บทที่ 3

ลำดับของจำนวนเชิงซ้อน (Sequences of complex numbers)

3.1 คำนำ

ลำดับจำนวนเชิงซ้อนก็คืออิมเมจของการส่ง (mapping) จากเซตของจำนวนนับ $\mathbb{N}$ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$ เราอาจจะเขียนสัญลักษณ์ของลำดับของจำนวนเชิงซ้อน เป็น $\{z_n\}$ หรือเขียนในแต่ละพจน์ (term) ได้ดังนี้คือ

$$z_1, z_2, z_3, \ldots$$

จะเรียก z_n ว่าเป็นพจน์ที่ n ของลำดับของจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ ต่อไปเราจะเรียกลำดับของจำนวนเชิงซ้อนสั้นๆว่า ลำดับจำนวนเชิงซ้อน

3.2 ลำดับจำนวนเชิงซ้อน

เมื่อได้รู้จักกับลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ แล้ว เราลองพิจารณาความแตกต่างระหว่างลำดับของจำนวนเชิงซ้อนกับเซต ซึ่งมีสมาชิกเป็นพจน์ของลำดับจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้คือ
ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $2+3i, 2+3i, 2+3i, \ldots$ มีจำนวนพจน์นับไม่ถ้วน เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นแต่ละพจน์ของลำดับจำนวนเชิงซ้อนนี้คือ $\{2+3i, 2+3i, 2+3i, \ldots\} = \{2+3i\}$ ซึ่งในเซตนี้จะประกอบด้วยสมาชิกเพียง 1 สมาชิกเท่านั้น

ตัวอย่าง 3.2.1 ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots$ เป็นลำดับจำนวนเชิงซ้อนซึ่งเป็นอิมเมจของการส่งจากเซตของจำนวนนับ $\{1, 2, 3, \ldots\}$ ไปยังเซตของจำนวนเชิงซ้อน $\mathbb{C}$

กำหนดโดย $n \to i^n$ ดังนั้นลำดับจำนวนเชิงซ้อน $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, \ldots$ อาจจะเขียนแทนสั้นๆได้ว่า $\{i^n\}$ เซตซึ่งมีสมาชิกเป็นพจน์ของลำดับนี้คือ $\{i, -i, 1, -1\}$

◊◊◊

ลำดับจำนวนเชิงซ้อน 2 ลำดับ คือ $\{z_n\}, \{w_n\}$ จะกล่าวว่าเท่ากันก็ต่อเมื่อพจน์ที่สมนัยกันเท่ากัน นั่นก็คือ $z_n = w_n$, $\forall n = 1, 2, 3, \ldots$ ส่วนลำดับ $\{z_n\}$ ซึ่งแต่ละพจน์เป็นพจน์เดียวกันหมด นั่นคือ

$$z_k = z_{k+1}, \quad \forall k = 1, 2, 3, \ldots$$

จะเรียกว่าเป็น **ลำดับคงที่** (constant sequence)

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการลู่เข้าและการลู่ออกของลำดับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งนิยามต่อไปนี้จะเป็นความหมายของลำดับลู่เข้าและลำดับลู่ออกของลำดับจำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 3.2.2 ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ จะกล่าวว่า**มีลิมิตที่** z^* **หรือลู่เข้า** *(converges)* สู่จุด z_0 จะใช้สัญลักษณ์ว่า

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z^*$$

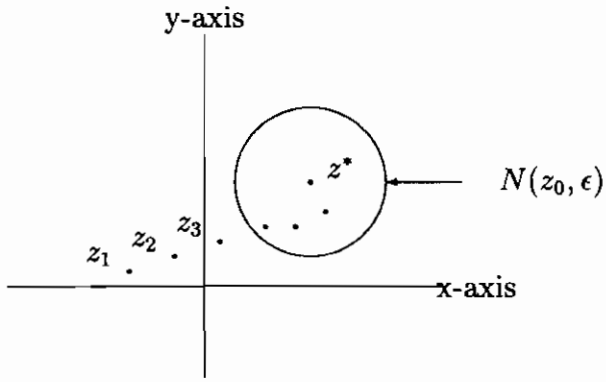
หมายความว่า ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆแล้วจะมีจำนวนนับ N ซึ่งทำให้

$$|z_n - z^*| < \epsilon, \quad \text{สำหรับ } n > N$$

ความหมายนี้ในทางเรขาคณิตก็คือ ทุกๆจุดของ z_n เมื่อ $n > N$ จะอยู่ภายในย่านจุด ϵ ของจุด z^* ในกรณีที่ลำดับของจำนวนเชิงซ้อนลู่เข้าจะลู่เข้าสู่จุดๆหนึ่ง จะเรียกลำดับจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่าเป็น"**ลำดับลู่เข้า**" (convergent sequence) ส่วนลำดับที่ไม่มีลิมิตหรือไม่ลู่เข้าสู่จุดใดจุดหนึ่ง จะเรียกว่าเป็น"**ลำดับลู่ออก**" (divergent sequence)

ตัวอย่าง 3.2.3 ลำดับ

1. $\{\frac{1}{n}\}$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จุด 0
2. $\{(-1)^n\}$ เป็นลำดับลู่ออก เพราะลู่เข้าสู่ *2* ค่า คือ *-1*และ *1*



รูปที่ 3.1: การลู่เข้าของลำดับ

3. $\{1 + \frac{2}{n}\} = 3, 2, \frac{5}{3}, \frac{6}{4}, \frac{7}{5}, \ldots$ เป็นลำดับลู่เข้าสู่จุด 1
4. $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นลำดับลู่ออก
5. $\left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right\} = 1 + 3i, \frac{3}{2} + 2i, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \frac{7}{4} + \frac{3}{2}i, \ldots$
   เป็นลำดับลู่เข้าสู่จุด $2 + i$

◊◊◊

ทฤษฎี 3.2.4 ถ้า ลำดับลู่เข้า แล้ว จะมีค่าลิมิตเพียงค่าเดียวเท่านั้น

สำหรับการพิสูจน์ทฤษฎี นี้จะละไว้เป็นแบบฝึกหัดสำหรับนักศึกษา
ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ เมื่อเขียนในแต่ละพจน์จะได้ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ ถ้าแสดงพจน์ที่ n ในรูปแบบของส่วนจริงและส่วนจินตภาพจะได้ $z_n = x_n + iy_n$ ซึ่งจะได้ลำดับของส่วนจริงคือ

$$\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, \ldots$$

และลำดับของส่วนจินตภาพคือ

$$\{y_n\} = y_1, y_2, y_3, \ldots$$

ตัวอย่าง 3.2.5 ลำดับ $\{z_n\} = \left\{\left(2 - \frac{1}{n}\right) + i\left(1 + \frac{2}{n}\right)\right\}$ ลู่เข้าสู่จุด $2 + i$

$$\{z_n\} = 1 + 3i, \frac{3}{2} + 2i, \frac{5}{3} + \frac{5}{3}i, \frac{7}{4} + \frac{3}{2}i, \ldots$$

จะได้ลำดับของส่วนจริงคือ

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \ldots$$

และลำดับของส่วนจินตภาพคือ

$$3, 2, \frac{5}{3}, \frac{3}{2}, \ldots$$

◇◇◇

เราจะสังเกตเห็นได้ว่าลำดับของส่วนจริงจะลู่เข้าสู่ค่า 2 และลำดับของส่วนจินตภาพจะลู่เข้าสู่ค่า 1 ซึ่งผลอันนี้จะกล่าวถึงในทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎี 3.2.6 ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่ง $z_n = x_n + iy_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, \ldots$ แล้ว

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$$

ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{และ} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

พิสูจน์ ($\Leftarrow$) สมมติให้

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ และ } \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ จะมีเลขจำนวนนับ N ซึ่งสำหรับ $n > N$ แล้ว

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{และ} \quad |y_n - b| < \frac{\epsilon}{2}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned} |z_n - (a + ib)| &= |(x_n + iy_n) - (a + ib)| \\ &= |(x_n - a) + i(y_n - b)| \\ &\leq |x_n - a| + |i(y_n - b)| \quad \text{(จากอสมการของสามเหลี่ยม)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |x_n - a| + |y_n - b| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

นั่นก็คือ $\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$

($\Rightarrow$) สมมติให้

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$$

ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ จะมีเลขจำนวนนับ M ซึ่งสำหรับ $n > M$ แล้ว

$$|z_n - (a + ib)| = |(x_n + iy_n) - (a + ib)| < \epsilon$$

พิจารณา

$$
\begin{aligned}
|z_n - (a + ib)| &= |(x_n + iy_n) - (a + ib)| \\
&= |(x_n - a) + i(y_n - b)| < \epsilon \\
\therefore\ |x_n - a| &\leq |(x_n - a) + i(y_n - b)| < \epsilon
\end{aligned}
$$

และ

$$|y_n - b| \leq |(x_n - a) + i(y_n - b)| < \epsilon$$

$\therefore\ |x_n - a| < \epsilon$ และ $\quad |y_n - b| < \epsilon$ เมื่อ $n > M$

นั่นก็คือ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \ \text{ และ } \ \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

ดังนั้น จึงสรุปได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} z_n = a + ib$$

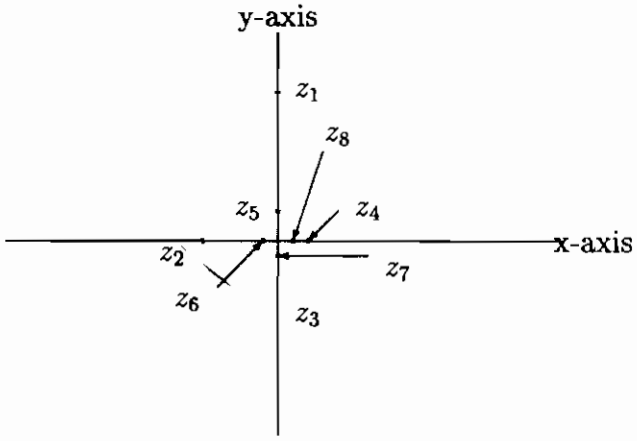
ก็ต่อเมื่อ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ และ } \lim_{n\to\infty} y_n = b$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 3.2.7 ลำดับ $\{1^n\} = \{1, 1, 1, \ldots\}$ เป็นลำดับคงที่ ซึ่งลู่เข้าสู่ค่า $z_0 = 1$ เพราะว่าทุกๆย่านจุด ϵ ของ 1 จะประกอบไปด้วยพจน์ทั้งหมดของลำดับ $\{1^n\}$

◊◊◊



รูปที่ 3.2: เทอมแรกๆของลำดับ $\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$

ตัวอย่าง 3.2.8 ลำดับ $\left\{\frac{i^n}{n}\right\} = \{i, -\frac{1}{2}, -\frac{i}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\}$
ลำดับนี้จะลู่เข้าสู่ค่า 0 เพราะลำดับนี้จะมีค่าเข้าใกล้ 0 ขณะที่ n เข้าใกล้ ∞

◊◊◊

ตัวอย่าง 3.2.9 ลำดับ $\{(-1)^n + i\}$ เป็นลำดับลู่ออก เพราะว่าเมื่อ $n \to \infty$ ลำดับนี้จะ ลู่เข้าไปยังลิมิต *2* ค่า คือ $-1 + i$ และ $1 + i$

◊◊◊

ตัวอย่าง 3.2.10 ลำดับ $\{(ni)^3\} = \{-i, -8i, -27i, \ldots, n^3 i\}$
เป็นลำดับลู่ออก เพราะว่าเมื่อ n มีค่ามากๆขึ้นเทอมที่ n ของลำดับก็จะมีค่ามากขึ้น จนไม่ลู่เข้าไปที่ค่าใดเลย

◊◊◊

นิยาม 3.2.11 ลำดับ $z_1, z_2, z_3, \ldots$ จะกล่าวว่าเป็น**"ลำดับที่มีขอบเขต"** *(boundedsequence)* ถ้ามีจำนวนจริงบวก M ซึ่งพจน์ทั้งหมดของลำดับจะอยู่ภายในทรงกลมซึ่งมีรัศมีเท่ากับ M และจุดศูนย์กลางที่จุดกำเนิด นั่นก็คือ

$$|z_n| < M, \ \forall n$$

ในกรณีที่ลำดับไม่เป็นลำดับที่มีขอบเขต จะเรียกว่าเป็น **"ลำดับไม่มีขอบเขต"**

(unbounded sequence) ต่อไปก็จะกล่าวถึงทฤษฎีของลำดับซึ่งเกี่ยวข้องกับลำดับที่มีขอบเขตและลำดับไม่มีขอบเขต

ทฤษฎี 3.2.12 ลำดับลู่เข้าทุก ๆลำดับจะเป็นลำดับที่มีขอบเขต

พิสูจน์ กำหนดให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งลู่เข้าสู่ z_0 นั่นก็คือ

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$

ถ้ากำหนดให้ $\epsilon = 1$ แล้ว จะมี N ซึ่ง สำหรับ $n > N$ จะได้

$$\begin{aligned} |z_n - z_0| &< 1 \\ |z_n| - |z_0| &< |z_n - z_0| < 1 \\ \therefore \ |z_n| &< 1 + |z_0|, \text{ สำหรับ } n > N \end{aligned} \tag{3.1}$$

กำหนดให้ $M^* = \max\{|z_1|, |z_2|, \ldots |z_N|\}$ ดังนั้น

$$|z_n| \leq M^*, \text{ สำหรับ } n \leq N \tag{3.2}$$

ดังนั้นจาก (3.1) และ (3.2) และให้ $M = \max\{M^*, 1 + |z_0|\}$ จะได้ว่า M เป็นจำนวนจริงบวกซึ่ง

$$|z_n| < M^*, \text{ สำหรับทุก ๆค่าของ } n \in \mathbb{N}$$

นั่นก็คือ$\{z_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

◊◊◊

จากผลของทฤษฎี (3.2.12) จะกล่าวได้ว่า ถ้าลำดับใดเป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตแล้ว ลำดับนั้นจะเป็นลำดับลู่ออก (divergent sequence) บทกลับของทฤษฎี (3.2.12) นี้จะไม่เป็นความจริงดังจะเห็นได้จากตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 3.2.13 ลำดับ

1. $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต แต่ไม่เป็นลำดับลู่เข้า
2. $\{1, 2, 3, \ldots\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขต และเป็นลำดับลู่ออก
3. $\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{4}, 4, \ldots\}$ เป็นลำดับที่ไม่มีขอบเขตและเป็นลำดับลู่ออก

◇◇◇

3.3 ลำดับย่อย (Subsequences)

นิยาม 3.3.1 ลำดับย่อย*(subsequence)* ของลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ คือ ลำดับ $\{z_{n_k}\}$ ซึ่งแต่ละพจน์เลือกมาจากลำดับ $\{z_n\}$ และเรียงลำดับก่อนหลังเหมือนกับลำดับ $\{z_n\}$

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ $\{z_n\} = \{(-1)^n\}$

1. $\{z_{n_k}\} = \{z_{2k}\} = \{(-1)^{2k}\}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, \ldots$
   $\{(-1)^{2k}\}$ จะเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{(-1)^n\}$ ซึ่งลำดับย่อยนี้จะลู่เข้าสู่ค่า 1
2. $\{z_{n_l}\} = \{z_{2l-1}\} = \{(-1)^{2l-1}\}$ เมื่อ $l = 1, 2, 3, \ldots$
   $\{(-1)^{2l-1}\}$ จะเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{(-1)^n\}$ ซึ่งลำดับย่อยนี้จะลู่เข้าสู่ค่า -1

◇◇◇

ทฤษฎี 3.3.3 ถ้าลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ค่า z_0 แล้ว ทุกๆลำดับย่อย $\{z_{n_k}\}$ ของลำดับเชิงซ้อน $\{z_n\}$ จะลู่เข้าสู่ค่า z_0 ด้วย

พิสูจน์ ให้ $\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$
ดังนั้นถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นเลขจำนวนจริงใดๆแล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่งทำให้

$$|z_n - z_0| < \epsilon \quad \text{สำหรับ } n > N$$

ดังนั้น

$$|z_{n_k} - z_0| < \epsilon \text{ สำหรับ } n_k > n > N$$

นั่นก็คือ

$$\lim_{n_k \to \infty} z_{n_k} = z_0$$

◊◊◊

ทฤษฎีต่อไปของลำดับจำนวนเชิงซ้อนจะต้องอาศัยเรื่องของลำดับจำนวนจริงมาช่วย ดังนั้นก่อนที่จะกล่าวถึงทฤษฎีของลำดับจำนวนเชิงซ้อนต่อไป เราจะนำทฤษฎีบางทฤษฎีของลำดับจำนวนจริง ซึ่งเราจะอ้างถึง มารวบรวมไว้ในที่นี้ โดยไม่พิสูจน์

จากคุณสมบัติของจำนวนจริงเราได้ทราบแล้วว่า ถ้าเซตของจำนวนจริงมีขอบเขตบน (upper bound) แล้ว จะมีขอบเขตบนค่าน้อยที่สุด (least upper bound) และในทำนองเดียวกัน ถ้าเซตของจำนวนจริงมีขอบเขตล่าง(lower bound) แล้ว จะมีขอบเขตล่างค่ามากที่สุด (greatest lower bound)

นิยาม 3.3.4 ลำดับจำนวนจริง $\{x_n\}$ จะเรียกว่าเป็น**ลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียว** *(monotonically increasing)* ถ้า

$$x_{n+1} > x_n \text{ สำหรับทุกๆค่าของ } n$$

ลำดับจำนวนจริง $\{x_n\}$ จะเรียกว่าเป็น**ลำดับลดลงทางเดียว** *(monotonically decreasing)* ถ้า

$$x_{n+1} < x_n \text{ สำหรับทุกๆค่าของ } n$$

และลำดับจำนวนจริง $\{x_n\}$ จะเรียกว่าเป็น**ลำดับทางเดียว** *(monotonic sequence)* ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับเพิ่มขึ้นทางเดียว หรือ เป็นลำดับลดลงทางเดียว

ทฤษฎี 3.3.5 *(Monotone convergent theorem)*
ทุกๆลำดับ จำนวนจริงซึ่งเป็นลำดับทางเดียวจะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

นั่นก็คือ ถ้า $\{x_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริงที่เป็นลำดับทางเดียว และ

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

เมื่อ x_0 เป็นค่าคงที่ค่าหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\{x_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต

ทฤษฎี 3.3.6 ทุกๆลำดับของจำนวนจริงซึ่งมีขอบเขต จะมี ลำดับย่อยลู่เข้าอย่างน้อย *1* ลำดับ

จากทฤษฎี (3.3.5) และ(3.3.6) นี้จะสามารถทำให้เราพิสูจน์ทฤษฎีต่อไปนี้ได้

ทฤษฎี 3.3.7 ทุกๆ ลำดับจำนวนเชิงซ้อนที่มีขอบเขต *(bounded sequence)* จะมีลำดับย่อยลู่เข้าอย่างน้อยหนึ่งลำดับ

พิสูจน์ ให้ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขต นั่นก็คือ จะมีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|z_n| \leq M$ สำหรับทุกๆ ค่าของ n จาก $z_n = x_n + iy_n$ ดังนั้น

$$|z_n| = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \leq M$$

แต่เรามี

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \text{ และ } |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

ดังนั้น

$$|x_n| \leq M \text{ และ } |y_n| \leq M, \ \forall n$$

นั่นก็คือ $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ จะเป็นลำดับจำนวนจริงที่มีขอบเขต โดยทฤษฎี (3.3.6) จะได้ว่าลำดับจำนวนจริง $\{x_n\}$ และ $\{y_n\}$ จะมีลำดับย่อยลู่เข้า $\{x_{n_k}\}$ และ $\{y_{n_k}\}$ ตามลำดับ ดังนั้นถ้าให้

$$z_{n_k} = x_{n_k} + iy_{n_k}$$

แล้ว $\{z_{nk}\}$ จะเป็นลำดับย่อยของลำดับ $\{z_n\}$ และจากทฤษฎี (3.2.6) จะได้ว่าลำดับย่อย $\{z_{nk}\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

◊◊◊

3.4 ลำดับคอชี่ (Cauchy-sequences)

นิยาม 3.4.1 ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ จะเรียกว่าเป็น **ลำดับคอชี่** *(Cauchy-sequence)* ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง เมื่อ $m, n > N$ แล้ว

$$|z_m - z_n| < \epsilon$$

ทฤษฎี 3.4.2 ลำดับจำนวนเชิงซ้อน $\{z_n\}$ จะลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{z_n\}$ เป็นลำดับคอชี่

พิสูจน์ ($\Rightarrow$) สมมติให้ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ค่า z_0 ดังนั้นจากนิยามจะได้ว่า
กำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง

$$|z_n - z_0| < \frac{\epsilon}{2} \text{ สำหรับ } n > N \tag{3.3}$$

ถ้าให้ m เป็นจำนวนเต็มบวกใดๆ ซึ่ง $m > n$ จาก (3.3) จะได้ว่า $m > n > N$ ด้วย ดังนั้น

$$|z_m - z_0| < \frac{\epsilon}{2} \text{ สำหรับ } m > N$$

พิจารณา $|z_m - z_n|$

$$\begin{aligned}
|z_m - z_n| &= |z_m - z_0 + z_0 - z_n| \\
&= |(z_m - z_0) - (z_n - z_0)| \\
&= |(z_m - z_0) + (-(z_n - z_0))| \\
&\leq |z_m - z_0| + |-(z_n - z_0)| \\
&\leq |z_m - z_0| + |z_n - z_0| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}$$

สำหรับ $n, m > N$ นั่นก็คือ $\{z_n\}$ เป็นลำดับคอชี่
($\Leftarrow$) สมมติให้ลำดับ $\{z_n\}$ เป็นลำดับคอชี่ ดังนั้น จากนิยามจะได้ว่า

กำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $|z_m - z_n| < \epsilon$ เมื่อ $n, m > N$

ถ้าให้ $\epsilon = 1$ และ $m = N + 1$ จะได้ว่าสำหรับ $n > N$, แล้ว

$$|z_n - z_{N+1}| < 1 \Rightarrow |z_n| - |z_{N+1}| < |z_n - z_{N+1}| < 1$$

ดังนั้น

$$|z_n| < |z_{N+1}| + 1, \text{ สำหรับ } n > N$$

ให้ $M^* = \max |z_1|, |z_2|, \ldots |z_N|$ แล้ว จะได้ว่า

$$|z_n| \leq M^*, \text{ สำหรับ } n = 1, 2, 3, \ldots N$$

$\therefore$ กำหนดให้ $M = \max\{M^*, 1 + |z_{N+1}|\}$ จะได้ว่า $|z_n| \leq M, \ \forall n$ ดังนั้น $\{z_n\}$ เป็นลำดับที่มีขอบเขตและจากทฤษฎี (3.3.7) $\{z_n\}$ จะมีลำดับย่อย $\{z_{n_k}\}$ ซึ่งลู่เข้าสู่จุด z_0

เราจะต้องพิสูจน์ว่า $\{z_n\}$ จะลู่เข้าสู่จุด z_0

พิจารณา $|z_n - z_0|$

$$|z_n - z_0| = |z_n - z_{n_k} + z_{n_k} - z_0| \leq |z_n - z_{n_k}| + |z_{n_k} - z_0|$$

กำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆจะมีจำนวนเต็มบวก N ซึ่ง $n > N$ แล้ว

$$\begin{aligned} |z_n - z_{n_k}| &< \frac{\epsilon}{2} \text{ (เพราะ } \{z_n\} \text{ เป็นลำดับคอชี่)} \\ |z_{n_k} - z_0| &< \frac{\epsilon}{2} \text{ (เพราะ } \{z_n\} \text{ ลู่เข้าสู่ } z_0) \\ |z_n - z_0| &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

สำหรับ $n > N$ ดังนั้น $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ z_0 จากการพิสูจน์ข้างบนนี้ จะได้ว่า $\{z_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\{z_n\}$ เป็นลำดับคอชี่

◊◊◊

ตัวอย่าง 3.4.3 จงพิสูจน์ว่า

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1, \ \forall z \in \mathbb{C}$$

พิจารณา $\left|1 + \frac{z}{n} - 1\right| = \left|\frac{z}{n}\right|$

ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $\left|\frac{z}{n}\right| < \epsilon$

จะได้

$$\frac{|z|}{n} < \epsilon \Rightarrow n > \frac{|z|}{\epsilon} = N$$

ดังนั้น ถ้ามี $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วจะมีจำนวนนับ N ซึ่งทำให้

$$\left|1 + \frac{z}{n} - 1\right| < \epsilon \quad \text{สำหรับ } n > N$$

นั่นก็คือ

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right) = 1, \quad \forall z$$

◇◇◇

แบบฝึกหัด

1. จงหาพจน์ที่ 1, 2, 3 ของลำดับต่อไปนี้

ก.	$\left\{\frac{n}{n+3}\right\}$	ข.	$\left\{\frac{2n}{n^2+1}\right\}$
ข.	$\left\{\frac{i^n}{n^3}\right\}$	ค.	$\left\{\frac{in}{n+1}\right\}$
ค.	$\left\{\frac{i^n n^2}{n+i}\right\}$	ฆ.	$\{(-1)^n + 2n\pi i\}$

2. จงหาพจน์ที่ 1, 2, 3, 4, และ 5 ของลำดับซึ่งมี

$$z_1 = 1,\ z_2 = \frac{i}{2},\quad \text{และ}\quad z_n = iz_{n-2}z_{n-1}$$

$n = 3, 4, 5, \ldots$ และจงหาลิมิตของลำดับนี้ด้วย

3. ลำดับต่อไปนี้ อันไหนเป็นลำดับที่มีขอบเขต อันไหนเป็นลำดับลู่เข้า ในกรณีที่เป็นลำดับลู่เข้า จงหาลิมิตด้วย

ก.	$\{i^n\}$	ข.	$\left\{\frac{i^n}{n}\right\}$	ฆ.	$\left\{\frac{in}{n+1}\right\}$
ค.	$\left\{\frac{n^2}{n+i}\right\}$	ฅ.	$\left\{\frac{(-1)^n}{n^3}\right\}$	ฆ.	$\left\{i^{in\frac{\pi}{4}}\right\}$

4. ให้ลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ z_0 และ ลำดับ $\{w_n\}$ ลู่เข้าสู่ w_0 จงแสดงว่า

   ก. ลำดับ $\{z_n + w_n\}$ ลู่เข้าสู่ $z_0 + w_0$

   ข. ลำดับ $\{z_n w_n\}$ ลู่เข้าสู่ $z_0 w_0$

5. ลำดับต่อไปนี้ อันไหนเป็นลำดับลู่เข้า

ก.	$\{i^n\}$	ข.	$\left\{\frac{\cos n + i\sin n}{n}\right\}$
ข.	$\{z_0^n\}$ เมื่อ $\lvert z_0\rvert < 1$	ค.	$\left\{\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}\right\}$

6. ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าแล้ว จงแสดงว่าลำดับ $\{|z_n|\}$ เป็นลำดับลู่เข้า บทกลับของประโยคนี้เป็นจริงหรือไม่?

7. ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ 0 แล้ว จงพิสูจน์ว่าลำดับ $\left\{\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}\right\}$ จะลู่เข้าสู่ 0 ด้วย

8. ถ้าลำดับ $\{z_n\}$ ลู่เข้าสู่ z_0 แล้ว จงพิสูจน์ว่าลำดับ $\left\{\frac{z_1+z_2+\cdots+z_n}{n}\right\}$ จะลู่เข้าสู่ z_0 ด้วย

9. จงหาตัวอย่างของลำดับซึ่ง

   ก. ไม่เป็นลำดับลู่เข้า แต่มีจุดลิมิตเพียงจุดเดียว

   ข. เป็นลำดับที่มีจุดลิมิต n จุดสำหรับ n เป็นจำนวนเต็มใดๆที่กำหนดให้

   ข. เป็นลำดับที่มีจุดลิมิตเป็นจำนวนนับไม่ถ้วน

10. ให้ $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$ จงใช้กฎของโคชี่ แสดงว่าลำดับ $\{s_n\}$ ลู่เข้า

11. ให้ $\{z_n\}$ เป็นลำดับซึ่งมีคุณสมบัติว่า
    ถ้ากำหนดให้ $\epsilon > 0$ เป็นจำนวนจริงใดๆ จะมีจำนวนนับ N ซึ่งเมื่อ $n > N$ แล้ว

$$|z_{n+1} - z_n| < \epsilon$$

    จงยกตัวอย่างเพื่อที่จะแสดงว่าลำดับ $\{z_n\}$ ตามคุณสมบัติข้างบนนี้ไม่จำเป็นจะต้องเป็นลำดับคอชี่