} \\
&\quad + i\frac{v(x,y)-v(x_0,y)+v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{z-z_0} \\
&= \frac{u(x,y)-u(x_0,y)}{z-z_0} + i\frac{v(x,y)-v(x_0,y)}{z-z_0} \\
&\quad + \frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{z-z_0} + i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{z-z_0}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{x-x_0}{z-z_0}\left[\frac{u(x,y)-u(x_0,y)}{x-x_0}+i\frac{v(x,y)-v(x_0,y)}{x-x_0}\right] \\
&\quad +\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[\frac{u(x_0,y)-u(x_0,y_0)}{y-y_0}+i\frac{v(x_0,y)-v(x_0,y_0)}{y-y_0}\right] \\
&= \frac{x-x_0}{z-z_0}\left[u_x(x_0+t_1(x-x_0),y)+iv_x(x_0+t_2(x-x_0),y)\right] \\
&\quad +\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[u_y(x_0,y_0+t_3(y-y_0))+iv_y(x_0,y_0+t_4(y-y_0))\right]
\end{aligned}
$$

เมื่อ $0 < t_k < 1,\ k = 1,2,3,4$ โดยทฤษฎีค่ามัชฌิม (Mean value thorem) และจากที่กำหนดให้อนุพันธ์ย่อยของ $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ มีความต่อเนื่อง ที่จุด $z_0$ เราจะได้ว่า

$$
\frac{f(z)-f(z_0}{z-z_0} = \frac{x-x_0}{z-z_0}\left[u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\epsilon_1\right]+\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[u_y(x_0,y_0)+iv_y(x_0,y_0)+\epsilon_2\right]
$$

เมื่อ $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ ขณะที่ $z \to z_0$ จากที่ อนุพันธ์ย่อยของ $u(x,y), v(x,y)$ คล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ ใช้สมการโคชี-รีมานน์ กับเทอมสุดท้ายของสมการ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} &= \frac{x-x_0}{z-z_0}\left[u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\epsilon_1\right] \\
&\quad +\frac{y-y_0}{z-z_0}\left[-v_x(x_0,y_0)+iu_x(x_0,y_0)+\epsilon_2\right] \\
&= u_x(x_0,y_0)\left[\frac{x-x_0}{z-z_0}+i\frac{y-y_0}{z-z_0}\right]+iv_x(x_0,y_0)\left[\frac{x-x_0}{z-z_0}+i\frac{y-y_0}{z-z_0}\right] \\
&\quad +\frac{\epsilon_1(x-x_0)+\epsilon_2(y-y_0)}{z-z_0} \\
&= u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0)+\frac{\epsilon_1(x-x_0)+\epsilon_2(y-y_0)}{z-z_0} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{\epsilon_1(x-x_0)+\epsilon_2(y-y_0)}{z-z_0}\right| &\le \left|\frac{\epsilon_1(x-x_0)}{z-z_0}\right|+\left|\frac{\epsilon_2(y-y_0)}{z-z_0}\right| \\
&= \epsilon_1\left|\frac{x-x_0}{z-z_0}\right|+\epsilon_2\left|\frac{y-y_0}{z-z_0}\right| \\
&= \epsilon_1+\epsilon_2
\end{aligned}
$$

ซึ่ง $\epsilon_1+\epsilon_2 \to 0$ ขณะที่ $z \to z_0$ ดังนั้น เมื่อหาค่าลิมิต โดยให้ $z \to z_0$ จาก (4.5) จะได้ว่า

$$
f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} = u_x(x_0,y_0)+iv_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0)-iu_y(x_0,y_0)
$$

◇◇◇

จากทฤษฎี (4.8.4) ถ้าเราเพิ่มเติมเงื่อนไขว่า $f(z)$ มีอนุพันธ์ย่อย $u_x, u_y, v_x, v_y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ที่ทุกๆจุดของ $z$ ในโดเมน $D$ แล้ว $f$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$

จากทฤษฎี (4.7.1) และ ทฤษฎี (4.8.4) จะได้ทฤษฎีต่อไปนี้คือ

**ทฤษฎี 4.8.5** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งนิยามในโดเมน $D$ แล้ว $u_x, u_y, v_x, v_y$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง และเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ ที่ทุกๆจุด ในโดเมน $D$ ก็ต่อเมื่อ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$

จากที่ เราได้แสดงแล้วว่า เมื่อ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ มีค่าอนุพันธ์ที่ $z_0$ จะได้ว่า

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

เราอาจจะเขียนอีกรูปแบบหนึ่งว่า

$$f'(z_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = -i\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}$$

ดังนั้นจะใช้สมการข้างบนนี้ ไปช่วยในการหาค่าอนุพันธ์ของ $f(z)$ เมื่อ $f(z)$ มีค่าอนุพันธ์

**ตัวอย่าง 4.8.6** ให้ $f(z) = z^2 = (x+iy)^2$ จงหาค่าอนุพันธ์ของ $f(z)$

$$\begin{aligned} f(z) &= (x^2 - y^2) + i(2xy) \\ f'(z) &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \\ &= 2x + i(2y) = 2(x+iy) \\ &= 2z \end{aligned}$$

◇◇◇

**ทฤษฎี 4.8.7** ถ้า $f'(z) = 0$ สำหรับทุกๆจุดของ $z$ ในโดเมน $D$ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่ในโดเมน $D$

**พิสูจน์** จาก $f'(z) = 0, \ \forall z \in D$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$f'(z) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \ \forall z \in D$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} - i\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$

เปรียบเทียบส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพ จะได้

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 0$$

และ

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0$$

ดังนั้น $u(x,y), v(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่ในโดเมน $D$ ซึ่งจะทำให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ใน $D$

◊◊◊

**บทแทรก 4.8.8** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ ซึ่งมีส่วนจริง $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่

**พิสูจน์** ให้ $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ และ $f$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ดังนั้น

$$u_x(x,y) = u_y(x,y) = 0$$

จาก $f$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยสมการโคชี-รีมานน์ จะได้ว่า

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$$

และ

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y) = 0$$

ดังนั้น

$$f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = 0, \ \forall z \in D$$

จากทฤษฎี (4.8.7) จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันคงที่ใน $D$

◇◇◇

**บทแทรก 4.8.9** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ ซึ่งมีส่วนจินตภาพ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคงที่ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่

**พิสูจน์** ในทำนองเดียวกันกับบทแทรก (4.8.8)

◇◇◇

**บทแทรก 4.8.10** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ ซึ่งมี $|f|$ เป็นฟังก์ชันคงที่ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่

**พิสูจน์** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $|f(z)| = \sqrt{u^2+v^2} = c$ เมื่อ $c$ เป็นค่าคงที่ ดังนั้น

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= c^2 \\ \therefore\ u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

จากสมการโคชี-รีมานน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} - v\frac{\partial u}{\partial y} &= 0 \\ u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

กำจัดค่าของ $\frac{\partial u}{\partial y}$ จะได้

$$(u^2+v^2)\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

ดังนั้นจะได้ว่า $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ เพราะว่าถ้า $\frac{\partial u}{\partial x} \neq 0$ แล้ว $u^2+v^2 = 0$ ซึ่งจะได้ว่า

$$v = \sqrt{-u^2} = iu$$

$v$ จะเป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งขัดแย้ง
ในทำนองเดียวกันนี้ ก็สามารถจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

ดังนั้น $u(x,y), v(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่ และทำให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่ ด้วย

◊◊◊

**บทแทรก 4.8.11** ให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ ซึ่งมี $\arg(z)$ เป็นค่าคงที่ แล้ว $f(z)$ จะเป็นฟังก์ชันคงที่

**พิสูจน์** กำหนดให้ $f = u + iv$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ โดยที่ มี

$$\arg(f) = \tan^{-1}\frac{v}{u} = c$$

เมื่อ $c$ เป็นค่าคงที่ ถ้า $u = 0$ จะได้ว่า $f$ เป็นฟังก์ชันคงที่ โดยบทแทรก (4.8.8)
ถ้า $u \neq 0$ จะได้

$$\frac{v}{u} = \tan c \tag{4.6}$$

$$v = u\tan c \tag{4.7}$$

$$v - u\tan c = 0 \tag{4.8}$$

พิจารณา $(1 - i\tan c)f = (1 - i\tan c)(u + iv)$;

$$\begin{aligned}(1 - i\tan c)(u + iv) &= u + v\tan c + i(v - u\tan c)\\ \therefore\ \Im((1 + i\tan c)f) &= \Im((1 + i\tan c)(u + iv))\\ &= v - u\tan c = 0\end{aligned}$$

จากที่กำหนดให้ $f$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จะทำให้ $(1 + i\tan c)f$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ ด้วย ซึ่งมีส่วนจินตภาพเป็นค่าคงที่เท่ากับ 0 ดังนั้น จากบทแทรก (4.8.9) จะได้ว่า $(1 + i\tan c)f$ เป็นฟังก์ชันคงที่ $\Rightarrow f$ เป็นฟังก์ชันคงที่

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.8.12** ให้ $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ ดังนั้น

$$u(x,y) = e^x \cos y, \text{ และ } v(x,y) = e^x \sin y$$

นั่นก็คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y, \ \forall (x,y) \\ \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = e^x \sin y, \ \forall (x,y) \end{aligned}$$

และ $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง สำหรับ $\forall\ (x,y) \in \mathbb{C}$ ดังนั้น จาก ทฤษฎี *(4.8.4)* จะกล่าวได้ว่า $f(z) = e^z$ เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ และ

$$f'(z) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

◊◊◊

ต่อไปเราจะกล่าวถึงสมการโคชี-รีมานน์ในรูปแบบของพิกัดเชิงขั้ว ในทฤษฎีต่อไปนี้

**ทฤษฎี 4.8.13** ถ้าให้ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันซึ่งมีค่าอนุพันธ์ และมีอนุพันธ์ย่อย เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ $z = re^{i\theta}, r \neq 0$ แล้ว

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \text{ และ } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

**พิสูจน์** ให้ $x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta$ แล้ว $\sqrt{x^2+y^2} = r$ และ $\tan^{-1}\frac{y}{x} = \theta$
จากที่ อนุพันธ์ย่อยเป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้กฎลูกโซ่ (chain rule) จะได้

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \qquad (4.9) \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ &= \frac{\partial v}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial v}{\partial y}(r\cos\theta) \qquad (4.10) \\ & \qquad (4.11) \end{aligned}$$

โดยสมการโคชี-รีมานน์ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial y}(r\sin\theta) + \frac{\partial u}{\partial x}(r\cos\theta) \\ &= r\left[\frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta\right]\end{aligned}$$

โดย (4.9) จะได้

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial \theta} &= r\frac{\partial u}{\partial r} \\ \therefore \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad (4.12)\end{aligned}$$

(4.13)

ในทำนองเดียวกันก็จะสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad (4.14)$$

(4.12) และ (4.14) จะเป็นสิ่งที่ต้องการ ◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.8.14** จงแสดงว่า

$$f(z) = r^{\frac{1}{4}}\left[\cos\frac{\theta}{4} + i\sin\frac{\theta}{4}\right]$$

คล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ที่ทุกๆจุดยกเว้นที่ $r = 0$

$$\begin{aligned}f(z) &= f(r(\cos\theta + i\sin\theta)) = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \\ &= r^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\theta}{4} + ir^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\theta}{4}\end{aligned}$$

ดังนั้นจะได้

$$\begin{aligned}u(r,\theta) &= r^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\theta}{4} \\ v(r,\theta) &= r^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\theta}{4}\end{aligned}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{4}r^{-\frac{3}{4}}\cos\frac{\theta}{4} \tag{4.15}$$

$$\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{4}r^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\theta}{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{4}r^{\frac{1}{4}}\cos\frac{\theta}{4}\right) \tag{4.16}$$

จาก *(4.15), (4.16)* จะได้

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \tag{4.17}$$

$$\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{4}r^{-\frac{3}{4}}\sin\frac{\theta}{4} \tag{4.18}$$

$$\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} = -\frac{1}{4}r^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\theta}{4} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\theta)}{\partial \theta} &= -\frac{1}{r}\left(-\frac{1}{4}r^{\frac{1}{4}}\sin\frac{\theta}{4}\right) \\ &= \frac{1}{4}r^{-\frac{3}{4}}\sin\frac{\theta}{4} \end{aligned}$$

ดังนั้นจาก *(4.18)* และ *(4.19)* จะได้

$$\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{4.20}$$

จาก *(4.17)* และ *(4.20)* จะได้ว่า $f(z)$ คล้องตามสมการโคชี-รีมานน์ในรูปแบบพิกัดเชิงขั้ว

◊◊◊

**ทฤษฎี 4.8.15** ให้ $f(z), g(z)$ เป็นฟังก์ชันเชิงซ้อน ซึ่งมีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z_0$ และ $f(z_0) = g(z_0) = 0$ ถ้า $g'(z_0) \neq 0$ แล้ว

$$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

**พิสูจน์** จากนิยามของอนุพันธ์จะได้

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \frac{\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}}{\lim_{z\to z_0}\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

$$= \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{f(z)-f(z_0}{z-z_0}}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}}$$

จากที่กำหนดให้ $f(z_0) = g(z_0) = 0$ จะได้ว่า

$$\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.8.16** ให้ $f(z) = \sin az, \quad g(z) = \sin z$
ดังนั้น $f(0) = \sin 0 = 0 = g(0)$ และ $f(z), g(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{z \to 0} \frac{f(z)}{g(z)} &= \lim_{z \to 0} \frac{\sin az}{\sin z} \\ &= \frac{a \cos 0}{\cos 0} = a \end{aligned}$$

◊◊◊

**ตัวอย่าง 4.8.17** ให้ $f(z) = z^{10} + 1$ และ $g(z) = z^6 + 1$
ในที่นี้ $f(i) = g(i) = 0$ และ $f(z), g(z)$ เป็นฟังก์ชันที่มีค่าอนุพันธ์ที่จุด $z = i$ ดังนั้น

$$\lim_{z \to i} \frac{z^{10} + 1}{z^6 + 1} = \lim_{z \to i} \frac{10z^9}{6z^5} = \lim_{z \to i} \frac{5}{3} z^4 = \frac{5}{3}$$

◊◊◊

## 4.9 ฟังก์ชันฮาร์มอนิก (Harmonic functions)

**นิยาม 4.9.1** ให้ *u(x, y)* เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมี *2* ตัวแปรค่าจริง $x, y$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องในโดเมน $D$ และถ้า $u(x, y)$ มีค่าอนุพันธ์ย่อยอันดับสอง เทียบกับตัวแปร $x$ และ $y$ หาค่าได้ และ มีความต่อเนื่องใน $D$ และเป็นไปตามสมการลาปลาซ *(Laplace's quation)* คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \forall (x, y) \in D$$

แล้วจะเรียกฟังก์ชัน $u(x, y$ ว่าเป็น **ฟังก์ชันฮาร์มอนิก** *(harmonic function)* ในโดเมน $D$

พิจารณาฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ ซึ่งมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ และมีอนุพันธ์ย่อยอันดับสองหาค่าได้ และมีความต่อเนื่องใน $D$ แล้วจะเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ นั่นคือ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ และ } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \text{ และ } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \text{ และ } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

จากอนุพันธ์ย่อยอันดับสองมีความต่อเนื่องใน $D$ ดังนั้น

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ และ } \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

นั่นก็คือ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0$$

และ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$$

ดังนั้นเราจะกล่าวได้ว่า $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ ซึ่งเป็นส่วนจริงและส่วนจินตภาพของฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z)$ ที่มีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ใน $D$ และอนุพันธ์ย่อยอันดับสองหาค่าได้และมีความต่อเนื่องใน $D$ แล้ว ฟังก์ชัน $u(x,y)$ และ $v(x,y)$ นี้ จะมีคุณสมบัติเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก ดังนั้นเราจะให้ความหมายของฟังก์ชัน $v(x,y)$ ดังในนิยามต่อไปนี้

**นิยาม 4.9.2** ฟังก์ชันค่าจริง $v(x,y)$ จะเรียกว่า **คอนจุเกตฮาร์มอนิก** *(harmonic conjugate)* ของฟังก์ชัน $u(x,y)$ ถ้าฟังก์ชันเชิงซ้อน $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน

จาก $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ พิจารณาฟังก์ชัน $if(z) = i[u(x,y) + iv(x,y)] = -v(x,y) + iu(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมน $D$ ด้วยดังนั้น $u(x,y)$ จะเป็นคอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $-v(x,y)$ ดังนั้นเราจะสรุปได้ว่า $v(x,y)$ จะเป็นคอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $u(x,y)$ ก็ต่อเมื่อ $u(x,y)$ เป็นคอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $-v(x,y)$

**ตัวอย่าง 4.9.3** ให้ $u(x,y) = x + e^{-x}\cos y$ จงแสดงว่า $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และจงหา คอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $u(x,y)$

จาก

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= x + e^{-x}\cos y \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - e^{-x}\cos y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= e^{-x}\cos y \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= -e^{-x}\sin y \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -e^{-x}\cos y \\
\therefore \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0
\end{aligned}$$

ดังนั้น $u(x,y)$ คล้องตามสมการของลาปลาซ นั่นก็คือ $u(x,y)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

ให้ $v(x,y)$ เป็นฟังก์ชันซึ่ง $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ในโดเมนแล้วจะได้

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= 1 - e^{-x}\cos y = \frac{\partial v}{\partial y} \\
\therefore \quad v(x,y) &= \int (1 - e^{-x}\cos y)dy \\
&= y - e^{-x}\sin y + g(x)
\end{aligned}$$

หาอนุพันธ์ย่อยของ $v$ เทียบกับ $x$ จะได้

$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^{-x}\sin y + g'(x)$$

โดยสมการโคชี-รีมานน์จะได้ว่า

$$-e^{-x}\sin y = -e^{-x}\sin y + g'(x)$$

ดังนั้น $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$ เมื่อ $c$ เป็นค่าคงที่ แทนค่า $g'(x)$ ลงใน $v(x,y)$ จะได้

$$v(x,y) = y - e^{-x}\sin y + c$$

$v(x,y)$ จะเป็นคอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $u(x,y)$ ตามต้องการ

◊◊◊

## ความสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันวิเคราะห์และฟังก์ชันฮาร์มอนิก

1. ฟังก์ชัน $u(x,y)$ จะเป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิกในย่านจุดของจุด ๆหนึ่งก็ต่อเมื่อฟังก์ชัน $u(x,y)$ เป็นส่วนจริง (real part) ของบางฟังก์ชันวิเคราะห์

2. สองฟังก์ชันคอนจุเกตฮาร์มอนิก $v(x,y)$ และ $v^*(x,y)$ ของฟังก์ชัน $u(x,y)$ จะต่างกันโดยค่าคงที่ เพราะว่า
   ถ้า $v(x,y)$ และ $v^*(x,y)$ เป็นฟังก์ชันคอนจุเกตฮาร์มอนิกของ $u(x,y)$ แล้ว จะเป็นไปตามสมการโคชี-รีมานน์ นั่นคือ

   $$u_x(x,y) = v_y(x,y) = v_y^*(x,y), \text{ และ } -u_y(x,y) = v_x(x,y) = v_x^*(x,y)$$

   ดังนั้น $v = v^* + c$ เมื่อ $c$ เป็นค่าคงที่

3. ส่วนจริง และส่วนจินตภาพของฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก โมดุลัสของ $f(z)$ ไม่จำเป็นจะต้องเป็นฮาร์มอนิก

# แบบฝึกหัด

1. จงหาค่าของ $f(2+i), f(3i), f(-4+i)$ เมื่อ $f(z)$ คือ

   ก. $3z^2+z$ ข. $\frac{1}{z^2}$ ฃ. $\frac{z+1}{z-1}$

2. จงหาส่วนจริง และ ส่วนจินตภาพของฟังก์ชันต่อไปนี้

   ก. $f(z)=2z^2-3z$ ข. $f(z)=\frac{1}{1-z}$ ฃ. $f(z)=z^3-z^2+z$

3. สมมติให้ $z$ อยู่ในโดเมน $D$ อันหนึ่ง ซึ่งเป็นส่วนหนึ่งในระนาบเชิงซ้อน จงหาบริเวณ $R$ ในระนาบของเชิงซ้อน ซึ่ง $f(D)=R$ และจงเขียนกราฟของ $D$ และ $R$. เมื่อ $f(z)$ และ $z\in D$ กำหนดดังต่อไปนี้

   ก. $f(z)=3z,\quad |\arg(z)|<\frac{\pi}{2}$
   ข. $f(z)=\frac{1}{z},\quad \Re(z)>0$
   ฃ. $f(z)=z^2,\quad |z|>3$
   ค. $f(z)=z^3,\quad |\arg(z)|\le\frac{\pi}{4}$
   ฅ. $f(z)=\frac{1}{z^2},\quad |\arg(z)|\le\frac{\pi}{4}$

4. ถ้า $\lim_{z\to z_0} f(z)$ มีค่า จงแสดงว่าลิมิตนี้จะมีเพียง 1 ค่าเท่านั้น

5. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุดกำเนิดหรือไม่?

   ก. $f(z)=\frac{\Re(z)}{|z|}$ เมื่อ $z\neq 0,\quad f(0)=0$
   ข. $f(z)=\frac{\Im(z)}{1+|z|}$ เมื่อ $z\neq 0,\quad f(0)=0$
   ฃ. $f(z)=\frac{(\Re(z))^2}{|z|}$ เมื่อ $z\neq 0,\quad f(0)=0$

6. จงใช้นิยามของลิมิต แสดงว่า $f(z)=z^2$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง

7. จงหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   ก. $f(z)=(z^2+1)^2$ ข. $f(z)=\frac{1}{1-z}$
   ฃ. $f(z)=\frac{(z+1)^2}{z^2+1}$

8. จงหาค่าอนุพันธ์ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ ณ จุดที่กำหนดให้

ก. $f(z) = z^3 - 2z, \qquad z_0 = 1 - i$
ข. $f(z) = \frac{z+2i}{z-2i}, \qquad z_0 = 3 + i$
ข. $f(z) = (z^2 - 1)^2, \qquad z_0 = i$
ค. $f(z) = iz^2 + (1+i)z, \qquad z_0 = -2 + i$

9. จงแสดงว่า $f(z) = \Re(z) = x$ ไม่มีค่าอนุพันธ์ ณ จุด $z$ ใดๆ

10. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้คล้องตามสมการโคชี-รีมานน์

ก. $u(x,y) = x, \qquad v(x,y) = y$
ข. $u(x,y) = e^x \cos y, \qquad v(x,y) = e^x \sin y$
ข. $u(x,y) = x^3 - 3x^2y, \qquad v(x,y) = 3x^2y - y^3$

11. ถ้าให้ ฟังก์ชันต่อไปนี้มีค่า $f(0,0) = 0$ แล้วฟังก์ชัน ไหนเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุดกำเนิด

ก. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^4+y^4}$
ข. $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$
ข. $f(x,y) = \frac{x^3y^2}{(x^2+y^2)^2}$
ค. $f(x,y) = \frac{x+ye^{-x^2}}{1+y^2}$
ต. $f(x,y) = \frac{(x+y^2)^2}{x^2+y^2}$

12. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ อันไหนเป็นฟังก์ชันวิเคราะห์

ก. $f(z) = z^3 + z$
ข. $f(z) = \Im(z)$
ข. $f(z) = \bar{z}$
ค. $f(z) = |z|^2$
ค. $f(z) = \frac{1}{1-z}$
ฆ. $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$
ง. $f(z) = e^x \cos y$
จ. $f(z) = \frac{1}{z^2}$
ฉ. $f(z) = \arg(z)$

13. ถ้า $f(z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ แล้ว จงแสดงว่า $\overline{f(z)}$ จะเป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด $z_0$ ด้วย

14. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก และจงหาฟังก์ชันวิเคราะห์ $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

ก. $u(x,y) = x$ ข. $v(x,y) = xy$

ข. $u(x,y) = xy$ ค. $u(x,y) = \sin x \cosh y$

ค. $v(x,y) = -\sin x \sinh y$ ง. $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

15. เงื่อนไขอะไรที่จะทำให้ $u(x,y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + ky^3$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

16. เงื่อนไขอะไรที่จะทำให้ $u(x,y) = e^{2x}\cos\beta y$ เป็นฟังก์ชันฮาร์มอนิก

17. จงหาค่าคงที่ $a, b$ และ $c$ ซึ่งทำให้ $f(z)$ เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์

ก. $f(z) = x + ay - i(bx + cy)$

ข. $f(z) = ax^2 - by^2 + icxy$

ข. $f(z) = e^x \cos ay + ie^x \sin(y+b) + c$

ค. $f(z) = a(x^2+y^2) + ibxy + c$

18. ถ้า $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ และ $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$ ทั้ง $f(z)$ และ $\overline{f(z)}$ เป็นฟังก์ชันวิเคราะห์ จงพิสูจน์ว่า $f(z)$ เป็นฟังก์คงที่

19. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

ก. $\lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{3z}$ ข. $\lim_{z\to 0} \frac{z^2}{|z|}$

ข. $\lim_{z\to 0} \frac{2\sin z}{e^z-1}$ ค. $\lim_{z\to 0} z\sin\frac{1}{z}$

20. ถ้า $f(z) = u + iv$ เป็นฟังก์ชันเอ็นไทร์ และ $v = u^2$ แล้ว จงแสดงว่า $f$ เป็นฟังก์ชันคงที่

21. จงพิสูจน์ว่า $\lim_{z\to i} z(z+2) = -1 + 2i$

22. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

ก. $\lim_{z\to e^{\frac{\pi}{4}i}} \frac{z^2}{z^4+z+1}$ ข. $\lim_{z\to\frac{i}{2}} \frac{(2z-3)(4z+i)}{(iz-1)^2}$

23. จงแสดงว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องที่จุดกำหนดให้หรือไม่

ก. $f(z) = \frac{z^2-(2+i)z+2i}{z-i}$ ที่ $z = i$

ข. $f(z) = \frac{z^2+2(1+i)z+4i}{z+2}$ ที่ $z = -2i$

ข. $f(z) = z\overline{z}$ ที่ $z = -i$

ค. $f(z) = z^{-2}$ ที่ $z = i$