บทที่ 1

จำนวนเชิงซ้อน (Complex numbers)

1.1 คำนำ

จากการศึกษาคณิตศาสตร์เบื้องต้นมาแล้ว จะเห็นได้ว่านักคณิตศาสตร์ได้ทำการจำแนกจำนวนต่างๆ ไว้เป็นหมวดหมู่หรือที่เรียกอีกอย่างว่าเป็น **เซต**(set) ในแต่ละเซตก็จะมีคุณสมบัติเฉพาะตัวของมันเอง เซตของจำนวนที่เราได้รู้จักและคุ้นเคยมาบ้างแล้ว คือเซตต่อไปนี้

1. เซตของจำนวนธรรมชาติ (Natural numbers) หรือที่เรียกกันว่าเซตของจำนวนเต็มบวก (positive numbers) สมาชิกในเซตนี้คือ $1, 2, 3, \ldots$

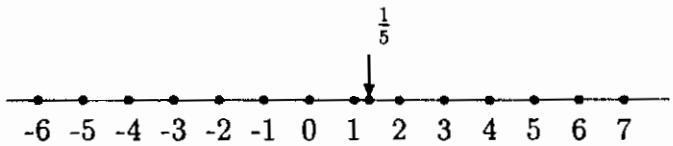
2. เซตของจำนวนเต็มลบและศูนย์ (Negative integers and zero) สมาชิกในเซตนี้คือ $0, -1, -2, -3, \ldots$ สำหรับเซตที่ประกอบไปด้วยสมาชิกของเซตของจำนวนเต็มบวกรวมกับสมาชิกของจำนวนเต็มลบ จะเรียกว่าเซตของจำนวนเต็ม (Integers)

3. เซตของจำนวนตรรกยะ (Rational numbers) หรือจำนวนเศษส่วน (Fractions) สมาชิกของจำนวนตรรกยะนี้ จะมีรูปแบบ $\frac{p}{q}$ เมื่อ p, q เป็นจำนวนเต็ม และ $q \neq 0$

4. เซตของจำนวนอตรรกยะ (Irratioan numbers) สมาชิกในเซตนี้ คือจำนวนที่ไม่เป็นจำนวนตรรกยะนั่นเอง เช่น $\sqrt{2} = 1.41423\ldots$ และ $\pi = 3.14159\ldots$

เซตของจำนวนตรรกยะรวมกับเซตของจำนวนอตรรกยะ จะเรียกว่า เซตของจำนวนจริง (Real numbers) สมาชิกแต่ละตัวของเซตของจำนวนจริง จะสามารถแทนโดยจุดบนเส้นตรงได้ ดังในรูปที่ 1.1

จากเซตที่กล่าวมาแล้วนี้ นักวิทยาศาสตร์ได้พบว่ายังไม่สามารถที่จะทำให้สมการที่มีรูปแบบ



รูปที่ 1.1: เส้นตรงซึ่งแทนจำนวนจริง

$$x^2 + a = 0$$

เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ มีผลเฉลยได้ เพราะสมการนี้จะได้ผลเฉลยเป็น

$$x = \pm\sqrt{-a}$$

ซึ่งค่าของ $\pm\sqrt{-a}$ เมื่อ a เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ ไม่สามารถจัดให้อยู่ในเซตของจำนวนที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้นได้ ดังนั้นเพื่อให้สมการ $x^2 + a = 0$ นี้มีผลเฉลย นักวิทยาศาสตร์จึงมีความจำเป็นที่จะต้องสร้างเซตของจำนวนเพื่อรองรับผลเฉลยของสมการในรูปแบบนี้ เซตที่เกิดใหม่นี้ได้มีชื่อเรียกว่า **"เซตของจำนวนเชิงซ้อน"**(Complex numbers)

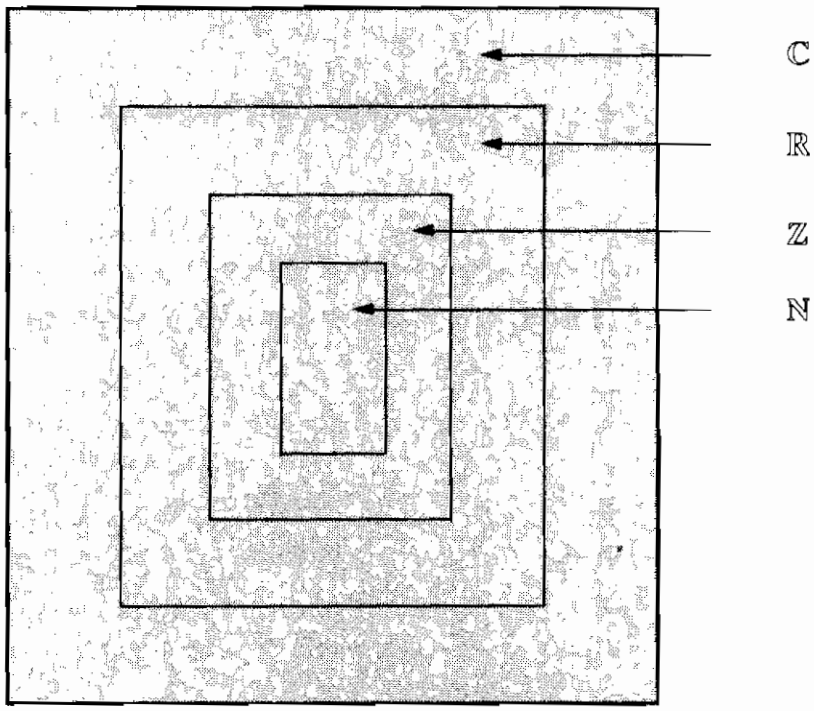
1.2 จำนวนเชิงซ้อน

นิยาม 1.2.1 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว z จะอยู่ในรูปของจำนวนจริง x และ y ดังนี้คือ

$$z = x + iy$$

เมื่อ $i = \sqrt{-1}$ ดังนั้น $i^2 = -1$

- i จะเรียกว่าเป็น **"หน่วยจินตภาพ"**(imaginary unit)ของจำนวนเชิงซ้อน
- x จะเรียกว่าเป็น **"ส่วนจริง"**(real part) ของจำนวนเชิงซ้อน z และ จะใช้สัญลักษณ์เป็น $\Re(z)$
- y จะเรียกว่าเป็น **"ส่วนจินตภาพ"**(imaginary part) ของจำนวนเชิงซ้อน z และจะใช้สัญลักษณ์ว่า $\Im(z)$



รูปที่ 1.2: ความสัมพันธ์ของการเป็นเซตย่อยของจำนวนต่างๆ

ดังนั้นจะได้ว่า

$$x = \Re(z) \text{ ส่วน } y = \Im(z)$$

ถ้า $\Re(z) = 0$ จะได้ $z = 0 + iy = iy$ จะเรียกจำนวนเชิงซ้อนนี้ว่า **"จำนวนจินตภาพบริสุทธิ์"** (purely imaginary)

ถ้า $\Im(z) = 0$ ดังนั้น $z = x + i0 = x$ จำนวนเชิงซ้อนนี้จะเป็น จำนวนจริง ดังนั้น 0 จะเป็นได้ทั้งจำนวนจินตภาพบริสุทธิ์และจำนวนจริงในเวลาเดียวกัน

จากนิยามของจำนวนเชิงซ้อน จะสังเกตเห็นได้ว่า จำนวนจริงทุกๆจำนวนจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนด้วย ดังนั้นจึงกล่าวได้ว่า เซตของจำนวนจริงจะเป็นเซตย่อย (subset) ของเซตของจำนวนเชิงซ้อน ความสัมพันธ์ของการ "เป็นเซตย่อย" ของเซตของจำนวนที่กล่าวมาแล้วทั้งหมดนี้จะแสดงอยู่ในรูปที่ 1.2

การเท่ากันของจำนวนเชิงซ้อน

ให้ $z_1 = x_1 + iy_1$ และ $z_2 = x_2 + iy_2$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน 2 จำนวน จะกล่าวว่า $z_1 = z_2$ ก็ต่อเมื่อ $x_1 = x_2$ และ $y_1 = y_2$

นิยาม 1.2.2 ให้ $z = x + iy$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆแล้ว จะเรียก $\overline{z} = x - iy$ ว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุค *(complex conjugate)* ของ z และในทำนองเดียวกันเราจะเรียก z ว่าเป็นจำนวนเชิงซ้อนสังยุคของ $\overline{z}$

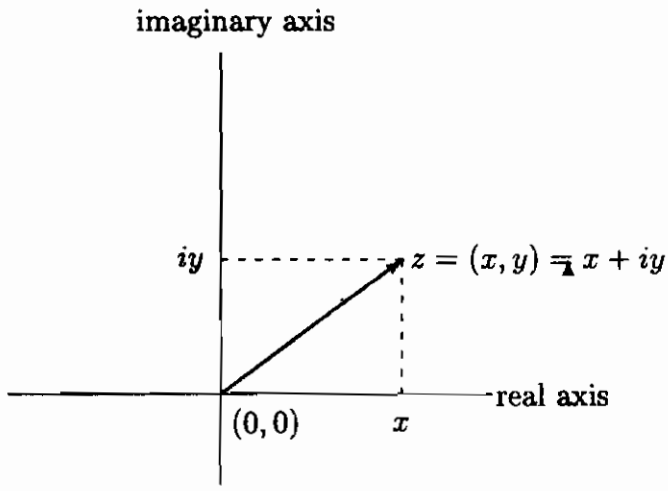
ตัวอย่าง 1.2.3

1. $z = 5 + 12i$, $\overline{z} = 5 - 12i$
2. $z = 4 - 3i$, $\overline{z} = 4 + 3i$
3. $z = i$, $\overline{z} = -i$
4. $z = -2$, $\overline{z} = -2$

◊◊◊

ระนาบเชิงซ้อน (Complex plane)

เราได้กล่าวมาแล้วว่าเราสามารถที่จะแทนจำนวนจริงแต่ละตัวโดยจุดบนเส้นตรงต่อไปนี้จะกล่าวถึงการแทนจำนวนเชิงซ้อนแต่ละตัวในระนาบ xy ในระนาบ xy นั้นจะใช้แกน x แทนส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อน และแกน y แทนส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน ดังในรูปที่ 1.3 จำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy$ ใดๆ อาจจะใช้คู่อันดับ (x, y) แทนได้ โดยอันดับแรกของคู่อันดับจะแทนส่วนจริง ของจำนวนเชิงซ้อน และอันดับที่สองของคู่อันดับจะแทนส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อน จากที่ได้ใช้คู่อันดับ (x, y) แทนจำนวนเชิงซ้อน $x + iy$ ในระนาบ จะได้เวกเตอร์ซึ่งแทนจำนวนเชิงซ้อนดังในรูปที่ 1.3



รูปที่ 1.3: เวกเตอร์แทนจำนวนเชิงซ้อน

จำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polarcoordinates form of complex numbers)

ถ้าหากจะใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วซึ่งมีตัวแปรเป็น (r, θ) ในระนาบของจำนวนเชิงซ้อน จะสามารถทำได้โดยการกำหนดให้

$$x = r\cos\theta \text{ และ } y = r\sin\theta$$

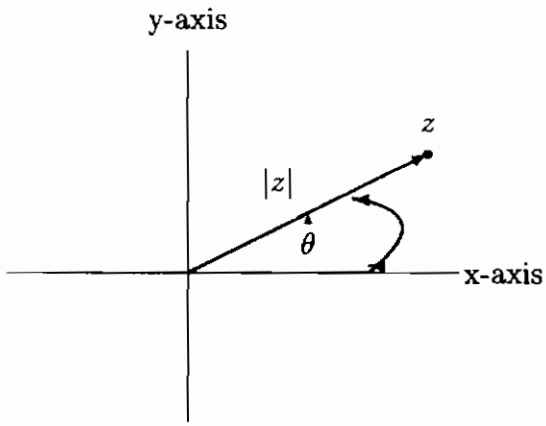
แล้วจำนวนเชิงซ้อน $z = x + iy \neq 0$ ใดๆ จะสามารถแทนได้ด้วยระบบพิกัดเชิงขั้วเป็น

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

รูปแบบของ z ในเทอมของ r และ θ นี้จะเรียกว่า **"รูปแบบพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน"** ค่าของ r ในรูปพิกัดเชิงขั้วจะเรียกว่า **"ค่าสัมบูรณ์"** (absolute value) หรือ **"โมดุลัส"** (modulus) ของ z และจะใช้สัญลักษณ์ว่า $|z|$ ดังนั้น

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

และค่าของ $|z|$ นี้ ก็คือระยะทางจากจุดกำเนิดถึงจุด z นั่นเอง ดังนั้นค่าของ $|z|$ จะมีค่าเป็นบวกเสมอส่วนค่าของ θ ในรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนก็คือมุมที่เกิดจากแกน x ทางด้าน



รูปที่ 1.4: รูปแบบพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อน

บวกกับเวกเตอร์ที่แทนจำนวนเชิงซ้อน ซึ่งค่าของ θ จะมีความสัมพันธ์กับ x, y ดังนี้คือ

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

และจะเรียกค่า θ นี้ว่า **"อาร์กิวเมนต์"**(argument) ของจำนวนเชิงซ้อน z สำหรับค่าของอาร์กิวเมนต์ที่มีค่าอยู่ในช่วง $[-\pi, \pi]$ เราจะเรียกว่าเป็น **"อาร์กิวเมนต์ที่สำคัญ"**(principal value of the argument) และจะใช้สัญลักษณ์เป็น $Arg(z)$ ส่วนอาร์กิวเมนต์ที่อยู่นอกเหนือจากช่วง $[-\pi, \pi]$ จะใช้สัญลักษณ์ว่า $arg(z)$ ดังนั้นเราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่าง $Arg(z)$ และ $arg(z)$ ว่า

$$arg(z) = Arg(z) + 2k\pi$$

เมื่อ k เป็นจำนวนเต็ม ส่วนจำนวนเชิงซ้อน z ใดๆ จะเขียนในรูปของโมดุลัส และอาร์กิวเมนต์ได้ว่า

$$z = |z|[\cos(arg(z)) + i\sin(arg(z))],\ z \neq 0$$

ถึงแม้ว่าเราจะสามารถแทนจำนวนเชิงซ้อนด้วยเวกเตอร์ได้ แต่คุณสมบัติบางประการของเวกเตอร์ก็ไม่เหมือนกับคุณสมบัติของจำนวนเชิงซ้อน อย่างเช่นผลคูณของเวกเตอร์ไม่สามารถจะแทนด้วยผลคูณของจำนวนเชิงซ้อนได้

ตัวอย่าง 1.2.4 จงหา โมดุลัส อาร์กิวเมนต์ และรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนต่อไป

นี้

1) i *2)* $1+i$ *3)* $-3+4i$

1) โมดุลัสของ $i = \sqrt{0^2+1^2} = 1$
อาร์กิวเมนต์ของ $i = \tan^{-1}\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ดังนั้นรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ i จะเป็น

$$i = \cos(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) + i\sin(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

2) โมดุลัสของ $1+i = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$
อาร์กิวเมนต์ของ $1+i = \tan^{-1}\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ดังนั้นรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ $1+i$ จะเป็น

$$1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

3) โมดุลัสของ $-3+4i = \sqrt{(-3)^2+4^2} = 5$
อาร์กิวเมนต์ของ $-3+4i = \tan^{-1}\frac{4}{-3}$

ดังนั้นรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ $-3+4i$ จะเป็น

$$-3+4i = 5\left[\cos\left(\tan^{-1}\frac{4}{-3}\right) + i\sin\left(\tan^{-1}\frac{4}{-3}\right)\right]$$

◊◊◊

1.3 การดำเนินการเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อน (Basic operations of complex numbers)

การดำเนินการเบื้องต้นของจำนวนเชิงซ้อนที่จะกล่าวถึงในหัวข้อนี้ คือ การบวก การลบ การคูณ และ การหาร ซึ่งการบวกและการลบของจำนวนเชิงซ้อนทั้งรูปแบบ $z = x + iy$ และ $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ นั้นไม่แตกต่างกันมากนัก แต่สำหรับการคูณและการหารนั้น ในรูปแบบของพิกัดเชิงขั้วจะสะดวกและง่ายกว่ารูปแบบพิกัดฉาก

การบวกกันของจำนวนเชิงซ้อน (Addition of complex numbers)

หลักในการบวกกันของจำนวนเชิงซ้อนก็คือการนำส่วนจริงมาบวกกับส่วนจริงและนำส่วนจินตภาพมาบวกกับส่วนจินตภาพ เช่น ถ้าให้ $z_1 = a_1 + ib_1$ และ $z_2 = a_2 + ib_2$ แล้ว

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \end{aligned}$$

ผลบวกของจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 จะเป็นจำนวนเชิงซ้อน $z_1 + z_2$ ซึ่งมี

$$\begin{aligned} \Re(z_1 + z_2) &= a_1 + a_2 = \Re(z_1) + \Re(z_2) \\ \Im(z_1 + z_2) &= b_1 + b_2 = \Im(z_1) + \Im(z_2) \end{aligned}$$

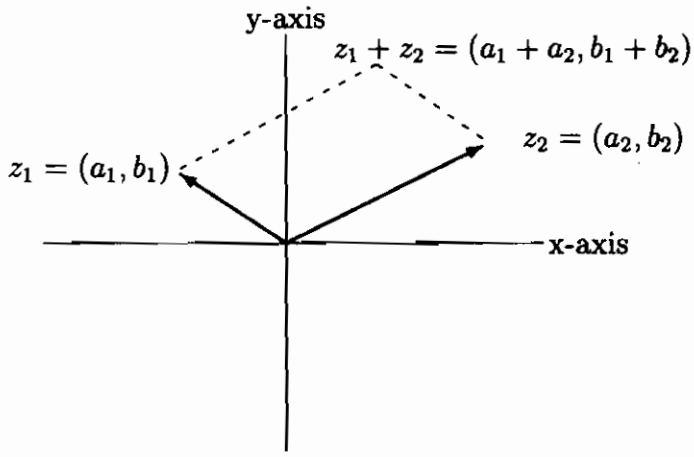
การบวกกันของจำนวนเชิงซ้อน สามารถจะแทนด้วยการบวกกันของเวกเตอร์ เช่นถ้า

$a_1 + ib_1$	แทนด้วยจุด	(a_1, b_1)	ในระนาบ xy
$a_2 + ib_2$	แทนด้วยจุด	(a_2, b_2)	ในระนาบ xy

แล้ว

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$ จะแทนโดยจุด $(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ ในระนาบ xy

การบวกของจำนวนเชิงซ้อนนี้จะเหมือนกับการบวกกันของเวกเตอร์ดังในรูปที่ 1.5



รูปที่ 1.5: การบวกกันของจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยเวกเตอร์

การลบกันของจำนวนเชิงซ้อน (Subtraction of complex numbers)

การลบกันของจำนวนเชิงซ้อน ก็คือการนำส่วนจริงของจำนวนเชิงซ้อนมาลบกับส่วนจริง และนำส่วนจินตภาพของจำนวนเชิงซ้อนมาลบกับส่วนจินตภาพ เช่น

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a_1 + ib_1) - (a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned}$$

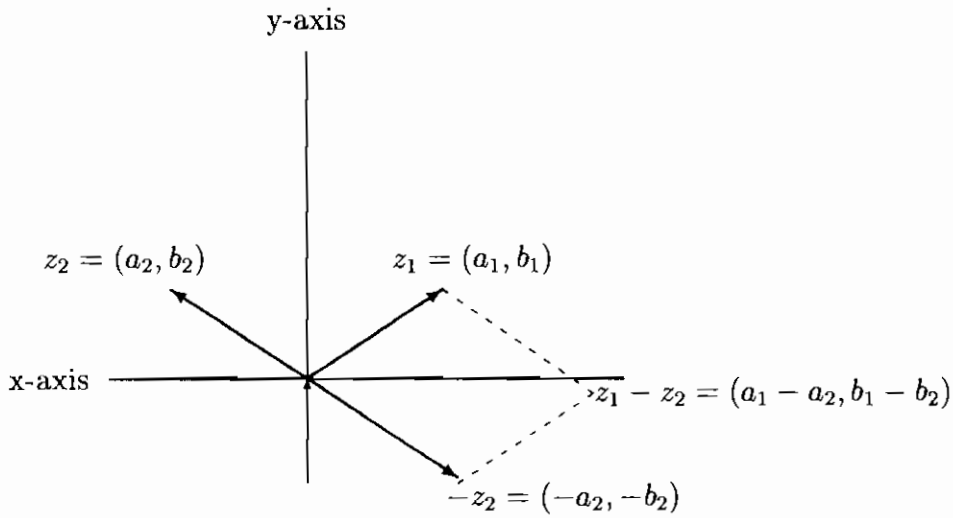
จะได้ว่าผลลบของจำนวนเชิงซ้อน z_1, z_2 จะได้เป็นจำนวนเชิงซ้อน $z_1 - z_2$ ซึ่งจะมี

$$\begin{aligned} \Re(z_1 - z_2) &= a_1 - a_2 = \Re(z_1) - \Re(z_2) \\ \Im(z_1 - z_2) &= b_1 - b_2 = \Im(z_1) - \Im(z_2) \end{aligned}$$

เมื่อเราแทนการลบกันของจำนวนเชิงซ้อนโดยเวกเตอร์จะได้ดังนี้ คือ ถ้า

$z_1 = a_1 + ib_1$	แทนด้วยจุด	(a_1, b_1)	ในระนาบ xy
$z_2 = a_2 + ib_2$	แทนด้วยจุด	(a_2, b_2)	ในระนาบ xy แล้ว

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$ จะแทนโดยจุด $(a_1 - a_2, b_1 - b_2)$



รูปที่ 1.6: การลบกันของจำนวนเชิงซ้อนแทนด้วยเวกเตอร์

ในระนาบ xy การลบของจำนวนเชิงซ้อนนี้จะเหมือนกับการลบกันของเวกเตอร์ดังในรูปที่ 1.6

การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน (Multiplication of complex numbers)

การคูณกันของจำนวนเชิงซ้อน เราจะใช้คุณสมบัติการคูณกันแบบทวินาม (Binomial) กฎการแจกแจง และกฎการเปลี่ยนกลุ่ม พร้อมกับการแทนค่า $i^2 = -1$ มาช่วย จะได้ผลดังต่อไปนี้คือ

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

ถ้าเราใช้ระบบพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนในการบวกและลบกัน ก็จะได้คล้ายกันกับระบบพิกัดฉาก ต่อไปเราจะพิจารณาการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว ถ้ากำหนดให้

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \quad \text{และ} \quad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

แล้ว z_1, z_2 จะอยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วซึ่งมี

$$|z_1| = r_1 \text{ และ } \arg(z_1) = \theta_1$$

และ

$$|z_2| = r_2 \text{ และ } arg(z_2) = \theta_2$$

ตามลำดับ แล้ว

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 r_2 \left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\ &= r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right] \end{aligned}$$

ดังนั้นจะเห็นได้ว่าในการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อนในรูปของพิกัดเชิงขั้วนั้น จะได้ผลว่า

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2| \text{ และ } arg(z_1 z_2) = arg(z_1) + arg(z_2)$$

การหารกันของจำนวนเชิงซ้อน (Division of complex numbers)

ในการหารกันของจำนวนเชิงซ้อน เราใช้จำนวนเชิงซ้อนสังยุคของตัวหารมาคูณทั้งเศษและส่วนดังนี้คือ

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} \\ &= \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \end{aligned}$$

เมื่อ $a^2 + b^2 \neq 0$ ในการหารกันนั้น จะสังเกตว่าตัวหารสามารถจะเป็นจำนวนเชิงซ้อนตัวใดก็ได้ ยกเว้น 0 เราจะลองพิจารณาการหารกัน ของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของระบบพิกัดขั้ว ถ้าให้

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \text{ และ } z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

แล้ว

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} \cdot \frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\
&= \frac{r_1}{r_2}\left[\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2}\right] \\
&= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]
\end{aligned}
$$

จากการหารกันของจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่า

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ และ } arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg(z_1) - arg(z_2)$$

ถ้ากำหนดให้ z_i มีค่าสัมบูรณ์เป็น r_i และอาร์กิวเมนต์เป็น θ_i เมื่อ $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ แล้วเราสามารถจะใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ พิสูจน์ได้ว่า

$$z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = r_1 \cdot r_2 \cdots r_n[\cos(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n)]$$

และถ้าให้

$$z_1 = z_2 = z_3 = \cdots = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ก็จะได้ทฤษฎีของเดอร์มัววร์ (De Moivre Theorem)ว่า

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$$

ในกรณีเฉพาะที่ $|z| = 1$ จะได้

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

ตัวอย่าง 1.3.1 จงหาผลบวก ผลคูณ และผลหารของจำนวนเชิงซ้อนแต่ละคู่ต่อไปนี้

1) $1 + i$ และ $1 - i$ *2)* $2 + i$ และ $3 - 4i$

1) ผลบวกของ $1 + i$ และ $1 - i$ คือ

$$
\begin{aligned}
(1 + i) + (1 - i) &= (1 + 1) + i(1 - 1) \\
&= 2
\end{aligned}
$$

ผลคูณของ $1 + i$ และ $1 - i$ คือ

$$
\begin{aligned}
(1+i)(1-i) &= 1+i-i-i^2 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

ผลหารของ $1+i$ และ $1-i$ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{1+i}{1-i} &= \frac{1+i}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} \\
&= \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} \\
&= \frac{2i}{2} = i
\end{aligned}
$$

2) ผลบวกของ $2+i$ และ $3-4i$ คือ

$$
\begin{aligned}
(2+i)+(3-4i) &= (2+3)+i(1-4) \\
&= 5-3i
\end{aligned}
$$

ผลคูณของ $2+i$ และ $3-4i$ คือ

$$
\begin{aligned}
(2+i)(3-4i) &= 6+3i-8i-4i^2 \\
&= 10-5i
\end{aligned}
$$

ผลหารของ $2+i$ และ $3-4i$ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{2+i}{3-4i} &= \frac{2+i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} \\
&= \frac{6+11i+4i^2}{9-(4i)^2} \\
&= \frac{2+11i}{25}
\end{aligned}
$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 1.3.2 จงหาค่าของ $(1+i)^3$

$$
\begin{aligned}
|1+i| &= \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\
\arg(1+i) &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) \\
&= \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots
\end{aligned}
$$

ดังนั้นรูปแบบพิกัดเชิงขั้วของ $1+i$ คือ

$$\begin{aligned} 1+i &= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right) \\ \therefore\ (1+i)^3 &= \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right)\right]^3 \\ &= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}+6k\pi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+6k\pi\right)\right] \end{aligned}$$

◊◊◊

1.4 รากของจำนวนเชิงซ้อน (Roots of complex numbers)

จากการคูณกันของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบของระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้ว่าเมื่อ

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

แล้ว

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

โดยการใช้สูตรนี้เราสามารถที่จะหารากที่ n ของจำนวนเชิงซ้อนได้ดังต่อไปนี้ ให้

$$z_0 = r_0\left(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0\right)$$

ต้องการที่จะหาจำนวนเชิงซ้อน

$$z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

ซึ่ง

$$z^n = z_0$$

ดังนั้น z ก็คือรากที่ n ของ z_0 นั่นเอง จากที่

$$z^n = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$$

ดังนั้น

$$r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = r_0\left(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0\right)$$

จากที่เราทราบว่า $|\cos\theta + i\sin\theta| = 1$ สำหรับทุกๆค่าของ θ ดังนั้นจะได้สมการ

$$r^n = r_0 \tag{1.1}$$

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = \cos\theta_0 + i\sin\theta_0 \tag{1.2}$$

จาก (1.1) และ (1.2) จะได้

$$\begin{aligned} r &= r_0^{\frac{1}{n}} = |z| \\ \theta &= \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \arg(z) \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ ดังนั้น

$$\begin{aligned} z &= z_0^{\frac{1}{n}} \\ &= r_0^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0 + 2k\pi}{n}\right)\right] \end{aligned}$$

สำหรับแต่ละค่าของ k เมื่อ $k = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$ จะเห็นได้ว่ารากที่ n ของ z_0 จะมีอยู่ด้วยกันทั้งหมด n ค่า โดยการแทนค่า k ตั้งแต่ 0 ถึง $n-1$ เมื่อเราแทนค่า $k = 0$ จะได้ z ตัวหนึ่งซึ่งมีลักษณะดังนี้คือ

$$z = z_0^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta_0}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta_0}{n}\right)\right]$$

ค่าของ z ตัวนี้จะเรียกให้แตกต่างกับตัวอื่นๆว่า **"รากมุขสำคัญ"**(principal root) ของ z_0

ตัวอย่าง 1.4.1 จงหาค่าทั้งหมดของ z ซึ่ง $z^5 = -32$
เปลี่ยน -32 ให้อยู่ในรูปแบบพิกัดเชิงขั้ว จะได้

$$-32 = 32[\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)], \quad \text{เมื่อ } k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

ถ้า

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

โดยทฤษฎีบทของดีมัวร์ จะได้

$$z^5 = r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta)$$

จากที่กำหนดให้ $z^5 = -32$ จะได้ว่า

$$r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = 32\left[\cos(\pi + 2k\pi) + i\sin(\pi + 2k\pi)\right]$$

ดังนั้นจะได้สมการ *2* สมการดังนี้ คือ

$$r^5 = 32 \text{ และ } 5\theta = \pi + 2k\pi$$

ซึ่งจะได้

$$r = 2, \quad \text{และ} \quad \theta = \frac{\pi + 2k\pi}{5}$$

นั่นก็คือ

$$z = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 2k\pi}{5}\right)\right]$$

เมื่อ $k = 0$, $z = z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k = 1$, $z = z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k = 2$, $z = z_3 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{5} + i\sin\frac{5\pi}{5}\right) = -2$
เมื่อ $k = 3$, $z = z_4 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k = 4$, $z = z_5 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$

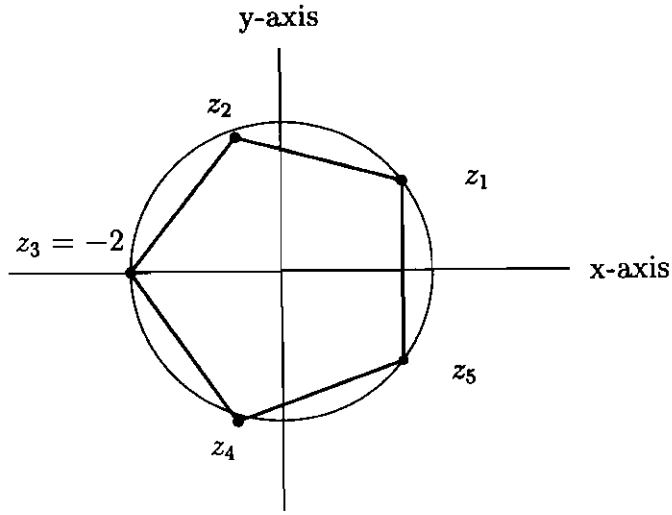
เมื่อเราพิจารณาค่าของ z เมื่อ $k = 5, 6, \ldots$ หรือ $-1, -2, \ldots$ จะได้ค่าของ z ซึ่งซ้ำกับ *5* ค่าข้างบนนี้ และค่าของ z ทั้ง *5* ค่านี้จะแสดงอยู่ในรูปที่ *1.7* ◊◊◊

ตัวอย่าง 1.4.2 จงหาค่าของ $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$
เปลี่ยน $-1+i$ ให้อยู่ในรูปแบบระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้

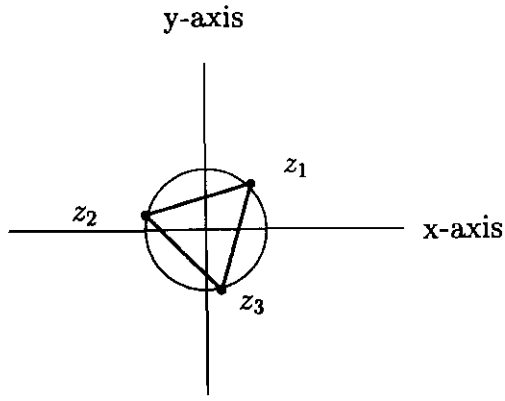
$$\begin{aligned} -1+i &= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)\right] \\ (-1+i)^{\frac{1}{3}} &= 2^{\frac{1}{6}}\left[\cos\left(\frac{3\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3}\right)\right] \end{aligned}$$

เมื่อ $k = 0$, $z = z_1 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
เมื่อ $k = 1$, $z = z_2 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$
เมื่อ $k = 2$, $z = z_3 = 2^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12}\right)$

◊◊◊



รูปที่ 1.7: รากที่ 5 ของ -32



รูปที่ 1.8: ค่าของ $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$

ค่าของ z ทั้ง 3 ค่านี้จะแสดงอยู่ในรูปที่ 1.8

ตัวอย่าง 1.4.3 จงหารากที่ 5 ของ 1
เปลี่ยน 1 ให้อยู่ในรูปแบบระบบพิกัดเชิงขั้วจะได้

$$\begin{aligned} 1 &= \cos(0+2k\pi) + i\sin(0+2k\pi) \\ 1^{\frac{1}{5}} &= \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5} \end{aligned}$$

เมื่อ $k=0,\quad z=z_1=(\cos 0+i\sin 0)=1$
เมื่อ $k=1,\quad z=z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k=2,\quad z=z_3=\left(\cos\frac{4\pi}{5}+i\sin\frac{4\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k=3,\quad z=z_4=\left(\cos\frac{6\pi}{5}+i\sin\frac{6\pi}{5}\right)$
เมื่อ $k=4,\quad z=z_5=\left(\cos\frac{8\pi}{5}+i\sin\frac{8\pi}{5}\right)$

◊◊◊

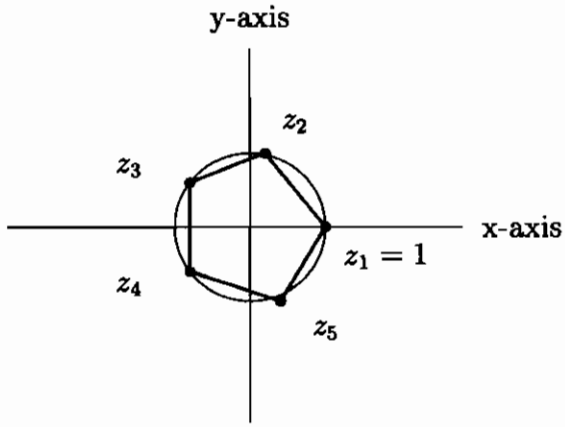
ค่าของ z เหล่านี้จะแสดงอยู่ในรูปที่ 1.9
จากตัวอย่าง (1.4.3) ลองพิจารณาดูรากที่ n ของ 1 ให้ z เป็นรากที่ n ของ 1 นั่นก็คือ

$$z^n = 1$$

จะได้

$$z=\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \quad \text{เมื่อ } k=0,1,2,\ldots,(n-1)$$

เมื่อ $k=0,\quad z=z_1=(\cos 0+i\sin 0)$
เมื่อ $k=1,\quad z=z_2=\left(\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\omega$
เมื่อ $k=2,\quad z=z_3=\left(\cos\frac{4\pi}{n}+i\sin\frac{4\pi}{n}\right)=\omega^2$
เมื่อ $k=3,\quad z=z_4=\left(\cos\frac{6\pi}{n}+i\sin\frac{6\pi}{n}\right)=\omega^3$
$\vdots$
เมื่อ $k=n-1, z=z_n=\left(\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}+i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)=\omega^{n-1}$
ดังนั้นรากที่ n ของ 1 เมื่อเขียนในเทอม ω คือ



รูปที่ 1.9: รากที่ 5 ของ 1

$$1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}$$

ให้

$$\begin{aligned} s &= 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} && (1.3) \\ \therefore\ \omega s &= \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^n && (1.4) \end{aligned}$$

(1.3) - (1.4) จะได้

$$s - \omega s = 1 - \omega^n$$

จากสมการนี้ หาค่า s จะได้ ดังนี้คือ

$$s = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$$

แทนค่า s ลงใน (1.3)จะได้เอกลักษณ์ดังต่อไปนี้คือ

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega}$$

1.5 คุณสมบัติของค่าสัมบูรณ์

ทฤษฎี 1.5.1 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

ซึ่งความหมายในทางเรขาคณิตก็คือ ความยาวของด้าน 2 ด้านของรูปสามเหลี่ยมรวมกันเข้าย่อมยาวกว่าหรือเท่ากับความยาวของด้านที่สาม

พิสูจน์ จากที่

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1 + z_2}\right) \\
&= (z_1 + z_2)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\
&= z_1\overline{z_1} + \left(z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}\right) + z_2\overline{z_2} \\
&= |z_1|^2 + 2\Re\left(z_1\overline{z_2}\right) + |z_2|^2
\end{aligned}$$

แต่

$$\Re\left(z_1\overline{z_2}\right) \leq |z_1\overline{z_2}| = |z_1||\overline{z_2}|$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &\leq |z_1|^2 + 2|z_1||\overline{z_2}| + |z_2|^2 \\
&\leq |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2 \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2 \\
\therefore\ |z_1 + z_2| &\leq |z_1| + |z_2|
\end{aligned}$$

และโดยทั่วๆไปจะได้ว่า

$$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

◊◊◊

ทฤษฎี 1.5.2 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว

$$|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$$

ซึ่งในทางเรขาคณิตก็คือ ผลต่างของความยาวของด้าน 2 ด้านของสามเหลี่ยมย่อมยาวน้อยกว่าหรือเท่ากับความยาวของด้านที่สาม

พิสูจน์ จากที่

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 + (z_1 - z_2) \\ |z_1| &= |z_2 + (z_1 - z_2)| \end{aligned}$$

จากทฤษฎี (1.5.1) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |z_1| &\leq |z_2| + |z_1 - z_2| \\ \therefore \ |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 - z_2| \end{aligned}$$

◊◊◊

ทฤษฎี 1.5.3 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$$

พิสูจน์ จากคุณสมบัติของเชิงซ้อนสังยุคที่ว่า $|z|^2 = z\overline{z}$ จะได้

$$\begin{aligned} |z_1 z_2|^2 &= (z_1 z_2)\left(\overline{z_1 z_2}\right) \\ &= (z_1 z_2)(\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}) \\ &= (z_1 \cdot \overline{z_1})\,(z_2 \cdot \overline{z_2}) \\ &= |z_1|^2 |z_2|^2 \\ &= (|z_1||z_2|)^2 \\ \therefore \ |z_1 z_2| &= |z_1||z_2| \end{aligned}$$

และโดยทั่วๆไปจะได้ว่า

$$|z_1 z_2 z_3 \cdots z_n| = |z_1||z_2||z_3| \cdots |z_n|$$

◇◇◇

ทฤษฎี 1.5.4 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ ที่ $z_2 \neq 0$ แล้ว

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

การพิสูจน์ดูจากการหารกันของจำนวนเชิงซ้อนในรูปแบบพิกัดเชิงขั้ว

ทฤษฎี 1.5.5 กำหนดให้ z_1 และ z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนใดๆ แล้ว

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

พิสูจน์

$$\begin{aligned} |z_1| &= |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \\ &\leq |z_1 + z_2| + |-z_2| \\ &= |z_1 + z_2| + |z_2| \\ \therefore \quad |z_1| - |z_2| &\leq |z_1 + z_2| \qquad (1.5) \end{aligned}$$

จาก (1.5) แทน z_1 ด้วย z_2 และแทน z_2 ด้วย z_1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} |z_2| - |z_1| &\leq |z_2 + z_1| \\ &= |z_1 + z_2| \\ \therefore \quad -(|z_2| - |z_1|) &\geq -|z_1 + z_2| \end{aligned}$$

นั่นก็คือ

$$|z_1| - |z_2| \geq -|z_1 + z_2| \qquad (1.6)$$

จาก(1.5) และ (1.6) จะได้ว่า

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2|$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 1.5.6 ให้ $z_1 = 1 - i, \quad z_2 = -2 + 4i$ และ $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ จงหาค่าของ

1. $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$

2. $|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}|$

1.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right| &= \left|\frac{(1-i) + (-2+4i) + 1}{(1-i) - (-2+4i) + i}\right| \\
&= \left|\frac{1 - i - 2 + 4i + 1}{1 - i + 2 - 4i + i}\right| \\
&= \left|\frac{3i}{3 - 4i}\right| \\
&= \left|\frac{3i}{3-4i} \cdot \frac{3+4i}{3+4i}\right| \\
&= \left|\frac{9i - 12}{9 + 16}\right| \\
&= \left|\frac{-12}{25} + \frac{9i}{25}\right| \\
&= \sqrt{\frac{144 + 81}{(25)^2}} \\
&= \frac{15}{25} = \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
|z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1}| &= |(1-i)(-2-4i) + (-2+4i)(1+i)| \\
&= |(-2 - 2i - 4) + (-2 + 2i - 4)| \\
&= |-12| = 12
\end{aligned}$$

◊◊◊

1.6 ความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนเชิงซ้อนและเชิงซ้อนสังยุค

ให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว จะได้ว่า

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ เมื่อ $z_2 \neq 0$
5. $\overline{-z_1} = -\overline{z_1}$
6. $\overline{\overline{z_1}} = z_1$
7. $z_1 + \overline{z_1}$ จะเป็นจำนวนจริง นั่นก็คือ

$$z_1 + \overline{z_1} = 2\Re(z_1)$$

8. $z_1 - \overline{z_1}$ จะมีค่าเป็นจินตภาพบริสุทธิ์ นั่นก็คือ

$$z_1 - \overline{z_1} = 2i\Im(z_1)$$

9. $z_1\overline{z_1}$ จะมีค่าเป็นบวกและเป็นจำนวนจริง นั่นก็คือ

$$z_1\overline{z_1} = |z_1|^2 = |\overline{z_1}|^2$$

ตัวอย่าง 1.6.1 จงพิสูจน์ว่า $\overline{(z_1 \pm z_2)} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
ให้ $z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2$ แล้ว

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2) \\ \therefore\ \overline{z_1 \pm z_2} &= (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) \end{aligned} \tag{1.7}$$

จากที่

$$\overline{z_1} = x_1 - iy_1 \quad \text{และ} \quad \overline{z_2} = x_2 - iy_2$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}\overline{z_1} \pm \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1) \pm (x_2 - iy_2) \\ &= (x_1 \pm x_2) - i(y_1 \pm y_2) \end{aligned} \tag{1.8}$$

จาก *(1.7)* และ *(1.8)* จะได้

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 1.6.2 จงพิสูจน์ว่า $\overline{(z_1 z_2)} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2) \\ \therefore\ \overline{z_1 z_2} &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_2y_1 + x_1y_2) \end{aligned} \tag{1.9}$$

ส่วนค่าของ

$$\begin{aligned} \overline{z_1} \cdot \overline{z_2} &= (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_2y_1 + x_1y_2) \end{aligned} \tag{1.10}$$

จาก *(1.9)* และ *(1.10)* จะได้

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

◊◊◊

ตัวอย่าง 1.6.3 จงพิสูจน์ว่า $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}\frac{x_2 - iy_2}{x_2 - iy_2} \\ &= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2},\ z_2 \neq 0 \end{aligned} \tag{1.11}$$

แต่เรามี

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} &= \frac{x_1 - iy_1}{x_2 - iy_2}\frac{x_2 + iy_2}{x_2 + iy_2} \\
&= \frac{(x_1x_1 + y_1y_2) + i(x_1y_2 - x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} - i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}, \ z_2 \neq 0 \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

จาก *(1.11)* และ *(1.12)* จะได้

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

◊◊◊

แบบฝึกหัด

1. จงแสดงว่า

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ = i^4 = 1,\ i^5 = i, \ldots$$

และ

$$\frac{1}{i} = -i,\ \frac{1}{i^2} = -1,\ \frac{1}{i^3} = i, \ldots$$

2. ให้ $z_1 = 3 + 4i$ และ $z_2 = 5 - 2i$ จงหาค่าของ

ก. $(z_1 - z_2)^2$ ข. $\frac{z_1}{z_2}$

ข. $\frac{1}{z_1^2}$ ค. $\frac{z_2}{2z_1}$

3. จงหาค่าของ

ก. $\Re\left(\frac{1}{2+i}\right)$ ข. $\Im\left(\frac{2+i}{3+4i}\right)$

ข. $\Re(z^3)$ เมื่อ $z = x + iy$ ค. $\Im(z^4)$ เมื่อ $z = x + iy$

ค. $\Re\left(\frac{(1+i)^2}{3+2i}\right)$ ฆ. $\Im\left(\frac{2-i}{4-3i}\right)$

ง. $\Im\left(\frac{1}{z^2}\right)$ เมื่อ $z = x + iy$ จ. $\Re\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)$ เมื่อ $z = x + iy$

4. ให้ z_1, z_2 และ z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์เอกลักษณ์ต่อไปนี้

ก. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ และ $z_1 z_2 = z_2 z_1$

ข. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ และ $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$

ข. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$

ค. $\overline{iz} = -i\overline{z}$

5. จงพิสูจน์ว่า z เป็นจำนวนจริงก็ต่อเมื่อ $\overline{z} = z$

6. จงพิสูจน์ว่า z เป็นจำนวนจินตภาพบริสุทธิ์ ก็ต่อเมื่อ $\overline{z} = -z$

7. จงพิสูจน์ว่า z เป็นจำนวนจริง หรือ จำนวนจินตภาพบริสุทธิ์ ก็ต่อเมื่อ $(\overline{z})^2 = z^2$

8. จงพิสูจน์ว่า $\Re(iz) = -\Im(z)$ และ $\Im(iz) = \Re(z)$

9. จงหาค่าของ

ก.	$(3+2i)+(-7-i)$	ข.	$(5+3i)+\{(-1+2i)+(7-5i)\}$
ข.	$(8-6i)-(2i-7)$	ค.	$\{(2-i)(-3+2i)\}(5-4i)$
ต.	$\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$	ฆ.	$\lvert 1+i\rvert^2$
ง.	$\lvert -3i\rvert$	จ.	$\lvert\cos\theta + i\sin\theta\rvert$
ฉ.	$\left\lvert\frac{1+4i}{4+i}\right\rvert$	ช.	$\left\lvert\frac{z-1}{z+1}\right\rvert$
ซ.	$\left\lvert\frac{(3+4i)^4}{(3-4i)^3}\right\rvert$	ฌ.	$\left\lvert\frac{z}{\bar{z}}\right\rvert$

10. จงหาค่าอาร์กิวเมนต์ที่สำคัญของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

ก.	-3	ข.	$3+3i$
ข.	$1-\sqrt{3}i$	ค.	$-4i$

11. จงหารูปพิกัดเชิงขั้วของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

ก.	$z=-3-3i$	ข.	$z=-5$
ข.	$z=-4i$	ค.	$z=\frac{1}{4+3i}$

12. จงแสดงว่า $\lvert z_1+z_2\rvert^2+\lvert z_1-z_2\rvert^2 = 2\left(\lvert z_1\rvert^2+\lvert z_2\rvert^2\right)$

13. ถ้า $\lvert 1-z\rvert < 1$ จงแสดงว่า $\lvert Arg(z)\rvert < \frac{\pi}{2}$

14. ถ้า $\lvert z\rvert < 1$ จงแสดงว่า $\left\lvert Arg\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right\rvert < \frac{\pi}{2}$

15. จงหารากที่สองของ $z=-15-8i$

16. จงหาค่าของ $z=\left(-2\sqrt{3}-2i\right)^{\frac{1}{4}}$